اس کتاب کو پنجاب ٹیکسٹ بک بورڈ نے ناشر سے پرنٹ لائسنس حاصل کر کے سرکاری سکولوں میں مفت تقسیم کے لیے بھی طبع کیا ہے۔
ناشر کی تحریری اجازت کے بغیر اس کتاب کا کوئی حصہ کسی امدادی کتاب، خلاصہ، ماڈل پیپر یا گائیڈ وغیرہ میں شامل نہیں کیا جا سکتا۔

جنرل ریاضی

9

ناشر: علی برادران
پنجاب پلازہ اردو بازار لاہور
فون: 042-37242233 فیکس: 042-37361302
ویب سائٹ www.alibrotheran.com ای میل info@alibrotheran.com

جملہ حقوق بحق ناشر علی برادران لاہور محفوظ ہیں۔
بمطابق قومی نصاب 2006ء اور نیشنل ٹیکسٹ بک اینڈ لرننگ میٹریلز پالیسی 2007ء
منظور کردہ: وفاقی وزارت تعلیم حکومت پاکستان، اسلام آباد
بذریعہ مراسلہ نمبر F.1-23/2010-Math تاریخ 5 جنوری 2011

فہرست

یونٹ نمبر	عنوانات	صفحہ نمبر
1	فی صد، نسبت اور تناسب	3
2	زکوۃ، عشر اور وراثت (ترکہ)	31
3	کاروباری حساب	43
4	مالیاتی ریاضی	67
5	صارفین کی ریاضی	117
6	قوت نما اور لوگارتھم	135
7	اعداد کے جمعی اور ضربی سلسلے	175
8	سیٹ اور تفاعل	195
9	خطی گراف	221
10	بنیادی شماریات	249
11	جوابات	291
12	فرہنگ	308
13	اشارات	312
14	انڈیکس	313
15	لوگارتھم	316

مصنفین: ڈاکٹر محمد اسلم ملک (ایم ایس سی، ایم ایڈ، ایم فل، پی ایچ ڈی) پوسٹ ڈاکٹریٹ (برمنگھم یونیورسٹی یوکے)
مقصود رضا احمد (ایم ایس سی، ایم فل)

ایڈیٹر: محمد جعفر (ایم ایس سی)
ترجمہ: محمد اقبال باقر (ایم ایس سی)، جاوید اقبال (ایم ایس سی)

کوآرڈینیٹر: محبوب علی عاصم
کمپوزنگ اینڈ ڈیزائننگ: محمد ارسلان سلیم

ناشر: علی برادران پنجاب پلازہ اردو بازار لاہور
مطبع: علی برادران پبلشرز اینڈ پرنٹرز لاہور

تاریخ اشاعت	ایڈیشن	بار	تعداد	قیمت
مارچ 2019ء	پنجم	اول	27200	150.00

یونٹ

1

فی صد۔ نسبت اور تناسب
PERCENTAGE, RATIO AND PROPORTION

- فی صد
- نسبت
- تناسب
- مرکب تناسب

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- فی صد بطور کسر (نسب نما 100 کے ساتھ)
- تبدیلی:
  - فی صد کی کسر میں تبدیلی بلحاظ نسب نما 100 کے ساتھ
  - کسر کو 100 فی صد سے ضرب دے کر فی صد میں تبدیل کرنا
  - فی صد کو اعشاریہ اور اعشاریہ کو فی صد میں تبدیل کرنا
- روزمرہ زندگی میں فی صد کا استعمال
- نسبت
  - اینٹی سی ڈینٹ اور کانسی کوینٹ
  - نسبت کی کوئی اکائی نہیں ہوتی
  - نسبت کا آرڈر
- نسبت میں جب ایک عدد کو بڑھایا یا کم کیا جائے تو کیا ہوتا ہے۔
- روزمرہ زندگی میں تناسب کے مسائل
- تناسب
- تناسب (راست اور معکوس)
- روزمرہ زندگی سے تناسب کے مسائل
- مرکب تناسب
- مرکب تناسب سے متعلقہ مسائل

1.1- فی صد Percent

لفظ پرسنٹ (Percent) لاطینی لفظ پرسنٹم کی مختصر شکل ہے۔ فی صد عربی زبان کا لفظ ہے جس کا مطلب "سو میں سے" یا "سو پر" ہے۔ فی صد کے لیے علامت % استعمال ہوتی ہے۔

1.1- فی صد بطور کسر (نسب نما 100 کے ساتھ)

40% کا مطلب 100 میں سے 40 $= \frac{40}{100}$

60% کا مطلب 100 میں سے 60 $= \frac{60}{100}$

85% کا مطلب 100 میں سے 85 $= \frac{85}{100}$

1.1.2- فی صد کی کسر میں تبدیلی بلحاظ نسب نما 100

ہم فی صد کو کسر میں نسب نما 100 کے ساتھ تبدیل کرنے کا طریقہ درج ذیل مثالوں سے دیکھتے ہیں۔

30% کا مطلب 100 میں سے 30 $= \frac{30}{100}$

55% کا مطلب 100 میں سے 55 $= \frac{55}{100}$

مثال:- $45\frac{1}{2}\%$ اور $22\frac{1}{2}\%$ ، 70% کو بطور کسر آسان شکل میں واضح کریں۔

حل:-

$$70\% = \frac{70}{100}$$

$$= \frac{7}{10}$$

$$22\frac{1}{2}\% = \frac{45}{2\times 100}$$

$$= \frac{9}{2\times 20}$$

$$= \frac{9}{40}$$

$$45\frac{1}{2}\% = \frac{91}{2\times 100}$$

$$= \frac{91}{200}$$

کسر کو **100%** سے ضرب دے کر فی صد میں تبدیل کرنا۔

کسر کو 100% سے ضرب دے کر فی صد میں تبدیل کرنے کے لیے ہم درج ذیل مثالوں کو دیکھتے ہیں۔

مثال:- دی گئی کسروں کو فی صد میں تبدیل کیجیے۔

(i) $\frac{7}{20}$ (ii) $\frac{9}{20}$ (iii) $\frac{7}{5}$ (iv) $\frac{1}{3}$

حل:-

(i) $\frac{7}{20} = \frac{7}{20}\times 100\%$

$= 7\times 5\%$

$= 35\%$

(ii) $\frac{9}{20} = \frac{9}{20}\times 100\%$

$= 9\times 5\%$

$= 45\%$

(iii) $\frac{7}{5} = \frac{7}{5}\times 100\%$

$= 7\times 20\%$

$= 140\%$

(iv) $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\times 100\%$

$= \frac{100}{3}\%$

$= 33\frac{1}{3}\%$

فی صد کو اعشاریہ اور اعشاریہ کو فی صد میں تبدیل کرنا۔

فی صد کو اعشاریہ میں تبدیل کرنے کے لیے ہم درج ذیل مثالوں کو دیکھتے ہیں۔

مثال 1:- اعشاریہ میں تبدیل کیجیے۔

$(i)\ 54\% \quad (ii)\ 16\frac{1}{2}\% \quad (iii)\ 27\frac{1}{3}\%$

حل:-

$$(i)\ 54\% = \frac{54}{100} = 0.54$$

$$(ii)\ 16\frac{1}{2}\% = \frac{16.5}{100} = \frac{165}{1000} = 0.165$$

$$(iii)\ 27\frac{1}{3}\% = \frac{82}{3\times 100} = \frac{27.3}{100} = \frac{273}{1000} = 0.273$$

> سطح زمین کا 71% پانی ہے۔
>
> سطح زمین پر خشکی کتنے فی صد ہے؟ ☐

مثال 2:- اسلم نے انگلش میں 50 میں سے 35 نمبر حاصل کیے، اردو میں 75 میں سے 60 اور مطالعہ پاکستان میں 75 میں سے 72 نمبر حاصل کیے۔ اس کی کس مضمون میں کارکردگی بہتر رہی۔

حل:- انگلش میں حاصل کردہ نمبر فی صد میں $= \frac{35}{50} \times 100\%$

$= 35 \times 2\%$

$= 70\%$

اردو میں حاصل کردہ نمبر فی صد میں $= \frac{60}{75} \times 100\%$

$= 20 \times 4\%$

$= 80\%$

مطالعہ پاکستان میں حاصل کردہ نمبر فی صد $= \frac{72}{75} \times 100\%$

$= 24 \times 4\%$

$= 96\%$

پس اسلم کی بہترین کارکردگی مطالعہ پاکستان کے مضمون میں رہی۔

مثال 3:- درج ذیل کو فی صد کی شکل میں واضح کیجیے۔

(i) 0.7 (ii) 0.13 (iii) 1.26

حل:-

(i) $0.7 = 0.7 \times 100\%$

$= \frac{7}{10} \times 100\%$

$= 7 \times 10\%$

$= 70\%$

(ii) $0.13 = 0.13 \times 100\%$

$= \frac{13}{100} \times 100\%$

$= 13\%$

(iii) $1.26 = 1.26 \times 100\%$

$= \frac{126}{100} \times 100\%$

$= 126\%$

مشق 1.1

1- درج ذیل فی صد کو کسروں کی آسان شکل میں واضح کیجیے۔

(i) 95%　(ii) 65%　(iii) 75%　(iv) 25%　(v) 56%　(vi) 48%

(vii) 8%　(viii) $33\frac{1}{2}\%$　(ix) $37\frac{1}{2}\%$　(x) $87\frac{1}{2}\%$　(xi) $5\frac{1}{4}\%$　(xii) $42\frac{1}{2}\%$

2- درج ذیل کسور کو فی صد کی شکل میں لکھیے اور جہاں ضروری ہو جواب ایک درجہ اعشاریہ تک درست ہو لکھیے۔

(i) $\frac{3}{4}$　(ii) $\frac{3}{5}$　(iii) $\frac{4}{25}$　(iv) $\frac{13}{20}$　(v) $\frac{31}{25}$　(vi) $\frac{21}{40}$

(vii) $\frac{23}{60}$　(viii) $\frac{8}{3}$　(ix) $\frac{8}{5}$　(x) $\frac{7}{8}$　(xi) $\frac{5}{8}$　(xii) $\frac{3}{8}$

3- دی گئی فی صد کو اعشاریہ میں تبدیل کیجیے جبکہ جواب تین درجہ اعشاریہ تک درست ہو۔

(i) 47%　(ii) 58%　(iii) 92%　(iv) 8%　(v) 12%　(vi) 120%

(vii) 180%　(viii) 145%　(ix) $5\frac{1}{2}\%$　(x) $5\frac{1}{3}\%$　(xi) $48\frac{2}{3}\%$　(xii) $58\frac{1}{3}\%$

4- درج ذیل اعشاریہ کو فی صد میں تبدیل کیجیے۔

(i) 0.5　(ii) 0.9　(iii) 1.25　(iv) 1.39　(v) 1.72　(vi) 0.22

(vii) 2.64　(viii) 3.41　(ix) 0.845　(x) 1.78　(xi) 1.58　(xii) 0.065

5- درج ذیل جدول کو مکمل کیجیے۔

کسر	فی صد	اعشاریہ
I. $\frac{3}{4}$	75%	0.75
II. $\frac{4}{5}$		0.8
III.	40%	
IV.		0.62
V.	44%	

1.1.3- روزمرہ زندگی میں فی صد کا استعمال

درج ذیل روزمرہ زندگی کی مثالوں پر غور کیجیے جن میں فی صد کو استعمال کیا گیا ہے۔

مثال 1:- اگر ایک کار پارکنگ میں 800 کاریں ہوں اور ان میں سے 80% کاریں پاکستان میں بنی ہوئی ہوں تو پاکستانی کاروں کی تعداد معلوم کیجیے۔

حل:-

کار پارکنگ میں کاروں کی کل تعداد $= 800$

80 فی صد $= \frac{80}{100}$

پاکستانی کاروں کی تعداد $= \frac{80}{100} \times 800$

$= 640$

مثال 2:- اگر ایک اسکول میں کل طلبہ کا $\frac{4}{5}$ چھٹی پر ہوں تو ہر سو میں کتنے طلبہ چھٹی پر تھے۔

حل:-

ہر سو میں چھٹی پر طلبہ کی تعداد $= \frac{4}{5} \times 100$

$= 4 \times 20$

$= 80$

پس ہر سو میں سے 80 طلبہ چھٹی پر تھے۔

مثال 3:- اگر ایک کالونی کے 56% گھروں میں سے ہر گھر میں ایک کار موجود ہو تو کالونی کے کتنے فی صد گھروں میں کار نہیں ہوگی۔

حل:-

گھروں کی تعداد فی صد میں جن میں کار موجود ہے۔ $= 56\ \%$

گھروں کی تعداد فی صد میں جن میں کار موجود نہیں ہے۔ $= (100 - 56)\ \%$

$= 44\ \%$

پس 44% گھروں میں کار موجود نہیں ہے۔

اگر دو اشیا کی فیصد میں سے ایک کی فیصد دی گئی ہو تو ہم دوسری کی فی صد معلوم کر سکتے ہیں۔

مشق 1.2

-1 اگر ایک اسکول کے طلبہ میں سے 45% لڑکیاں ہوں تو لڑکوں کی تعداد فی صد میں کیا ہوگی؟

-2 اگر 82% گھروں میں ٹیلی وژن ہوں تو کتنے فی صد گھروں میں ٹیلی وژن نہیں ہوگا؟

-3 ایک ہاکی ٹیم نے کھیلے گئے میچوں میں سے 62% جیتے جبکہ 26% برابر رہے۔ ہاکی ٹیم نے کل کتنے فی صد میچ ہارے؟

-4 ایک ہوائی جہاز میں 400 مسافر سوار تھے جن میں سے 52% مسافر پاکستانی، 17% چائنیز، 12% ایرانی اور بقیہ برطانیہ سے تھے۔

(i) ہر ملک سے کتنے مسافر جہاز میں سوار تھے؟

(ii) برطانیہ کے مسافر کتنے فی صد تھے؟

-5 آمنہ نے ریاضی کے امتحان میں 50 میں سے 46 نمبر حاصل کیے جبکہ کیمسٹری میں 75 میں سے 64 اور فزکس میں 80 میں سے 72 نمبر حاصل کیے۔ اس نے کس مضمون میں بہترین کارکردگی دکھائی؟

-6 ایک ترکھان کی ایک میز بنانے پر 720 روپے لاگت آئی۔ اگر اس نے یہ میز 920 روپے میں بیچی ہو تو اس کا منافع فیصد میں بتایئے۔

-7 اگر کسی کتاب کا 84% حصہ 420 صفحات پر مشتمل ہو تو کتاب میں کل کتنے صفحات ہوں گے؟

-8 حمزہ اپنی کل آمدنی میں سے 20% مکان کے کرایہ پر خرچ کرتا ہے اور بقیہ میں سے 70% گھریلو اخراجات پر۔ اگر اسے 1800 روپے کی بچت ہو تو اس کی کل آمدنی کیا ہوگی؟

-9 راحیل کی آمدنی رؤف کی آمدنی سے 25% زیادہ ہے۔ رؤف کی آمدنی راحیل کی آمدنی سے کتنے فی صد کم ہے؟

1.2- نسبت

پچھلی جماعتوں میں ہم نسبت سے متعلق پڑھ چکے ہیں اور ان سے متعلقہ مسائل حل کر چکے ہیں۔ آیئے یاد دہانی کیجئے:

ہماری روزمرہ زندگی میں ہمیں ہمیشہ اشیاء کی قیمتوں یا مقداروں کے موازنہ کی ضرورت رہتی ہے۔ مثال کے طور پر اگر ایک ٹوکری میں 6 انڈے اور دوسری ٹوکری میں 24 انڈے ہیں تب دونوں ٹوکریوں میں انڈوں کی تعداد کا موازنہ ہمیں نسبت کو سمجھنے میں راہنمائی کرتا ہے۔

اس لیے ایک جیسی اکائیوں والی ایک جیسی مقداروں کے موازنہ کو نسبت کہتے ہیں۔

نسبت کے لیے علامت ':' ہے۔

1.2.1-(i) نسبت بطور تقسیم

ذیل میں 6 گیندیں ہیں۔

6 میں سے 2 گیندیں سرخ ہیں۔

$$\text{سرخ گیندوں کی کسر} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 1 : 3$$

اوپر دکھائی گئی 6 گیندوں میں سے 2 سفید اور 4 گیندیں کالے رنگ کی ہیں۔

$$\text{سفید گیندوں اور کالی گیندوں کے درمیان نسبت} = 2 : 4 = 1 : 2$$

نسبت $1 : 2$ ہمیں یہ ظاہر کرتی ہے کہ ایک سفید گیند کے لیے 2 کالی گیندیں ہیں۔

یہاں نسبت، سفید گیندوں کی تعداد اور کالی گیندوں کی تعداد کا موازنہ کرتی ہے۔

اگر a اور b دو مقداروں کو ظاہر کرتے ہوں جبکہ b غیر صفر ہو تو a کی b سے نسبت کو $a : b$ اور کسر کی شکل میں $\frac{a}{b}$ لکھتے ہیں۔

اگر ایک مقدار 2 اور دوسری 3 ہو تو دونوں مقداروں میں نسبت $2 : 3$ یا $\frac{2}{3}$ ہوگی۔

اگر دو مقداریں جن کا موازنہ کیا جانا ہو ایک ہی اکائی میں نہ ہوں تو ان کے درمیان نسبت معلوم کرنے کے لیے پہلے ہم ان کو ایک ہی اکائی میں تبدیل کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر دو لمبائیاں 50 سینٹی میٹر اور 3 میٹر ہوں تو ان کے درمیان نسبت:

100 سینٹی میٹر = 1 میٹر	$50:300$
300 سینٹی میٹر = 3 میٹر	$= 1:6$

('1' کے علاوہ) اگر a اور b صحیح اعداد ہوں اور ان کے درمیان کوئی مشترک جز نہ ہوں تو نسبت $a:b$ اپنی آسان ترین شکل کہلاتی ہے۔

مثال 1:- نسبت $8:12$ کو آسان ترین شکل میں لکھئے۔

حل:-

$$8:12 = \frac{8}{4}:\frac{12}{4}$$
$$= 2:3$$

مثال 2:- نسبت $24:12$ کو آسان ترین شکل میں لکھئے۔

حل:-

$$24:12 = \frac{24}{12}:\frac{12}{12}$$
$$= 2:1$$

1.2.1- (ii) اینٹی سی ڈینٹ اور کانسی کوئنٹ Antecedent and Consequent

نسبت $a:b$ میں "a" کو اینٹی سی ڈینٹ (پہلا یا پہلا آنے والا) کہتے ہیں اور "b" کو کانسی کوئنٹ (بعد میں آنے والا) کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر $2:5$ میں 2 اینٹی سی ڈینٹ ہے اور 5 کانسی کوئنٹ ہے۔

1.2.1- (iii) نسبت کی کوئی اکائی نہیں ہوتی

آیئے ایک جگ اور ایک گلاس کو دیکھتے ہیں جن میں بالترتیب 1500 ملی لٹر اور 200 ملی لٹر جوس ہے۔

دو اشیاء میں جوس کے حجم کا موازنہ = $\dfrac{\text{گلاس میں جوس کا حجم}}{\text{جگ میں جوس کا حجم}} = \dfrac{200 \text{ ملی لٹر}}{1500 \text{ ملی لٹر}} = \dfrac{2}{15}$ یا $2:15$

ہم ان دونوں مقداروں کا موازنہ کر سکتے ہیں کیونکہ شمار کنندہ اور نسبت نما میں اکائیاں ایک جیسی ہیں۔ اس لیے نسبت 15 : 2 کی کوئی اکائی نہیں۔

1.2.1- (iv) نسبت کا آرڈر

اگر دو مقداروں کو a اور b سے ظاہر کیا جائے تو a سے b کی نسبت کو $a : b$ لکھتے ہیں۔

ہم اس نسبت کو $b : a$ نہیں لکھ سکتے، کیونکہ: $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$ یا $a:b \neq b:a$

اس لیے نسبت میں مقداروں کی ترتیب کو برقرار رکھنا ضروری ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 5 : 2 اور 2 : 5 دو مختلف نسبتیں ہیں

کیونکہ: $\frac{2}{5} \neq \frac{5}{2}$ یا $2:5 \neq 5:2$

1.2.2- نسبت میں جب ایک عدد کو بڑھایا یا کم کیا جائے

اگر ایک سکول کی لائبریری میں ریاضی کی کتب کی تعداد کو 75 سے بڑھا کر 95 کیا جائے تو:

پہلی کتب کی تعداد اور موجود کتب کی تعداد میں نسبت $= 75 : 95$

$= 15 : 19$

یعنی کتب کی تعداد میں اضافہ 19 : 15 کی نسبت میں ہے۔

مثال 1:- ایک طالب علم 70 روپے روزانہ خرچ کرتا ہے، لیکن اتوار کو وہ صرف 20 روپے خرچ کرتا ہے۔ اتوار اور ہر روز خرچ کیے گئے روپوں کی تعداد میں نسبت معلوم کیجیے۔

حل:-

مطلوبہ نسبت $= 20 : 70$

$= 2 : 7$

مثال 2:- 4 : 5 کی نسبت میں 40 کتب کا اضافہ کیا جائے تو اضافہ کی گئی کتب کی تعداد کیا ہوگی؟

حل:-

اضافہ کی گئی کتب کی تعداد $= 40$

دی گئی نسبت $= 5:4 = \frac{5}{4}$

کتب کی تعداد میں اضافہ $= 40 \times \frac{5}{4}$

$= 10 \times 5$

$= 50$

پس کتب کی تعداد میں 50 کتب کا اضافہ ہوگا۔

مثال 3:- کس نسبت میں 60 مربع میٹر کو 24 مربع میٹر کم کیا جا سکتا ہے؟

حل:- مطلوبہ نسبت = نئی مقدار : پرانی مقدار

$= 24 : 60$

$= \frac{24}{60}$

$= \frac{2}{5}$

$= 2 : 5$

مشق 1.3

1- پہلی مقدار کی دوسری مقدار سے آسان شکل میں نسبت معلوم کیجیے۔

(i) Rs. 24 , Rs. 6 (ii) 20 kg , 5 kg

(iii) 20cm , 80cm (iv) 5m , 5m

(v) 1500 km , 1200 km (vi) Rs. 150 , Rs. 275

2- درج ذیل میں سے ہر نسبت کو آسان شکل میں لکھیے۔

(i) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$ (ii) $\frac{4}{5} : \frac{3}{4}$ (iii) $\frac{5}{6} : \frac{7}{10}$

(iv) $\frac{13}{40} : \frac{3}{20}$ (v) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ (vi) $\frac{4}{10} : 20$

(vii) $\frac{15}{10} : 2$ (viii) $\frac{12}{10} : \frac{28}{10}$ (ix) $\frac{2}{5} : \frac{1}{3}$

3- ایک شہر میں 126 میڈیکل کے طلبہ نے درج ذیل جدول کے مطابق سفر کیا۔

کار	بس	ٹیکسی	رکشا
28	75	9	14

درج ذیل طلبہ کے درمیان جنہوں نے سفر کیا نسبت معلوم کیجیے۔

(i) رکشا سے ٹیکسی سے ؟

(ii) ٹیکسی سے بس سے ؟

(iii) ٹیکسی سے کار سے ؟

4- اسکول کی لائبریری میں ریاضی کی 75 کتب، انگلش کی 115 کتب، کیمسٹری کی 85 کتب اور فزکس کی 60 کتب موجود ہیں۔ درج ذیل نسبت معلوم کیجیے۔

(i) ریاضی کی کتب کی تعداد اور انگلش کی کتب کی تعداد میں۔

(ii) انگلش کی کتب کی تعداد اور کیمسٹری کی کتب کی تعداد میں۔

(iii) انگلش کی کتب کی تعداد اور فزکس کی کتب کی تعداد میں۔

(iv) فزکس کی کتب کی تعداد اور کیمسٹری کی کتب کی تعداد میں۔

(v) فزکس کی کتب کی تعداد اور ریاضی کی کتب کی تعداد میں۔

(vi) کیمسٹری کی کتب کی تعداد اور ریاضی کی کتب کی تعداد میں۔

1.2.3- روزمرہ زندگی میں نسبت کا استعمال

ہماری روزمرہ زندگی میں نسبت سے متعلق چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

مثال 1:- ایک اسکول میں 1029 طلبہ ہیں۔ جن میں سے 504 لڑکیاں ہیں۔ لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد کے درمیان کیا نسبت ہوگی؟

حل:-

طلبہ کی کل تعداد = 1029

لڑکیوں کی تعداد = 504

لڑکوں کی تعداد = 1029 - 504

= 525

مطلوبہ نسبت = 525 : 504

مثال 2:- ایک مستطیل کی لمبائی 6 سینٹی میٹر اور چوڑائی 4 سینٹی میٹر ہے۔ ایک دوسری مستطیل کی لمبائی 9 سینٹی میٹر اور چوڑائی 2 سینٹی میٹر ہے۔ درج ذیل نسبت معلوم کیجیے:

(i) دونوں مستطیلوں کی لمبائیوں کے درمیان۔ (ii) دونوں مستطیلوں کی چوڑائیوں کے درمیان۔

(iii) دونوں مستطیلوں کے احاطوں کے درمیان۔ (iv) دونوں مستطیلوں کے رقبوں کے درمیان۔

حل:-

پہلی مستطیل کی لمبائی = 6 سینٹی میٹر

پہلی مستطیل کی چوڑائی = 4 سینٹی میٹر

پہلی مستطیل کا رقبہ $= 6 \times 4$

= 24 مربع سینٹی میٹر

پہلی مستطیل کا احاطہ $= 2 \times (6 + 4)$

= 20 سینٹی میٹر

دوسری مستطیل کی لمبائی = 9 سینٹی میٹر

دوسری مستطیل کی چوڑائی = 2 سینٹی میٹر

دوسری مستطیل کا رقبہ $= 9 \times 2$

= 18 مربع سینٹی میٹر

دوسری مستطیل کا احاطہ $= 2 \times (9 + 2)$

= 22 سینٹی میٹر

(i) پہلی اور دوسری مستطیل کی لمبائیوں کے درمیان نسبت $= 6 : 9$

$= 2 : 3$

(ii) پہلی اور دوسری مستطیل کی چوڑائیوں کے درمیان نسبت $= 4 : 2$

$= 2 : 1$

(iii) پہلی اور دوسری مستطیل کے احاطوں کے درمیان نسبت $= 20 : 22$

$= 10 : 11$

(iv) پہلی اور دوسری مستطیل کے رقبوں کے درمیان نسبت $= 24 : 18$

$= 4 : 3$

مثال 3:- ایک خاندان میں 6 لڑکے اور 4 لڑکیاں ہوں تو درج ذیل نسبت معلوم کیجیے۔

(i) لڑکوں اور لڑکیوں کی تعداد میں

(ii) لڑکیوں اور لڑکوں کی تعداد میں

حل:- لڑکوں کی تعداد = 6

لڑکیوں کی تعداد = 4

لڑکیاں : لڑکے = 6 : 4

= 3 : 2

لڑکے : لڑکیاں = 4 : 6

= 2 : 3

مثال 4:- نسبت معلوم کیجیے۔

(i) ہر 8 روپے اور 72 روپے فی درجن کے درمیان۔

(ii) 36 روپے فی درجن اور ہر 6 روپے کے درمیان۔

حل:- (i) 72 روپے فی درجن کا مطلب $= \frac{72}{12}$

$= 6$

اس لیے ہر 8 روپے اور 72 روپے فی درجن کے درمیان وہی نسبت ہے جو کہ ہر 8 روپے اور ہر 6 روپے کے درمیان یعنی:

$8 : 6 = 4 : 3$

پس مطلوبہ نسبت $= 4 : 3$

(ii) 36 روپے فی درجن کا مطلب $= \frac{36}{12}$

$= 3$

اس لیے 36 روپے فی درجن اور ہر 6 روپے کے درمیان وہی نسبت ہے جو کہ 3 روپے اور 6 روپے کے درمیان یعنی

$3 : 6 = 1 : 2$

پس مطلوبہ نسبت $= 1 : 2$

مثال 5:- اگر $a : b = 2 : 3$ تو $6a : 5b$ معلوم کیجیے۔

حل:- $a : b = 2 : 3$ یعنی $a = 2, b = 3$

اس لیے $6a : 5b = 6 \times 2 : 5 \times 3$

$= 12 : 15$

$= \frac{12}{3} : \frac{15}{3}$

$= 4 : 5$

پس $6a : 5b = 4 : 5$

مشق 1.4

-1 ہر 6 روپے کے عوض 72 روپے فی درجن کے درمیان نسبت معلوم کیجیے۔

-2 160 روپے فی میٹر اور 150 روپے فی میٹر کے درمیان نسبت معلوم کیجیے۔

-3 72 روپے 24 انڈوں کے لیے اور ہر ایک کے لیے 4 روپے کے درمیان نسبت معلوم کیجیے۔

-4 اگر مربع 'A' کے ضلع کی لمبائی 2 سینٹی میٹر اور مربع 'B' کے ضلع کی لمبائی 6 سینٹی میٹر ہو تو درج ذیل نسبتیں معلوم کیجیے۔

(i) مربع 'A' کے ضلع کی لمبائی اور مربع 'B' کے ضلع کی لمبائی کے درمیان۔

(ii) مربع 'A' احاطہ اور مربع 'B' کے احاطہ کے درمیان۔

(iii) مربع 'A' کے رقبہ اور مربع 'B' کے رقبہ کے درمیان۔

-5 اگر $a : b = 2 : 3$ تو $6a : 2b$ معلوم کیجیے۔

-6 ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 3 سینٹی میٹر، 4 سینٹی میٹر اور 6 سینٹی میٹر ہیں۔ مثلث کے اضلاع کے لمبائیوں کے درمیان نسبتیں معلوم کیجیے۔

-7 ایک مثلث میں دو زاویے 54° اور 72° ہیں۔ تیسرے زاویے کی دیے گئے دو زاویوں کی مقداروں کے مجموعہ کے درمیان نسبت معلوم کیجیے۔

-8 علی کے والد کی ماہانہ تنخواہ 40000 روپے ہے جبکہ اس کے والد کا ماہانہ خرچ 35000 روپے ہے، نسبت معلوم کیجیے۔

(i) آمدنی اور اخراجات میں

(ii) اخراجات اور بچت میں

(iii) آمدنی اور بچت میں

9- اگر مربع 'A' کے ضلع کی لمبائی 6 سینٹی میٹر اور مربع 'B' کے ضلع کی لمبائی 8 سینٹی میٹر ہو تو درج ذیل میں نسبتیں معلوم کیجیے۔

(i) مربع 'A' کے ضلع کی لمبائی اور مربع 'B' کے ضلع کی لمبائی میں

(ii) مربع 'A' کے رقبہ اور مربع 'B' کے رقبہ کے درمیان

10- اگر ایک خاندان کے پاس 12 پرندے ہیں جن میں سے 6 طوطے، 2 چڑیاں اور بقیہ کبوتر ہوں تو:

(i) کبوتروں اور چڑیوں کی تعداد میں نسبت معلوم کیجیے۔

(ii) کبوتروں اور پرندوں کی مقدار میں نسبت معلوم کیجیے۔

1.3- تناسب Proportion

دو نسبتوں کے درمیان برابری تناسب کہلاتی ہے۔ تناسب کے لیے علامت "::" یا "=" ہے۔

1.3.1- طرفین اور وسطین Extremes and Means

اگر $a : b = c : d$ تب $a : b :: c : d$ تناسب ہے ہم اسے اس طرح پڑھتے ہیں۔

a سے b کو نسبت وہی ہے جو کہ c کو d سے۔

a, b, c اور d تناسب کی رقوم کہلاتی ہیں۔

پہلی اور آخری رقم یعنی a اور d کو طرفین (extremes) کہتے ہیں۔

دوسری اور تیسری رقم یعنی b اور c کو وسطین (mean) کہتے ہیں۔

طرفین

$$a : b :: c : d$$

وسطین

$$ad = bc$$

طرفین کا حاصل ضرب برابر ہوتا ہے وسطین کے حاصل ضرب کے

مثال:- تناسب $15 : 60 :: 3 : x$ میں x کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل:- تناسب $15 : 60 :: 3 : x$ میں:

$a = x, b = 3, c = 60$ اور $d = 15$

طرفین کا حاصل ضرب $= ad$

$= x \times 15 = 15x$

وسطین کا حاصل ضرب $= cb$

$= 3 \times 60$

$= 180$

وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

$15x = 180$

$x = \frac{180}{15}$

$= 12$

پس $x = 12$

1.3.2- تناسب (راست اور معکوس)

تناسب راست Direct Proportion

دو نسبتوں کے درمیان تعلق جس میں ایک مقدار میں اضافہ دوسری مقدار میں اسی تناسب سے اضافہ کا باعث بنے یا ایک مقدار میں کمی دوسری مقدار میں اسی تناسب میں کمی کا باعث بنے "راست تناسب" کہلاتی ہے۔

تناسب معکوس Inverse proportion

دو نسبتوں کے درمیان تعلق جس میں ایک مقدار میں اضافہ اسی تناسب سے دوسری مقدار میں کمی کا باعث بنے یا ایک مقدار میں کمی اسی تناسب سے دوسری مقدار میں اضافہ کا باعث بنے "تناسب معکوس" کہلاتا ہے۔

1.3.3- روزمرہ زندگی سے مسائل

مثال 1:- 20 قلم 2000 روپے کے ہوں تو ایسے 40 قلم کی کیا قیمت ہوگی؟

حل:- فرض کیا 40 قلم کی قیمت x روپے ہے۔تب:

قلم	قیمت
↓ 20	2000 ↓
40	x

اس لیے $20 : 40 :: 2000 : x$

$$\frac{20}{40} = \frac{2000}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2000}{x}$$

$$x \times 1 = 2 \times 2000$$

$$x = 4000$$

پس 40 قلم کی قیمت 4000 روپے ہوگی۔

مثال 2:- 80 قمیضوں کی قیمت 22000 روپے ہو تو ایسی 30 قمیضوں کی کیا قیمت ہوگی؟

حل:-

قمیض	قیمت
↑ 80	22000 ↑
30	x

اس لیے $80 : 30 :: 22000 : x$

$$\frac{80}{30} = \frac{22000}{x}$$

$$80x = 22000 \times 30$$

$$x = \frac{22000 \times 30}{80}$$

$$x = 8250$$

پس 30 قمیضوں کی قیمت 8250 روپے ہوگی۔

مثال 3:- ایک اسکول کے ہاسٹل میں 300 طلبہ ہیں جن کے لیے 30 دن کی خوراک کا ذخیرہ موجود ہے۔ بعد میں 50 طلبہ ہاسٹل چھوڑ گئے۔ بتایئے وہی ذخیرہ بقیہ طلبہ کے لیے کتنے دن کا فی ہوگا؟

حل:-

ہاسٹل میں طلبہ کی تعداد $= 300$

ہاسٹل چھوڑنے والے طلبہ کی تعداد $= 50$

بقیہ طلبہ کی تعداد $= 300 - 50$

$= 250$

فرض کیا مطلوبہ دنوں کی تعداد x ہے۔

چونکہ طلبہ کی تعداد کم ہوگئی ہے اس لیے دنوں کی تعداد بڑھ جائے گی۔

طلبہ	دن
300 ↓	30 ↑
250	x

اس لیے $300 : 250 :: x : 30$

$$\frac{300}{250} = \frac{x}{30}$$

$$250 \times x = 300 \times 30$$

$$x = \frac{300 \times 30}{250}$$

$$x = 36$$

پس خوراک کا ذخیرہ 36 دن تک کے لیے کافی ہوگا۔

مثال 4:- 6 آدمی ایک کام کو 12 دن میں کرتے ہیں۔ اگر 2 آدمی مزید رکھ لیے جائیں تو وہی کام کتنے دنوں میں ہوگا؟

حل:-

آدمیوں کی تعداد $= 6$

آدمیوں کی تعداد میں اضافہ $= 2$

آدمیوں کی کل تعداد $= 6 + 2$

$= 8$

کام جتنے دنوں میں مکمل ہوا $= 12$ دن

اگر آدمیوں کی تعداد میں اضافہ کے بعد کام x دنوں میں مکمل ہو تو آدمیوں کی تعداد میں اضافہ کرنے سے کام کم دنوں میں مکمل ہو جائے گا۔

آدمی	دن
8 ↓	12 ↑
6	x

اس لیے $8 : 6 :: 12 : x$

$$\frac{8}{6} = \frac{12}{x}$$

$$8x = 12 \times 6$$

$$x = \frac{72}{8} \Rightarrow x = 9$$

پس $9 =$ مطلوبہ دنوں کی تعداد

مثال 5:- 900 آدمیوں کی آرمی فارمیشن کے پاس خوراک کا 30 دن کا ذخیرہ ہے۔ بعد میں 150 آدمی آرمی فارمیشن کو چھوڑ دیتے ہیں۔ بتایئے وہی خوراک کا ذخیرہ بقیہ آدمیوں کے لیے کتنے دن کے لیے کافی ہوگا؟

حل:-

آدمیوں کی تعداد $= 900$

آدمیوں کی تعداد جو آرمی فارمیشن چھوڑ گئے $= 150$

بقیہ آدمیوں کی تعداد $= 900 - 150$

$= 750$

فرض کیا مطلوبہ دنوں کی تعداد x ہے تو:

آدمی	دن
900 ↓	30 ↑
750	x

اس لیے $900 : 750 :: x : 30$

$$\frac{900}{750} = \frac{x}{30} \Rightarrow x = \frac{90 \times 30}{75}$$

$$= 6 \times 6$$

$= 36$ دن

پس $36 =$ مطلوبہ دنوں کی تعداد

1.4- مرکب تناسب Compound Proportion

دو یا دو سے زیادہ تناسبوں کے درمیان تعلق کو مرکب تناسب کہتے ہیں۔ تفصیل کے لیے ہم درج ذیل مثالوں کو دیکھتے ہیں۔

مثال 1:- ایک دکاندار 5 آدمیوں کی مدد سے 8 گھنٹے روزانہ کی بنیاد پر 200 اشیاء تیار کرنے کا منصوبہ بناتا ہے۔
اگر 8 آدمی 6 گھنٹے روزانہ کی بنیاد پر کام کریں تو کتنی اشیاء تیار کی جاسکتی ہیں؟

حل:- فرض کیجئے مطلوبہ اشیاء کی تعداد x ہے۔

آدمی	روزانہ کے اوقات کار	اشیاء
5	8	200
8	6	x

اگر آدمیوں کی تعداد بڑھتی ہے تو اشیاء کی تعداد بھی بڑھتی ہے۔
(تناسب راست)

اگر کام کرنے کے اوقات میں کمی ہوتی ہے تب اشیاء کی تعداد بھی کم ہوتی ہے۔
(تناسب راست)

آدمی	روزانہ کے اوقات کار	اشیاء
↑ 5	↑ 8	200 ↑
8	6	x

$$\frac{x}{200} = \frac{6}{8}\times\frac{8}{5}$$

$$x = \frac{6}{8}\times\frac{8}{5}\times 200$$

$$= 6\times 40$$

$$= 240$$

پس مطلوبہ اشیاء کی تعداد 240 ہوگی۔

مثال 2:- اگر 4 افراد کے ایک خاندان کے لیے 40 دن کے لیے 4000 روپے کافی ہوں تو 5 افراد کے خاندان کے لیے 15000 روپے کتنے دنوں کے لیے کافی ہوں گے؟

حل:- فرض کیجیے مطلوبہ دنوں کی تعداد x ہے۔
دی گئی مقداروں کو جدول میں رکھنے سے:

روپے	افراد کی تعداد	دن
4000	4	40
15,000	5	x

چونکہ دنوں کی تعداد مطلوب ہے لہٰذا ہم جدول کے آخری کالم کا پہلے دو کالموں سے موازنہ کریں گے۔

اگر روپوں کی تعداد بڑھتی ہے تب دنوں کی تعداد بھی بڑھتی ہے۔
(تناسب راست)

اگر افراد کی تعداد بڑھتی ہے تو دنوں کی تعداد کم ہو جاتی ہے۔
(تناسب معکوس)

روپے	افراد کی تعداد	دن
↑ 4000	↓ 4	↑ 40
15000	5	x

تیر کے نشان کو استعمال کرتے ہوئے ہمارے پاس:

$$\frac{x}{40} = \frac{4}{5} \times \frac{15000}{4000}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{5} \times \frac{15000}{4000} \times 40$$

$$\Rightarrow x = 120$$

پس 15000 روپے 120 دن کے لیے کافی ہوں گے۔

مشق 1.5

1- $x : 8 :: 50 : 20$ کے تناسب میں x کی قیمت معلوم کیجیے۔

2- اگر کپڑے کے 15 جوڑوں کی قیمت 6750 روپے ہو تو 4050 روپوں میں کتنے جوڑے خریدے جاسکتے ہیں؟

3- اگر ایک موٹر سائیکل 2 لٹر پٹرول میں 90 کلومیٹر فاصلہ طے کرے تو 225 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے کتنا پٹرول درکار ہوگا؟

4- ایک گاڑی کو ایک خاص سفر کے لیے 45 کلومیٹر فی گھنٹہ کے حساب سے 5 گھنٹے درکار ہیں، تین گھنٹوں میں اسی سفر کو مکمل کرنے کے لیے گاڑی کی رفتار کیا ہوگی؟

5- 6 آدمی ایک گھر کو چار دنوں میں رنگ کر سکتے ہیں۔ اگر تین آدمیوں کو رکھا جائے تو وہ کتنے عرصہ میں گھر کو رنگ کریں گے؟

6- ایک مینیجر 25 آدمیوں کی مدد سے چار گھنٹے روزانہ کی بنیاد پر 100 بائیسکل بنانے کا منصوبہ بناتا ہے۔ اگر تین گھنٹے روزانہ کام کیا جائے تو 40 آدمی کتنے بائیسکل بنائیں گے؟

7- 20 مشینوں کی مدد سے ایک فیکٹری میں 7 دنوں میں 560 پنکھے بنتے ہیں۔ 18 مشینوں کی مدد سے 12 دنوں میں کتنے پنکھے بن سکیں گے؟

8- ایک فیکٹری میں 20 مشینوں پر 9 دنوں میں 600 سوٹ تیار ہوتے ہیں۔ 18 مشینوں کی مدد سے 12 دنوں میں کتنے سوٹ تیار ہوں گے؟

9- اگر ایک ہاسٹل میں 12 آدمیوں کا 28 دن رہنے کا خرچہ 6720 روپے ہو تو 8 آدمیوں کا 14 دن رہنے کے لیے کتنا خرچ آئے گا؟

10- اگر ایک ہوٹل میں 14 آدمیوں کا 8 دن رہنے کے لیے 22400 روپے خرچ آتا ہو تو 7 آدمیوں کا 13 دن کے لیے کتنا خرچ آئے گا؟

11- 14 گائے 63 کلوگرام چارا 18 دن میں کھاتی ہیں۔ 28 دن میں 770 کلوگرام چارا کتنی گائیں کھائیں گی؟

12- 15 کاریگر 8 گھنٹے روزانہ کام کرتے ہوئے 3000 جوس کی بوتلیں ایک دن میں تیار کرتے ہیں۔ 18 کاریگر 6 گھنٹے روزانہ کی بنیاد پر روزانہ جوس کی کتنی بوتلیں تیار کریں گے؟

جائزہ مشق 1

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) $600 = ?$ کا 20 %:

(a) 12 (b) 120 (c) 20 (d) 200

(ii) % 70 کی کسری شکل:

(a) 7 (b) $\frac{7}{10}$ (c) $\frac{10}{7}$ (d) 7

(iii) $\frac{7}{20}$ فی صد کی شکل میں:

(a) 35 % (b) 35 (c) 20 (d) 20 %

(iv) $\frac{1}{3}$ فی صد کی شکل میں:

(a) 3 % (b) 1 % (c) 33 % (d) $33\frac{1}{3}$ %

(v) $? = 0.13$ فی صد کی شکل میں:

(a) 13 (b) 30 (c) 13 % (d) 10 %

(vi) $a:b = ?$ کی نسبت میں "a" کو کیا کہتے ہیں؟

(a) انتہائی (b) اینٹی سی ڈینٹ
(c) کانسی کوئنٹ (d) درمیان

(vii) $a:b = ?$ کی نسبت میں "b" کو کیا کہتے ہیں؟

(a) انتہائی (b) اینٹی سی ڈینٹ
(c) درمیان (d) کانسی کوئنٹ

(viii) $a:b :: c:d = ?$ کی تناسب میں "a" اور "d" کو کیا کہتے ہیں؟

(a) طرفین (b) وسطین
(c) اینٹی سی ڈینٹ (d) کانسی کوئنٹ

(ix) $a:b :: c:d$ کی تناسب میں "b" اور "c" کو کیا کہتے ہیں؟

(a) وسطین
(b) طرفین
(c) کانسی کوینٹ
(d) اینٹی سی ڈینٹ

(x) 75: 95 کی آسان شکل کیا ہے؟

(a) 15 : 17
(b) 15 : 19
(c) 19 : 15
(d) 17 : 15

-2 خالی جگہ پر کیجئے۔

(i) 1500 کا 30% = __________

(ii) 15% کی کسری شکل = __________

(iii) $\frac{7}{25}$ فی صد کی شکل میں = __________

(iv) $\frac{2}{3}$ فی صد کی شکل میں = __________

(v) 0.29 فی صد کی شکل میں = __________

(vi) $a:b$ کی نسبت میں "a" = __________

(vii) $a:b$ کی نسبت میں "b" = __________

(viii) $a:b::c:d$ کی تناسب میں a اور d __________

(ix) $a:b::c:d$ کی تناسب میں طرفین کا ضرب = __________

(x) $\frac{2}{3}:\frac{3}{5}$ کی آسان شکل = __________

-3 ایک ریل گاڑی میں 800 مسافر سوار ہو سکتے ہیں۔ اگر 55% مسافر مرد اور 15% بچے ہوں تو عورتیں کتنی فی صد ہوں گی؟

-4 عظیم اپنی آمدنی کا 25% کرایہ مکان پر خرچ کرتا ہے جبکہ بقیہ رقم کا 60% گھریلو اخراجات پر۔ اگر اس کی بچت 2100 روپے ہو تو اس کی کل آمدنی بتائیے؟

-5 ایک سکول میں اگر 220 کرسیاں اور 110 میزیں طلبہ کے لیے، 50 کرسیاں اور 30 میزیں سٹاف کے لیے ہوں تو درج ذیل میں نسبت معلوم کیجیے۔

(i) طلبہ کی کرسیوں اور طلبہ کی میزوں کی تعداد کے درمیان:

(ii) طلبہ کی کرسیوں اور سٹاف کی کرسیوں کی تعداد کے درمیان:

(iii) طلبہ کی میزوں اور سٹاف کی میزوں کی تعداد کے درمیان:

-6 ایک مثلث میں دو زاویے 48° اور 60° ہوں تو تیسرے زاویے کی پہلے دو زاویوں کے مجموعہ کے درمیان نسبت معلوم کیجیے۔

-7 8 لوگ ایک کام کو 24 دنوں میں کرتے ہیں اگر 4 مزید لوگ شامل ہو جائیں تو وہی کام کتنے دنوں میں مکمل ہوگا؟

-8 ایک ہاسٹل میں 18 طلبہ کا 36 دن رہنے کا خرچہ 58320 روپے ہے۔ 9 طلبہ کا 12 دن ہاسٹل میں رہنے کا خرچ معلوم کیجیے۔

خلاصہ

- فی صد کا مطلب ''سو میں سے'' ہے۔
- دو ایک جیسی چیزوں کے درمیان موازنہ کو نسبت کہتے ہیں۔
- $a : b$ میں "a" کو انٹی سی ڈینٹ کہتے ہیں۔
- $a : b$ میں "b" کو کانسی کوینٹ کہتے ہیں۔
- دو نسبتوں کی برابری کو تناسب کہتے ہیں۔
- $a : b :: c : d$ میں "a" اور "d" کو طرفین اور "c" اور "b" کو وسطین کہتے ہیں۔
- دو نسبتوں کے تعلق میں اگر ایک کی مقدار میں اضافہ دوسری کی مقدار میں اسی تناسب میں اضافہ کا باعث ہو تو اسے ہم تناسب راست کہتے ہیں۔
- دو نسبتوں کے تعلق میں اگر ایک کی مقدار میں اضافہ دوسرے کی مقدار میں کمی یا ایک کی مقدار میں کمی دوسرے کی مقدار میں اضافہ کا باعث ہو تو اسے ہم تناسب معکوس کہتے ہیں۔
- دو یا دو سے زیادہ تناسبوں کے درمیان تعلق کو ''مرکب تناسب'' کہتے ہیں۔

یونٹ

2

زکوٰۃ۔ عُشر اور وراثت (ترکہ)

ZAKAT, USHR AND INHERITANCE

- زکوٰۃ
- عُشر
- وراثت (ترکہ)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- نصاب تولہ اور گرام کے حوالے سے زکوٰۃ کس پر واجب ہے۔
- زکوٰۃ کی شرح۔
- کسی شخص کی جائیداد کی مالیت پر زکوٰۃ کی رقم کا تعین کرنا۔
- عشر کی شرح کا تعین جو زمین کی ملکیت اور پیداوار پر ہو۔
- عشر کی رقم کا تعین جو کسی زمین کی پیداوار پر ہو۔
- زکوٰۃ اور عشر کے حوالے سے روزمرہ زندگی کے مسائل کو حل کرنا۔
- کسی ترکہ یا وراثت میں ہر قانونی وارث کے حصے کا تعین کرنا۔
- ہر وارث کے حصے کی رقم کا تعین کرنا۔

2.1 زکوٰۃ ZAKAT

زکوٰۃ اسلام کے پانچ بنیادی ارکان میں سے ایک ہے۔ زکوٰۃ وہ رقم ہے جو کہ صاحب نصاب مسلمان دی گئی شرح پر غربا اور ضرورت مندوں میں بذاتِ خود یا اسلامی ریاست کے ذریعے سال میں ایک بار ادا کرتے ہیں۔

2.1.1 نصاب Nisab

ایک مسلمان جو ایک سال تک اپنی ملکیت میں 7.5 تولہ (86.1562 گرام) سونا یا 52.5 تولہ (603 گرام) چاندی یا اس کے برابر روپیہ، پیسہ رکھتا/رکھتی ہو صاحب نصاب مسلمان کہلاتا/کہلاتی ہے۔ اسے چاہیے کہ قرآن اور حدیث میں دی گئی شرح کے حساب سے زکوٰۃ ادا کرے۔ زکوٰۃ دو قسم کی دولت پر ادا کی جاتی ہے۔

(i) ظاہری دولت (exposed wealth) (ii) غیر ظاہری دولت (unexposed wealth)

ظاہری دولت میں زرعی سامان، اونٹ، بھیڑیں، بکریاں، معدنیات اور کاروباری سامان وغیرہ شامل ہیں جبکہ غیر ظاہری دولت میں سونا، چاندی، روپیہ اور اثاثہ جات شامل ہیں۔

2.1.2 زکوٰۃ کی شرح Rate of Zakat

زکوٰۃ صاحب نصاب مسلم ظاہری اور غیر ظاہری دولت پر ادا کرتا/کرتی ہے۔ زکوٰۃ کی شرح 2.5 فی صد یا سامان یا روپیہ کا چالیس واں $\left(\frac{1}{40}\right)$ حصہ ہے۔ تاہم زیرِ استعمال سامان جیسا کہ مشینی آلات، خام مال، کارخانہ کی عمارت وغیرہ پر زکوٰۃ لاگو نہیں ہوتی۔

مثال 1:- 5,00,000 روپے کی رقم پر زکوٰۃ معلوم کیجیے۔

حل:-

رقم = 5,00,000 روپے

زکوٰۃ کی شرح = 2.5 %

$$= 2.5 \times \frac{1}{100} = \frac{25}{10} \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{25}{1000}$$

زکوٰۃ کی رقم $= 5,00,000 \times \frac{25}{1000}$

$$= 500 \times 25$$

= 12,500 روپے

مثال 2:- 3,00,000 روپے کی رقم، 40 گرام سونا اور 500 گرام چاندی پر زکوۃ کی رقم نکالیے جبکہ سونے کی قیمت 3500 روپے فی گرام اور چاندی کی قیمت 400 روپے فی گرام ہو۔

حل:-

رقم = 3,00,000 روپے ...... (i)

سونے کا وزن = 40 گرام

سونے کی قیمت فی گرام = 3500 روپے

40 گرام سونے کی قیمت = 3500×40 روپے

= 1,40,000 روپے ...... (ii)

چاندی کا وزن = 500 گرام

چاندی کی قیمت فی گرام = 400 روپے

500 گرام چاندی کی قیمت = 500×400

= 2,00,000 روپے ...... (iii)

زکوۃ کے لیے کل رقم = 3,00,000 روپے + 1,40,000 روپے + 2,00,000 روپے

= 6,40,000 روپے

زکوۃ کی شرح = 2.5%

6,40,000 روپے پر زکوۃ = $6,40,000 \times 2.5\%$

$$= 6,40,000 \times \frac{25}{10} \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{6,40,000 \times 25}{1000}$$

$$= 640 \times 25$$

= 16,000 روپے

2.2 عشر USHR

قدرتی ذرائع سے زمین سے کاشت کی گئی زرعی پیداوار پر 10 فی صد کی شرح ادائیگی کو عشر کہتے ہیں۔ تاہم مصنوعی ذرائع سے زمین سے کاشت کی گئی زرعی پیداوار پر عشر کی ادائیگی کی شرح 5 فی صد ہے۔ مصنوعی ذرائع سے مراد نہروں اور ٹیوب ویل وغیرہ سے کاشت ہے۔

مثال 1:- اگر قدرتی ذرائع سے گندم کی فصل کی پیداوار 40000 کلوگرام ہو تو عشر کی رقم معلوم کیجئے، جبکہ گندم کی قیمت 950 روپے فی 40 کلوگرام ہے۔

حل:-

گندم کا وزن = 40,000 کلوگرام

40 کلوگرام گندم کی قیمت = 950 روپے

1 کلوگرام گندم کی قیمت = $\frac{950}{40}$ روپے

40,000 کلوگرام گندم کی قیمت = $\frac{950}{40} \times 40000$ روپے

= 9,50,000 روپے

عشر کی رقم = $9,50,000 \times 10\%$

$= 9,50,000 \times \frac{10}{100}$

= 95,000 روپے

مثال 2:- مصنوعی ذرائع کی مدد سے پیدا کی گئی 3000 کلوگرام چاول کی فصل پر عشر کی رقم نکالیے جبکہ 40 کلوگرام چاول کی قیمت 2000 روپے ہے۔

حل:-

چاول کی فصل کا وزن = 3000 کلوگرام

40 کلوگرام چاول کی قیمت = 2000 روپے

1 کلوگرام چاول کی قیمت = $\frac{2000}{40}$ روپے

= 50 روپے

3000 کلوگرام چاول کی قیمت = 3000×50

= 1,50,000 روپے

عشر کی رقم = $1,50,000 \times 5\%$

$= 1,50,000 \times \frac{5}{100}$

$= 1500 \times 5$

= 7500 روپے

2.3 وراثت (ترکہ) INHERITANCE

جب ایک شخص وفات پا جاتا ہے تو اس کے چھوڑے ہوئے اثاثہ کو ورثہ یا ترکہ کہتے ہیں اور اس کو اس کے قانونی وارثوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ وراثت کی تقسیم کے قوانین کو اسلام میں بڑے واضح طریقے سے بیان کیا ہے۔ وارثوں میں ورثہ تقسیم کرنے سے پہلے درج ذیل رقم کی ادائیگی کرنی ہوتی ہے۔

1- کفن، دفن کے اخراجات کی ادائیگی
2- مرحوم یا مرحومہ کے ذمہ قرض کی ادائیگی
3- مرحوم یا مرحومہ کی وصیت پر عمل کرنا

2.3.1 جائیداد میں قانونی وارثوں کے حصوں کی نسبت
Ratio of Shares Among Legal Inheritors of a Property

یہاں ہم مرحوم یا مرحومہ کے رشتہ داروں میں سے ہر ایک کا ان کی وراثت میں حصہ کا ذکر کریں گے۔

اسلام میں کل 12 رشتے ہیں جو کہ قانونی وارث ہوتے ہیں۔ ہم ان میں سے دس کا ذکر کرتے ہیں۔

1- اگر خاوند وفات پا جائے تو بیوی (بیوہ) کا حصہ اولاد یا والدے رشتہ میں کسی اور اولاد کی عدم موجودگی میں $\left(\frac{1}{4}\right)$ ہوگا۔

2- اولاد یا والدے رشتہ میں کسی اور اولاد کی موجودگی میں بیوی (بیوہ) کا حصہ $\left(\frac{1}{8}\right)$ ہوگا۔

3- دو یا دو سے زیادہ بیویاں اس حصہ کو برابر، برابر حاصل کریں گیں۔

4- ایک بیٹے کو دو بیٹیوں کے برابر حصہ ملے گا۔ یعنی بھائی کو بہن کے حصہ کا دوگنا ملے گا۔

5- پوتے کو پوتی سے دوگنا حصہ ملے گا۔

6- اگر دو یا دو سے زیادہ بیٹیاں ہی ہیں تو انہیں وراثت کا $\left(\frac{2}{3}\right)$ حصہ ملے گا۔

7- اگر بیٹی ایک ہی ہے یا باپ میں رشتہ سے کوئی اور ایک پوتی ہے تو مختص حصہ $\left(\frac{1}{2}\right)$ ہے۔

8- دو یا دو سے زیادہ بیٹیاں ہوں تو پوتی / نواسی کا حصہ نہیں ہوگا۔

9- اگر ایک بیٹی ہو اور باپ سے رشتہ میں ایک پوتی / نواسی ہو تو بیٹی کا حصہ $\left(\frac{1}{2}\right)$ اور باپ سے رشتہ میں پوتی / نواسی کا بقیہ کا $\left(\frac{1}{6}\right)$ ہوگا جو کہ میزان کو $\left(\frac{2}{3}\right)$ بناتا ہے۔

10- اگر بیوی وفات پا جائے تو خاوند کو ورثہ کا $\left(\frac{1}{2}\right)$ حصہ ملے گا۔

یاد رکھیں۔
جب ایک مسلمان وفات پا جاتا ہے تو اس کے ورثہ کو شریعت کے مطابق تقسیم کرنا چار ذمہ داریوں میں سے ایک ہے۔

2.3.2 ہر ایک قانونی وارث کا جائیداد میں حصہ معلوم کرنا
Calculate Amount of Share of Each Legal Inheritor of a Property

آیئے ہر ایک وارث کے حصہ کو درج ذیل مثالوں کی مدد سے معلوم کریں۔

مثال 1:- ایک آدمی نے 24,00,000 روپے مالیت کی جائیداد چھوڑی۔ اس میں سے اس کی بیوی، ایک بیٹے اور ایک بیٹی کا حصہ معلوم کیجئے۔

حل:-

جائیداد کی مالیت = 24,00,000 روپے

بیوی کا حصہ = $\frac{1}{8}$

بیوی کے حصے کی مالیت = $\frac{1}{8} \times 24,00,000$

= 3,00,000 روپے

باقی رقم $= 24,00,000 - 3,00,000$

$= 21,00,000$ روپے

بیٹے اور بیٹی کے حصوں میں نسبت $= 2 : 1$

نسبتی مجموعہ $= 2 + 1$

$= 3$

بیٹی کے حصے کی مالیت $= 21,00,000 \times \frac{1}{3}$

$= 7,00,000$ روپے

بیٹے کے حصے کی مالیت $= 2 \times 7,00,000$

$= 14,00,000$ روپے

مثال 2:- ایک شخص نے ایک جائیداد 30,00,000 روپے مالیت کی چھوڑی۔ اگر اس کے ہاں کوئی بچہ نہ ہو تو اس کی بیوی کے حصہ کی مالیت معلوم کیجیے۔

حل:-

جائیداد کی مالیت $= 30,00,000$ روپے

بیوی کا حصہ $= \frac{1}{4}$

بیوی کے حصہ کی مالیت $= 30,00,000 \times \frac{1}{4}$

$= 7,50,000$ روپے

مثال 3:- ایک شخص جو جائیداد چھوڑ کر وفات پا گیا اس کی جائیداد کی مالیت 3,30,000 روپے ہے۔ اگر اس نے اپنے پیچھے تین بیٹیاں چھوڑیں ہوں تو ہر ایک بیٹی کا حصہ معلوم کیجیے۔

حل:-

چھوڑی گئی جائیداد کی مالیت $= 3,30,000$ روپے

تینوں بیٹیوں کا حصہ $= \frac{2}{3}$

تینوں بیٹیوں کے حصے کی مالیت $= 3,30,000 \times \frac{2}{3}$

$= 110000 \times 2$

$= 2,20,000$ روپے

ہر ایک بیٹی کے حصے کی مالیت $= 2,20,000 \times \frac{1}{3}$

$= 7,33,33.33$ روپے

مثال 4:- اگر ایک شخص نے اپنے پیچھے ایک بیوہ، ایک بیٹا اور دو بیٹیاں چھوڑی ہوں تو ان میں سے ہر ایک کے حصہ کی جائیداد میں مالیت معلوم کیجیے۔ جبکہ چھوڑی گئی جائیداد کی مالیت 48,00,000 روپے ہے۔

حل:-

جائیداد کی کل مالیت = 48,00,000 روپے

بیوہ کا حصہ = $\frac{1}{8}$

بیوہ کے حصے کی مالیت = $48,00,000 \times \frac{1}{8}$

= 6,00,000 روپے

باقی مالیت = $48,00,000 - 6,00,000$

= 42,00,000 روپے

بیٹے اور بیٹیوں کے حصوں میں نسبت = $2 : 1 : 1$

نسبتی مجموعہ = $2 + 1 + 1$

= 4

بیٹے کے حصے کی مالیت = $\frac{2}{4} \times 42,00,000$

= $2 \times 10,50,000$ روپے

= 21,00,000 روپے

ہر ایک بیٹی کے حصے کی مالیت = $\frac{1}{4} \times 42,00,000$

= 10,50,000 روپے

مشق 2.1

1- اگر سونے کی مالیت 11,10,000 روپے ہو تو اس پر زکوٰۃ معلوم کیجیے۔

2- اگر چاندی کی مالیت 3,00,000 روپے ہو تو اس پر زکوٰۃ معلوم کیجیے۔

3- 10 تولہ سونا اور 40 تولہ چاندی پر زکوٰۃ کی رقم معلوم کیجیے جبکہ سونے کی قیمت 40,000 روپے فی تولہ اور چاندی کی قیمت 5000 روپے فی تولہ ہو۔

4- سونے کی مالیت 8,00,000 روپے، نقد رقم 4,00,000 روپے اور چاندی 50 تولہ (5000 روپے فی تولہ) پر زکوٰۃ معلوم کیجیے۔

5- قدرتی ذرائع سے پیدا شدہ چاول کی فصل مالیتی 6,00,000 روپے پر عشر معلوم کیجیے۔

6- مصنوعی ذرائع سے پیداشدہ گندم کی فصل مالیتی 3,50,000 روپے پر عشر معلوم کیجیے۔

7- اگر ایک شخص نے 7,50,000 روپے مالیت کی جائیداد چھوڑی ہو تو اس کی ایک بیوہ، 2 بیٹوں اور ایک بیٹی میں ہر ایک کی جائیداد کی مالیت معلوم کیجیے۔

8- اگر ایک شخص نے اپنے پیچھے ایک بیوہ اور چار بیٹیاں چھوڑیں ہوں تو اس کی 4,00,000 روپے مالیتی وراثت میں ہر ایک کے حصہ کی مالیت معلوم کیجیے۔

9- اگر ایک شخص نے اپنے پیچھے ایک بیوہ اور 15,00,000 روپے مالیت کی جائیداد چھوڑی ہو تو اس کی بیوہ کے حصے کی مالیت معلوم کیجیے۔

10- اگر ایک شخص نے اپنے پیچھے ایک بیوہ اور دو بیٹے چھوڑے ہوں تو اس کی مالیتی وراثت 20,00,000 روپے میں سے ہر ایک کے حصہ کی مالیت معلوم کیجیے۔

11- اصغر نے ایک جائیداد 4,80,000 روپے کی چھوڑی۔ اس نے اپنے پیچھے ایک بیوہ، تین بیٹے اور چار بیٹیاں چھوڑیں جائیداد میں سے ہر ایک کے حصہ کی مالیت معلوم کیجیے۔

12- نجیب نے 4,00,000 روپے اپنے ورثہ میں چھوڑے۔ اس نے اپنے پیچھے ایک بیوہ چھوڑی جبکہ ان کے ہاں کوئی بچہ نہ تھا۔ نجیب کی بیوہ کا حصہ معلوم کیجیے۔

جائزہ مشق 2

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) زکوٰۃ کی کٹوتی کس شرح سے ہوتی ہے؟

(a) 2.5 %　(b) 3.5 %　(c) 4.5 %　(d) 5.5 %

(ii) قدرتی ذرائع سے کاشت کی گئی فصل پر عشر کی کٹوتی کی شرح کیا ہے؟

(a) 2.5 %　(b) 5 %　(c) 10 %　(d) 20 %

(iii) مصنوعی ذرائع سے کاشت کی گئی فصل پر عشر کی کٹوتی کی شرح کیا ہے؟

(a) 5 % (b) 10 % (c) 2.5 % (d) 25 %

(iv) 1,00,000 روپے پر زکوٰۃ کی کٹوتی کیا ہے؟

(a) 2500 روپے (b) 25000 روپے (c) 2000 روپے (d) 15000 روپے

(v) قدرتی ذرائع سے پیدا کی گئی گندم کی فصل مالیتی 1,50,000 روپے پر عشر کی کٹوتی کیا ہے؟

(a) 10,000 روپے (b) 5000 روپے (c) 15000 روپے (d) 20000 روپے

(vi) بیوہ کا وراثتی جائیداد میں حصہ (اولاد کی موجودگی میں) کتنا ہے؟

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

(vii) بیوہ کا وراثت میں اولاد یا باپ کی طرف سے کسی اور اولاد کی غیر موجودگی میں کیا حصہ ہوگا؟

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{6}$

(viii) صرف ایک پوتی/نواسی یا باپ کی طرف سے کسی اور ایک پوتی/نواسی کی موجودگی میں ان کا حصہ کیا ہوگا؟

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{8}$

(ix) دو یا دو سے زیادہ پوتیاں/نواسیاں یا باپ کی طرف سے کسی اور ایک پوتی/نواسی کی موجودگی میں ان کا حصہ کیا ہوگا؟

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{8}$

(x) ایک بیٹی اور پوتی کی موجودگی میں باپ کی جائیداد میں سے اُن کا حصہ کیا ہوگا؟

(a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$

-2 خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) زکوۃ کی کٹوتی کی شرح ____________

(ii) قدرتی ذرائع سے حاصل کی گئی فصل پر عشر کی شرح ____________

(iii) مصنوعی ذرائع سے حاصل کی گئی فصل پر عشر کی شرح ____________

(iv) 2,00,000 روپے مالیت پر زکوۃ کی کٹوتی ____________

(v) 1,00,000 روپے پر 10% کے حساب سے عشر کی مالیت ____________

(vi) ایک وراثتی جائیداد میں بیوہ کا حصہ (اولاد کی موجودگی میں) ____________

(vii) ایک وراثتی جائیداد میں اولاد کی عدم موجودگی میں بیوہ کا حصہ ____________

(viii) اگر صرف ایک ہی بیٹی ہو تو وراثت میں حصہ ____________

(ix) وارثت میں بیٹے اور بیٹی کے حصوں میں نسبت ____________

(x) دو یا دو سے زیادہ بیٹیوں کی موجودگی میں ان کا وراثت میں حصہ ____________

-3 15,00,000 روپے مالیت کے سونے پر زکوۃ کی کٹوتی معلوم کیجئے۔

-4 اگر مصنوعی ذرائع سے حاصل کی گئی چاول کی فصل مالیت 4,90,000 روپے ہو تو عشر معلوم کیجئے۔

-5 ایک شخص نے اپنے پیچھے 45,00,000 روپے مالیت کی جائیداد چھوڑی۔ اس کی ایک بیوہ اور دو بیٹوں میں سے ہر ایک کا جائیداد میں حصہ معلوم کیجئے۔

-6 اکرم نے 48,00,000 روپے مالیت کی جائیداد چھوڑی۔ اس نے اپنے پیچھے ایک بیوہ، تین بیٹے اور چار بیٹیاں چھوڑیں جائیداد میں ہر ایک کے حصہ کی مالیت معلوم کیجئے۔

خلاصہ

- زکوٰۃ اسلام کے پانچ بنیادی ارکان میں سے ایک ہے۔ زکوٰۃ وہ رقم ہے جو کہ صاحب نصاب مسلمان دی گئی شرح پر غربا اور ضرورت مندوں میں بذاتِ خود یا اسلامی ریاست کے ذریعے سال میں ایک بار ادا کرتے ہیں۔

- ایک مسلمان جو ایک سال تک اپنی ملکیت میں 7.5 تولہ (86.1562 گرام) سونا یا 52.5 تولہ (603 گرام) چاندی یا اس کے برابر روپیہ، پیسہ رکھتا/رکھتی ہو صاحب نصاب مسلمان کہلاتا ہے۔ اسے چاہیے کہ قرآن اور حدیث میں دی گئی شرح کے حساب سے زکوٰۃ ادا کرے۔ زکوٰۃ دو قسم کی دولت پر ادا کی جاتی ہے۔

  (i) ظاہری دولت (ii) غیر ظاہری دولت

- ظاہری دولت میں زرعی سامان، اونٹ، بھیڑیں، بکریاں، معدنیات اور کاروباری سامان وغیرہ شامل ہیں۔

- غیر ظاہری دولت میں سونا، چاندی، روپیہ اور اثاثہ جات شامل ہیں۔

- زکوٰۃ صاحب نصاب مسلمان ظاہری اور غیر ظاہری دولت پر ادا کرتا/ کرتی ہے۔ زکوٰۃ کی شرح 2.5 فی صد یا سامان یا روپیہ کا چالیس واں $\left(\frac{1}{40}\right)$ حصہ ہے۔

- قدرتی ذرائع سے زمین سے کاشت کی گئی زرعی پیداوار پر 10 فی صد کی شرح ادائیگی کو عُشر کہتے ہیں۔ تاہم مصنوعی ذرائع سے زمین سے کاشت کی گئی زرعی پیداوار پر عُشر کی شرح 5 فی صد ہے۔

- جب ایک شخص وفات پا جاتا ہے تو اس کے چھوڑے ہوئے اثاثہ کو ورثہ یا ترکہ کہتے ہیں۔

یونٹ 3

کاروباری حساب
BUSINESS MATHEMATICS

- نفع اور نقصان
- رعایت
- کاروباری شراکت

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- قیمت خرید کیا ہے۔
- قیمت فروخت کیا ہے۔
- منافع سے متعلق درج ذیل کی شناخت (جبکہ: قیمت خرید < قیمت فروخت)

• قیمت خرید + منافع = قیمت فروخت • قیمت خرید − قیمت فروخت = منافع • منافع − قیمت فروخت = قیمت خرید

$$\text{منافع} = \frac{\%\text{منافع} \times \text{قیمت خرید}}{100}$$

$$\%\text{منافع} = \frac{\text{منافع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$$

$$\text{قیمت فروخت} = \text{قیمت خرید} \times \left(\frac{100 + \%\text{منافع}}{100}\right)$$

$$\text{قیمت خرید} = \frac{\text{قیمت فروخت} \times 100}{100 + \%\text{منافع}}$$

- نقصان سے متعلق درج ذیل تعلقات کی شناخت (جبکہ: قیمت خرید > قیمت فروخت).

$$\text{نقصان} = \frac{\%\text{نقصان} \times \text{قیمت خرید}}{100}$$

$$\%\text{نقصان} = \frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$$

$$\text{قیمت فروخت} = \text{قیمت خرید} \times \left(\frac{100 - \%\text{نقصان}}{100}\right)$$

$$\text{قیمت خرید} = \frac{\text{قیمت فروخت} \times 100}{100 - \%\text{نقصان}}$$

- نفع اور نقصان سے متعلق روزمرہ کے مسائل کو حل کیسے کرتے ہیں۔
- کسی چیز کی مارکڈ پرائس اور لسٹ پرائس کی شناخت کیسے کرتے ہیں۔
- رعایت سے متعلق درج ذیل تعلقات شناخت کیسے کرتے ہیں۔ قیمت فروخت − درج شدہ قیمت = رعایت • رعایت − درج شدہ قیمت = قیمت فروخت •

$$\%\text{رعایت} = \frac{\text{رعایت}}{\text{درج شدہ قیمت}} \times 100$$

$$\text{قیمت فروخت} = \text{درج شدہ قیمت} \times \left(\frac{100 - \%\text{رعایت}}{100}\right)$$

$$\text{درج شدہ قیمت} = \frac{\text{قیمت فروخت} \times 100}{100 - \%\text{رعایت}}$$

3.1 نفع اور نقصان PROFIT AND LOSS

تاجر اشیاء خریدتے اور فروخت کرتے ہیں۔ انہیں تجارت میں نفع یا نقصان بھی ہو سکتا ہے۔

اپنی روزمرہ زندگی میں ہم لاگت، نفع اور نقصان معلوم کرنے کے لیے حساب کا استعمال کرتے ہیں۔ مختلف اشیاء کو مختلف دکانوں سے خریدتے اور فروخت کرتے ہوئے ہمیں ان حالات کا سامنا کرنا پڑتا ہے۔

3.1.1 قیمت خرید اور قیمت فروخت Cost Price and Selling Price

وہ قیمت جس پر ایک دکاندار کوئی چیز خریدتا ہے اسے چیز کی قیمت خرید کہتے ہیں۔

وہ قیمت جس پر ایک دکاندار کوئی چیز گاہک کو فروخت کرتا ہے اُس چیز کی قیمت فروخت کہلاتی ہے۔

3.1.2 نفع Profit

اگر کسی چیز کی قیمت فروخت اُسکی قیمت خرید سے زیادہ ہو تو نفع حاصل ہوتا ہے۔ نفع فی صد، قیمت فروخت اور قیمت خرید کے درمیان درج ذیل تعلقات ہیں۔

$$\text{نفع} = \text{قیمت فروخت} - \text{قیمت خرید}$$

$$\text{قیمت فروخت} = \text{نفع} + \text{قیمت خرید}$$

$$\text{نفع}\% = \left(\frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100\right) \Rightarrow \text{نفع} = \frac{\text{نفع}\% \times \text{قیمت خرید}}{100}$$

چونکہ $\text{قیمت فروخت} = \text{نفع} + \text{قیمت خرید}$

اس لئے $\text{قیمت فروخت} = \frac{\text{قیمت خرید} \times \text{نفع}\%}{100} + \text{قیمت خرید}$

یا $\text{قیمت فروخت} = \left(\frac{100 + \text{نفع}\%}{100}\right) \times \text{قیمت خرید}$

اور $\text{قیمت خرید} = \left(\frac{100}{100 + \text{نفع}\%}\right) \times \text{قیمت فروخت}$

مثال 1:- ایک بائیسکل 3450 روپے میں خریدا گیا اور 3850 روپے میں فروخت کیا گیا۔ نفع فی صد معلوم کیجیے۔

حل:-

بائیسکل کی قیمت خرید = 3450 روپے

بائیسکل کی قیمت فروخت = 3850 روپے

اس لیے نفع = قیمت فروخت - قیمت خرید

$= 3850 - 3450$ روپے

$= 400$ روپے

$$\text{نفع }\% = \left(\frac{100 \times \text{نفع}}{\text{قیمت خرید}}\right)\%$$

$$= \left(\frac{400 \times 100}{3450}\right)\%$$

$$= 11.59\% \approx 11.6\%$$

مثال 2:- ایک تاجر ایک کرسی کو 2700 روپے میں فروخت کر کے 20% نفع کماتا ہے۔ کرسی کی قیمت خرید معلوم کیجیے۔

حل:-

فرض کیا کرسی کی قیمت خرید = 100 روپے

نفع = 20% (20 روپے)

چونکہ قیمت فروخت = قیمت خرید + نفع

اس لیے قیمت فروخت = 100 + 20 = 120

اگر قیمت فروخت 120 روپے ہو تو قیمت خرید = 100 روپے

اگر قیمت فروخت ایک روپیہ ہو تو قیمت خرید = $\frac{100}{120}$ روپے

$= \frac{5}{6}$ روپے

اگر قیمت فروخت 2700 روپے ہو تو قیمت خرید = $\left(2700 \times \frac{5}{6}\right)$ روپے

$= \frac{13500}{6}$ روپے

پس قیمت خرید = 2250 روپے

متبادل طریقہ:

ہمارے پاس قیمت خرید معلوم کرنے کے لیے یہ کلیہ ہے۔

$$\text{قیمت خرید} = \left(\frac{100}{100 + \text{نفع}\%}\right) \times \text{قیمت فروخت}$$

$$= \left(\frac{100}{100+20}\right) \times 2700 \text{ روپے}$$

$$= \frac{100 \times 2700}{120} \text{ روپے}$$

$$= \frac{13500}{6} \text{ روپے}$$

$$\text{پس قیمت خرید} = 2250 \text{ روپے}$$

مثال 3:- اگر ایک ٹیلی ویژن 6590 روپے میں خرید کر 6850 روپے میں فروخت کیا ہو تو نفع فی صد معلوم کیجیے۔

حل:-

$$\text{قیمت خرید} = 6590 \text{ روپے}$$

$$\text{قیمت فروخت} = 6850 \text{ روپے}$$

$$\text{نفع} = 6850 - 6590$$

$$\text{نفع} = 260 \text{ روپے}$$

$$\text{نفع}\% = \left(\frac{\text{نفع} \times 100}{\text{قیمت خرید}}\right)\%$$

$$= \left(\frac{260 \times 100}{6590}\right)\%$$

$$= 3.94\% \approx 4\%$$

مثال 4:- اگر 10 اشیاء کی قیمت فروخت 11 اشیاء کی قیمت خرید کے برابر ہو تو نفع فی صد معلوم کیجیے۔

حل:- فرض کیا ایک شے کی قیمت خرید = 1 روپیہ

تب 10 اشیاء کی قیمت خرید = 10 روپے

چونکہ 11 اشیاء کی قیمت خرید = 10 اشیاء کی قیمت فروخت

اس لیے 11 اشیاء کی قیمت خرید = 10 روپے

11 اشیاء کی قیمت فروخت = 11 روپے

اس لیے نفع = $11 - 10 = 1$ روپیہ

$$\text{نفع}\% = \left(\frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100\right)\%$$

پس

$$\text{نفع}\% = \left(\frac{1}{10} \times 100\right)\%$$

$$= 10\%$$

مثال 5:- ایک خوانچہ فروش 100 مالٹے بیچ کر 20 مالٹوں کی قیمت فروخت حاصل کرتا ہے۔ نفع فی صد معلوم کیجیے۔

حل:- فرض کیا ایک مالٹے کی قیمت خرید = 1 روپیہ

اب 100 مالٹوں کی قیمت فروخت = 100 مالٹوں کی قیمت خرید + نفع

= 100 مالٹوں کی قیمت خرید + 20 مالٹوں کی قیمت فروخت

اس لیے 80 مالٹوں کی قیمت فروخت = 100 مالٹوں کی قیمت خرید

= 100 روپے

80 مالٹوں کی قیمت خرید = 80 روپے

اس لیے نفع = $100 - 80 = 20$ روپے

پس

$$\text{نفع}\% = \left(\frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100\right)\% = \left(\frac{20}{80} \times 100\right)\%$$

$$= \left(\frac{1}{4} \times 100\right)\%$$

$$= 25\%$$

مثال 6:- ایک کتاب 30 فی صد منافع پر 650 روپے میں بیچ دی گئی۔ کتاب کی قیمت خرید معلوم کیجیے۔

حل:- اگر نفع 30% ہو تو قیمت خرید ہوگی۔

$$\text{قیمت خرید} = \frac{\text{قیمت فروخت} \times 100}{100 + \text{نفع}\%}$$

$$= \frac{100 \times 650}{100 + 30}$$

$$= \frac{65000}{130} \text{ روپے}$$

$$= 500 \text{ روپے}$$

پس کتاب کی قیمت خرید = 500 روپے

مثال 7:- الیکٹرونکس کی ایک دکان پر ایک دکاندار قیمت خرید کا $\frac{1}{6}$ نفع حاصل کرتے ہوئے ایک رُوم ہیٹر 2100 روپے میں فروخت کرتا ہے۔ اُس کا نفع فی صد معلوم کیجیے۔

حل:- فرض کیا

قیمت خرید = x روپے

نفع = $\frac{x}{6}$ روپے

اس لیے

قیمت فروخت = قیمت خرید + نفع

$$= \left(\frac{x}{6} + x\right) \text{روپے}$$

$$= \left(\frac{7x}{6}\right) \text{روپے}$$

اس لیے

$$\frac{7x}{6} = 2100$$

$$x = \frac{2100}{7} \times 6$$

$$= 300 \times 6$$

$$= 1800 \text{ روپے}$$

اس لیے روپے 2100 = قیمت فروخت، روپے 1800 = قیمت خرید

$$\text{نفع} = (2100 - 1800) = 300 \text{ روپے}$$

$$\text{نفع}\% = \left(\frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100\right)\%$$

$$\text{نفع}\% = \left(\frac{300}{1800} \times 100\right)\%$$

$$= \left(\frac{1}{6} \times 100\right)\%$$

$$= 16.666\%$$

پس
$$\text{نفع}\% = 16.67\%$$

مثال 8: - ایک دکاندار 40 روپے فی گیند کے حساب سے 100 ہاکی کی گیندیں خریدتا ہے۔ وہ 20 گیندیں 5 فی صد نفع پر فروخت کر دیتا ہے۔ اب وہ کتنے فی صد نفع پر باقی گیندیں فروخت کرے کہ اسے کل گیندوں پر 20 فی صد نفع حاصل ہو؟

حل: -

20 ہاکی کی گیندوں کی قیمت خرید $= 40 \times 20$

$= 800$ روپے

20 گیندوں پر نفع $= 5\%$

20 گیندوں کی قیمت فروخت $= \left(\frac{105}{100} \times 800\right)$ روپے

$= 840$ روپے

اب 100 گیندوں کی قیمت خرید $= 40 \times 100$

$= 4000$ روپے

درکار نفع $= 20\%$

مطلوبہ قیمت فروخت $= \left(\frac{120}{100} \times 4000\right)$ روپے

$= 4800$ روپے

اس لیے

80 گیندوں کی مطلوبہ قیمت فروخت $= 4800 - 840$

$=$ 3960 روپے

80 گیندوں کی قیمت خرید $= (40 \times 80)$

$=$ 3200 روپے

80 گیندوں پر مطلوبہ نفع $= (3960 - 3200)$

$=$ 760 روپے

مطلوبہ نفع فی صد $= \left(\dfrac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100\right)\% = \left(\dfrac{760}{3200} \times 100\right)\%$

$= \left(\dfrac{760}{32}\right)\%$

$= \left(\dfrac{190}{8}\right)\%$

$= 23.75\%$

3.1.3 نقصان Loss

اگر کسی چیز کی قیمت فروخت اُس کی قیمت خرید سے کم ہو تو ہمیشہ نقصان ہوگا۔ نقصان، قیمت فروخت، قیمت خرید اور نقصان فی صد میں درج ذیل حسابی تعلق ہے۔

نقصان = قیمت خرید − قیمت فروخت

قیمت فروخت = قیمت خرید − نقصان

قیمت خرید = نقصان + قیمت فروخت

$\%\text{نقصان} = \dfrac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$

$\text{نقصان} = \dfrac{\text{قیمت خرید}}{100} \times \%\text{نقصان}$

$\text{قیمت فروخت} = \text{قیمت خرید} \times \left(\dfrac{100 - \%\text{نقصان}}{100}\right)$

$\%\text{قیمت خرید} = \dfrac{100 \times \text{قیمت فروخت}}{100 - \%\text{نقصان}}$

مثال 1:- دانیال ایک روپیہ کی 6 ٹافیاں خریدتا ہے اور ایک روپیہ کی 8 ٹافیاں فروخت کرتا ہے۔ اُس کا نقصان فی صد میں معلوم کیجئے۔

حل:- 6 اور 8 کا ذو اضعاف اقل 24 ہے۔
فرض کیا۔ دانیال 24 ٹافیاں خریدتا ہے۔

24 ٹافیوں کی قیمت خرید $= \left(\frac{1}{6} \times 24\right) = 4$ روپے

24 ٹافیوں کی قیمت فروخت $= \left(\frac{1}{8} \times 24\right) = 3$ روپے

نقصان = قیمت خرید − قیمت فروخت
$= (4-3) = 1$ روپیہ

پس % نقصان = $\left(\dfrac{\text{نقصان} \times 100}{\text{قیمت خرید}}\right)$

$= \frac{1}{4} \times 100 = 25\%$

مثال 2:- ایک دکاندار 2 ریڈیو 1020 روپے فی ریڈیو کے حساب سے فروخت کرتا ہے۔ ایک ریڈیو پر وہ 20 فی صد نفع کماتا ہے اور دوسرے پر 20 فی صد نقصان اُسے دونوں ریڈیو کی فروخت پر کتنا نفع یا نقصان ہوا؟

حل:- پہلے ریڈیو کے سلسلہ میں:
پہلے ریڈیو کی قیمت فروخت = 1020 روپے نفع = 20 %

قیمت خرید $= \left(\frac{100}{120} \times 1020\right)$
$= (10 \times 85)$ روپے
$= 850$ روپے

دوسرے ریڈیو کے سلسلہ میں:
دوسرے ریڈیو کی قیمت فروخت = 1020 روپے نقصان = 20 %

قیمت خرید $= \left(\frac{100}{80} \times 1020\right)$
$= \left(\frac{5}{4} \times 1020\right)$ روپے
$= (5 \times 255)$ روپے
$= 1275$ روپے

دونوں ریڈیو کی کل قیمت خرید $= 850 + 1275$

$=$ روپے 2125

دونوں ریڈیو کی کل قیمت فروخت $= (1020 \times 2)$

$=$ روپے 2040

دونوں ریڈیو کی فروخت میں کل نقصان $= (2125 - 2040)$

$=$ روپے 85

پس نقصان $\% = \left(\frac{85}{2125} \times 100\right)\%$

$= 4\%$

نقصان $\% = 4\%$

مثال 3:- ایک بائیسکل ڈیلر ایک بائیسکل 8 فی صد نفع پر فروخت کرتا ہے۔ اگر اُس نے اسے 75 روپے کم پر فروخت کیا ہوتا تو اُسے 2% نقصان ہوتا۔ بائیسکل کی قیمت خرید معلوم کیجیے۔

حل:- فرض کیا قیمت خرید $= x$ روپے

قیمت فروخت $= \left(\frac{100 + \text{نفع}\%}{100}\right) \times$ قیمت خرید

جب کہ (قیمت فروخت $>$ قیمت خرید)

اس لیے 8% نفع پر قیمت فروخت $= \left(\frac{108}{100} \times x\right) = \left(\frac{27}{25}x\right)$ روپے

جب کہ قیمت خرید $>$ قیمت فروخت، قیمت فروخت $=$ قیمت خرید $\times \left(\frac{100 - \text{نقصان}\%}{100}\right)$

2 فی صد نقصان پر قیمت فروخت $= \left(\frac{98}{100} \times x\right) = \frac{49}{50}x$ روپے

دونوں قیمت فروخت کے درمیان فرق $= \left(\frac{27}{25}x - \frac{49}{50}x\right)$

$= \left(\frac{54x - 49x}{50}\right)$ روپے

$= \frac{5x}{50} = \frac{x}{10}$ روپے

پس شرط سوال کے مطابق $\frac{x}{10} = 75$

$x = 75 \times 10$

$x = 750$ روپے

پس بائیسکل کی قیمت خرید $= 750$ روپے

مثال 4:- ایک لڑکے نے ایک کتاب 575 روپے میں خریدی اور 320 روپے میں فروخت کی۔
اُس کا نقصان فی صد میں کیا ہے؟

حل:-
کتاب کی قیمت خرید = 575 روپے
کتاب کی قیمت فروخت = 320 روپے
نقصان = قیمت خرید − قیمت فروخت
$= (575 - 320)$ روپے
$= 255$ روپے

نقصان فی صد = $\left(\dfrac{\text{نقصان} \times 100}{\text{قیمت خرید}}\right)\%$

$$= \left(\frac{255}{575} \times 100\right)\%$$

$$= \left(\frac{51}{115} \times 100\right)\%$$

$$= \left(\frac{5100}{115}\right)\% \quad = 44.34\%$$

3.1.4 روز مرہ زندگی کے مسائل Real Life Problems

اپنی روز مرہ زندگی میں جب ہم مختلف اشیاء مثلاً کتابیں، کپڑا، گھریلو سامان، سلے سلائے کپڑے، الیکٹرونکس وغیرہ خریدنے بازار جاتے ہیں تو ہمیں قیمت خرید، قیمت فروخت، نفع اور نقصان کا تجربہ ہوتا ہے۔

اس کے لیے ہم درج ذیل مثالوں کو دیکھتے ہیں۔

مثال 1:- ایک دکاندار ایک پنکھا 1520 روپے میں خریدتا ہے۔ وہ اسے کس قیمت پر فروخت کرے کہ اُسے 15 فی صد نفع حاصل ہو؟

حل:-
فرض کیا قیمت خرید = 100 روپے
تب 15 فی صد نفع کی صورت میں قیمت فروخت $(115 = 15 + 100)$ روپے ہوگی۔

جب قیمت خرید = 100 روپے، تب قیمت فروخت = 115 روپے
جب قیمت خرید = 1 روپیہ، تب قیمت فروخت = $\dfrac{115}{100}$ روپے
جب قیمت خرید = 1520 روپے، تب قیمت فروخت = $\dfrac{115}{100} \times 1520$
$= 23 \times 76$ روپے $= 1748$ روپے

مثال 2:- ایک دکاندار ایک قمیض کو960 روپے میں فروخت کرے تو اس پر20 فی صد نقصان اٹھاتا ہے۔
وہ اسے کس قیمت پر فروخت کرے کہ اُسے 35 فی صد نفع حاصل ہو؟

حل:- فرض کیا قیمت خرید = 100 روپے

نقصان = 20 روپے

قیمت فروخت = (100 − 20)

= 80 روپے

جب قیمت فروخت 80 روپے ہو تو قیمت خرید = 100 روپے

جب قیمت فروخت 1 روپیہ ہو تو قیمت خرید = $\frac{100}{80}$

جب قیمت فروخت 960 روپے ہو تو قیمت خرید = $\frac{100}{80} \times 960$

= 100 × 12 روپے

= 1200 روپے

پس قمیض کی قیمت خرید = 1200 روپے

دوبارہ، فرض کیا قیمت خرید = 100

35 فی صد منافع کا مطلب قیمت فروخت = 135 روپے

جب روپیہ 1 = قیمت خرید، تب روپے $\frac{135}{100}$ = قیمت فروخت

جب روپے 1200 = قیمت خرید، تب $\frac{135}{100} \times 1200$ = قیمت فروخت

= 1620 روپے

پس 35 فی صد نفع کے لیے قمیض کو1620 روپے میں فروخت کرنا ہوگا۔

مشق 3.1

-1 قیمتِ فروخت معلوم کیجیے جبکہ۔

(i) قیمتِ خرید = 950 روپے، نفع = 10 %
(ii) قیمتِ خرید = 1540 روپے، نقصان = 5 %
(iii) قیمتِ خرید = 9600 روپے، نفع = 10 %
(iv) قیمتِ خرید = 126000 روپے، نقصان = 5 %
(v) قیمتِ خرید = 480 روپے، نفع = 3 %
(vi) قیمتِ خرید = 760 روپے، نقصان = 4 %

-2 حارث نے ایک کار 2,48,000 روپے میں خریدی اور 12000 روپے اس کی ڈینٹنگ اور پینٹنگ (رنگ) پر خرچ کیے۔ اُس نے اُسے 5 فی صد نفع پر فروخت کر دیا۔ گاہک نے حارث کو کیا ادا کیا؟

-3 قیمتِ خرید معلوم کیجیے جبکہ

(i) قیمتِ فروخت = 672 روپے، نفع = 5 %
(ii) قیمتِ فروخت = 851 روپے، نقصان = 8 %
(iii) قیمتِ فروخت = 1755 روپے، نفع = $12\frac{1}{2}\%$
(iv) قیمتِ فروخت = 2640 روپے، نقصان = 12%
(v) قیمتِ فروخت = 100 روپے، نفع = $33\frac{1}{2}\%$

-4 ایک دکاندار ایک ڈنر سیٹ کو 3852 روپے میں فروخت کر کے 7 فی صد نفع حاصل کرتا ہے۔ اگر وہ ڈنر سیٹ 4050 روپے میں فروخت کرے تو اس کا نفع فی صد میں معلوم کیجیے۔

-5 12 اشیاء کی قیمتِ فروخت 15 اشیاء کی قیمتِ خرید کے برابر ہے۔ نفع فی صد میں معلوم کیجیے۔

-6 قیمتِ خرید کا $\frac{1}{6}$ نفع حاصل کرنے کے لیے اگر ایک پنکھے کو 1470 روپے میں فروخت کیا جاتا ہے تو پنکھے کی قیمتِ خرید معلوم کیجیے۔

-7 ایک آدمی نے ایک الماری $7\frac{1}{2}$ فی صد نفع پر فروخت کی۔ اگر وہ اُسے 209 روپے میں فروخت کرتا تو اُسے 2 فی صد نقصان ہوتا۔ آدمی نے اُسے کتنے میں خریدا؟

-8 تین کُرسیاں 450 روپے فی کرسی کے حساب سے خریدی گئیں۔ ان میں سے ایک 10 فی صد نقصان پر فروخت کر دی گئی۔ باقی دو کُرسیوں کو کس قیمت پر فروخت کیا جائے کہ کُل فروخت پر نفع 20 فی صد حاصل ہو؟

3.2 چھوٹ DISCOUNT

خریدار کو فروخت کنندہ کی طرف سے اشیاء پر درج قیمت سے کم وصول کرنے کو قیمت میں چھوٹ (discount) کہتے ہیں۔

3.2.1 اشیاء پر درج قیمت اور فہرست میں درج قیمت Marked Price (MP) and List Price

چٹ پر درج ہوئی قیمت یا اشیاء کے گرد لپٹے ہوئے کاغذ پر درج قیمت کو درج شدہ قیمت (Marked Price) کہتے ہیں۔ وہ قیمت جو اشیاء بنانے والے نے تاجر کو دی گئی فہرست میں درج کی ہوتی ہے وہ فہرست میں درج قیمت (List Price) کہلاتی ہے۔

چھوٹ = چٹ پر درج قیمت یا قیمت فہرست × %چھوٹ

چھوٹ = چٹ پر درج قیمت − قیمت فروخت

چھوٹ = قیمت فہرست − قیمت فروخت

3.2.2 چھوٹ سے متعلق کلیات Relations Regarding Discount

چھوٹ = چٹ پر درج قیمت − قیمت فروخت

قیمت فروخت = چٹ پر درج قیمت − چھوٹ

$$\text{چھوٹ فی صد} = \frac{\text{چھوٹ}}{\text{چٹ پر درج قیمت}} \times 100$$

$$\text{قیمت فروخت} = \text{چٹ پر درج قیمت} \times \left(\frac{100 - \text{چھوٹ فی صد}}{100}\right)$$

$$\text{چٹ پر درج قیمت} = \frac{\text{قیمت فروخت} \times 100}{100 - \text{چھوٹ فی صد}}$$

3.2.3 روزمرہ زندگی کے مسائل Real Life Problems

مثال 1:- ایک کھلونے پر درج قیمت 750 روپے ہے اور نقد رقم کی ادائیگی پر 2 فی صد چھوٹ کی پیش کش ہے۔ کھلونے کے لیے کیا نقد رقم ادا کرنا ہوگی؟

حل:-

کھلونے پر درج قیمت = 750 روپے

چھوٹ = 2 فی صد

چھوٹ = % چھوٹ × کھلونے پر درج قیمت = $\left(\frac{2}{100}\times 750\right)$ روپے

= 15 روپے

قیمت فروخت = کھلونے پر درج قیمت − چھوٹ

قیمت فروخت = (750 − 15) = 735 روپے

پس کھلونا خریدنے کے لیے 735 روپے ادا کرنا ہوں گے۔

مثال 2:- ایک چیز پر درج قیمت میں 7 فی صد چھوٹ دینے کے بعد 1000 روپے میں فروخت کردی جاتی ہے۔ اس کی درج شدہ قیمت معلوم کیجیے۔

حل:- فرض کیا چیز پر درج قیمت = 100 روپے

چھوٹ = 7 فی صد

$= \frac{7}{100}\times 100$

= 7 روپے

قیمت فروخت = چیز پر درج قیمت − چھوٹ

قیمت فروخت = (100 − 7) روپے = 93 روپے

اگر قیمت فروخت 93 روپے ہو تو چیز پر درج قیمت = 100 روپے

اگر قیمت فروخت 1 روپیہ ہو تو چیز پر درج قیمت = $\frac{100}{93}$ روپے

اگر قیمت فروخت 1000 روپے ہو تو چیز پر درج قیمت = $\left(\frac{100}{93}\times 1000\right)$ روپے

= 1075.27 روپے

پس چیز پر درج قیمت = 1075.27 روپے

مثال 3:- ٹیلی ویژن کے تاجر نے ٹیلی ویژن پر جو قیمت درج کی ہے وہ اس کی قیمت خرید سے 20 فی صد زیادہ ہے۔
وہ اس پر 10 فی صد چھوٹ دینے کے لیے تیار ہے۔ نفع فی صد معلوم کیجیے۔

حل:- فرض کیا قیمت خرید = 100 روپے

درج قیمت $= (100 + 20)$

$= 120$ روپے

120 روپے کا 10 فی صد $= \frac{10}{100} \times 120$

چھوٹ = 12 روپے

قیمت فروخت $= 120 - 12$

$= 108$ روپے

نفع فی صد = (قیمت فروخت − قیمت خرید)% $= (108 - 100)\%$

$= 8\%$

مثال 4:- ایک دکاندار اشیاء پر درج قیمت پر 15 فی صد چھوٹ کی پیش کش کرتا ہے۔ اشیاء کی فروخت سے 19 فی صد
نفع حاصل کرنے کے لیے اسے اشیاء پر قیمت خرید سے کتنے فی صد زیادہ قیمت درج کرنی چاہیے؟

حل:- فرض کیا قیمت خرید = 100 روپے

100 روپے کا 19 فی صد = 19 روپے

قیمت فروخت $= (100 + 19)$

$= 119$ روپے

جب چٹ پر درج قیمت 100 روپے ہو تو قیمت فروخت $= 100 - 15 = 85$ روپے

اگر قیمت فروخت 85 روپے ہو تو چٹ پر درج قیمت = 100 روپے

اگر قیمت فروخت 1 روپیہ ہو تو چٹ پر درج قیمت $= \left(\frac{100}{85}\right)$ روپے

اگر قیمت فروخت 119 روپے ہو تو چٹ پر درج قیمت $= \left(\frac{100}{85} \times 119\right)$ روپے

$= 140$ روپے

پس دکاندار کو اپنی اشیاء پر قیمت خرید سے 40 فی صد زیادہ قیمت درج کرنی چاہیے۔

مثال 5:- ایک ڈپارٹمنٹل سٹور جنوری کے مہینے میں چیزوں پر درج قیمت پر 10 فی صد چھوٹ کی پیش کش کرتا ہے۔ ایک ڈنر سیٹ کی قیمت خرید کیا ہوگی؟ اگر اس پر درج قیمت 8450 روپے ہو۔

حل:- ڈنر سیٹ پر درج قیمت 8450 روپے پر 10 فی صد چھوٹ = ڈنر سیٹ پر درج قیمت $\times 10\%$

$$= 8450 \times \frac{10}{100}$$

$= 845$ روپے

قیمت خرید = چٹ پر درج قیمت − چھوٹ

$= (8450 - 845)$ روپے

$= 7605$ روپے

مثال 6:- ایک بائیسکل کا ڈیلر 10 فی صد چھوٹ کی پیش کش کے باوجود 26 فی صد نفع کماتا ہے۔ بائیسکل کی اصل قیمت خرید کیا ہوگی؟ اگر اس کی چٹ پر درج قیمت 840 روپے ہو۔

حل:- بائیسکل پر درج قیمت = 840 روپے

چھوٹ = $10\% \times$ بائیسکل پر درج قیمت = $\left(\frac{10}{100} \times 840\right) = 84$ روپے

قیمت فروخت = $840 - 84 = 756$ روپے

نفع = 26%

قیمت خرید = قیمت فروخت × $\frac{100}{100 + \text{نفع فی صد}}$

قیمت خرید = $\left(\frac{100}{100+26} \times 756\right)$ روپے

$= \left(\frac{100}{126} \times 756\right)$ روپے

$= (100 \times 6)$ روپے

$= 600$ روپے

مشق 3.2

1- قیمت فروخت معلوم کیجیے جبکہ:

(i) درج شدہ قیمت = 728 روپے ، چھوٹ = 6%

(ii) درج شدہ قیمت = 2760 روپے ، چھوٹ = 5%

(iii) درج شدہ قیمت = 395.75 روپے ، چھوٹ = 8%

2- درج شدہ قیمت معلوم کیجیے جبکہ:

(i) قیمت فروخت = 515.20 روپے ، چھوٹ = 8%

(ii) قیمت فروخت = 858 روپے ، چھوٹ = 12%

(iii) قیمت فروخت = 2400 روپے ، چھوٹ = 4%

3- ایک چھت والے پنکھے پر درج قیمت 720 روپے ہے۔ اس کو 684 روپے میں فروخت کر دیا جاتا ہے۔ پنکھے کی قیمت فروخت پر کتنے فی صد چھوٹ کی اجازت دی گئی؟

4- ایک کپڑے دھونے والی مشین پر درج قیمت 3640 روپے ہے اس کو 3367 روپے میں فروخت کر دیا جاتا ہے۔ مشین کی قیمت فروخت پر چھوٹ کتنے فی صد ہے؟

5- ایک کتاب پر درج شدہ قیمت 480 روپے ہے۔ دوکاندار اس پر 10 فی صد چھوٹ دینے کے باوجود 8 فی صد نفع حاصل کرتا ہے کتاب کی قیمت خرید معلوم کیجیے۔

6- ایک دکاندار اشیاء پر ایسی قیمت درج کرتا ہے کہ 10 فی صد چھوٹ کے باوجود اسے 15 فی صد نفع حاصل ہوتا ہے۔ اگر ایک چیز پر قیمت خرید 720 روپے ہو تو اس پر درج شدہ قیمت معلوم کیجیے۔

7- فہرست میں درج ایک ٹیلی ویژن کی قیمت 12600 روپے ہے۔ اس پر 5 فی صد چھوٹ کی اجازت ہے مزید نقد رقم کی ادائیگی پر دوسری مرتبہ 2 فی صد چھوٹ کی اجازت ہے۔ اسے خریدنے کے لیے کتنی نقد رقم کی ضرورت ہے؟

8- اگر ایک ہیٹر پر درج قیمت پر 15 فی صد چھوٹ کی اجازت ہو جبکہ ابھی بھی 2 فی صد نفع ہو تو نفع فی صد کیا ہوگا؟ اگر اسے درج شدہ قیمت پر بیچا جائے۔

3.3.1 کاروباری شراکت BUSINESS PARTNERSHIP

دو یا دو سے زیادہ اشخاص کے مل کر نفع کی غرض سے ایک کاروبار کو چلانے کو شراکت داری کہتے ہیں۔ شراکت داری کو دو اقسام میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ سادہ کاروباری شراکت ۔ مرکب کاروباری شراکت ۔ جب شراکت داروں کا سرمایہ یکساں مدت کے لیے لگایا جائے تو اس کو سادہ کاروباری شراکت کہتے ہیں۔ ان معاملات میں نفع یا نقصان کو ہر شراکت دار کی کاروبار میں لگائی گئی رقم کے لحاظ سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

جب شراکت داروں کا سرمایہ جو کہ برابر یا نابرابر ہو کو مختلف مدت کے لیے لگایا جائے تو شراکت کو مرکب شراکت کہتے ہیں۔ ان معاملات میں نفع یا نقصان کو سرمایہ اور سرمایہ کی مدت پیداوار کے حاصل ضرب کے لحاظ سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

3.3.2 شراکت داروں میں نفع Profit among the Partners

درج ذیل مثالوں سے شراکت داروں میں نفع کی تقسیم کو واضح کیا جاتا ہے۔

مثال 1:- اسلم، انور اور اکرم نے ایک کاروبار سے 2,50,000 روپے نفع کمایا اگر کاروبار میں اُن کی سرمایہ کاری میں نسبت بالترتیب 4:7:14 ہو تو ہر ایک کا نفع معلوم کیجیے۔

حل:-

دی گئی نسبتیں $= 4:7:14$

نسبتی مجموعہ $= 4+7+14$

$= 25$

کمایا گیا نفع $=$ روپے $2,50,000$

اسلم نے جتنا نفع کمایا $= \dfrac{4}{25} \times 2,50,000 = 40,000$ روپے

انور نے جتنا نفع کمایا $= \dfrac{7}{25} \times 2,50,000 = 70,000$ روپے

اکرم نے جتنا نفع کمایا $= \dfrac{14}{25} \times 2,50,000 = 1,40,000$ روپے

مثال 2:- تین شراکت داروں کی ایک کاروبار میں نسبت 2:3:5 ہے۔ اگر انہیں کاروبار میں 10,00,000 روپے کا نقصان ہوا ہو تو ہر ایک کا نقصان میں حصہ بتلائیے۔

حل:-

دی گئی نسبتیں $= 2:3:5$

نسبتی مجموعہ $= 2+3+5$

$= 10$

کل نقصان $= 10,00,000$ روپے

پہلے حصہ دار کا نقصان $= \frac{2}{10} \times 10,00,000 = 200,000$ روپے

دوسرے حصہ دار کا نقصان $= \frac{3}{10} \times 10,00,000 = 300,000$ روپے

تیسرے حصہ دار کا نقصان $= \frac{5}{10} \times 10,00,000 = 500,000$ روپے

مثال 3:- 3720 روپے تین حصے داروں میں اس طرح تقسیم کیجیے کہ پہلے حصے کا دوگنا، دوسرے حصے کا تین گنا اور تیسرے حصے کا پانچ گنا آپس میں برابر ہوں۔

حل:- فرض کیا پہلا، دوسرا اور تیسرا حصہ بالترتیب x, y اور z ہیں۔ تو سوال میں دی گئی شرط کے مطابق:

$$2x = 3y = 5z$$

$$\frac{2x}{30} = \frac{3y}{30} = \frac{5z}{30}$$ 2,3 اور 5 کے ذو اضعاف اقل سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}$$

اس لیے $x : y : z = 15 : 10 : 6$

نسبتی مجموعہ $= 15 + 10 + 6$

$= 31$

پہلا حصہ $= 3720 \times \frac{15}{31}$ روپے

$= 120 \times 15$ روپے

$= 1800$ روپے

دوسرا حصہ $= 3720 \times \frac{10}{31}$ روپے

$= 120 \times 10$ روپے

$= 1200$ روپے

تیسرا حصہ = $3720 \times \frac{6}{31}$ روپے

= 120×6 روپے

= 720 روپے

چیک (پڑتال) 1800 روپے + 1200 روپے + 720 روپے = 3720 روپے

مثال 4:- جمیلہ اور عالیہ ایک شراکت داری میں شامل ہوتی ہیں اور اُن کے حصوں کی نسبت $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ ہے۔ چار ماہ بعد جمیلہ اپنا آدھا سرمایہ واپس لے لیتی ہے اور مزید 8 ماہ بعد 500 روپے نفع تقسیم کیا جاتا ہے۔ نفع میں جمیلہ کا حصہ کیا ہوگا؟

حل:- نفع میں نسبت = $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$

انہیں اپنا سرمایہ اسی نسبت میں رکھنا ہوگا۔ اگر جمیلہ 300 روپے لگاتی ہے تو عالیہ 200 روپے لگائے گی۔

چار ماہ بعد جمیلہ اپنا آدھا سرمایہ واپس لے لیتی ہے۔

8 ماہ بعد حاصل کیا گیا نفع = 500 روپے

چار ماہ کے لیے جمیلہ کی لگائی گئی رقم = 300×4 روپے

= 1200 روپے

اگلے آٹھ ماہ کے لیے جمیلہ کی لگائی گئی رقم = $\frac{1}{2} \times (300) \times 8$

= 150×8 روپے

= 1200 روپے

جمیلہ کی بارہ ماہ کے لیے لگائی گئی رقم = $1200 + 1200$ روپے

= 2400 روپے

عالیہ کی بارہ ماہ کے لیے لگائی گئی رقم = 200×12

= 2400 روپے

چونکہ ہر ایک کے لیے لگائی گئی رقم ایک جیسی ہے۔ پس

500 روپے میں جمیلہ کا نفع = $\frac{1}{2} \times 500$

= 250 روپے

مثال 5:- عمر اور علی نے ایک پلاٹ بالترتیب 3,00,000 روپے اور 5,00,000 روپے کی سرمایہ کاری سے خریدا۔ پلاٹ کو فروخت کرنے پر انہیں 2,20,000 روپے نفع ہوا نفع میں ہر ایک کا حصہ معلوم کیجئے۔

حل:-

عمر کی سرمایہ کاری : علی کی سرمایہ کاری

$3,00,000 : 5,00,000$

$3 : 5$

نفع میں نسبت $= 3 : 5$

نسبتی مجموعہ $= 3 + 5 = 8$

کل نفع $=$ 2,20,000 روپے

نفع میں عمر کا حصہ $= \dfrac{2,20,000}{8} \times 3$

$= 27500 \times 3$

$=$ 82,500 روپے

نفع میں علی کا حصہ $= \dfrac{2,20,000}{8} \times 5$

$= 27500 \times 5$

$=$ 1,37,500 روپے

مشق 3.3

1- تین اشخاص میں 2,00,000 روپے نفع کو تقسیم کیجئے اگر ان کے حصوں میں نسبت 3:2:5 ہو۔

2- اگر علی، دانیال اور عبداللہ 7,50,000 روپے کی سرمایہ کاری پر 15 فی صد نفع حاصل کرتے ہوں تو نفع میں ہر ایک کا حصہ معلوم کیجئے اگر ان کے حصوں میں نسبت 2:3:5 ہو۔

3- تین اشخاص میں 720 روپے نفع کی رقم تقسیم کیجئے اگر ان کے حصوں میں نسبت 3:4:5 ہو۔

4- تین اشخاص نے ایک کاروبار میں 30,00,000 روپے کی سرمایہ کاری 2:3:7 کی نسبت سے کی۔ انہوں نے 6,00,000 روپے نفع حاصل کیا۔ اگر وہ اپنا کاروبار ختم کرنے میں دلچسپی رکھتے ہوں تو ہر حصہ دار کے حصہ میں کتنی رقم آئے گی۔

5- ایک فرم کے تین اشخاص 67,200 روپے نفع کو اپنے میں 2:3:7 کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔ نفع میں سب سے بڑا حصہ کیا ہوگا؟

6- تین اشخاص A، B اور C میں ایک رقم 10:7:5 کی نسبت میں تقسیم کی جاتی ہے۔ اگر B کو C کی نسبت 14 روپے اضافی ملتے ہوں تو A کو کتنے روپے ملیں گے اور رقم مجموعی طور پر کتنی ہوگی؟

جائزہ مشق 3

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگایئے۔

(i) نفع حاصل کیا جاتا ہے اگر:

(a) قیمت خرید = قیمت فروخت
(b) قیمت خرید > قیمت فروخت
(c) قیمت خرید < قیمت فروخت
(d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

(ii) نقصان ہوتا ہے اگر:

(a) قیمت خرید = قیمت فروخت
(b) قیمت خرید < قیمت فروخت
(c) قیمت خرید > قیمت فروخت
(d) چٹ پر درج قیمت = قیمت فروخت

(iii) نفع % معلوم کیجئے اگر قیمت خرید < قیمت فروخت ہو تو:

(a) $\dfrac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}}$
(b) $\dfrac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$
(c) $\dfrac{\text{نفع} \times \text{قیمت خرید}}{100}$
(d) $\dfrac{\text{قیمت فروخت} \times 100}{100 + \text{نفع فی صد}}$

(iv) قیمت فروخت معلوم کیجئے اگر قیمت فروخت > قیمت خرید سے ہو تو:

(a) قیمت خرید - نفع
(b) $\left(\dfrac{100 + \text{نفع فی صد}}{100}\right) \times \text{قیمت خرید}$
(c) نقصان - قیمت خرید
(d) $\dfrac{\text{نفع فی صد} + \text{قیمت خرید}}{100}$

(v) ? = قیمت خرید

(a) $\dfrac{100 \times \text{قیمت فروخت}}{100 + \text{نفع فی صد}}$
(b) قیمت فروخت - نقصان
(c) چھوٹ + چٹ پر درج قیمت
(d) $\dfrac{100 \times \text{چھوٹ}}{\text{چٹ پر درج قیمت}}$

2- خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) اگر ایک چیز ایک قیمت پر خریدی جائے تو اُسے ______________ کہتے ہیں۔

(ii) وہ قیمت جس پر ایک چیز فروخت کی جائے اُسے ______________ کہتے ہیں۔

(iii) جب، قیمت خرید < قیمت فروخت تو، ______________ - قیمت فروخت = قیمت خرید

(iv) جب، قیمت خرید > قیمت فروخت تو، ______________ = % نقصان

(v) $\dfrac{\text{قیمت فروخت} \times 100}{?}$ = کسی چیز پر درج قیمت ______________

3- ایک دکاندار ایک کپڑے دھونے والی مشین کو 12000 روپے میں فروخت کر کے 8 فی صد نفع حاصل کرتا ہے۔ اگر وہ اُسے 10,500 روپے میں فروخت کرے تو اُسکا % نقصان معلوم کیجئے۔

4- اگر ٹیلی ویژن پر درج قیمت پر چھوٹ 10 فی صد ہو تو پھر بھی نفع 5 فی صد ہوتا ہے اگر ٹیلی ویژن کو درج قیمت پر فروخت کیا جائے تو نفع فی صد کیا ہوگا؟

5- ایک کاروبار میں 33,000 روپے نفع کو تین اشخاص میں تقسیم کیجئے جبکہ ان کے حصوں میں نسبت 3:5:3 ہو۔

6- کسی فرم کے تین اشخاص نفع کی رقم 1,44,000 روپے آپس میں 5:4:3 کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔ بتایئے:

(i) نفع میں سب سے بڑی رقم کیا ہوگی؟

(ii) نفع میں سب سے کم رقم کیا ہوگی؟

خلاصہ

- وہ قیمت جس پر کوئی چیز خریدی جائے قیمت خرید کہلاتی ہے۔
- وہ قیمت جس پر ایک چیز فروخت کی جائے قیمت فروخت کہلاتی ہے۔
- اگر کسی چیز کی قیمت فروخت اُسکی قیمت خرید سے زیادہ ہو تو ان دونوں قیمتوں کے فرق کو نفع کہتے ہیں۔
- اگر کسی چیز کی قیمت فروخت اُسکی قیمت خرید سے کم ہو تو ان دونوں قیمتوں کے فرق کو نقصان کہتے ہیں۔
- بعض اوقات کسی چیز کی قیمت فروخت پر رعایت دی جاتی ہے اس رعایت کو چھوٹ (discount) کہتے ہیں۔
- کسی دکان میں رکھی ہوئی ہر چیز پر درج قیمت کو Marked Price کہتے ہیں اور اسے M P سے ظاہر کرتے ہیں۔

یونٹ

4

مالیاتی ریاضی
FINANCIAL MATHEMATICS

- کمرشل بینکنگ
- کرنسی کا تبادلہ
- منافع / مارک اپ
- انشورنس
- لیزنگ / فنانسنگ

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طالب علم اس قابل ہو جائے گا کہ وہ یہ جان سکے:

- کمرشل بینک ڈیپازٹ اور بینک اکاؤنٹس کی اقسام
- نیگوشی ایبل انسٹرومنٹس جیسا کہ چیک، ڈیمانڈ ڈرافٹ اور پے آڈر
- آن لائن بینکنگ، اے ٹی ایم کے ذریعے لین دین، ڈیبٹ اور کریڈٹ کارڈز
- ایک ملک کی دی گئی کرنسی کو کسی دوسرے ملک کی کرنسی میں تبدیل کیسے کرتے ہیں۔
  - منافع / مارک اپ
  - اصل زر
  - منافع / مارک اپ کی شرح
  - مدت
- کمرشل بینکنگ اور نیشنل سیونگ سکیم سے متعلق مسائل کا حل
- بیمہ کو اس کی سادہ شکل میں بیان کرنا
- بیمہ زندگی اور گاڑی کے متعلق
- بیمہ زندگی اور گاڑی سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کرنا
  - لیزنگ / موٹر وہیکل کی فنانسنگ
  - اصل زر ڈاؤن پے منٹ
  - موٹر وہیکل انشورنس
  - پروسیسنگ کے اخراجات
  - ماہانہ اقساط میں واپس ادائیگی
- لیزنگ / مختلف شرائط کے تحت موٹر وہیکل کی فنانسنگ سے متعلق مسائل کو حل کرنا

4.1 کمرشل بینکنگ COMMERCIAL BANKING

بینکنگ کا کاروبار جو رقم جمع کرنے ، ایڈوانس قرضہ دینے اور اپنے گاہکوں کو اس کے علاوہ بھی خدمات دینے سے متعلق ہو کمرشل بینکنگ کہلاتا ہے۔ بینک لوگوں سے ان کی فالتو بچت کو حاصل کرتا ہے اور انہیں مختلف اکاؤنٹس کی شکل میں اپنی تحویل میں رکھتا ہے۔

4.1.1 بینک میں جمع رقوم اور اکاؤنٹس کی اقسام Bank Deposit and Types of Accounts

امانتیں اور اضافی فنڈز کو بینک کی تحویل میں رکھنے کے لیے بینک میں تین قسم کے اکاؤنٹس ہوتے ہیں۔ ان کی وضاحت درج ذیل ہے۔

1- کرنٹ اکاؤنٹ: اونچے درجے کی انتقال پذیری کی وجہ سے بہت زیادہ مقبول ہے۔

2- سیونگ اکاؤنٹ: بینکوں کے لیے فنڈز کا بہت اہم ذریعہ

3- فکسڈ اکاؤنٹ: لمبی مدت کے لیے لین دین کے لیے فنڈز کا پرکشش ذریعہ

کرنٹ اکاؤنٹ Current Account

کرنٹ اکاؤنٹ یا ڈیمانڈ ڈیپازٹ ایک رننگ *(Running)* اکاؤنٹ ہے جو اپنی انتقال پذیری کی بناء پر مسلسل جاری رہتا ہے۔ اس میں گاہک کو رقم نکالنے یا منتقل کرنے کے لیے بینک کو پہلے نوٹس دینے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ اکاؤنٹ میں مطلوبہ رقم کی موجودگی کی صورت میں چیک کو ہر حالت میں پاس کرنے کا بینک پابند ہوتا ہے۔

پاکستان میں آپ کم سے کم رقم *1000* روپے سے *10,000* روپے تک کے ساتھ کرنٹ اکاؤنٹ کھول سکتے ہیں جس میں بینک کی طرف سے کم از کم رقم بینک اکاؤنٹ میں موجود رہنے یا نہ رہنے کی شرائط ہو سکتی ہیں۔ چونکہ اس اکاؤنٹ میں رکھے گئے فنڈز کی مدت بہت کم ہوتی ہے اس لیے بینک ان پر منافع ادا نہیں کرتا۔

سیونگ اکاؤنٹ Saving Account

سیونگ اکاؤنٹ *(Saving Account)* جیسا کہ اس کے نام سے ظاہر ہے بچت کی حوصلہ افزائی کرتا ہے اور کم ذرائع والے اشخاص میں بچت کو فروغ دیتا ہے۔

ہر ماہ کے فنڈز کے حساب سے بینک 6 ماہ بعد برائے نام منافع ادا کرتا ہے۔ پیسہ جمع کروانے والے کو ایک خاص حد تک بغیر کسی نوٹس کے رقم نکلوانے کی اجازت ہوتی ہے۔ لیکن اس اکاؤنٹ سے بڑی رقم نکلوانے کے لیے بینک کو 7 سے 15 دن پہلے نوٹس دینا ہوتا ہے۔ بچتوں کو رواج دینے کے لیے اور گاہک کو سہولت پہنچانے کے لیے بینک عام طور پر نوٹس کے دورانیہ کو ختم کردیتا ہے۔

رقم نکلوانے کی سہولت کے پیش نظر، بینک کم سے کم رقم اپنے پاس رکھتا ہے تاکہ گاہک کی ضرورت کو پورا کیا جاسکے اور باقی فنڈز بینک کسی منافع کمانے والی سکیم میں قرض/ایڈوانس کی صورت میں لگادیتا ہے۔

نفع نقصان شراکتی سیونگ اکاؤنٹ PLS Saving Account

پاکستان میں نفع اور نقصان میں شراکت کی بنیاد پر سیونگ اکاؤنٹ کو جنوری 1982 میں متعارف کرایا گیا۔ پی ایل ایس سیونگ اکاؤنٹ کو کم رقم کے ساتھ (عام طور پر 100 روپے سے کم نہ ہو) بھی کھولا جاسکتا ہے۔ بینک کے نفع اور نقصان میں شراکت کے لیے اکاؤنٹ میں 100 روپے ہونے چاہیے۔ پی ایل ایس اکاؤنٹ سے تھوڑی سی رقم نکلوانے کی اجازت ہوتی ہے۔ جبکہ ساری رقم نکلوانے کے لیے اگر بینک خواہش ظاہر کرے تو نوٹس دینا پڑتا ہے۔ 6 ماہ یا سال کے آخر میں طریقہ کار کے مطابق منافع یا نقصان کی صورت میں منافع پی ایل ایس اکاؤنٹ میں جمع ہوجاتا ہے یا نقصان کی رقم اکاؤنٹ سے منہا کرلی جاتی ہے۔

فکسڈ/خاص مدت کے لیے اکاؤنٹ Fixed / Time Deposit Account

جیسا کہ نام سے ظاہر ہے فکسڈ یا خاص مدت کے لیے جو کہ 3 ماہ سے 5 سال تک ہے کے لیے بنک میں رقم جمع کرائی جاسکتی ہے۔ کسی خاص مدت کے لیے بینک اکاؤنٹ ہولڈر کو اصل زر کے ساتھ منافع کی رقم بھی ادا کرتا ہے۔ اس رقم کو کرنٹ اکاؤنٹ کی طرح ضرورت پڑنے پر استعمال نہیں کیا جاسکتا بلکہ صرف اسی صورت میں نکلوایا جاسکتا ہے جب خاص مدت کا دورانیہ پورا ہو جائے جس کے لیے رقم جمع کرائی گئی تھی۔ سیونگ اکاؤنٹ میں جمع رقم کے مقابلہ میں خاص مدت کے لیے جمع کرائی گئی رقم پر منافع کی شرح زیادہ ہوتی ہے رقم جمع کرانے کا دورانیہ جتنا زیادہ ہوگا اتنی ہی منافع کی شرح زیادہ ہوگی۔ بینک ایک خاص مدت کے لیے جمع کرائی گئی رقم پر گاہک کو ایک رسید یا خاص طور پر پرنٹ کیا گیا فارم ثبوت کے طور پر جاری کرتا ہے۔

عام طور پر ایسی رقم جمع کروانے والے کو فنڈز کو نکلوانے کے لیے چیک بک جاری نہیں کی جاتی۔ مقررہ مدت گزرنے کے بعد رقم جمع کرانے والا رسید پیش کرتا ہے۔ جس پر فوراً کاروائی کے بعد گاہک نقد رقم (منافع کے ساتھ) وصول کرلیتا ہے یا یہ رقم اپنے بینک اکاؤنٹ میں منتقل کروالیتا ہے۔ اگر رقم جمع کروانے والے کو مقررہ مدت گذرنے سے پہلے ہی رقم کی ضرورت پڑجاتی ہے تو بینک عام طور پر اسے قابل ادا منافع رقم کے تناسب سے جزوی طور پر ادا کرتا ہے اور کبھی کبھار مکمل ادائیگی بھی کردیتا ہے۔

رقم جمع کروانے والا عام طور پر برائے نام مارک اپ شرح جو کہ جمع رقم کی شرح کا 1% سے 2% ہوتی ہے بینک سے فنانسنگ کی سہولت بھی حاصل کر سکتا ہے جو کہ خاص مدت کے لیے جمع کرائی گئی رقم کی ہی سیکورٹی پر ہوتی ہے۔ ڈیمانڈ ڈپازٹس کی صورت میں رقم جمع کروانے والے کی ضروریات کو پورا کرنے کے لیے بینک اپنے پاس زیادہ رقم موجود رکھتا ہے۔ لیکن خاص مدت کے لیے جمع کروائی گئی رقم کے لیے یہ شرح بہت کم ہوتی ہے۔

فارن کرنسی اکاؤنٹس Foreign Currency Accounts

فارن کرنسی اکاؤنٹ وہ اکاؤنٹ ہے جو بینک میں غیر ملکی کرنسی جیسا کہ ڈالرز، پاؤنڈز اور یورو وغیرہ کے لین دین کے لیے کھولا جاتا ہے۔ یہ اکاؤنٹس سٹیٹ بینک کی ہدایت کے مطابق برقرار رکھے اور استعمال کیے جاتے ہیں۔ تمام بینک یا بااختیار ڈیلرز پاکستان یا پاکستان سے باہر رہنے والے پاکستانی شہری جن میں دوہری قومیت رکھنے والے بھی شامل ہیں کے فارن کرنسی اکاؤنٹ کسی اجازت کے بغیر کھول سکتے ہیں۔ تمام غیر ملکی افراد، فرمز اور کمپنیز جو پاکستان میں کام کر رہی ہیں یا جن میں غیر ملکی افراد شیئر ہولڈرز بھی ہیں اپنے فارن کرنسی اکاؤنٹس کھول سکتی ہیں۔ تاہم ایئر لائنز اور شپنگ کمپنیاں جو پاکستان میں یا پاکستان کے ذریعے کام کر رہی ہیں فارن کرنسی اکاؤنٹ نہیں کھول سکتیں۔

فارن کرنسی اکاؤنٹس، کرنٹ، سیونگ اور فکسڈ اکاؤنٹس میں بھی کھولے جا سکتے ہیں۔ منافع کی شرح فارن کرنسی اکاؤنٹس میں مقامی کرنسی اکاؤنٹس کی نسبت بہت برائے نام ہوتی ہے۔ فارن کرنسی اکاؤنٹس کو باہر سے بھیجی گئی رقم اور ٹریولر چیک جو کہ پاکستان سے باہر جاری کیئے گئے ہوں کے ذریعے چلائے جا سکتے ہیں۔ اکاؤنٹ ہولڈر اپنی پسند کے مطابق کسی بھی کرنسی میں لین دین کر سکتا ہے۔ کریڈٹ کارڈ ہولڈر اپنی جمع کرائی گئی رقم کے حساب سے پاکستان یا پاکستان سے باہر رقم کے حصول کے لیے کریڈٹ کارڈ کی سہولت استعمال کر سکتا ہے۔

بینک پاکستان میں یا پاکستان سے باہر بینکنگ کی سہولیات جیسا کہ کریڈٹ کارڈ، بینک گارنٹی، قرضہ / کریڈٹ وغیرہ کی سہولت حاصل کرنے کے لیے اکاؤنٹ ہولڈرز کے لیے لی ان (Lein) کی نشاندہی بھی کر سکتا ہے۔ فارن کرنسی اکاؤنٹس زکوٰۃ اور ٹیکسوں سے مستثنٰی ہیں۔

4.1.2 نیگوشی ایبل انسٹرومنٹس Negotiable Instruments

لفظ نیگوشی ایبل (*Negotiable*) کا مطلب ہے "قابلِ غور" جبکہ لفظ انسٹرومنٹ (*Instrument*) کا مطلب ہے تحریری ثبوت جس سے حق ثابت ہو۔ اس لیے نیگوشی ایبل انسٹرومنٹس کا مطلب لکھے گئے کاغذات ہیں جو کہ کسی شخص کے حق کو ثابت کرتے ہیں جس پر آزادانہ وصولی بھی کی جا سکتی ہے اور حق کی تصدیق کروائی جا سکتی ہے۔

نیگوشی ایبل انسٹرومنٹ سے مراد ایک اقرار نامہ یا ہنڈی، باہم تبادلہ کا بل یا چیک جو کہ تحریر کے مطابق یا حامل ہذا کو قابل ادائیگی ہوتا ہے۔

باہم تبادلہ کا بل Bill of Exchange

باہم تبادلہ کا بل ایک ایسا تحریری انسٹرومنٹ ہے۔ جو غیر مشروط حکم پر مشتمل ہوتا ہے جسے بنانے والا دستخط کرتا ہے اور خاص شخص کو ہدایت کر رہا ہوتا ہے کہ وہ ایک خاص رقم اس شخص کو یا اس کی مرضی کے مطابق یا حامل ہذا کو ادا کردے۔

باہمی تبادلہ کی پارٹیاں Parties of Bill of Exchange

ڈراور *(Drawer)*: وہ شخص جو کہ بل کی رقم ادا کرتا ہے۔

ڈرائی *(Drawee)*: وہ شخص جس کے لیے رقم ادا کی جاتی ہے۔

پے ای *(Payee)*: وہ شخص جس کو ادائیگی کی جاتی ہے۔

چیک Cheque

تبادلہ کا بل جو ایک مخصوص بینکر سے حاصل کیا جاتا ہے اور اس وقت تک قابل ادا نہیں ہوتا جب تک مطالبہ نہ کیا جائے۔

باہمی تبادلہ کی پارٹیاں

ڈر اور
ڈرائی
پے ای

پے آڈر Pay Order

یہ بھی ایک چیک کی طرح ہوتا ہے جسے بینک اپنے گاہک کی درخواست پر جاری کرتا ہے یا ایک مخصوص شخص کو ایک مخصوص رقم کی ادائیگی اپنے اخراجات میں کرنے لیے کہتا ہے یا مخصوص آدمی کی ہدایت پر مخصوص رقم ادا کرنے کو کہتا ہے۔ پے آڈر عام طور پر معاملہ میں شامل پوری رقم وصول ہونے پر جاری کیے جاتے ہیں۔ جس کا مطلب ہے کہ اسے پیسوں کی کمی کی بناء پر واپس نہیں کیا جائے گا۔ اسے بینکرز کا چیک یا کیشیر کا چیک بھی کہتے ہیں۔

بینک ڈرافٹ Bank Draft

رقم کی ادائیگی کا ایک ہدایت نامہ جس میں بینک کی ایک برانچ اپنے ہی بینک کی دوسری برانچ سے پے ای (Payee) کو ادا کرنے کے لیے یا مطالبہ پر ادا کرنے کے لیے کہتی ہے۔ چیک کی بہ نسبت بینک ڈرافٹ کی اہمیت زیادہ ہے کیونکہ یہ فنڈ کی کمی کی بناء پر کبھی بھی ادائیگی کے بغیر واپس نہیں ہوتا کیونکہ اس کی ادا شدہ رقم کی مصدقہ تحریر ہوتی ہے۔ ڈرافٹ ان برانچوں سے لیا جاتا ہے جو شہر سے باہر ہوتی ہیں۔ بینک ڈرافٹ تیار کرنے کے لیے بینک برائے نام فیس لیتا ہے۔ جبکہ پے آڈر بہت سے بینک بغیر فیس کے جاری کر دیتے ہیں۔

4.1.3 آن لائن بینکنگ Online Banking

الیکٹرونک کی بنیاد پر بینک کی وہ خدمات جو کہ اے ٹی ایمز (ATMs)، پی او ایسیز (POSs)، آٹومیٹڈ کلیئرنگ ہاؤس، نیٹ ورک، انٹرنیٹ یا وائر (Wire) جیسے ذریعوں سے مہیا کی جاتی ہیں آن لائن بینکنگ کہلاتی ہیں۔ دوسرے الفاظ میں آن لائن بینکنگ ایک ایسا نظام ہے جو بروقت الیکٹرونک مواصلات اور کمپیوٹرائیزڈ لنکس کے ذریعے بینک اور گاہک کے درمیان لین دین بذریعہ ٹیلی فون لائن یا سٹیلائیٹ یا اے ٹی ایم کے ذریعے بینک کو ہدایات نشر کرتا رہتا ہے۔

گاہک آن لائن بینکنگ نظام کے تحت کسی بھی مخصوص بینک میں اکاؤنٹ برقرار رکھ سکتا ہے اور اسی بینک کی کسی بھی برانچ سے رقم نکلوا بھی سکتا ہے اور جمع بھی کروا سکتا ہے۔ اگر گاہک کو ڈیبٹ یا کریڈٹ کارڈ جاری کیا گیا ہے تو گاہک اے ٹی ایم جو کہ ایم نیٹ یا ون لنک بینک سے ملی ہوئی ہے کے ذریعے رقم نکلوا یا منتقل کر سکتا ہے۔ آن لائن بینکنگ نظام کے تحت پیغام بھیجنے والے سے رقم واپس کرنے والے بینک اور رقم واپس کرنے والے بینک سے رقم ادا کرنے والے بینک کو ہدایت بذریعہ الیکٹرونکس مواصلات نشر کی جاتی ہیں۔ فنڈز کا حصول اور رقم کی ادائیگی بہت تھوڑے وقت میں ہو جاتی ہے۔

ڈیبٹ کارڈ/اے ٹی ایم کارڈ Debit Card / ATM Card

ڈیبٹ کارڈ، کارڈ ہولڈر کو اس قابل بناتا ہے کہ اس کی خریدی گئی اشیاء پر براہ راست اس کے اکاؤنٹ میں موجود رقم سے کٹوتی کر لی جائے۔ اے ٹی ایم کارڈ ادائیگی کا کارڈ ہے جو ایک شخص کو جاری کیا جاتا ہے تا کہ وہ اے۔ ٹی۔ ایم مشین کو چلا کر اپنے فنڈز کو منتقل یا حاصل کر سکے۔ اکاؤنٹ ہولڈر کو لین دین ممکن بنانے کے لیے ایک پن کوڈ بھی الاٹ کیا جاتا ہے۔ اب ڈیبٹ کارڈ اور اے ٹی ایم کارڈز کی تقریباً ایک جیسی خوبیاں ہیں۔

کریڈٹ کارڈ (ویزا اور ماسٹر کارڈ) Credit Card (Visa and Master Card)

یہ کارڈ ظاہر کرتا ہے کہ اس کارڈ ہولڈر کو قرض حاصل کرنے کی ایک حد دی گئی ہے۔ اس کارڈ کے ذریعے کارڈ ہولڈر خاص حد تک خریداری کر سکتا ہے یا نقد رقم وصول کر سکتا ہے۔ قرض دی گئی رقم مقررہ مدت کے اندر ادا کرنا ہوتی ہے یا حصوں میں بھی دی جا سکتی ہے جبکہ میزان یا قرض کی رقم جزوی طور پر ادا کرنے پر بقایا رقم کو اصل قرض سمجھا جاتا ہے اور اس پر بینک منافع وصول کرتا ہے۔ بعض اوقات کریڈٹ کارڈ کی سالانہ فیس بھی وصول کی جاتی ہے۔ ویزا کارڈ ہر گاہک کو جاری کیا جاتا ہے جبکہ ماسٹر کارڈ غیر معمولی گاہکوں کو جن کی بہت زیادہ قدر ہوتی ہے کو جاری کیا جاتا ہے اس کارڈ پر عام طور پر پرکشش قرض کی حدود ہوتی ہیں۔ ویزا اور ماسٹر دو مختلف کمپنیاں ہیں جن کے ذریعے بینک کریڈٹ کارڈز جاری کرنے کا انتظام کرتا ہے۔

اے ٹی ایم ATM (Automated Teller Machine)

بینک اپنے اکاؤنٹ ہولڈرز کو نقد رقم کی ادائیگی کے لیے اے ٹی ایم مشین نصب کرتا ہے۔ یہ کمپیوٹرائزڈ مشین ہے جو بینک کے ڈیٹا میں سے جڑی ہوتی ہے۔ اس مشین کے ذریعے بینک کی طرف سے جاری کیے ہوئے مقناطیسی اشاراتی نظام والے اے ٹی ایم کارڈ کو گاہک اپنا مخصوص پن کوڈ نمبر کے ساتھ استعمال کرتے ہوئے 24 گھنٹے میں جب چاہیے نقد رقم نکلوا سکتا ہے۔ اے ٹی ایم کو گاہک رقوم کے نکلوانے، فنڈز کے منتقل کرنے، بیلنس معلوم کرنے اور اکاؤنٹ کا مختصر ریکارڈ حاصل کرنے کے لیے بھی استعمال کر سکتا ہے۔ اے ٹی ایم کو آن لائن یا آف لائن کے ذریعے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مزید برآں دوسری بہت ساری بینک کی خدمات بہت سے عوامل پر مشتمل اے ٹی ایم مشین کے ذریعے مہیا کی جا رہی ہیں۔

4.2 کرنسیوں کا تبادلہ EXCHANGE OF CURRENCIES

لفظ فارن ایکسچینج کرنسیوں کے تبادلہ کے طریقہ کار سے متعلق ہے جس کے ذریعہ متعلقہ ادائیگیاں بین الاقوامی تجارت کے مطابق کی جاتی ہیں۔ یہ اس طریقہ کار پر مشتمل ہوتا ہے جس کے ذریعے ایک ملک کی کرنسی کو دوسرے ملک کی کرنسی میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

مختلف ممالک کرنسی کی مختلف اقسام استعمال کرتے ہیں۔ ان کی کرنسیوں کے مختلف نام ہیں۔ برطانیہ پاؤنڈ سٹرلنگ استعمال کرتا ہے۔ امریکہ، امریکن ڈالر استعمال کرتا ہے۔ تھائی لینڈ بھاٹ (*Bhat*) استعمال کرتا ہے۔ ملائیشیا رنجیت (*Ringgit*) استعمال کرتا ہے۔ انڈونیشیا روپیہ (*Rupiah*) استعمال کرتا ہے فلپائینی پیسو (*Peso*) اور سنگاپور سنگاپوری ڈالر استعمال کرتے ہیں۔ ہم فارن کرنسی کسی بھی بینک یا منی چینجر سے خرید سکتے ہیں۔

ہر روز نامور بینک مختلف کرنسیوں کے تبدیل کروانے کی قیمت مقرر کرتے ہیں۔ یہ ریٹس روزانہ کی بنیاد پر تبدیل ہوتے ہیں۔ جن کا انحصار مختلف کرنسیوں کی طلب اور رسد پر ہوتا ہے۔

درج ذیل جدول مختلف ممالک کی کرنسیوں کے تبادلہ ریٹ کو ظاہر کرتا ہے جو کہ ایک پرائیویٹ بینک نے لگایا ہے۔

کرنسی	فروخت ٹی ٹی اور او ڈی	خرید ٹی ٹی کلین	خرید او ڈی / ٹی چیک
یو ایس ڈالر	روپے 84.100	روپے 83.800	روپے 83.5796
پاؤنڈ	روپے 129.7968	روپے 129.4542	روپے 129.1092
کینیڈین ڈالر	روپے 83.9412	روپے 83.7246	روپے 83.5781
آسٹریلین ڈالر	روپے 77.7588	روپے 77.5820	روپے 77.4379
ین	روپے 0.895236	روپے 0.893009	روپے 0.891447
ڈینش کرونی	روپے 15.1066	روپے 15.0598	روپے 15.0334
سعودی ریال	روپے 22.4000	روپے 22.3449	روپے 22.3058
سوس فرانک	روپے 78.3363	روپے 78.1133	روپے 77.9766
درھم	روپے 22.8702	روپے 22.8145	روپے 22.7746
ایچ کے ڈی	روپے 10.8193	روپے 10.7934	روپے 10.7745
سنگاپورین ڈالر	روپے 61.4529	روپے 61.2484	روپے 61.1412
سویڈش کرونی	روپے 11.7391	روپے 11.6948	روپے 11.6743
باتھ	روپے 2.6063	روپے 2.5976	روپے 2.5931
یورو	روپے 112.4088	روپے 112.0993	روپے 111.8057

- ٹی ٹی سے مراد ٹیلی گرافک ٹرانسفر ہے۔
- او۔ڈی سے مراد اوور ڈرافٹ ہے۔
- ٹی سی سے مراد ٹریولر چیک ہے۔

اوپر دیئے گئے جدول کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مثالوں کو حل کیجئے۔

مثال 1:- کسی ایک ملک کی دی گئی کرنسی کی قیمت کو دوسرے ملک کی کرنسی میں تبدیل کیجئے۔

(i) پاکستانی 5,00,000 روپے کو یورو میں۔ (ii) 50 پاؤنڈز کو یو ایس ڈالرز میں۔

(iii) 250 یو ایس ڈالرز کو پاؤنڈ سٹرلنگ میں۔ (iv) 5000 سعودی ریال کو پاکستانی روپوں میں

حل:-

(i) رقم = 5,00,000 روپے

یورو کا ریٹ = 112.4088 روپے

یورو کی تعداد $= \dfrac{500,000}{112.4088}$

$= 4,448.05$

(ii)

یو کے پاؤنڈ کا ریٹ (خرید) = 129.4542 روپے

50 پاؤنڈ کی رقم = 50 × 129.4542 روپے

= 6,472.71 روپے

یو ایس ڈالرز کا ریٹ (فروخت) = 84.100 روپے

50 پاؤنڈ کے تبادلہ میں ڈالرز = $\frac{6,472.6}{84.100}$

= 76.9644$

(iii)

یو ایس ڈالرز کا ریٹ (خرید) = 83.800

250 ڈالرز = 250 × 83.800 روپے = 20,950 روپے

پاؤنڈ سٹرلنگ کا ریٹ (فروخت) = 129.7968

250 ڈالرز کے تبادلہ میں پاؤنڈ سٹرلنگ = $\frac{20950}{129.7968}$

= 161.406 پاؤنڈز

(iv)

سعودی ریال کا ریٹ = 22.3449 روپے

پاکستانی روپوں میں رقم = 5,000 × 22.3449 روپے

= 1,11,724.5 روپے

مثال 2:- سعودیہ میں ایک پاکستانی ملازم 3200 ریال ماہانہ کماتا ہے۔ وہ 2500 ریال ماہانہ خرچ کرتا ہے۔ بتایئے:

(i) اس کی ماہانہ بچت کیا ہوگی اگر: روپے 22.400 = ایک ریال

(ii) وہ سال بعد اپنی بچت پاکستان واپس بھیجتا ہے۔ جب وہ بچت پاکستان بھیجتا ہے اس وقت 22.6203 روپے فی ریال کے ریٹ سے تبدیلی کی بنا پر اس کی سیونگ میں اضافہ بیان کیجئے۔

حل:-

ماہانہ آمدنی = 3200 ریال

ماہانہ اخراجات = 2500 ریال

ماہانہ بچت = 3200 − 2500 = 700 ریال

روپوں میں بچت اگر:

ایک ریال = 22.400 روپے

700 ریال = 700 × 22.400

= 15,680 روپے

ریٹ میں اضافہ سے پہلے:

ایک سال کی بچت $= 700 \times 12 = 8400$ ریال

پرانے ریٹ پر سالانہ بچت

$= 8400 \times 22.400$

$= 1,88,160$ روپے

ریٹ میں اضافہ کی بناء پر سالانہ بچت

$= 8400 \times 22.6203 = 1,90,010$

بچت میں اضافہ $= 1,90,011 - 1,88,160$

$= 1851$ روپے

مشق 4.1

1- 250 یو ایس ڈالرز کو پاؤنڈ سٹرلنگ میں تبدیل کیجئے۔

2- 5000 سعودی ریال کو پاکستانی روپوں میں تبدیل کیجئے۔

3- ایک امپورٹر ایک کار کو جاپان سے 5000 ین میں امپورٹ کرتا ہے۔ ڈلیوری تین ماہ بعد دی جانی تھی۔ معاہدہ کے وقت ایک ین 0.895236 روپے کے برابر تھا۔ معاہدہ کے وقت ادائیگی کر دی گئی۔ ڈلیوری کے وقت ایک ین 0.892236 روپے ہو گیا۔ امپورٹر کا نفع یا نقصان معلوم کیجئے۔

4- ایک گاہک 150 امریکن ڈالرز کو روپوں میں تبدیل کرنا چاہتا ہے۔ وہ ایک منظور شدہ ڈیلر کے پاس جاتا ہے۔ وہ اسے تبادلہ کی شرح: روپے 1 dollar = 84.100 پیش کش کرتا ہے۔ اگر وہ کسی منی چینجر سے تبدیل کرواتا ہے تو قیمت روپے 1dollar = 83.4495 ہے۔ روپے معلوم کیجئے۔ جبکہ

(i) اگر منظور شدہ ڈیلر سے تبدیل کروائے جائیں

(ii) منی چینجر سے تبدیل کرائے جائیں

(iii) منی چینجر سے تبدیل کروانے سے نقصان

5- پاکستان میں چائے کا ریٹ 2.1 روپے فی پاؤنڈ ہے۔ ریٹ فی کلوگرام معلوم کیجئے۔ جبکہ

(i) ایک پاؤنڈ = 0.4536 کلوگرام

(ii) اگر ایک سعودی ریال 22.400 روپے کے برابر ہو تو سعودی عرب میں کیا قیمت ہوگی؟

-6 ایک ایکسپورٹر انگلستان کو 4000 پاؤنڈ سٹرلنگ کے کارپٹس ایکسپورٹ کرتا ہے۔ اس موقع پر تبادلہ ریٹ ایک پاؤنڈ سٹرلنگ 129.4542 روپے کے برابر تھا۔ وہ اس وقت رقم وصول کرتا ہے۔ جب تبادلہ کا ریٹ ایک پاؤنڈ سٹرلنگ 129.0599 روپے کے برابر تھا۔ اس کو کتنا نقصان ہوا؟

-7 سعودی عرب میں ایک پاکستانی رہائشی 4370 ریال ماہانہ کماتا ہے اس کے ماہانہ اخراجات 3450 ریال ہیں۔ وہ اپنی بچت ہر ماہ پاکستان واپس بھیجتا ہے۔ وہ ایک سال میں کتنی بچت کرتا ہے؟

اگر تبادلہ کا ریٹ: روپے 22.400 = 1 سعودی ریال

سال بعد تبادلہ کا ریٹ: روپے 22.3004 = 1 سعودی ریال

ماہانہ رقم واپس بھجوانے پر نفع یا نقصان بتائیے۔

-8 رضوان سعودی عرب میں ایک کار 15000 ریال میں خرید تا ہے۔ ڈلیوری 3 ماہ بعد ہونی تھی جبکہ ادائیگی بھی ڈلیوری کے موقع پر کی جانی تھی۔ معاہدہ کے وقت تبادلہ کا ریٹ

روپے 22.400 = ایک سعودی ریال

جبکہ ڈلیوری کے وقت تبادلہ کا ریٹ. روپے 22.0827 = ایک سعودی ریال

ریٹ میں تبدیلی کی بناء پر نفع یا نقصان معلوم کیجئے۔

-9 علی کا ایک دوست سعودی عرب سے علی کو 450 ریال بھیجتا ہے۔ بینک تبادلہ کے دو ریٹس کی پیشکش کرتا ہے۔

(ٹی ٹی کے ذریعہ خرید) روپے 22.3449 = 1 سعودی ریال

(ٹی سی کے ذریعہ خرید) روپے 22.2146 = 1 سعودی ریال

کونسا ریٹ قابل نفع ہوگا؟ مزید یہ کہ رقم پاکستانی روپوں میں معلوم کیجئے۔

4.3 منافع/مارک اپ PROFIT/MARKUP

پاکستان میں اسلامی بینکنگ کے شروع ہونے سے نفع اور نقصان کی شراکت داری اور فنانسنگ کے اسلامی طریقوں کے تحت "سود" کا لفظ "منافع" یا "مارک اپ" سے تبدیل کر دیا گیا ہے۔

جب ہم بینک میں اپنی بچتوں کو جمع کراتے ہیں۔ تو بینک سے اپنی رقم استعمال کرنے کے عوض ہم کچھ اضافی رقم وصول کرتے ہیں۔ یہ اضافی رقم جو بینک ہماری رقم کے استعمال کے تبادلہ میں ہمیں دیتا ہے جمع کرائی گئی رقم پر منافع کہلاتا ہے۔ اس طرح دیا گیا منافع بینک کے لیے اخراجات میں شمار ہوتا ہے اور گاہک کے لیے نفع شمار ہوتا ہے۔

اسی طرح جب ہم بینک سے قرض حاصل کرتے ہیں تو ہم بینک کو اس کی دی ہوئی رقم کو استعمال کرنے کے عوض کچھ اضافی رقم دیتے ہیں۔ یہ زائد رقم جو ہم بینک کو ادا کرتے ہیں۔ مارک اپ کہلاتی ہے۔ یہ بینک کے لیے آمدنی جبکہ قرضدار یا گاہک کے لیے اخراجات ہوتی ہے۔

جمع شدہ رقم پر منافع یا قرض پر مارک اپ کو شرح فی صد کے حساب سے لیا جاتا ہے۔ اسے ریٹ کہتے ہیں۔ وہ رقم جو جمع کروائی/لگائی جاتی ہے یا قرض لی جاتی ہے اصل زر کہلاتی ہے۔ منافع یا مارک اپ عام طور پر فکسڈ سالانہ ریٹ پر لیا جاتا ہے۔ جس کو سالانہ ریٹ کہتے ہیں۔ بعض اوقات منافع کے ریٹ کو ششماہی، سہ ماہی، ماہانہ یا روزانہ کی بنیاد پر بھی نکالا جاتا ہے۔ منافع یا مارک اپ کی رقم جمع کروائی گئی یا ادھار لی گئی رقم کی مدت پر منحصر ہوتی ہے۔ اگر منافع یا قرض کو اصل زر پر نکالا جائے تو اسے سادہ منافع یا مارک اپ کہتے ہیں۔ جب پچھلے سال کے اصل زر میں نفع جمع کرنے کے بعد اگلے سال کا اصل زر سمجھا جائے اور اگلے سال کا نفع اس نئے اصل زر کے حساب سے حل کیا جائے تو اسے مرکب منافع کہتے ہیں۔ جس کا مطلب اصل زر کے ساتھ منافع پر منافع۔

ضروری اصطلاحات درج ذیل ہیں۔

(i) رقم / سرمایہ جو قرض لیا گیا ہو یا دیا گیا ہو اصل زر کہلاتا ہے۔

(ii) حاصل کیے گئے فی صد منافع کو شرح (Rate) کہتے ہیں۔

(iii) قرض یا جمع کرائی گئی رقم کے دورانیہ کو مدت کہتے ہیں۔

(iv) جب اصل زر میں منافع کو جمع کیا جاتا ہے تو کل رقم کو اماؤنٹ (Amount) کہتے ہیں۔

4.3.1 منافع معلوم کرنا Calculate Profit

گاہک جو رقم بینک میں برقرار رکھتا ہے۔ اس پر بینک جو اضافی رقم دیتا ہے اسے منافع کہتے ہیں۔ فی صد شرح منافع جمع کرائی گئی رقم کی مدت پر منحصر ہوتی ہے۔ منافع کی ادائیگی کا طریقہ کار، ماہانہ، سہ ماہی، ششماہی یا سالانہ بھی ہو سکتا ہے۔ اصل زر پر شرح منافع کا دورانیہ عام طور پر ایک سال ہوتا ہے منافع کی شرح کا بینک ششماہی یا سالانہ کی بنیاد پر اعلان کرتا ہے۔ روایتی بینکنگ کے تحت جمع رقم پر سود کا ریٹ پہلے سے طے شدہ بنیاد پر ہوتا ہے۔ اسلامک بینکنگ میں پہلے سے طے شدہ منافع کا کوئی تصور نہیں ہوتا۔ اس کی بجائے رقم جمع کرانے والا بینک کے نفع اور نقصان میں شراکت کرتا ہے۔ جمع رقم پر منافع بینک کا خرچہ ہوتا ہے اور اسے بینک کے اخراجات میں شامل کیا جاتا ہے۔

درج ذیل کلیہ کو جمع رقم یا بینک میں لگائی گئی رقم، مالی اداروں یا نیشنل سیونگ سنٹرز میں لگائی رقوم پر نفع نکالنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{منافع (سادہ)} = \frac{\text{شرح} \times \text{مدت} \times \text{اصل زر}}{100}$$

درج بالا کلیہ سے سالانہ کی بنیاد پر منافع معلوم کیا جاتا ہے۔ روزانہ، ماہانہ، سہ ماہی، ششماہی کی بنیاد پر منافع معلوم کرنے کے لیے مدت کے دورانیہ کو ضرورت کے مطابق عدد سے تقسیم کر کے سالوں میں تبدیل کرتے ہیں۔

اگر بقیہ معلومات دی گئی ہوں تو درج بالا مساوات کو دوبارہ ترتیب دیتے ہوئے غیر موجود حصے کو معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\text{اصل زر} = \frac{100 \times \text{منافع کی رقم}}{\text{شرح} \times \text{مدت}}$$

(جبکہ نفع، مدت اور شرح دی گئی ہوں؟)

$$\text{اصل زر} = \frac{100 \times \text{کل رقم}}{100 + (\text{شرح} \times \text{مدت})}$$

(جبکہ رقم، مدت اور شرح دی گئی ہوں)

$$\text{شرح} = \frac{100 \times \text{منافع کی رقم}}{\text{اصل زر} \times \text{مدت}}$$

$$\text{مدت} = \frac{100 \times \text{منافع کی رقم}}{\text{اصل زر} \times \text{شرح}}$$

(جبکہ منافع، شرح اور اصل زر دی گئی ہوں)

کمپاؤنڈ منافع (منافع پر منافع) درج ذیل کلیہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{حتمی رقم} = \text{اصل زر} \times \left(1+\frac{\text{شرح}}{100}\right)^{\text{مدت}}$$

$$\text{منافع کمپاؤنڈ} = \text{حتمی رقم} - \text{اصل رقم}$$

مثال 1:- اگر ہم 10% سالانہ کی شرح سے ایک سیونگ اکاؤنٹ میں 1000 روپے لگاتے ہیں تو ایک سال میں ہمیں کتنے پیسے ملیں گے؟

حل:

$$\text{منافع} = \frac{10}{100} \times 1000 = 100 \text{ روپے}$$

ایک سال بعد جو رقم ملے گی۔ = 1000 روپے + 100 روپے = 1100 روپے

ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک سال کے 10 فی صد سالانہ شرح سے 1000 روپے لگانے سے 1100 روپے اگلے سال کے لیے (مستقبل میں) قیمت ہے۔

مثال 2:- علی نے 5% کی سالانہ شرح سے 2 سال کے لیے نیشنل بینک آف پاکستان میں اپنے سیونگ اکاؤنٹ میں 200 روپے جمع کرائے۔ 2 سال جمع کرائی گئی رقم پر منافع کی کیا رقم ہوگی؟

حل:

اصل زر = 2000 روپے

شرح فی صد = 5 %

مدت = 2 سال

$$\text{ایک سال کا نفع} = \frac{\text{اصل زر} \times \text{شرح فی صد}}{100}$$

$$= \frac{2000 \times 5}{100} \text{ روپے} = 100 \text{ روپے}$$

اصل زر (اگلے سال کے لیے) = 2000 روپے + 100 روپے = 2100 روپے

$$\text{دوسرے سال کا منافع} = \frac{2100 \times 5}{100} \text{ روپے} = 105 \text{ روپے}$$

2 سالوں کا منافع = 100 روپے + 105 روپے = 205

مثال 3:- اگر 640 روپے پر 12 سال کے لیے سادہ منافع 384 روپے ہو تو منافع کی شرح فی صد معلوم کیجیے۔

حل:-

اصل زر = 640 روپے

سادہ منافع = 384 روپے

مدت = 12 سال

$$\text{شرح} = \frac{100 \times \text{منافع کی رقم}}{\text{اصل زر} \times \text{مدت}}$$

$$= \frac{384 \times 100}{640 \times 12} = 5\%$$

مثال 4:- اگر سرمایہ $3\frac{2}{3}\%$ سالانہ سادہ شرح منافع سے لگایا جائے تو کتنے عرصہ میں 9400 روپے 10,951 روپے ہوجائیں گے۔

حل:-

اصل زر = 9400 روپے

رقم (اماؤنٹ) = 10,951 روپے

سادہ منافع = 10951 روپے − 9400 روپے = 1551 روپے

شرح $= 3\frac{2}{3}\% = \frac{11}{3}\%$

$$\text{مدت} = \frac{100 \times \text{منافع کی رقم}}{\text{شرح} \times \text{اصل زر}}$$

$$= \frac{1551 \times 100 \times 3}{9400 \times 11} = \frac{9}{2}\ \text{سال} = 4\frac{1}{2}\ \text{سال}$$

مثال 5:- 3 سال کے لیے 5% سالانہ شرح پر 4000 روپے پر کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجیے۔

حل:-

اصل زر = 4000 روپے

شرح = 5%

مدت = 3 سال

$$\text{حتمی رقم} = (4000)\times\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$$

$$= 4000\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}=\frac{9261}{2}=4630.50\ \text{روپے}$$

کمپاؤنڈ منافع = 4630.50 روپے − 4000 روپے = 630.50 روپے

مثال 6:- 4% سالانہ شرح سے 2 سال 6 ماہ کے لیے 5000 روپے پر کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجیے۔

حل:-

اصل زر = 5000 روپے

شرح = 4%

مدت = $2\frac{1}{2}$ سال

حتمی رقم $= 5000\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^2\left(1+\frac{2}{100}\right)$

$= 5000\times\frac{104}{100}\times\frac{104}{100}\times\frac{102}{100}=\frac{137904}{25}=5516.16$ روپے

کمپاؤنڈ منافع = 5516.160 روپے − 5000 روپے = 516.16 روپے

مثال 7:- 1500 روپے پر 2 سال کے لیے 6% سالانہ کی شرح سے ششماہی ادائیگی کے لیے قابل ادا کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجیے۔

حل:-

اصل زر = 1500 روپے

شرح = 6% سالانہ = 3% ششماہی

مدت = 2 سال یا 4 ششماہی

حتمی رقم $= 1500\times\left(1+\frac{3}{100}\right)^4$

حتمی رقم $= 1500\times\frac{103}{100}\times\frac{103}{100}\times\frac{103}{100}\times\frac{103}{100}=1688.26$ روپے

کمپاؤنڈ منافع = 1688.26 روپے − 1500 روپے = 188.26 روپے

مارک اپ معلوم کرنا Calculation of Markup

اسلامی مالیاتی طریقہ کار کے تحت بینک جو منافع حاصل کرتا ہے اسے مارک اپ کہتے ہیں۔ بینک مارک اپ کی شرح کو روزانہ کی بنیاد پر سٹیٹ بینک آف پاکستان کی طرف سے جاری کی گئی بینچ مارکنڈ شرح کو مدنظر رکھتے ہوئے فکس کرتا ہے۔ اس بینچ مارکنڈ شرح کو کراچی انٹر بینک آفر ریٹ (KIBOR) کہتے ہیں۔ جسے SBP ایک ماہ، 3 ماہ، 6 ماہ، 9 ماہ اور 12 ماہ کی شرح کے لیے جاری کرتا ہے۔ بینک مارک اپ کی شرح اپنے شرح منافع کو KIBOR کی شرح میں جمع کر کے وصول کرتا ہے۔ اس شرح منافع کو عام طور پر سپریڈ (Spread) کہتے ہیں جو کہ قرض لینے اور قرض دینے کی شرح منافع کے درمیان فرق ہوتا ہے۔ کمرشل بینک کے لیے مارک اپ ایک بڑا ذریعہ آمدنی ہوتا ہے۔ اس کو گاہکوں سے حاصل کیا، یا دلایا جا سکتا ہے اور اسے بینک کی آمدنی اکاؤنٹ میں جمع کیا جاتا ہے۔ اسلامک بینکنگ میں پہلے سے طے شدہ مارک اپ کی شرح نہیں ہوتی اور فنانسنگ اشیاء کی خرید فروخت کے معاہدے کی بنیاد پر کی جاتی ہے اور بل جس کے تحت فروخت کی قیمت نکالی جاتی ہے۔ قیمت خرید میں مارک اپ جمع کیا جاتا ہے۔

قرض پر یا ادھار پر لی گئی رقم پر مارک اپ درج ذیل کلیوں کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{مارک اپ (سالانہ)} = \frac{\text{ادھار لی گئی رقم} \times \text{شرح}}{100}$$

$$\text{مارک اپ (ماہانہ)} = \frac{\text{ادھار لی گئی رقم} \times \text{شرح}}{100 \times 12}$$

$$\text{مارک اپ (روزانہ)} = \frac{\text{ادھار لی گئی رقم} \times \text{شرح}}{100 \times 365}$$

مثال:- ایک آدمی 1,00,000 روپے 3 سال کے لیے 16% کی سالانہ شرح سے ادھار لیتا ہے۔ اسے کتنا مارک اپ ادا کرنا ہوگا؟

حل:- اصل زر = 100,000 روپے

100,000 روپے کا ایک سال کے لیے مارک اپ $= \frac{16}{100} \times 100{,}000$

= 16000 روپے

100,000 روپے کا 3 سال کے لیے مارک اپ $= 3 \times 16000$

= 48,000 روپے

مشق 4.2

1- ایک مالی ادارہ نے 55 روپے سادہ منافع ایک رقم پر حاصل کیا جو کہ 5 ماہ کے لیے ادھار لی گئی تھی۔ اگر منافع کی شرح 12% سالانہ ہو تو رقم معلوم کیجیے۔

2- جاوید ایک سیونگ سکیم میں 800 روپے 6% سالانہ شرح کے حساب سے لگاتا ہے اور 1200 روپے 7% سالانہ شرح پر لگاتا ہے۔ ان کا ان دونوں رقوم پر کل کتنا منافع ہوگا؟

3- 1,250 روپے کتنا عرصہ کے لیے 6% سالانہ شرح پر سادہ منافع 750 روپے حاصل کرنے کے لیے جمع کروائے جائیں؟

4- علی نے عابد کو 4800 روپے 7 ماہ کے لیے دیے۔ اس دورانیہ کے اختتام پر عابد نے علی کو 119 روپے منافع دینا ہوگا۔ منافع کی سالانہ شرح فی صد معلوم کیجیے۔

5- ایک سال کے دوران جاوید ایک پرائیویٹ بینک میں مارچ کے آخر میں 600 روپے اور جون کے آخر میں 400 روپے جمع کرواتا ہے۔ بینک اسے 3% سالانہ شرح کے حساب سے سادہ منافع تجویز کرتا ہے۔ جاوید نے اس سال دسمبر کے آخر میں جتنی رقم وصول کی وہ معلوم کیجیے۔

6- کس سالانہ شرح منافع پر ایک رقم 680 روپے سے بڑھ کر 3 سال 4 ماہ میں 850 روپے ہو جائے گی؟

7- اس یونٹ میں دیے گئے کلیوں کی مدد سے درج ذیل جدول کی نقل بنائیے اور مکمل کیجیے۔

رقم	سادہ منافع	مدت	منافع کی شرح	اصل زر	
		سال 7	8%	12,000 روپے	(a)
	220 روپے		11%	500 روپے	(b)
	108 روپے	سال 4	9%		(c)
	1,200 روپے	سال 10		3,000 روپے	(d)
3,960 روپے	360 روپے	سال 2			(e)
	189 روپے	سال 18		1,800 روپے	(f)
5,040 روپے		سال 2		4,500 روپے	(g)
1,290 روپے	90 روپے		5%		(h)

8- ایک بینک نے سالانہ شرح منافع 3.5% سے 4% تک بڑھائی۔ بتایئے سعید کتنا اضافی منافع حاصل کرے گا اگر وہ 6400 روپے 6 ماہ کے لیے نئی منافع کی شرح پر جمع کرائے؟

9- جمشید کی بیوی نے 4000 روپے کسی بینک میں لگائے۔ جو اپنے سرمایہ کاروں کو $7\frac{1}{4}\%$ سالانہ شرح سے سادہ منافع دیتا ہے۔ دو سال بعد شرح منافع بڑھ کر 8% ہو جاتی ہے۔ 7 سال بعد اس کے پاس کتنی رقم ہوگی؟

10- داؤد نے کسی بینک میں ایک خاص رقم جمع کرائی۔ اگر منافع کی شرح $3\frac{3}{4}\%$ سالانہ سے کم ہو کر $3\frac{1}{2}\%$ ہو جائے تو داؤد کا منافع ایک سال میں 50 روپے کم ہو جاتا ہے۔ اس نے کل کتنی رقم جمع کرائی؟

11- کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجیے؟

(i) 450 روپے 2 سال کے لیے 10% سالانہ شرح پر کمپاؤنڈ منافع

(ii) 750 روپے 3 سال کے لیے 11% سالانہ شرح پر کمپاؤنڈ منافع

(iii) 5000 روپے 2 سال کے لیے $11\frac{3}{4}\%$ سالانہ شرح پر کمپاؤنڈ منافع

(iv) 1200 روپے 3 سال کے لیے 4% سالانہ شرح پر کمپاؤنڈ منافع

(v) 10000 روپے 3 سال کے لیے $7\frac{1}{2}\%$ سالانہ شرح پر کمپاؤنڈ منافع

12- وسیم نے 5000 روپے $5\frac{1}{4}\%$ سالانہ شرح پر کمپاؤنڈ منافع کے لیے لگائے۔ تیسرے سال کے اختتام پر رقم کیا ہوگی؟

13- جاوید نے 800 روپے $12\frac{1}{2}\%$ سالانہ شرح سے کمپاؤنڈ منافع کے لیے ششماہی کمپاؤنڈ کے حساب سے لگائے پہلے سال کے اختتام پر اسے کتنی رقم ملے گی؟

14- سلیم نے 9000 روپے 2% سالانہ شرح سے کمپاؤنڈ منافع کے لیے روزانہ کمپاؤنڈ کے حساب سے لگائے۔ تیسرے دن کے اختتام پر رقم کیا ہوگی؟

4.3.1 کمرشل بینکنگ اور نیشنل سیونگ سکیمز سے متعلق حل شدہ مثالیں
Solved Problems Related to Commercial Banking and National Saving Schemes.

مثال 1:- اگر چار سال کی مدت کے لیے 5% کی شرح سے مارک اپ 174 روپے ہو تو ایک شخص کو کتنی رقم ادھار لینا ہوگی؟

حل:-

مارک اپ = 174 روپے

مدت = 4 سال

شرح = 5% سالانہ

اصل زر $= \dfrac{174 \times 100}{5 \times 4} = 870$ روپے

مثال 2:- 18 مئی کو ادھار لی گئی رقم 6900 روپے پر مارک اپ معلوم کیجئے جبکہ یہ رقم 11 اکتوبر کو واپس کر دی گئی۔ اور اس پر شرح منافع $3\frac{1}{2}$ فیصد سالانہ ہے۔

حل:-

اصل زر = 6900 روپے

شرح $= 3\frac{1}{2}\%$

مدت = 146 دن یا $\frac{146}{365}$ سال

(18 مئی تا 11 اکتوبر)

مئی	13 دن
جون	30 دن
جولائی	31 دن
اگست	31 دن
ستمبر	30 دن
اکتوبر	11 دن
ٹوٹل	146 دن

مارک اپ $= \dfrac{6900 \times 146 \times 7}{365 \times 2 \times 100} = 96.60$ روپے

رقم جو واپس کی گئی = 6900 روپے + 96.60 روپے = 6996.60 روپے

مثال 3:- کتنی رقم 3 سال کی مدت میں 5% سالانہ شرح سے 630.50 روپے کمپاؤنڈ منافع دے گی؟

حل:-

فرض کیا رقم $= 100$ روپے

شرح $= 5\%$ سالانہ

مدت $= 3$ سال

حتمی رقم $= 100\times\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$

$= 100\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}=\frac{9261}{80}$ روپے

کمپاؤنڈ منافع $= \frac{9261}{80}-100=\frac{1261}{80}$

دیا گیا کمپاؤنڈ منافع $= 630.50=\frac{1261}{2}$

اگر دیا گیا کمپاؤنڈ منافع $\frac{1261}{80}$ روپے ہو تو اصل زر $= 100$ روپے

اگر کمپاؤنڈ منافع ایک روپیہ ہو تو اصل زر $=\frac{100\times 80}{1261}$

اگر کمپاؤنڈ منافع $\frac{1261}{2}$ روپے ہو تو اصل زر $=\frac{100\times 80\times 1261}{1261\times 2}$

$= 4000$ روپے

مثال 4:- 25000 روپے پر 4 سال مدت کے لیے 5% سالانہ شرح سے سادہ اور کمپاؤنڈ منافع میں فرق معلوم کیجیے۔

حل:-

اصل زر $= 25000$ روپے

مدت $= 4$ سال

شرح $= 5\%$ سالانہ

سادہ منافع $= \frac{25000\times 4\times 5}{100} = 5000$ روپے

حتمی رقم $= 25000\times\left(1+\frac{5}{100}\right)^4$

$= 25000\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}=30,387.65$ روپے

کمپاؤنڈ منافع $= 30387.65$ روپے $- 25000$ روپے $= 5387.65$ روپے

سادہ منافع اور کمپاؤنڈ منافع میں فرق $= 5387.65$ روپے $- 5000$ روپے $= 387.65$ روپے

مشق 4.3

1. ایک آدمی نے نیشنل بینک سے $12\frac{1}{2}\%$ سالانہ شرح پر 3 مارچ کو 1460 روپے ادھار لیے۔ اسے یکم جولائی کو کتنی رقم دینی ہوگی تاکہ قرض اتارا جاسکے۔

2. ایک دکاندار نے UBL بینک سے 3540 روپے $10\frac{3}{4}\%$ سالانہ شرح پر ادھار لیے اور اسی دن ساری رقم $11\frac{1}{2}\%$ سالانہ شرح پر ادھار میں دے دی۔ اسے 3 سال 4 ماہ بعد کتنا منافع ہوگا؟

3. 2 سال کے لیے 6% سالانہ شرح کے حساب سے الائیڈ بینک نے 8034 روپے منافع کے طور پر حاصل کیے۔ بینک نے کتنے روپے قرضہ دیا؟

4. ایک کمپنی نے 8% سالانہ شرح سادہ مارک اپ پر بینک الفلاح سے 6600 روپے قرض لیا۔ 11 ماہ بعد کمپنی کو بینک کو کیا دینا ہوگا؟

5. اسلامی بینک 2.25% ماہانہ شرح سادہ مارک اپ شخصی قرض پر حاصل کرتا ہے اگر علی 2 سال اور ایک مہینے کے لیے 6400 روپے قرض لیتا ہے۔ تو اسے کتنا مارک اپ ادا کرنا ہوگا؟

6. 2,50,000 روپے پر ایک سال کے لیے کمپاؤنڈ مارک اپ 14% سالانہ شرح کے حساب سے معلوم کیجئے۔

7. 600 روپے پر 4 سال کے لیے 6% سالانہ شرح سے کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجئے۔

8. 50,000 روپے پر 4% سالانہ شرح سے $1\frac{1}{2}$ سال کے لیے کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجئے۔

9. 54000 روپے پر ایک سال کے لیے 12% سالانہ شرح سے کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجئے۔

4.4 بیمہ INSURANCE

4.4.1 بیمہ پالیسی Insurance Policy

کاروباری لین دین اور معاملات میں خطرات سے بچنے کے لیے بیمہ پالیسی ایک اہم ذریعہ ہے۔ بیمہ یا انشورنس دو پارٹیوں کے درمیان ایک معاہدہ ہے جس میں ایک شخص یا پارٹی ایک رقم ماہانہ، سہ ماہی یا سالانہ اقساط کی صورت میں ایک خاص بیمہ کمپنی کو ادا کرنے پر تیار ہوتا ہے تاکہ زندگی، چوری اور نقصانات وغیرہ کو لاحق خطرات کے مقابلہ میں تحفظ مل سکے۔ اس معاہدہ کے تحت انشورنس کمپنی کو طے شدہ رقم یا نقصان کی اصل قیمت یا اچانک موت، خطرہ یا طے شدہ مدت کی تکمیل کی بناء پر واپس ادا کرنا ہوتی ہے۔

انشورنس میں استعمال ہونے والی بنیادی اصطلاحات درج ذیل ہیں۔

(i) ایک بیمہ کمپنی یا ادارہ جو بہت سے خطرات کے خلاف انشورنس کرتا ہے، انشورنس مہیا کرتی ہے اور بیمہ پالیسی جاری کرتا ہے اسے بیمہ کمپنی (Insurer) کہتے ہیں۔

(ii) ایک شخص جس کو انشورنس پالیسی جاری کی جاتی ہے جو کہ انشورنس کے معاہدہ میں فائدہ مند ہوتا ہے انشورڈ یا انشورینٹ (بیمہ دار / بیمہ شدہ) کہلاتا ہے۔

(iii) دو پارٹیوں کے درمیان جو معاہدہ ہوتا ہے وہ انشورنس پالیسی کہلاتا ہے۔

(iv) انشورڈ (بیمہ دار) کی طرف سے وقفہ وقفہ سے ادا کی گئی اقساط پریمیم کہلاتی ہیں۔

(v) وہ مدت جس پر بیمہ دار اور بیمہ کمپنی دونوں راضی ہوں میچورٹی کہلاتا ہے۔

(vi) معاہدہ کی کل رقم جسے میچورٹی یا راضی شدہ مدت کے اختتام پر واپس ادا کی جاتی ہے اس میں اصل رقم جو قسطوں میں ادا کی گئی ہو اور منافع شامل ہو بونس کہلاتا ہے۔

4.4.2 لائف انشورنس اور گاڑی کی انشورنس Life Insurance and Vehicle Insurance

عام طور پر انشورنس دو قسم کی ہوتی ہے۔

i- لائف انشورنس

ii- گاڑی اور جائیداد کی انشورنس

لائف انشورنس Life Insurance

لائف انشورنس ایک معاہدہ ہے۔ جس میں فریقین کے درمیان اصل رقم اور منافع جسے بونس کہتے ہیں کی واپس ادائگی کے لیے ایک میچورٹی مدت پر اتفاق ہو جاتا ہے۔ دوسری صورت میں بیمہ دار کی موت واقع ہونے پر یا کسی حادثہ وغیرہ پر (ان میں سے جو بھی پہلے واقع ہو) انشورنس ادا کی جاتی ہے۔ ایک شخص برھاپے یا کسی نا اہلیت کے لیے بھی انشورنس پالیسی لے سکتا ہے۔ جس کی رقم بیمہ دار کی آمدنی کا 10% سے 50% تک ہو سکتی ہے۔

یہاں ایک مثال میں زندگی کے بیمہ کی صورت میں سالانہ، ششماہی، سہ ماہی اور ماہانہ قسط (پریمیم) کو حل کیا جارہا ہے۔

انشورنس کے وقت انشورنس کروانے والے کی عمر 30 سال ہے۔

پریمیم کی شرح پالیسی کی کل رقم کا 4.5% سالانہ ہے۔

ششماہی پریمیم کی شرح سالانہ پریمیم کا 52% ہے۔

سہ ماہی پریمیم کی شرح سالانہ پریمیم کا 27% ہے۔

ماہانہ پریمیم کی شرح سالانہ پریمیم کا 9% ہے۔

پالیسی کی کل رقم $= 4,00,000$ روپے

4.5% کی شرح سے پہلا پریمیم $= \frac{4.5}{100} \times 4,00,000 = 18,000$ روپے

پالیسی فیس 0.25% کی شرح سے $= \frac{0.25}{100} \times 4,00,000 = 1000$ روپے

سالانہ پریمیم = پہلا پریمیم + پالیسی فیس

$= 18000 + 1000 = 19000$ روپے

اگر 0.25% پالیسی کی رقم، 1000 روپے سے زیادہ بنتی ہو تو صرف 1000 روپے پالیسی فیس کے طور پر لیے جائیں گے۔

اب　پہلا پریمیم $= 18000$ روپے

ششماہی پریمیم $= \frac{52}{100} \times$ (پہلا پریمیم + پالیسی فیس)

$= \frac{52}{100} \times (18000 + 1000)$

$= \frac{52}{100} \times 19000$

$= 52 \times 190 = 9880$ روپے

سہ ماہی پریمیم $= \frac{27}{100} \times 19000$

$= 27 \times 190$ روپے

$= 5130$ روپے

ماہانہ پریمیم $= \frac{9}{100} \times 19000$

$= 9 \times 190$ روپے

$= 1710$ روپے

یہ بات بڑی اہم اور توجہ طلب ہے کہ پالیسی پریمیم کی رقم اور میچورٹی کی مدت کمپنی قوانین کی تحت بیمہ دار کی عمر کے ساتھ مختلف ہوتی ہے۔ عام طور پر بیمہ دار کی زیادہ عمر کے لحاظ سے میچورٹی کی مدت کم کی جاتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں بیمہ دار کی جتنی زیادہ عمر ہوگی میچورٹی کی مدت اتنی ہی کم ہوگی۔

مثال:- پہلا، سہ ماہی اور ماہانہ پریمیم معلوم کیجیے اگر انشورڈ کی عمر 30 سال، پالیسی کی رقم 3,00,000 روپے، میچورٹی مدت 25 سال، پریمیم مقررہ شرح 3.5% اور پالیسی فیس کی شرح 0.25% ہو۔

حل:-

انشورنس کے وقت انشورڈ کی عمر $= 30$ سال

پالیسی کی رقم $= 3,00,000$ روپے

میچورٹی کی مدت $= 25$ سال

پریمیم مقررہ شرح $= 3.5\%$

پالیسی فیس $= 0.25\%$

پہلا پریمیم $= \frac{3.5}{100} \times 3,00,000$

$= 35 \times 300$

$= 10,500$ روپے

پالیسی فیس $= \frac{0.25}{100} \times 3,00,000$

$= 25 \times 30$

$= 750$ روپے

خاندان کی آمدنی کا معاہدہ 0.5% کی شرح سے $= \frac{0.5}{100} \times 3,00,000$

$= 1500$ روپے

کل ادا کی گئی رقم = پہلا پریمیم + پالیسی فیس + خاندانی آمدنی کا معاہدہ

$= 10500$ روپے $+ 750$ روپے $+ 1500$ روپے

$= 12750$ روپے

جب پالیسی میچور ہوتی ہے:

پالیسی کی رقم $= 3,00,000$ روپے ....(i)

25 سال کے لیے 4.5% کی شرح سے بونس $= \frac{4.5}{100} \times 3,00,000 \times 25$

$= 45 \times 300 \times 25$

$= 1125 \times 300$

$= 3,37,500$ روپے ....(ii)

میچورٹی بونس 1.5%، 20 سال کے لیے $= \frac{1.5}{100} \times 3,00,000 \times 20$

$= 15 \times 6000$ روپے

$= 90,000$ روپے ....(iii)

اختتامی بونس 1.6% $= \frac{1.6}{100} \times 3,00,000 \times 20$

$= 16 \times 6000$ روپے

$= 96000$ روپے ....(iv)

گاڑی کی انشورنس Vehicle Insurance

بعض اوقات افراد یا کمپنیاں اپنی گاڑیوں کے چوری ہونے، حادثات کا شکار ہونے یا آگ لگنے کے خطرہ کے پیش نظر انشورنس پالیساں حاصل کرتی ہیں۔ پالیسی کی رقم گاڑی کی کل قیمت یا جزوی قیمت ہوتی ہے۔ جبکہ پریمیم گاڑی کی اصل قیمت یا پالیسی کی کل رقم کا کچھ فیصد ہوتا ہے۔ اس کا کمپنی قوانین کے تحت مختلف مدتوں کے لیے مختلف شرح کے حساب سے فیصلہ کیا جاتا ہے۔ پہلا پریمیم عام طور پر ایک سال کی اقساط کی کل رقم ہوتا ہے۔

مثال 1:- ایک شخص نے اپنی کار کے لیے 3.5% کی شرح سے انشورنس پالیسی لی اور 14500 روپے پہلے سال کے پریمیم کے طور پر ادا کیے۔ اس کی کار کی قیمت بتائیے۔ جبکہ اس نے 500 روپے سروس چارجز کے ادا کیے۔

حل:-

فرض کیا کار کی کل قیمت $= x$ روپے

اس نے کل رقم جو ادا کی $= 14500$ روپے

سروس چارجز جو ادا کیے $= 500$ روپے

پریمیم کی بقایا رقم $= 14500 - 500$ روپے

$= 14000$ روپے

اب 3.5% کا $x = 14000$ روپے

$$\frac{3.5}{100} \times x = 14000 \text{ روپے}$$

$$x = \frac{14000 \times 100}{3.5} \text{ روپے}$$

$$x = \frac{14000 \times 100 \times 10}{35}$$

$$= 400 \times 100 \times 10$$

$$= 400 \times 1000$$

$= 4,00,000$ روپے

کار کی قیمت $= 4,00,000$ روپے

> گاڑی کی انشورنس میں سالانہ پریمیم کم ہوتا رہتا ہے کیونکہ گاڑی کی قیمت میں کمی واقع ہوتی ہے۔ اس لیے پریمیم کو اسی حساب سے لیا جاتا ہے۔

> عام طور پر کچھ سروس چارجز پریمیم میں شامل ہوتے ہیں لیکن ہم یہاں بغیر سروس چارجز سوالات کو زیر بحث لائیں گے۔

$$\text{خاندان کی آمدنی پر بونس } 0.75\% = \frac{0.75}{100} \times 3,00,000 \times 20$$

$= 600 \times 75$ روپے

$= 45,000$ روپے .... (v)

کل رقم جو انشورڈ حاصل کرے گا $= \boxed{i} + \boxed{ii} + \boxed{iii} + \boxed{iv} + \boxed{v}$

$= (3,00,000 + 3,37,500 + 90,000 + 96000 + 45,000)$ روپے

$= \boxed{8,68,500 \text{ روپے}}$

ادا کیا گیا پریمیم = کل ادا کی گئی رقم × میچورٹی مدت

$= 12750 \times 25$ روپے

$= \boxed{3,18,750 \text{ روپے}}$

اگر پالیسی حاصل کرنے کے بعد ایک سال کے دوران انشورڈ کی موت واقع ہو جاتی ہے تو اس کا خاندان، خاندانی آمدنی کے معاہدہ کے تحت درج ذیل فائدہ حاصل کرے گا۔

پالیسی کی رقم = $3,00,000$ روپے

$$\text{بونس کی شرح } 4.2\% = \frac{4.2}{100} \times 3,00,000$$

$= 42 \times 300$ روپے

$= 12,600$ روپے

کل رقم $= 300,000$ روپے $+ 12,600$ روپے $= 312,600$ روپے

درج بالا رقم کے علاوہ اضافی طور پر خاندان 30,000 روپے سالانہ (پالیسی رقم کا 10%) کے حساب سے 24 سال تک وصول کرے گا۔

پس کل رقم جو انشورڈ خاندان حاصل کرے گا:

$3,12,600$ روپے $+ 7,20,000$ روپے

$= \boxed{10,32,600 \text{ روپے}}$

مثال 2:- ایک شخص نے اپنی کار کے لیے 3.6% کی شرح سے انشورنس پالیسی حاصل کی۔ اس نے ایک سال کے لیے 12206 روپے پہلے پریمیم کے طور پر ادا کیے۔ اس کی کار کی قیمت بتایئے جبکہ اس نے 200 روپے سروس چارجز کے دیئے ہوں۔

حل:-

فرض کیا کار کی کل قیمت = x روپے

کل رقم جو ادا کی = 12206 روپے

سروس چارجز جو ادا کیے = 200 روپے

پریمیم کی بقایا رقم = $12206 - 200$ روپے

= 12006 روپے

x کا 3.6% = 12006 روپے

$$\frac{3.6}{100}x = 12006$$ روپے

$$x = \frac{12006 \times 100}{3.6}$$ روپے

$$= \frac{12006 \times 100 \times 10}{36}$$ روپے

کار کی قیمت = x = 333,500 روپے

آگ لگنے یا اس نوعیت کے نقصان کی صورت میں اثاثہ جات کی موجودہ قیمت پر پالیسی کی ادائیگی کی جاتی ہے۔

مثال 3:- ارسلان نے اپنی کار کے لیے کل کتنی انشورنس ادا کرنی ہوگی اگر کار کی قیمت 8,50,000 روپے مدت 5 سال اور انشورنس کی شرح 4.5% ہو انشورنس کو سالانہ کی بنیاد پر ادا کرنا ہوگا جبکہ آخری سال کی انشورنس 0% اور قیمت میں کمی 10% سالانہ ہوگی۔

حل:-

کار کی قیمت = 850,000 روپے

انشورنس کی شرح = 4.5%

مدت = 5 سال

پہلے سال انشورنس کی رقم = $\frac{4.5}{100} \times 850,000$ روپے = 38250 روپے

قیمت میں کمی = $\frac{10}{100} \times 8,50,000 = 85000$ روپے

کمی کے بعد کار کی قیمت = $850,000 - 85000$ روپے

= 765000 روپے

دوسرے سال کی انشورنس $= \frac{4.5}{100} \times 7,65,000$ روپے

$= 34425$ روپے

قیمت میں کمی $= \frac{10}{100} \times 7,65,000$ روپے

$= 76,500$ روپے

کمی کے بعد کار کی قیمت $= 7,65,000 - 76,500$ روپے

$= 6,88,500$ روپے

تیسرے سال کی انشورنس $= \frac{4.5}{100} \times 6,88,500$ روپے

$= 30,982.50$ روپے

قیمت میں کمی $= \frac{10}{100} \times 6,88,500$ روپے

$= 68,850$ روپے

کمی کے بعد کار کی قیمت $= 6,88,500 - 68,850$ روپے

$= 6,19,650$ روپے

چوتھے سال کی انشورنس $= \frac{4.5}{100} \times 6,19,650$ روپے

$= 27,884.25$ روپے

پانچویں سال کی انشورنس $= 0$

پس انشورنس کی کل ادا کردہ رقم درج ذیل ہے۔

پہلا سال	38,250	روپے
دوسرا سال	34,425	روپے
تیسرا سال	30,982	روپے
چوتھا سال	27,884	روپے
پانچواں سال	0	روپے
	1,31,541	روپے

4.4.3 زندگی اور گاڑیوں کی انشورنس سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل

Simple Real Life Problems Regarding Purchase of Life and Motor Vehicle Insurance.

دی گئی مثالوں سے زندگی اور گاڑیوں کی انشورنس کے متعلق اہمیت واضح ہوتی ہے۔

مثال 1:- ایک بیمہ دار شخص جس کی عمر اس کی قریب ترین سالگرہ پر 30 سال ہے۔ اس وقت پالیسی کی کل رقم پر پریمیم کی شرح 4.842% ہے ششماہی اقساط کی شرح سالانہ پریمیم کا 52% ہے۔ سہ ماہی پریمیم کی شرح سالانہ پریمیم کا 27% ہے۔ ماہانہ پریمیم کی شرح سالانہ پریمیم کا 9% ہے۔ تمام میں پریمیم کی رقم معلوم کیجیے۔
اگر پالیسی کی کل رقم 1,00,000 روپے ہو۔

حل:-

پالیسی کی کل رقم $= 100,000$ روپے

پہلا پریمیم 4.842% کی شرح سے $= \frac{4.842}{100} \times 100,000 = 4842$ روپے

پالیسی فیس 0.25% کی شرح سے $= \frac{0.25}{100} \times 100,000 = 250$ روپے

سالانہ پریمیم $= 5,092$ روپے

فرض کیا پالیسی فیس 250 روپے کی بجائے 200 روپے کر دی جاتی ہے۔

اس لیے پہلا پریمیم $= 4842 + 200 = 5,042$ روپے

ششماہی پریمیم $= \frac{52}{100} \times 5,042 = 2,621.84$ روپے

$\simeq 2,622$ روپے

سہ ماہی پریمیم $= \frac{27}{100} \times 5,042 = 1,361.34$ روپے

$\simeq 1,361$ روپے

ماہانہ پریمیم $= \frac{9}{100} \times 5,042 = 453.78$ روپے

$\simeq 454$ روپے

اگر پالیسی کی رقم 1,00,000 روپے ہو تو لائف انشورنس پالیسی یا پالیسی کی مدت پورا ہونے پر کتنی رقم ملے گی؟

پالیسی کی رقم $= 100,000$ روپے

25 سال کے لیے بونس کی شرح 4.2% $= \frac{4.2}{100} \times 100,000 \times 25$ روپے

$= 4,200 \times 25$ روپے

$= 1,05,000$ روپے

مدت پورا ہونے پر بونس 1.4% کی شرح سے 20 سال کے لیے $= \frac{1.4}{100} \times 100,000 \times 20$ روپے

$= 28,000$ روپے

اختتامی بونس 1.5% کی شرح سے $= \frac{1.5}{100} \times 100,000 \times 20$ روپے

$= 30,000$ روپے

خاندان کی آمدنی پر بونس 0.75% کی شرح سے $= \frac{0.75}{100} \times 100,000 \times 20$ روپے

$= 15,000$ روپے

کل رقم جو انشورڈ حاصل کرے گا۔ $= (100000 + 105000 + 28000 + 30000 + 15000)$ روپے

$= 278,000$ روپے

کل ادا کردہ پریمیم $= 4537 \times 25$

$= 113425$ روپے

مثال 2:- ایک کار کی قیمت 12,50,000 روپے ہے جبکہ 5 سالہ مدت کے لیے پریمیم کی شرح 4.5% سالانہ ہے۔ انشورنس کی ادا کردہ کل رقم معلوم کیجیے۔ جبکہ قیمت میں کمی کی شرح 10% سالانہ ہے۔

حل:-

کار کی قیمت $= 12,50,000$ روپے

پریمیم کی سالانہ شرح $= 4.5\ \%$

مدت $= 5$ سال

کار کی قیمت میں کمی کی شرح 10% سالانہ ہے۔

پہلا پریمیم $= \frac{4.5}{100} \times 12,50,000 = \boxed{56250 \text{ روپے}}$

کار کی قیمت میں کمی $= \frac{10}{100} \times 12,50,000 = 1,25,000$ روپے

کمی کے بعد کار کی قیمت $= 12,50,000 - 1,25,000$

$= 11,25,000$ روپے

دوسرا پریمیم $= \dfrac{4.5}{100} \times 11,25,000 =$ **50,605 روپے**

کار کی قیمت میں کمی $= \dfrac{10}{100} \times 11,25,000 = 1,12,500$ روپے

کار کی قیمت کمی کے بعد $= 11,25,000 \quad - 1,12,500$

$= 10,12,500$ روپے

تیسرا پریمیم $= \dfrac{4.5}{100} \times 10,12,500 =$ **45562.50 روپے**

کار کی قیمت میں کمی $= \dfrac{10}{100} \times 10,12,500 = 1,01,250$ روپے

کمی کے بعد کار کی قیمت $= 10,12,500 \quad - 1,01,250$

$= 9,11,250$ روپے

چوتھا پریمیم $= \dfrac{4.5}{100} \times 9,11,250$ روپے

$=$ **41,006.25 روپے**

پانچواں پریمیم $=$ **0**

انشورنس میں پریمیم کی مکمل ادائیگی

پہلا سال	56250.00	روپے
دوسرا سال	50605.00	روپے
تیسرا سال	45562.50	روپے
چوتھا سال	41006.25	روپے
پانچواں سال	0	روپے
	193423.75	**روپے**

اگر مدت پوری ہونے پر انشورڈ کی طرف سے کوئی کلیم داخل نہیں کیا جاتا تو دونوں پارٹیوں کی پہلے سے طے شدہ کچھ رقم انشورڈ کو "نو کلیم بونس" کے طور پر ادا کی جاتی ہے۔

مشق 4.4

1۔ اگر پریمیم کی رقم درج ذیل طریقہ سے نکالی جائے۔

پالیسی کی رقم 0.25% + پالیسی انکم کا 4.5% = سالانہ پریمیم

پالیسی فیس زیادہ سے زیادہ 200 روپے

ششماہی پریمیم جو کہ سالانہ پریمیم کا 52% ہو۔

سہ ماہی پریمیم جو کہ سالانہ پریمیم کا 27% ہو۔

ماہانہ پریمیم جو کہ سالانہ پریمیم کا 9% ہو۔

تب درج ذیل جدول کو پریمیم نکالنے کے لیے مکمل کیجیے۔ مزید کمپنی کو ادا کی گئی کل رقم بھی معلوم کیجیے۔

پالیسی کی رقم	سالانہ پریمیم	ششماہی پریمیم	سہ ماہی پریمیم	ماہانہ پریمیم
(i) 50,000 (ii) 100,000 (iii) 150,000 (iv) 200,000				

2۔ اگر ایک انشورڈ، انشورنس پالیسی حاصل کرنے کے 2 سال بعد انتقال کر گیا ہو تو اس کے ورثا کو وصول ہونے والی رقم معلوم کیجیے جبکہ:

روپے 50,000 = پالیسی کی رقم — 4.2% = پریمیم سالانہ کی شرح سے

0.3 % = پالیسی فیس — 0.6 % = فیملی انکم معاہدہ

سال 22 = میچورٹی کی مدت — 4.5% = بونس

روپے 6000 = سالانہ انکم جس کا کمپنی نے وعدہ کیا۔

3۔ احمد علی نے اپنے گھر جس کی قیمت 75,00,000 روپے تھی۔ 4 سالہ مدت کے لیے 2% کی شرح سے انشور کرایا۔ اگر قیمت میں کمی کی شرح 10% سالانہ ہو تو اس نے 4 سال میں کمپنی کو کیا رقم ادا کی؟

4- ندیم اپنی دکان کی 3 سال کے لیے 3% کی سالانہ شرح انشورنس دکان کی قیمت میں کمی کی شرح 5% سالانہ ہے۔ اگر اس نے 21000 روپے پہلے پریمیم کے طور پر ادا کیے ہوں تو اس کی دکان کی قیمت معلوم کیجئے۔ اگر اس نے 2 سال بعد 2,00,000 روپے کا کلیم کیا ہوا سے کیا فائدہ ہوا؟

5- عادل نے ایک چلتا ہوا کاروبار 10,00,000 روپے میں خریدا اور اس کی انشورنس 4 سال کے لیے 2.5% پریمیم کی شرح سے کرائی۔ 3 سال بعد اس نے اصل نقصان کا کلیم 5,00,000 روپے حاصل کیا۔ اس نے انشورنس کے ذریعے کتنا نقصان پورا کیا جبکہ کاروبار کی مالیت میں کمی کی شرح 10% سالانہ ہے۔

6- جاوید نے اپنی کار کے لیے 8,50,000 روپے کی انشورنس پالیسی 3 سال کے لیے 4.25% سالانہ پریمیم پر خریدی۔ وہ کل کتنی رقم ادا کرے گا اگر اس نے اس مدت میں نقصان کا کلیم نہ کیا ہو؟ جبکہ قیمت میں کمی کی شرح 10% ہو۔

7- رحمان نے ایک گاڑی 7,50,000 روپے میں خریدی اور اسے 5 سال کے لیے 3.5% کی شرح سے انشور کرایا۔ اگر اس نے اس مدت میں 1,00,000 روپے نقصان کا کلیم حاصل کیا ہو تو اس نے خطرہ سے بچت کے لیے کتنی رقم ادا کی ہوگی؟ جبکہ قیمت میں کمی کی شرح 10% ہو۔

8- ماریہ نے اپنی کار کے لیے 3.25% کی شرح سے 3 سال کے لیے انشورنس پالیسی لی۔ جس کا پہلا پریمیم 26000 روپے ہے۔ کار کی قیمت بتائیے۔ نیز دوسرے اور تیسرے پریمیم کی رقم بھی معلوم کیجئے۔
جبکہ کار کی قیمت میں کمی کی شرح 10% سالانہ ہے۔

4.5 لیزنگ/فنانسنگ LEASING/FINANCING

لیزنگ / فنانسنگ Leasing/Financing

لیز (Lease) ایک معاہدہ ہے۔ جس میں اثاثہ کا مالک جسے لیسر (Lessor) کہتے ہیں اثاثہ کرایہ پر لینے والے کو ایک خاص مدت کے لیے کرایہ کی ادائیگی کے بدلے میں اثاثہ کو استعمال کرنے کی اجازت دیتا ہے۔ لیز پر دیے گئے اثاثہ کی ملکیت لیز کے دورانیہ میں اثاثہ کے مالک کے پاس ہی رہتی ہے۔ اثاثہ جات جیسا کہ رئیل اسٹیٹ، مشینری کے آلات یا دوسرے مستحکم اثاثہ جات کو لیز کے معاہدہ کے تحت لیز پر دیا جاتا ہے۔ قسط وار خرید (Hire Purchase) بھی اسی طرح کا پیسہ لگانے کا طریقہ کار ہے جیسا کہ وسیع پیمانہ پر مالی طور پر مستحکم اثاثہ جات کا۔

لیزنگ معاہدہ میں مشین اور آلات یا دوسرے مستحکم اثاثہ جات کے لیے عام طور پر سرمایہ کاری کا عنصر پایا جاتا ہے۔ اس طرح کرایہ دار بغیر قیمت ادا کیے اثاثہ کو استعمال کرنے کا حق حاصل کر لیتا ہے۔ اس لیے لیزنگ کی سہولیات فراہم کرنا بھی سرمایہ کے مترادف ہے۔

بینک اور لیزنگ کمپنیاں اپنے گاہکوں کو لیز کے معاہدہ کے تحت اثاثے مہیا کرتی ہیں۔ ان کا منافع اس فرق پر انحصار کرتا ہے جو کہ اثاثہ جات کو حاصل کرنے کے لیے لگائے گئے سرمایہ کے منافع اور کرایہ کی شکل میں کمائی کے درمیان ہوتا ہے۔ چونکہ ملکیت لیزنگ کمپنی کے پاس ہی رہتی ہے اس لیے اثاثہ جات کی قیمت میں کمی کی بنا پر ٹیکس میں فائدہ اٹھایا جاتا ہے۔ جبکہ لیسی (Lessee) کرایہ کی ادائیگی کو انکم ٹیکس کے گوشوارے میں بطور خرچ ظاہر کرتا ہے۔ لیزنگ ایک اثاثہ کو خریدنے کے لیے متبادل راستہ مہیا کرتا ہے تاکہ بغیر براہ راست مستحکم قرضہ کے بوجھ کے اس کی خدمات حاصل کی جاسکیں۔

کاروباری فرموں کے لیے دو قسم کی لیز کی سہولت ہوتی ہے۔

(i) آپریشنل لیز Operational Lease

یہ کم مدت کے لیے لیز ہوتی ہے جو کہ اثاثے رکھنے والی فرم کی صوابدید پر قابلِ تنسیخ ہوتی ہے۔ ایسی لیز عام طور پر کمپیوٹر ہارڈ ویئر، مشینری اور آلات وغیرہ جیسی اشیا کی لیزنگ میں استعمال ہوتی ہے۔

(ii) فنانشل لیز Financial Lease

یہ لیز لمبی مدت کے لیے ہوتی ہے جو کہ لیسی کی طرف سے ناقابلِ تنسیخ معاہدہ کی ذمہ داری ہوتی ہے تاکہ فرم جس کے اثاثے ہوتے ہیں جسے لیسر کہتے ہیں کو اثاثوں کے استعمال پر مسلسل ادائیگی ہوتی رہے۔

4.5.1(i) موٹر گاڑیوں کی لیزنگ / فنانسنگ Leasing/Financing of Motor Vehicle

ذرائع آمدورفت کے لیے قرضہ یا کار فنانسنگ کنزیومر فنانس لینے کی بڑی قسم ہے۔اس سہولت سے فائدہ اٹھاتے ہوئے ایک گاہک کار فنانسنگ کی شرائط پر بینک میں پیسے جمع کراتے ہوئے کار خرید سکتا ہے۔گاہک کے لیے فنانس میں کمی بینک پورا کرتا ہے۔جس کے بدلے میں بینک گاہک سے اقساط کی شکل میں فنانس اور مارک اپ (Mark up) وصول کرتا ہے۔

4.5.1 (ii) نقد ادائیگی Down Payment

گاہک کو درخواست فارم کے ساتھ بینک میں نقد ادائیگی کرنا ہوتی ہے۔نقد ادائیگی کار کی 15% ایکوئٹی کی قیمت (Equity value) انشورنس کی لاگت، ایک ماہ کی قسط اور پروسیسنگ فیس پر مشتمل ہوتی ہے۔

4.5.1 (iii) موٹر گاڑیوں کی انشورنس Motor Vehicle Insurance

بینک کے مفاد کو بہتر انداز میں محفوظ رکھنے کے لیے موٹر گاڑی جس کو بینک نے فنانس کیا ہوتا ہے کی جامع انشورنس کی جاتی ہے جو کہ گاڑی کے متعلق تمام خدشات کو دور کرتی ہے۔تمام گاڑیوں کی بینک کی منظور شدہ انشورنس ایجنسی یا کمپنی سے انشورنس کرائی جاتی ہے۔بینک انشورنس اور پریمیم (Premium) کا انتظام کرتا ہے جس کو قرض دار سے وصول کیا جاتا ہے۔

4.5.1 (iv) پروسیسنگ اخراجات Processing Charges

کسی گاڑی کی فنانسنگ کے لیے دی گئی درخواست کو قابل عمل بنانے کے لیے بینک جو رقم وصول کرتا ہے۔اسے پروسیسنگ کے اخراجات کہتے ہیں۔یہ اخراجات عام طور پر بینک کے شیڈول میں لکھے ہوتے ہیں۔عام طور پر یہ اخراجات 3000 روپے سے لے کر 5000 روپے تک ہوتے ہیں۔

4.5.1 (v) ماہانہ اقساط کی شکل میں رقم کی واپسی Repayment in Monthly Installments

اس کو اموریٹائزیشن (Amortization) کا شیڈول بھی کہتے ہیں۔یہ وہ شیڈول ہے جو قرض یا فنانس کی گئی رقم کی واپسی کو قرضہ کی واپسی کی مدت میں اصل زر اور منافع کی وقفوں میں ادائیگی کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 1:- علی نے ایک کار لیزنگ کمپنی سے 4,50,000 روپے لیز پر لی۔ اس میں 1,00,000 روپے ایکوئی اور شرح منافع دو سال کے لیے 17% ہے۔ اسے کل کتنی ادائیگی کرنا ہوگی؟ نیز ہر ماہ کی ادائیگی بھی معلوم کیجئے۔

حل:- ایک لاکھ روپے ایکوئی کی ادائیگی پر علی کو کار مل جائے گی مگر وہ اس کا مالک نہیں ہوگا۔ اس کو کار کی ملکیت تب ملے گی جب وہ باقی ماندہ رقم 3,50,000 روپے اور اس پر 17% کی شرح سے 2 سال کا مارک اپ برابر ماہانہ اقساط میں ادا کر دے گا۔

$$\text{مارک اپ} = \frac{350,000 \times 17 \times 2}{100} = 119,000 \text{ روپے}$$

$$\text{کل رقم جو ادا کرنا ہوگی} = 3,50,000 + 1,19,000 = 4,69,000 \text{ روپے}$$

$$\text{ماہانہ قسط کی رقم} = \frac{4,69,000}{24} = 19,542 \text{ روپے}$$

مثال 2:- ایک ٹرک 5,00,000 روپے میں خریدا گیا۔ اسے 15% ایکوئی پر خریدا جا سکتا تھا۔ جبکہ مارک اپ کی شرح ماہانہ کی بنیاد پر 18% سالانہ ہو تو درج ذیل معلوم کیجئے۔

(i) ماہانہ قسط

(ii) ٹرک کی ابتدائی قیمت

(iii) اگر ٹرک 5,00,000 روپے نقد ادائیگی سے خریدا گیا ہو تو بچت کی رقم معلوم کیجئے۔

حل:-

$$\text{ڈاؤن پے منٹ / ایکوئی} = \frac{5,00,000 \times 15}{100} = 75000 \text{ روپے}$$

$$\text{باقی رقم} = 5,00,000 - 75,000 = 4,25,000 \text{ روپے}$$

$$\text{دو سال کے لیے 4,25,000 روپے پر مارک اپ} = \frac{4,25,000 \times 18}{100} \times 2 = 1,53,000 \text{ روپے}$$

$$\text{اضافی رقم جو 24 ماہانہ اقساط میں ادا کرنی ہے۔} = 4,25,000 + 1,53,000 = 5,78,000 \text{ روپے}$$

$$\text{ماہانہ قسط} = \frac{5,78,000}{24} = 24,084 \text{ روپے}$$

$$\text{کل رقم} = \text{ڈاؤن پے منٹ} + \text{اضافی رقم}$$

$= 7{,}5000 + 5{,}78{,}000$
$= 6{,}53{,}000$ روپے

قرضہ لینے کی صورت میں اضافی رقم ادا کی $= 6{,}53{,}000 - 5{,}00{,}000$
$= 1{,}53{,}000$ روپے

نقد ادائیگی پر جو رقم بچ سکتی ہے $= \dfrac{1{,}53{,}000}{5{,}00{,}000} \times 100 = 31\%$

4.5.2 روزمرہ زندگی کے مسائل Real Life Problems

مثال 1:-

علی نے یکم جنوری 2001 میں ایک مشینری قرضہ کی بنیاد پر خریدی۔ معاہدہ پر دستخط کے وقت 4000 روپے کی ڈاؤن پے منٹ کی گئی اور 4000 روپے سالانہ کی بنیاد پر تین سال کے لیے ادائیگی کی گئی۔ مشینری کی نقد قیمت 14,900 روپے جبکہ مارک اپ کی شرح 5% ہے۔ اصل زر اور مارک اپ کی ادا کی گئی رقم معلوم کیجئے۔

حل:-

تاریخ	نقد رقم	اقساط	
		مارک اپ	اصل زر
1-1-2001 کو ڈاؤن پے منٹ مہیا کر کے جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	14,900 4,000		4,000
31-12-2001 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	10,900 3,455	545	3,455
31-12-2002 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	7,445 3,628	372	3,628
31-12-2003 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	3,817	183	3,817
		1,100	14,900

علی نے کل جتنی رقم ادا کی $14900 + 1100 = 16000$ روپے

نوٹ: رقم کو قریب ترین روپے میں لکھا گیا ہے۔

مثال 2:-

میسرز رحمان اینڈ کمپنی لمیٹڈ نے میسرز حق انجینئرنگ لمیٹڈ سے چار سالہ مدت میں کرایہ دارانہ خریداری نظام کے تحت ایک ویگن خریدی۔ پہلی جنوری 2000 کو ڈلیوری کے وقت 12000 روپے قابل ادا تھے۔ بقیہ رقم 12000 روپے سالانہ کی بنیاد پر ہر 31 دسمبر تک ادا کرنا تھے۔ حق انجینئرنگ نے 5% سالانہ کی بنیاد پر مارک اپ لیا۔ ڈلیوری کے وقت ویگن کی قیمت 54600 روپے تھے۔ مارک اپ اور اصل زر معلوم کیجئے۔

حل:-

تاریخ	نقد رقم	اقساط	
		مارک اپ	اصل زر
	54,600		
1-1-2000 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	12,000		12,000
	42,600		
31-12-2000 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	9,870	2,130	9,870
31-12-2001 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	32,730	1,637	10,363

مثال 3:-

احمد نے ایک ٹرک کرایہ دارانہ خریداری نظام کے تحت 56000 روپے میں خریدا۔ پے منٹ کی ادائیگی 15000 روپے ڈاؤن اور 15000 روپے کی تین سالانہ اقساط ادا کرنا طے پایا۔ 5% سالانہ مارک اپ وصول کیا گیا۔ مارک اپ اور اصل زر الگ الگ معلوم کیجئے۔

حل:-

تاریخ	نقد رقم	اقساط	
		مارک اپ	اصل زر
	56,000		
یکم جنوری کو جتنی کم قیمت ادا کی گئی۔	15,000		15,000
	41,000		
31 دسمبر کو جتنی کم قیمت ادا کی گئی۔	12,950	2,050	12,950
	28,050		
31 دسمبر کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	13,597	1,403	13,597
آخری سال دسمبر میں جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	14,453	547	14,453
		4,000	56,000

مثال 4:-

ایک پبلشنگ کمپنی نے یکم جنوری 2000ء کو ایک پرنٹنگ مشین خریدی۔ مشین کی نقد قیمت 27,300 روپے تھی۔ یہ مشین کرایہ دارانہ خریداری کی بنیاد پر لی گئی۔ 6000 روپے معاہدہ پر دستخط کے وقت ادا کیے گئے اور اس کے بعد چار سال کے لیے 6000 روپے سالانہ کی بنیاد پر ادا کئے گئے جبکہ مارک اپ 5% سالانہ تھا۔ جدول بنایئے جو اقساط اور اصل زر کو ظاہر کرے۔ مزید یہ بھی بتایئے کہ پبلشرز کو کل کتنی قیمت ادا کرنی تھی؟

حل:- اصل زر اور مارک اپ کی رقم ہر قسط کے لیے علیحدہ علیحدہ درج ذیل ہے۔

تاریخ	نقد رقم	اقساط	
		مارک اپ	اصل زر
	27,300		
1-1-2000 تک جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	6,000		6,000
	21,300		
31-12-2000 تک جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	4,935	1,065	4,935
	16,365		
31-12-2001 تک جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	5,182	818	5,182
	11,183		
31-12-2002 تک جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	5,441	559	5,441
31-12-2003 تک جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	5,742	258	5,742
		2,700	27,300

کل قابل ادا رقم = 2,700 + 27,300 = 30,000 روپے

مثال 5:-

ایک لمیٹڈ کمپنی کرایہ دارانہ خریداری نظام (Lease) کی بنیاد پر ایک مشین 4600 روپے میں خریدنے پر رضامند تھی۔ جب مشین یکم جنوری 2001 کو لی گئی تو اس وقت 600 روپے ادا کیے گئے اور بقیہ رقم 800 روپے سالانہ اقساط کی شکل میں اور 5% مارک اپ پر ادا کرنا طے ہوئی۔ مارک اپ کی کل رقم اور کل اصل زر معلوم کیجئے۔ جبکہ مارک اپ الگ سے ادا کیا جائے۔

حل:-

تاریخ	نقد رقم	اقساط	
		مارک اپ	اصل زر
	4,600		
1-1-2001 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	600		600
	4,000		
31-12-2001 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	800	200	800
	3,200		
31-12-2002 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	800	160	800
	2,400		
31-12-2003 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	800	120	800
	1,600		
31-12-2004 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	800	80	800
31-12-2005 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	800	40	800
		600	4,600

نوٹ: اس خرید میں ہر قسط 800 روپے بمعہ مارک اپ ادا کی گئی۔

مشق 4.5

-1 درج ذیل میں ہر ایک کے لیے:

(i) آپ کو فنانسنگ کے ذریعے ادائیگی کے لیے کتنی اضافی رقم ادا کرنا ہوگی؟

(ii) اضافی رقم جو کہ نقد رقم کی ایک خاص شرح سے لی گئی ہو کو بیان کیجیے۔

اقساط کی تعداد	ماہانہ اقساط (روپوں میں)	ڈاؤن پے منٹ (روپوں میں)	نقد رقم (روپوں میں)	
فنانسنگ کی شرائط				
10	40 روپے	50 روپے	360 روپے	(a)
12	75 روپے	150 روپے	900 روپے	(b)
36	500 روپے	10000 روپے	25000 روپے	(c)

-2 پرویز ایک کھڑکی میں لگانے والا ایئر کنڈیشنر 900 روپے میں خریدتا ہے۔ وہ 20% ادائیگی کرتا ہے اور بقیہ رقم اور مارک اپ 48 ماہ میں ادا کرتا ہے۔ اگر مارک کی شرح 10% سالانہ ہو تو درج ذیل معلوم کیجیے۔

(i) ماہانہ قسط کی قیمت

(ii) نقد رقم ادا کرتے ہوئے کتنی بچت ہوگی؟

-3 درج ذیل میں ہر ایک کے لیے:

(i) سامان کی فنانشل قیمت معلوم کیجیے۔

(ii) نقد رقم ادا کر کے وہ بچت بتلائے جو نقد رقم پر شرح سود کے ساتھ ادا کرنا تھی۔

ماہانہ اقساط (روپوں میں)	اقساط کی تعداد	جمع کرانے والی رقم کی شرح	نقد رقم (روپوں میں)	آئٹم	
9 روپے	24	10%	200 روپے	کمپیوٹر	(a)
25 روپے	18	15%	450 روپے	پرنٹر	(b)
52 روپے	30	25%	1600 روپے	سکینر	(c)

4- درج ذیل میں ہر ایک کے لیے معلوم کیجئے۔

(i) ماہانہ قسط

(ii) کرایہ دارانہ خریداری کی صورت میں قیمت اور نقد قیمت کے درمیان فرق، نقد قیمت کی فیصد کی صورت میں

کرایہ دارانہ خریداری کی شرائط	نقد رقم	
100 روپیہ جمع کروانے پر بقیہ 8% مارک اپ ایک سال کے لیے	روپے 800	(a)
200 روپیہ جمع کروانے پر بقیہ 10% مارک اپ اڑھائی سال کے لیے	روپے 8000	(b)
200 روپیہ جمع کروانے پر بقیہ 15% مارک اپ $1\frac{1}{3}$ سال کے لیے	روپے 1200	(c)

5- ایک کمپیوٹر پیکج خریدنے کے لیے نقد قیمت 3200 روپے تھی۔ ڈاؤن پے منٹ کی ادائیگی 15% بقیہ رقم اور مارک اپ 24 ماہ میں ادا کیے گئے۔ مارک اپ کی شرح 9.5% تھی۔

(i) پیکج کی قیمت معلوم کیجئے اگر اسے کرایہ دارانہ خریداری پر لیا گیا ہو۔

(ii) کرایہ دارانہ خرید اور نقد خرید کی صورت میں قیمتوں کے درمیان فرق معلوم کیجئے۔

(iii) نقد رقم کی شرح کے لحاظ سے حاصل کیے گئے فرق کو بیان کیجئے۔

جائزہ مشق 4

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگایئے۔

(i) چیک کی طرح کا انسٹرومنٹ جسے بینک نے گاہک کی درخواست پر جاری کیا ہو اسے:

(a) پے آڈر کہتے ہیں
(b) چیک کہتے ہیں
(c) بینک ڈرافٹ کہتے ہیں
(d) ایکسچینج کا بل کہتے ہیں

(ii) وہ شخص یا چیز جس کی انشورنس کی جاتی ہو اسے:

(a) انشورر کہتے ہیں
(b) انشورڈ کہتے ہیں
(c) ڈرار کہتے ہیں
(d) لیزی کہتے ہیں

(iii) کمپنی جو انشورنس کے عمل کو آگے بڑھاتی ہے اسے:

(a) انشورر کہتے ہیں
(b) انشورڈ کہتے ہیں
(c) انشورنش کہتے ہیں
(d) انشورنش پالیسی کہتے ہیں

(iv) انشورڈ کے ذریعے ادا کی گئی قسط کو:

(a) بونس کہتے ہیں
(b) ڈسکاؤنٹ کہتے ہیں
(c) پریمیم کہتے ہیں
(d) مارک اپ کہتے ہیں

(v) قرض دینے پر جو رقم بینک واپس حاصل کرتا ہے اسے:

(a) مارک اپ کہتے ہیں
(b) پریمیم کہتے ہیں
(c) بونس کہتے ہیں
(d) منافع کہتے ہیں

(vi) جمع کرائی گئی رقم پر بینک جو رقم ادا کرتا ہے اسے:

(a) منافع کہتے ہیں
(b) بونس کہتے ہیں
(c) پریمیم کہتے ہیں
(d) مارک اپ کہتے ہیں

(vii) منافع/مارک اپ کی وصول کی گئی شرح کو:

(a) ریٹ کہتے ہیں
(b) ٹائم کہتے ہیں
(c) سود کہتے ہیں
(d) اصل زر کہتے ہیں

(viii) بینک میں لگائی گئی مشین جو نقد رقم گاہک کو ادا کرتی ہے:

(a) کمپیوٹر کہلاتی ہے
(b) سکینر کہلاتی ہے
(c) اے ٹی ایم کہلاتی ہے
(d) کارڈ ریڈر کہلاتی ہے

(ix) تبادلہ کا بل جو ایک مخصوص بینکر سے ڈرا کیا گیا ہو اور طلب کرنے پر قابل ادا نہ بیان کیا گیا ہو:

(a) چیک کہلاتا ہے
(b) پے آرڈر کہلاتا ہے
(c) تبادلہ کہلاتا ہے
(d) بنک ڈرافٹ کہلاتا ہے

2- خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) تبادلہ کا بل جو ایک مخصوص بینکر سے ڈرا کیا گیا ہو اور طلب کرنے پر نا قابل بیان کیا گیا ہو __________ کہلاتا ہے۔

(ii) چیک کی طرح کا انسٹرومنٹ جسے بینک نے گاہک کی درخواست پر جاری کیا ہو __________ کہلاتا ہے۔

(iii) بینک کی طرف سے لگائی گئی مشین جو گاہکوں کو نقد رقم ادا کرتی ہے __________ کہلاتی ہے۔

(iv) گاہک کی طرف سے بینک میں جمع شدہ رقم پر بینک جو رقم گاہک کو ادا کرتا ہے اسے __________ کہتے ہیں۔

(v) حاصل کردہ فی صد نفع کو __________ کہتے ہیں۔

(vi) قرضہ یا جمع کرائی رقم کا دورانیہ __________ کہلاتا ہے۔

(vii) بینک قرضہ پر وصول کی گئی رقم کو __________ کہتے ہیں۔

(viii) انشورڈ کی طرف سے ادا کی گئی قسط کو __________ کہتے ہیں۔

(ix) جو کمپنی انشورنس کے کاروبار کو چلاتی ہے __________ کہتے ہیں۔

(x) وہ شخص یا چیز جس کی انشورنس کی جاتی ہے اسے __________ کہتے ہیں۔

3. راحیل نے 75,00,000 روپے مالیت کے ایک گھر کی انشورنس کرائی جو کہ 2% شرح کے حساب سے 5 سال کے لیے تھی۔ 5 سال میں ادا کی گئی رقم معلوم کیجئے۔ اگر قیمت میں کمی کی شرح 10% سالانہ ہو۔

4- نعیم نے اپنی فیکٹری کی انشورنس 3% کی شرح سے 3 سال کے لیے کروائی۔ جبکہ قیمت میں کمی کا ریٹ 5% سالانہ تھا۔ اگر پہلا پریمیم 21,000 روپے ہو تو فیکٹری کی مالیت معلوم کریں۔ اگر اس نے 2,00,000 روپے کا مطالبہ دو سال بعد کیا ہو تو اس نے کتنا فائدہ حاصل کیا؟

5- میسرز رحیم پرنٹرز نے کرایہ دارانہ خریداری نظام کے تحت لاہور کمپنی سے یکم جنوری 2000 کو 10,000 روپے نقد ادائیگی پر اور 10,000 روپے اقساط پر جو کہ ہر 31 دسمبر کو ادا کرنا ہوگی ایک مشین خریدی۔ مشین کی نقد قیمت 37,230 روپے ہے۔ لاہور کمپنی مارک اپ 5% سالانہ کی شرح سے وصول کرتی ہے۔ جدول تیار کیجئے جو کہ سالانہ اقساط (اصل زر + مارک اپ) ظاہر کرے۔

خلاصہ

- ایک جاری کھاتہ (Running Account) جو کہ اپنی انتقال پذیری کی وجہ سے مسلسل چلتا رہتا ہے کرنٹ اکاؤنٹ کہلاتا ہے۔
- سیونگ اکاؤنٹ کفایت شعاروں کی حوصلہ افزائی کے لیے ہے جو کہ کم ذرائع والے لوگوں میں بچت کے رجحان کو ترقی دیتا ہے۔ بینک ماہانہ کی بنیاد پر جمع رقم پر 6 ماہ بعد برائے نام منافع رقم جمع کروانے والوں کو ادا کرتا ہے۔
- نفع اور نقصان شراکت داری اکاؤنٹ کم رقم سے کھولا جاتا ہے۔ جبکہ نفع یا نقصان کو سال کے آخر میں یا چھ ماہ بعد ادائیگی کے طریقہ کار کے مطابق ادا کیا جاتا ہے۔
- کسی اکاؤنٹ میں ایک خاص دورانیہ جو کہ 3 ماہ سے 5 سال تک ہو کے لیے جمع کرائی گئی رقم کو مخصوص / مدتی اکاؤنٹ کہلاتا ہے۔
- غیر ملکی کرنسی جیسا کہ پاؤنڈ، ڈالر اور یورو وغیرہ میں رکھا گیا اکاؤنٹ غیر ملکی کرنسی اکاؤنٹ کہلاتا ہے۔
- نیگوشی ایبل انسٹرومنٹ کا مطلب پرومیزری نوٹ، تبادلہ کا بل یا قابل ادا چیک ہے چاہیے اسے آرڈر کیا جائے یا بیئرر (Bearer) ہو انسٹرومنٹس کے لیے۔
- ایک شخص یا چیز جس کی انشورنس کی جا رہی ہو انشورڈ کہلاتا ہے۔
- کمپنی جو انشورنس کا کاروبار چلاتی ہے اسے انشورر (Insurer) کہتے ہیں۔
- ایک ایسا شخص جسے انشورنس پالیسی جاری کی جاتی ہے جو کہ پالیسی سے فائدہ اٹھاتا ہے اسے انشورڈ کہتے ہیں۔
- دو پارٹیوں کے درمیان طے پانے والے معاہدہ کو انشورنس پالیسی کہتے ہیں۔

- انشورڈ کی طرف سے مقررہ دورانیہ کے بعد ادا کی جانے والی قسط کو پریمیم کہتے ہیں۔

- وقت کا دورانیہ جس پر دونوں پارٹیاں (انشورڈ اور انشورر) رضامند ہوں میچورٹی (Maturity) کہلاتا ہے۔

- وہ رقم جس پر رضامندی ظاہر کی گئی ہو اسے میچورٹی یا مدت ختم ہونے پر واپس کیا جانا ہوتا ہے اور اس رقم میں قسطوں میں ادا کی گئی اصل رقم اور منافع شامل ہوتا ہے۔ اسے بونس کہتے ہیں۔

- چیک ایک تبادلہ کا بل ہے جسے ایک مخصوص بینکر سے حاصل کیا جاتا ہے۔ جس پر رقم کا اندراج نہیں ہوتا ہے اور ضرورت کے مطابق اس پر رقم لکھ لی جاتی ہے۔

- پے آرڈر چیک کی طرح ہوتا ہے جسے بینک گاہک کی درخواست پر جاری کرتا ہے۔

- بینک ڈرافٹ رقم دینے کا ایک آڈر ہے جسے بینک کی ایک شاخ اپنے ہی بینک کی دوسری شاخ کو رقم کا مطالبہ کرنے والے کو ادا کرنے کا پابند بناتا ہے۔

- آن لائن بینکنگ ایک نظام ہے جس میں کمپیوٹر سسٹم کو براہ راست تعلق سے ملایا جاتا ہے تاکہ ٹرانزیکشن کو بااختیار اور ممکن بنایا جاسکے۔

- اے ٹی ایم کارڈ ایک ادائیگی کا کارڈ ہے جسے ایک شخص کو کمپیوٹر پر مبنی اے ٹی ایم مشین کو استعمال میں لانے کے لیے جاری کیا جاتا ہے تاکہ گاہک اس سے رقم حاصل کر سکے۔

- ایک کارڈ جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ کارڈ رکھنے والے کو ایک کریڈٹ لائن دی گئی ہے جس سے کارڈ رکھنے والا چیزیں خرید سکتا ہے یا نقد رقم نکلوا سکتا ہے۔

- اے ٹی ایم مشین کو بینک میں لگایا جاتا ہے تاکہ وہ گاہکوں کو نقد رقم دے۔

- گاہک جو رقم بینک میں برقرار رکھتا ہے اس رقم پر جو رقم بینک گاہک کو دیتا ہے اسے منافع کہتے ہیں۔

- رقم/ادھاری گئی یا دی گئی رقم اصل زر کہلاتی ہے۔

- منافع کی حاصل کی گئی شرح کو ریٹ کہتے ہیں۔

- قرض یا جمع کرائی گئی رقم کے دورانیہ کو مدت کہتے ہیں۔

- جب منافع/مارک اپ کو اصل زر میں شامل کیا جائے تو اسے (Amount) کہتے ہیں۔

- بینک کے ذریعے واپس حاصل کی گئی رقم کو مارک اپ کہتے ہیں۔

- لیزنگ ایک معاہدہ ہے جسے اثاثہ کا مالک لیسر کو لیز پر حق دیتا ہے کہ وہ اس کے اثاثہ کو ایک خاص مدت کے لیے کرایہ کی ادائیگی کے تبادلہ میں استعمال کرے۔

- وہ رقم جو گاہک کو درخواست کے ساتھ بینک میں جمع کروانی ہوتی ہے۔ ڈاؤن پے منٹ کہلاتی ہے۔

یونٹ 5

صارفین کی ریاضی

CONSUMER MATHEMATICS

- ٹیکسیز
- یوٹیلیٹی بلز
- ذاتی آمدنی

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- ٹیکس (براہ راست اور بالواسطہ) کیا ہے۔
- درج ذیل کو سادہ ترین ممکن طریقے سے کیسے واضح کیا جاتا ہے۔
  - سیلز ٹیکس
  - ایکسائز ڈیوٹی
  - پراپرٹی ٹیکس
  - انکم ٹیکس
- درج ذیل کا حساب کیسے کرتے ہیں۔
  - مختلف اشیاء پر لگایا گیا سیلز ٹیکس
  - مختلف اشیاء پر لگائی گئی ایکسائز ڈیوٹی
  - پراپرٹی ٹیکس جو کہ پراپرٹی پر لگایا گیا ہو
  - انکم ٹیکس جو انفرادی طور پر خاص آمدنی پر لگایا گیا ہو
- درج ذیل بلوں کی رقوم کا حساب کیسے کرتے ہیں۔
  - بجلی
  - گیس
  - ٹیلی فون
  - جبکہ سابقہ اور موجودہ میٹر ریڈنگ دی گئی ہو۔
- ذاتی آمدنی کیسے معلوم کرتے ہیں۔ (ہفتہ وار، ماہانہ اور سالانہ)
  - ایسے کارکن کی آمدنی جسے روزانہ کی بنیاد پر ادائیگی کی جاتی ہے
  - ایک ورکر جس کو اضافی وقت (Over time) کی ادائیگی گھنٹوں کی بنیاد پر کی جائے اور علاوہ ازیں اس کی روزانہ کی اجرت بھی ادا کی جاتی ہے
  - ایک سیلز مین جس کو اضافی وقت کی ادائیگی گھنٹوں کی بنیاد پر کی جائے اور ماہانہ تنخواہ کے علاوہ مختلف اشیاء کی فروخت پر کمیشن بھی ہو دیا جاتا ہے
- کسی سرکاری ملازم کی مجموعی آمدنی جس کو سرکاری پے سکیل یا غیر سرکاری پے سکیل کی بنیاد پر ادائیگی کی جائے کیسے معلوم کرتے ہیں۔
- ضروری کٹوتی کے بعد باقی ماندہ آمدنی کیسے معلوم کرتے ہیں۔

5.1 ٹیکس TAXES

تعلیم، صحت، قومی دفاع وغیرہ پر قومی اخراجات پورے کرنے کے لیے گورنمنٹ مختلف اقسام کے ٹیکس اپنی عوام پر لگاتی ہے جو کہ براہ راست ٹیکس یا بالواسطہ ٹیکس پر مشتمل ہوتے ہیں۔

5.1.1 ٹیکس Tax

آمدنی یا نفع کے تناسب سے حاصل کی گئی رقم یا سامان کی قیمت خرید میں شامل اضافی رقم یا خدمات پر وہ رقم جو کہ ریاست کو ادا کی جاتی ہے ٹیکس کہلاتی ہے۔

براہ راست ٹیکس Direct Tax

یہ وہ ٹیکس ہے جو کہ آمدنی، جائیداد اور منافع پر انکم ٹیکس یا جائیداد ٹیکس کی شکل میں براہ راست حکومت افراد سے وصول کرتی ہے۔

بالواسطہ ٹیکس Indirect Tax

اس ٹیکس میں ڈیوٹیز، مشینری پر ٹیکس، سامان اور خدمات پر ٹیکس شامل ہیں۔ اس میں جنرل سیلز ٹیکس اور ویلیو ایڈڈ ٹیکس بھی شامل ہیں۔

5.1.2 بنیادی اصطلاحات Key Terms

سیلز ٹیکس Sales Tax

جب ہم کوئی چیز خریدتے ہیں تو ہمیں ٹیکس کی ایک خاص رقم جو کسی چیز کی قیمت خرید میں بطور اضافی ٹیکس کی صورت میں شامل ہوتی ہے ادا کرتے ہیں اسے سیلز ٹیکس کہتے ہیں۔ یہ ٹیکس قیمت فروخت پر مقررہ شرح فی صد سے ادا کیا جاتا ہے۔

پاکستان میں سامان کی خریداری پر یا خدمت کے عوض 16% سیلز ٹیکس لیا جاتا ہے۔

مثال 1:- ٹیلی ویژن پر 16% سیلز ٹیکس لگایا جاتا ہے۔ اگر ٹیلی ویژن پر درج قیمت 18000 روپے ہو تو ٹیلی ویژن خریدنے والے کو کل کتنی رقم ادا کرنی ہوگی۔

حل:-

ٹیلی ویژن پر درج قیمت = 18000 روپے

جتنا سیلز ٹیکس ادا کرنا ہوگا = $\frac{16}{100} \times 18000 = 2880$ روپے

ٹیلی ویژن خریدنے کے لیے کل رقم جو ادا کرنی ہوگی = $18000 + 2880 = 20880$ روپے

مثال 2:- ایک کمپیوٹر کی قیمت 34800 روپے ہے، جس میں 16% سیلز ٹیکس شامل ہے۔ کمپیوٹر کی اصل قیمت کیا ہے؟

حل:-

کمپیوٹر کی قیمت بمع سیلز ٹیکس = 34,800 روپے

فرض کیا کمپیوٹر کی اصل قیمت = 100 روپے

16% سیلز ٹیکس کے ساتھ کمپیوٹر کی قیمت = 116 روپے

اس کمپیوٹر کی اصل قیمت = $\frac{100}{116} \times 34,800 = \frac{3480000}{116}$

= 30,000 روپے

ایکسائز ڈیوٹی Excise Duty

ایکسائز ڈیوٹی (Excise Duty) ٹیکس کی وہ شکل ہے جسے خریدار تیار شدہ چیز پر بوقت خرید ادا کرتا ہے۔

مثال کے طور پر کاریں، الیکٹرونکس کی اشیاء اور کپڑا وغیرہ خریدتے وقت ہمیں قیمت خرید کے ساتھ یہ ٹیکس بھی ادا کرنا ہوتا ہے۔

مثال 1:- ایک آدمی ایک 1000 سی سی کار خریدنا چاہتا ہے۔ اسے کار کی قیمت پر 150% ایکسائز ڈیوٹی ادا کرنی ہوگی۔ اگر کار کی قیمت 5,00,000 روپے ہو تو اسے کل کتنی رقم ادا کرنا ہوگی؟

حل:-

کار کی قیمت = 5,00,000 روپے

ایکسائز ڈیوٹی کی شرح = 150%

5,00,000 روپے پر ایکسائز ڈیوٹی = $\frac{150}{100} \times 5,00,000$

$= 150 \times 5000 = 7,50,000$ روپے

آدمی کو جو کل رقم ادا کرنا ہوگی $7,50,000 + 5,00,000 = 12,50,000$ روپے

مثال 2:- ایک ٹیلی ویژن کی قیمت 14040 روپے ہے، جس میں 20% ایکسائز ڈیوٹی بھی شامل ہے۔ ٹیلی ویژن پر لگائی گئی ایکسائز ڈیوٹی معلوم کیجئے۔ مزید یہ کہ ٹیلی ویژن کی قیمت بغیر ایکسائز ڈیوٹی معلوم کیجئے۔

حل:-

ٹیلی ویژن کی قیمت بمع ایکسائز ڈیوٹی = 14040 روپے

ایکسائز ڈیوٹی = 20%

$$\text{روپے } 100 = \text{فرض کیا ٹیلی ویژن کی اصل قیمت}$$

$$\text{روپے } 120 = 120\% \text{ ایکسائز ڈیوٹی کے ساتھ ٹیلی ویژن کی قیمت}$$

$$\text{ٹیلی ویژن کی اصل قیمت} = 14040 \times \frac{100}{120}$$

$$= 14040 \times \frac{5}{6}$$

$$= 2340 \times 5 = 11700 \text{ روپے}$$

پس ٹیلی ویژن کی قیمت ایکسائز ڈیوٹی کے علاوہ 11700 روپے ہوگی۔

پراپرٹی ٹیکس Property Tax

پراپرٹی ٹیکس زمین، گھر، فلیٹ یا عمارت کے مالکان سے 16% کی شرح سے پراپرٹی کی سالانہ آمدنی پر لیا جاتا ہے۔

مثال:- ایک فلیٹ کی سالانہ قیمت 14,00,000 روپے ہے۔ 16% سالانہ کی شرح سے قابل ادا پراپرٹی ٹیکس معلوم کیجئے۔

حل:-

$$\text{روپے } 14,00,000 = \text{فلیٹ کی سالانہ آمدنی}$$

$$\text{ٹیکس کی شرح} = 16\%$$

$$\text{قابل ادا ٹیکس} = 14,00,000 \times \frac{16}{100}$$

$$= 14,000 \times 16$$

$$= 2,24,000 \text{ روپے}$$

پس کل قابل ادا پراپرٹی ٹیکس 2,24,000 روپے ہے۔

انکم ٹیکس Income Tax

یکم جولائی سے 30 جون تک کے مالی سال کے دوران تمام قسم کی آمدن پر ٹیکس کو انکم ٹیکس (Income Tax) کہتے ہیں۔ اگر آمدن کا گوشوارہ (Income Return) 30 جون 2010 تک دائر کیا جائے۔ تو مالی سال 2010-2009 سمجھا جائے گا اور ٹیکس کا سال 2009 کہلائے گا۔ ہر مالی سال کے اختتام پر ہر اس شخص کو جس کی آمدنی ٹیکس کے قابل ہو گوشوارہ داخل کرنا ہوتا ہے جو سالانہ حاصل کی گئی آمدن کو ظاہر کرتا ہے۔ گورنمنٹ ایک خاص رقم کو ٹیکس سے مستثنیٰ (Exemption) قرار دے دیتی ہے اور بقیہ رقم پر ٹیکس ادا کرنا ہوتا ہے۔

تنخواہ دار لوگوں کی قابل ٹیکس آمدن (Taxable Income) پر ٹیکس لگانے کے لیے بنیادی تنخواہ (Basic Pay) میں تمام الاؤنسز (Allownces) شامل کئے جاتے ہیں۔

مثال 1:- ایک شخص کی سالانہ آمدنی بشمول تمام الاؤنسز 3,60,000 روپے ہے۔ جبکہ چھوٹ کی رقم 1,80,000 روپے ہے۔ اس شخص کو 0.75% کے حساب سے کتنا ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟

حل:-

شخص کی کل سالانہ آمدنی = 3,60,000 روپے

چھوٹ کی رقم = 1,80,000 روپے

قابل ٹیکس آمدن = $3,60,000 - 1,80,000$

$= 1,80,000$ روپے

ٹیکس کی شرح = $0.75\ \%$

قابل ادا ٹیکس کی رقم = $1,80,000 \times 0.75\%$

$$= 1,80,000 \times \frac{0.75}{100}$$

$$= 1,80,000 \times \frac{75}{100 \times 100} = 18 \times 75$$

$= 1350$ روپے

مثال 2:- ایک شخص کی کل سالانہ آمدنی 6,28,500 روپے ہے اور چھوٹ کی رقم 1,80,000 روپے ہے۔ بقیہ آمدنی پر 3.50% کی شرح سے کل قابل ادا ٹیکس معلوم کیجیے۔ جبکہ 15000 روپے انکم ٹیکس آمدنی میں سے پہلے ہی کاٹ لیا گیا ہو۔

حل:-

کل سالانہ آمدن = 6,28,500 روپے

چھوٹ کی رقم = 1,80,000 روپے

ٹیکس کے قابل آمدنی = $6,28,500 - 1,80,000$

$= 4,48,500$ روپے

ٹیکس کی شرح = $3.50\ \%$

کل قابل ادا ٹیکس = $4,48,500 \times 3.50\%$

$$= 4,48,500 \times \frac{350}{100 \times 100} = \frac{4485 \times 7}{2}$$

$$= \frac{31395}{2} = 15697.50$$ روپے

پہلے سے منہا شدہ ٹیکس = 15,000 روپے

قابل ادا ٹیکس = $15,697.50 - 15,000$

$= 697.50$ روپے

مشق 5.1

1- ایک بائیسکل کی قیمت 3500 روپے ہے۔ اگر سیلز ٹیکس کی شرح 16% ہو تو ایسے 50 بائیسکلوں کی قیمت پر سیلز ٹیکس معلوم کیجئے۔

2- اگر ایک ایئر کنڈیشنر کی قیمت 40,000 روپے ہو تو اس پر 16% کی شرح سے سیلز ٹیکس کی رقم معلوم کیجئے۔ مزید ایئر کنڈیشنر کی قیمت بمعہ سیلز ٹیکس بھی معلوم کیجئے۔

3- 1300 سی سی اور 1600 سی سی دو کاروں کی بغیر ایکسائز ڈیوٹی کی قیمت بالترتیب 6,00,000 روپے اور 8,00,000 روپے ہے۔ اگر ان دونوں کاروں پر ایکسائز ڈیوٹی بالترتیب 200% اور 250% ہو تو دونوں کاروں کی قیمت بشمول ایکسائز ڈیوٹی معلوم کیجئے۔

4- ایک گھر اور ایک زمین سے سالانہ آمدنی بالترتیب 15,00,000 روپے اور 20,00,000 روپے ہے۔ ان دونوں میں سے ہر ایک پر 16% شرح سے پراپرٹی ٹیکس معلوم کیجئے۔

5- دو آدمیوں کی کل قابل ٹیکس آمدنی بالترتیب 2,50,000 روپے اور 3,10,000 روپے ہے۔ دونوں کی آمدنی پر 5% کی شرح سے قابل ادا انکم ٹیکس معلوم کیجئے۔

6- ایک شخص کی کل سالانہ آمدن 4,30,000 روپے ہے۔ اگر اسے قابل ادا ٹیکس پر 3000 روپے چھوٹ دی جاتی ہو تو اسے 4.5% کی شرح سے کتنا انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟

7- اگر ایک شخص کی کل سالانہ آمدنی 6,25,000 روپے ہو جبکہ چھوٹ 1,50,000 روپے ہو تو بقیہ آمدنی پر 4.5% کی شرح سے قابل ادا ٹیکس معلوم کیجئے۔

8- ایک شخص کی کل آمدنی 5,25,000 روپے ہے۔ جبکہ چھوٹ کی رقم 1,50,000 روپے ہے۔ اس کی بقیہ آمدنی پر 4.5% کی شرح سے قابل ادا ٹیکس معلوم کیجئے جبکہ 10,000 روپے کی رقم انکم ٹیکس کی مد میں پہلے ہی منہا کر لی گئی ہے۔

5.2 یوٹیلٹی بلز UTILITY BILLS

اس حصہ میں ہم یوٹیلٹی بلز پر غور کریں گے جو کہ بجلی، گیس اور ٹیلی فون سے متعلقہ ہوں گے۔

بجلی کا بل Electricity Bill

گھریلو بجلی کا بل ہر گھر کے لیے ایک خاص رقم پر مشتمل ہوتا ہے۔ یہ رقم استعمال کیے گئے یونٹس کی مختلف قیمتوں پر مشتمل ہوتی ہے۔ درج ذیل میں یونٹس کی قیمتیں دی گئی ہیں۔

پہلے 100 یونٹس کی قیمت بحساب 2.65 روپے فی یونٹ
اگلے 200 یونٹس کی قیمت بحساب 3.64 روپے فی یونٹ
اگلے 700 یونٹس کی قیمت بحساب 6.15 روپے فی یونٹ
باقی استعمال کئے گئے یونٹس کی قیمت بحساب 7.41 روپے فی یونٹ

استعمال ہونے والے یونٹس ایک میٹر پر ریکارڈ ہوتے رہتے ہیں۔ مہینہ کے شروع اور آخر میں لی گئی ریڈنگز کا فرق مہینہ میں استعمال کی گئی بجلی کے یونٹس کو ظاہر کرتا ہے۔ ہر مہینہ کے بجلی کے بل میں ایکسائز ڈیوٹی، ٹیلی ویژن فیس اور انکم ٹیکس بھی شامل کیا جاتا ہے۔

مثال: احسن ایک ماہ میں 1050 یونٹس بجلی استعمال کرتا ہے اسے مہینہ میں بجلی کا کتنا بل ادا کرنا ہوتا ہے۔

حل:

استعمال کیے گئے یونٹس کی تعداد $= 1050$

پہلے 100 یونٹس کی قیمت 2.65 روپے فی یونٹ کے حساب سے $= 100 \times 2.65 = 265$ روپے

اگلے 200 یونٹس کی قیمت 3.64 روپے فی یونٹ کے حساب سے $= 200 \times 3.64 = 728$ روپے

اگلے 700 یونٹس کی قیمت 6.15 روپے فی یونٹ کے حساب سے $= 700 \times 6.15 = 4305$ روپے

بقیہ 50 یونٹس کی قیمت 7.41 روپے فی یونٹ کے حساب سے $= 50 \times 7.41 = 370.50$ روپے

1050 یونٹس کی کل قیمت $= 5668.50$ روپے .....(i)

1.5% کے حساب سے ایکسائز ڈیوٹی $= 85.03$ روپے .....(ii)

بجلی کی ڈیوٹی $= 62.52$ روپے .....(iii)

ٹیلی ویژن کی فیس $= 25.00$ روپے .....(iv)

انکم ٹیکس 1.6% کے حساب سے $= 91.00$ روپے .....(v)

کل رقم (i) + (ii) + (iii) + (iv) + (v) $= 5932.05$ روپے

یا $= 5932$ روپے

گیس کا بل Gas Bill

بہت سے گھروں میں کھانا پکانے اور حرارت (Heat) حاصل کرنے کے لیے گیس استعمال ہوتی ہے۔ استعمال کی گئی گیس کی مقدار کو حجم (Volume) میں ماپا جاتا ہے اور اسے ایک میٹر کے ذریعے یونٹس (Units) میں ریکارڈ کیا جاتا ہے۔ ہر یونٹ میں 100 مکعب فٹ (Cubic Feet) گیس ہوتی ہے۔ 01-07-2009 سے گھریلو صارفین کے لیے گیس سلیب کی شرح درج ذیل ہے۔

جبکہ $1Hm^3 \approx 3.30$ MMBTU

سلیب	گیس کا استعمال Hm^3 میں	روپے فی MMBTU
1	0 تا 0.50	80.65
2	0.50 تا 1	84.45
3	1 تا 2	153.73
4	2 تا 3	325.48
5	3 تا 4	423.42
6	4 تا 5	550.44
7	5 سے بالاتر	730.17

مثال: گیس میٹر ریڈنگ سے ظاہر ہوتا ہے کہ $4.872\ Hm^3$ گیس ایک ماہ میں استعمال ہوئی۔ قابلِ ادا رقم بشمول جی ایس ٹی کی 16% شرح سے معلوم کیجیے۔ جبکہ کرایہ میٹر 120 روپے ہے

حل:

گیس اخراجات $4\ Hm^3$ کے لیے = 2201.76 روپے ....(i)

گیس اخراجات $0.872\ Hm^3$ کے لیے = 479.98 روپے ....(ii)

کرایہ میٹر = 120.00 روپے ....(iii)

کل رقم = (i) + (ii) + (iii) = 2801.74 روپے

جی ایس ٹی 16% کی شرح سے $= \frac{16}{100} \times 2801.74$ = 448.27 روپے

موجودہ بل = 2801.74 + 448.27

= 3250.01 روپے

= 3250 روپے

ٹیلی فون کے بل Telephone Bills

ٹیلی فون کال کا خرچ تین چیزوں پر انحصار کرتا ہے۔

(i) کال کرنے والے اور کال سننے والے کے درمیان فاصلہ۔

(ii) دن کے اوقات یا ہفتہ کا وہ دن، جس دن کال کی جاتی ہے۔

(iii) کال کا دورانیہ

ان تین اجزا کو مختلف انداز سے اکٹھا کر کے میٹر کے لیے ٹائم یونٹ بنایا جاتا ہے ہر یونٹ کی قیمت مقررہ شرح سے لی جاتی ہے۔

ایک صارف کا قوانین کے تحت ٹیلی فون کا بل درج ذیل ہے۔

(i)	پی ٹی سی ایل اخراجات (بشمول کرایہ لائن، لوکل کالز NWD کالز اخراجات، موبائل اخراجات، NED موبائل اخراجات)	=	1233 روپے
(ii)	ایف۔ای۔ڈی بحساب 21% (فیڈرل ایکسائز ڈیوٹی)	=	259 روپے
(iii)	ڈبلیو۔ایچ۔ٹیکس بحساب 4% (ودہولڈنگ ٹیکس)	=	49 روپے
	مقررہ تاریخ تک ادائیگی	=	1540 روپے
	سرچارج	=	80 روپے
	مقررہ تاریخ کے بعد ادائیگی	=	1620.00 روپے

موبائل فون کا بل درج ذیل طریقے سے بنایا جاتا ہے۔

190 منٹ کال کے اخراجات (3 روپے فی منٹ کی شرح سے)	=	570.00 روپے
ایس ایم ایس کے اخراجات (1 روپیہ فی SMS)	=	100.00 روپے
سی ای ڈی (سنٹرل ایکسائز ڈیوٹی) کے اخراجات (15 فی صد کی شرح سے)	=	105.00 روپے
کل قابل ادا رقم	=	775.00 روپے

مشق 5.2

1- درج ذیل میں استعمال کی گئی گیس کی میٹر ریڈنگ دی گئی ہے۔ گیس کا بل دی گئی سلیب کے مطابق مکمل کیجیے۔ نیز اس میں کرایہ میٹر اور جی ایس ٹی بھی شامل کیجیے۔

(i) $3.0756\ Hm^3$	(ii) $4.285\ Hm^3$	(iii) $2.796\ Hm^3$
(iv) $1.378\ Hm^3$	(v) $5.235\ Hm^3$	(vi) $4.665\ Hm^3$

2- بجلی کے استعمال کی بناء پر ذیل میں استعمال کیے گئے یونٹس درج ہیں۔ حل شدہ مثال کی مدد سے بجلی کے بل مکمل کیجیے۔

(i) 315 یونٹس	(ii) 210 یونٹس
(iii) 375 یونٹس	(iv) 290 یونٹس

3- درج ذیل میں کی گئی ٹیلی فون کی کالز کی تعداد دی گئی ہے۔ کال کی شرح 5 روپے فی کال، ایف۔ ای۔ ڈی 15% کی شرح اور ڈبلیو۔ ایچ۔ ٹیکس 4% کی شرح سے شامل کر کے ٹیلی فون بل مکمل کیجیے۔

(i) 530	(ii) 640	(iii) 750
(iv) 270	(v) 480	(vi) 315

5.3 ذاتی آمدن PERSONAL INCOME

کسی شخص کی انفرادی طور پر روزانہ، ہفتہ وار، ماہانہ یا سالانہ کی بنیاد پر حاصل کی گئی آمدنی کو اس شخص کی ذاتی آمدنی کہتے ہیں۔

5.3.1 ورکر کی ذاتی آمدنی Personal Income of a Worker

کسی شخص کی ذاتی آمدن دیکھنے کے لیے جو کہ روزانہ کی بنیاد پر کام کر رہا ہو ہم درج ذیل مثالیں دیکھتے ہیں۔

مثال 1:- درج ذیل میں فیکٹری ملازمین کی مجموعی روزانہ اجرت معلوم کیجیے۔ جبکہ ایک گھنٹہ کام کی اجرت 50 روپے ہو اور ایک دن 8 گھنٹوں پر مشتمل ہو۔

	نام	کتنے گھنٹے کام کیا	50 روپے فی گھنٹہ کے حساب سے تنخواہ
1	اسلم	3	$3\times 50 = 150$ روپے
2	انور	5	$5\times 50 = 250$ روپے
3	دانیال	8	$8\times 50 = 400$ روپے
4	عبداللہ	7	$7\times 50 = 350$ روپے
5	علی	4	$4\times 50 = 200$ روپے
6	حمزہ	6	$6\times 50 = 300$ روپے
	مجموعی اجرت		$=1650$ روپے

اضافی وقت کے ساتھ روزانہ اجرت Daily wages along with over time

مثال 2:- دانیال ایک ہفتہ میں سوموار سے جمعہ تک 5 دن کام کرتا ہے۔ وہ روزانہ صبح 8 بجے کام شروع کرتا ہے اور شام 4 بجے ختم کرتا ہے۔ اسے روزانہ ایک گھنٹے کا وقفہ ملتا ہے اور وہ دو گھنٹے روزانہ اضافی وقت کام کرتا ہے۔ اگر اسے 60 روپے فی گھنٹہ معمول کی اجرت اور 80 روپے فی گھنٹہ اضافی وقت کے دیے جائیں تو وہ ایک ماہ میں کتنے گھنٹے کام کرے گا۔ نیز اس کی مجموعی ماہانہ تنخواہ بھی معلوم کیجیے۔

حل:- صبح 8 بجے سے شام 4 بجے تک گھنٹوں کی تعداد $= 8$ گھنٹے

چونکہ اسے روزانہ 1 گھنٹہ کا وقفہ ملتا ہے اس لیے وہ روزانہ 7 گھنٹے کام کرتا ہے۔

ایک ہفتہ میں گھنٹوں کی تعداد $= 5\times 7$

$= 35$ گھنٹے

4×35 = ایک مہینہ میں گھنٹوں کی تعداد
= 140 گھنٹے
140×60 = ایک ماہ کی تنخواہ 60 روپے فی گھنٹہ کے حساب سے
= 8400 روپے
چونکہ دانیال روزانہ 2 گھنٹے اضافی کام کرتا ہے اس لیے
2×5 = ایک ہفتہ میں جتنے گھنٹے اضافی کام کیا
= 10 گھنٹے
4×10 = ایک ماہ میں جتنے گھنٹے اضافی کام کیا
= 40 گھنٹے
40×80 = ایک ماہ میں اضافی کام کی تنخواہ
= 3200 روپے
مجموعی تنخواہ = تنخواہ + اضافی وقت کی تنخواہ
$= 8400 + 3200$
مجموعی تنخواہ = 11600 روپے

مثال 3:- ایک سیلز مین کو 60 روپے فی گھنٹہ کے علاوہ فروخت کی گئی اشیا پر 5% کمیشن بھی دیا جاتا ہے۔ اگر وہ دکان پر صبح 8 بجے سے رات 10 بجے تک کام کرتا ہو اور 20,000 روپے مالیت کی اشیا فروخت کرتا ہو تو اس کی روزانہ کی مجموعی آمدنی کیا ہوگی؟

حل:-
صبح 8 بجے سے رات 10 بجے تک کام کا دورانیہ = 14 گھنٹے
تنخواہ فی گھنٹہ = 60 روپے
روزانہ کی تنخواہ $= 14 \times 60$
= 840 روپے
کمیشن کی شرح = 5%
20,000 کا 5% $= \frac{5}{100} \times 20000$
= 1000 روپے
روزانہ کی کل تنخواہ = تنخواہ + کمیشن
$= 840 + 1000$
= 1840 روپے

5.3.2 تنخواہ دار شخص کی مجموعی آمدنی Gross Income of a Salaried Person

ایک تنخواہ دار شخص کی مجموعی آمدنی اس کی بنیادی تنخواہ، کرایہ مکان کنوینس الاؤنس، مہنگائی الاؤنس، میڈیکل الاؤنس وغیرہ پر مشتمل ہوتی ہے۔

مثال:- اگر کسی شخص کی بنیادی تنخواہ 30,000 روپے ماہانہ ہو اور اسے بنیادی تنخواہ کا 15% کرایہ مکان، 10% مہنگائی الاؤنس، 2000 روپے کنوینس الاؤنس اور 1000 روپے میڈیکل الاؤنس کے طور پر دیے جائیں تو اس شخص کی مجموعی ماہانہ تنخواہ معلوم کیجئے۔

حل:-

بنیادی تنخواہ = 30,000 روپے

کرایہ مکان = 30,000 کا 15%

$= \frac{15}{100} \times 30000$

= 4500 روپے

مہنگائی الاؤنس = 30,000 کا 10%

$= \frac{10}{100} \times 30000$

= 3000 روپے

شخص کی ماہانہ تنخواہ کا بنیادی ڈھانچہ درج ذیل ہے۔

(i) بنیادی تنخواہ = 30,000 روپے

(ii) کرایہ مکان = 4500 روپے

(iii) مہنگائی الاؤنس = 3000 روپے

(iv) کنوینس الاؤنس = 2000 روپے

(v) میڈیکل الاؤنس = 1000 روپے

مجموعی ماہانہ تنخواہ = 40,500 روپے $((i)+(ii)+(iii)+(iv)+(v))$

5.3.3 کٹوتی کے بعد آمدنی Income after Deductions

کسی شخص کی حقیقی آمدنی یا وہ آمدنی جو وہ گھر لے کر جاتا ہے اس سے مراد ہے کہ وہ تنخواہ جو اسے مجموعی تنخواہ میں سے ضروری کٹوتیوں کے بعد ملتی ہے۔

مثال:- اگر ایک شخص کی مجموعی تنخواہ 25000 روپے ہو اور اسے 360 روپے انکم ٹیکس، 1500 روپے بنیوولینٹ فنڈ، 1000 روپے جی پی فنڈ اور 300 روپے گروپ انشورنس کے ادا کرنا ہوں تو اس شخص کی حقیقی آمدنی معلوم کیجئے۔

حل:-

مجموعی تنخواہ = 25,000 روپے

کٹوتی

انکم ٹیکس = 360 روپے ....(i)

بنیوولینٹ فنڈ = 1500 روپے ....(ii)

جی پی فنڈ = 1000 روپے ....(iii)

گروپ انشورنس = 300 روپے ....(iv)

کل کٹوتی = 3160 روپے :{ (i), (ii), (iii), (iv) کا مجموعہ }

حقیقی آمدنی = مجموعی تنخواہ − کٹوتی

= 25000 − 3160

حقیقی آمدنی = 21,840 روپے

مشق 5.3

1- ایک خاتون کارکن ہفتہ میں 6 دن کام کرتی ہے۔ وہ صبح 7 بجے کام شروع کرتی ہے اور 4 بجے ختم کرتی ہے۔ اسے صبح کے وقت 15 منٹ کا وقفہ اور شام 45 منٹ کا وقفہ ملتا ہے۔ اگر ادائیگی کی شرح 40 روپے فی گھنٹہ ہو تو وہ ایک ہفتہ میں کتنا کام کرتی ہے اور اس کو کتنی ادائیگی ہوتی ہے؟

2- خالد ہفتہ میں 6 دن کام کرتا ہے اگر اسے 200 روپے یومیہ ادا کیا جائے تو اس کی مجموعی ماہانہ اجرت معلوم کیجیے۔

3- ہفتہ میں 6 دن روزانہ 8 گھنٹہ کی بنیاد پر کام کرتے ہوئے اسلم کو 70 روپے فی گھنٹہ ادائیگی ہوتی ہے۔ اضافی وقت کی ادائیگی 70 روپے فی گھنٹہ کا 1.5 گنا ہے۔ اگر وہ 40 گھنٹے اضافی وقت کام کرتا ہے تو اس کی ماہانہ مجموعی تنخواہ معلوم کیجیے۔

4- اگر ایک شخص کی بنیادی تنخواہ 18000 روپے، کرایہ مکان الاؤنس 3500 روپے، مہنگائی الاؤنس 3000 روپے اور کنوینس الاؤنس 1500 روپے اور میڈیکل الاؤنس 500 روپے ہو تو اس شخص کی مجموعی ماہانہ تنخواہ کیا ہوگی؟

5- اگر ایک شخص کی آمدنی میں کٹوتی کی شکل میں 400 روپے انکم ٹیکس، 1200 روپے بینوویلنٹ فنڈ، 1500 روپے جی پی فنڈ اور 400 روپے گروپ انشورنس شامل ہوں تو 45000 روپے میں سے اس کے پاس کتنی رقم باقی بچے گی؟

6- نعمان ایک فیکٹری میں کام کرتا ہے جہاں 35 گھنٹوں کے ہفتہ میں 50 روپے فی گھنٹہ اجرت دی جاتی ہے۔ اضافی وقت کام کرنے پر 50 روپے فی گھنٹہ کا 1.5 گنا دیا جاتا ہے۔ وہ ہفتہ میں کتنا کمائے گا اگر وہ درج ذیل گھنٹے کام کرتا ہو۔

(i) 38 گھنٹے (ii) 48 گھنٹے (iii) 50 گھنٹے

7- عبداللہ کی تنخواہ کی سلپ ظاہر کرتی ہے کہ اس نے ہفتہ میں 36 گھنٹے کام کے علاوہ 6 گھنٹے اضافی کام کیا ہے۔ اگر اس کی تنخواہ کی بنیادی شرح 60 روپے فی گھنٹہ اور اضافی وقت کی ادائیگی 60 روپے کا 1.5 گنا ہو تو عبداللہ کی ماہانہ مجموعی تنخواہ معلوم کیجیے۔

جائزہ مشق 5

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) وہ رقم جو آمدنی کے تناسب سے کچھ چیزوں کی لاگت میں منافع کے اضافہ اور خدمات پر ریاست کو ادا کی جاتی ہے:

(a) ٹیکس کہلاتی ہے (b) ایکسائز ڈیوٹی کہلاتی ہے (c) جائیداد کا ٹیکس کہلاتی ہے (d) انکم ٹیکس کہلاتی ہے

(ii) وہ ٹیکس جو آمدنی، جائیداد اور منافع پر انکم ٹیکس، جائیداد ٹیکس وغیرہ کی شکل میں وصول کیا جاتا ہے اسے:

(a) ٹیکس کہتے ہیں (b) براہ راست ٹیکس کہتے ہیں (c) جائیداد ٹیکس کہتے ہیں (d) انکم ٹیکس کہتے ہیں

(iii) ڈیوٹیز، موٹر وہیکل ٹیکس کی شکل میں ٹیکس کو:

(a) بالواسطہ ٹیکس کہتے ہیں (b) براہ راست ٹیکس کہتے ہیں (c) جائیداد ٹیکس کہتے ہیں (d) انکم ٹیکس کہتے ہیں

(iv) کسی چیز کی قیمت میں اضافی ٹیکس کو:

(a) ٹیکس کہتے ہیں (b) سیلز ٹیکس کہتے ہیں (c) انکم ٹیکس کہتے ہیں (d) ایکسائز ڈیوٹی کہتے ہیں

(v) کسی تیار کی گئی چیز پر ایک خریدار، خرید کے وقت جو ٹیکس ادا کرتا ہے اسے:

(a) ایکسائز ڈیوٹی کہتے ہیں (b) ٹیکس کہتے ہیں (c) انکم ٹیکس کہتے ہیں (d) سیلز ٹیکس کہتے ہیں

(vi) وہ ٹیکس جو زمین، گھر، فلیٹ یا عمارت کے مالک سے حاصل کیا جاتا ہے اسے:

(a) پراپرٹی ٹیکس کہتے ہیں (b) انکم ٹیکس کہتے ہیں (c) براہ راست ٹیکس کہتے ہیں (d) غیر براہ راست ٹیکس کہتے ہیں

(vii) وہ ٹیکس جو تمام قابل ٹیکس آمدنی پر لگایا جاتا ہے وہ:

(a) سیلز ٹیکس کہلاتا ہے (b) براہ راست ٹیکس کہلاتا ہے (c) انکم ٹیکس کہلاتا ہے (d) ایکسائز ڈیوٹی کہلاتا ہے

2- خالی جگہ پُر کیجیے۔

(i) وہ رقم جو آمدنی کے تناسب سے اور منافع سے حاصل کر کے یا سامان کی قیمت میں جمع کر کے یا خدمات پر ریاست کو ادا کی جاتی ہے وہ ______ کہلاتی ہے۔

(ii) وہ ٹیکس جو آمدنی، جائیداد اور منافع پر انکم ٹیکس، جائیداد ٹیکس اور منافع کی شکل میں حاصل کیا جائے اسے ______ کہتے ہیں۔

(iii) ڈیوٹیز، موٹر وہیکل ٹیکس، سامان اور خدمات پر ٹیکس کو ____________ کہتے ہیں۔

(iv) کسی چیز کی قیمت میں اضافی طور پر شامل ٹیکس کو ____________ کہتے ہیں۔

(v) کسی تیار کی گئی چیز پر ایک خریدار، خرید کے وقت جو ٹیکس ادا کرتا ہے اسے ____________ کہتے ہیں۔

(vi) وہ ٹیکس جو زمین، گھر، فلیٹ یا عمارات کے مالک سے حاصل کیا جاتا ہے اسے ____________ کہتے ہیں۔

(vii) وہ ٹیکس جو تمام قابل ٹیکس آمدنی پر لگایا جاتا ہے اسے ____________ کہتے ہیں۔

(viii) اگر ایک فلیٹ سے سالانہ آمدنی 6,00,000 روپے ہو تو 15% کی شرح سے قابل ادا ٹیکس ____________ روپے ہوگا۔

(ix) 12000 روپے قیمت کے ٹیلی ویژن پر 10% کی شرح سے اضافی ٹیکس ____________ روپے ہوگا۔

(x) 3,00,000 روپے کی رقم پر 150% کی شرح سے ایکسائز ڈیوٹی ____________ روپے ہوگی۔

-3 ایک سائیکل کی قیمت 4000 روپے ہے۔ اگر ایک سائیکل پر 16% کی شرح سے سیلز ٹیکس لیا جائے تو ایسے 30 سائیکلوں پر سیلز ٹیکس معلوم کیجیے۔

-4 اگر ایک شخص کی مجموعی آمدنی 7,00,000 روپے ہو اور اس پر 1,50,000 روپے کی چھوٹ ہو تو 4.5% کی شرح سے کتنا ٹیکس حاصل ہوگا؟

-5 گیس کا میٹر ایک ماہ کے دورانیہ میں $5.670\ Hm^3$ گیس کا استعمال ظاہر کرتا ہے۔ 16% جی ایس ٹی کی شرح کے ساتھ گیس کے بل کی قابل ادا رقم معلوم کیجیے۔

-6 درج ذیل میں بجلی کے لیے استعمال کیے گئے یونٹس دیے گئے ہیں۔

(i) 275 یونٹس (ii) 200 یونٹس (iii) 340 یونٹس (iv) 285 یونٹس

بجلی کے بل ان تمام اشیاء کو شامل کر کے بنائیے جیسا کہ حل شدہ مثال میں ہے۔

-7 ایک شخص کی ماہانہ مجموعی آمدنی 75000 روپے ہے۔ اگر 1500 روپے، 1200 روپے اور 1800 روپے بالترتیب انکم ٹیکس، بینوویلنٹ فنڈ اور جی پی فنڈ منہا کیے گئے ہوں تو وہ شخص باقی کتنے روپے گھر لے جائے گا؟

خلاصہ

- وہ رقم جو آمدنی کے تناسب سے اور منافع سے حاصل کر کے یا سامان کی قیمت خرید میں اضافہ کر کے یا خدمات پہ ریاست کو ادا کی جاتی ہے ٹیکس کہلاتی ہے۔

- "براہِ راست ٹیکس" آمدنی، جائیداد اور منافع پر انکم ٹیکس، پراپرٹی ٹیکس اور منافع پر ٹیکس کی شکل میں حاصل کیا جاتا ہے۔

- بالواسطہ ٹیکس میں ڈیوٹیز، موٹر وہیکلز، سامان، خدمات ٹیکس، (جی ایس ٹی) ٹیکس اور قیمت میں اضافی جمع شدہ ٹیکس شامل ہیں۔

- جب ہم کوئی چیز خریدتے ہیں تو ہم ایک خاص رقم بطور اضافی ٹیکس جو کہ چیز کی قیمت خرید میں شامل کرتے ہوئے ادا کرتے ہیں اسے سیلز ٹیکس کہتے ہیں۔ یہ ٹیکس عام طور پر قیمت فروخت کی ایک مقررہ شرح فی صد سے دیا جاتا ہے۔ پاکستان میں سامان کے خریدنے اور خدمات مہیا کرنے پہ %16 کی شرح سے سیلز ٹیکس وصول کیا جاتا ہے۔

- ایکسائز ڈیوٹی ٹیکس کی وہ شکل ہے جو ایک خریدار ایک تیار کی گئی چیز پر خریدتے وقت ادا کرتا ہے۔

- پراپرٹی ٹیکس زمین، گھر، فلیٹ یا عمارات کے مالک سے ایک خاص شرح %16 کے حساب سے سالانہ آمدنی پر وصول کیا جاتا ہے۔

- انکم ٹیکس ہر سال یکم جولائی سے اگلے سال 30 جون کے درمیان قابل ٹیکس آمدن پر وصول کیا جاتا ہے۔

یونٹ

6

قوت نما اور لوگارتھم

EXPONENTS AND LOGARITHMS

- جذر اور مجذور
- قوانین قوت نما
- سائنسی ترقیم
- لوگارتھم
- لوگارتھم کے قوانین
- لوگارتھم کا استعمال

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- جذر اور مجذور کے تصورات۔
- کہ کسی جملہ کے جذر اور قوت نمائی شکل میں فرق کیا ہے۔
- کہ کسی جملہ کی حالت جذر اور قوت نمائی حالت کو آپس میں تبدیل کیسے کرتے ہیں۔
- اساس، قوت نما اور قیمت میں واضح فرق۔
- حقیقی قوت نما والے جملوں کو مختصر کرنے کے لیے قوت نما کے قوانین کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔
- کسی عدد کو سائنسی ترقیم اور عام ترقیم میں کیسے ظاہر کر سکتے ہیں۔
- کسی عدد کے لوگارتھم جس کا اساس 'a' ہو۔

$(a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x, a > 0, y > 0$ اور $a \neq 1)$

- کامن لوگارتھم یا کسی عدد کے لوگارتھم کا خاصہ اور مینٹیسا۔
- عدد کے لوگارتھم کو معلوم کرنے کے لیے جدول کا استعمال کیسے کرتے ہیں۔
- اینٹی لوگارتھم کا تصور اور اس کے جدول کو استعمال کرنے کا طریقہ۔
- درج ذیل قوانین کو کیسے ثابت کرتے ہیں۔
  - $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$
  - $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
  - $\log_a m^n = n \log_a m$
- لوگارتھم کے قوانین کو استعمال کرتے ہوئے ضرب، تقسیم اور قوت نما کے طویل عمل کو جمع اور تفریق جیسے آسان عمل میں کیسے تبدیل کر سکتے ہیں۔

6.1.1 جذر اور مجذور Radicals and Radicands

آیئے ایک حقیقی عدد $\sqrt{5}$ کو دیکھتے ہیں۔ہم اسے $5^{\frac{1}{2}}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں 5 ایک مثبت ناطق عدد ہے، 2 ایک مثبت حقیقی صحیح عدد اور $\sqrt{5}$ ایک غیر ناطق عدد، اس لیے $\sqrt{5}$ ایک جذر المربع ہے اسے 5 کا دوسرا جذر بھی کہتے ہیں۔ اسے دوسرے درجے کا جذر بھی کہتے ہیں۔ $\sqrt{\ }$ جذر کی علامت (Radical Sign) اور 5 مجذور (Radicand) کہلاتا ہے۔

ایک اور حقیقی عدد $\sqrt[3]{4}$ کو دیکھیے۔ہم اسے $4^{\frac{1}{3}}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں 4 ایک مثبت ناطق عدد، 3 ایک مثبت صحیح عدد اور $\sqrt[3]{4}$ غیر ناطق ہے۔ اس لیے $\sqrt[3]{4}$ ایک جذر ہے اسے 4 کا تیسرا جذر بھی کہتے ہیں۔ یہ جذر المکعب بھی کہلاتا ہے۔

اس طرح ہر درجہ کا جذر ایک غیر ناطق عدد ہوتا ہے جس میں جذر المربع بھی شامل ہے۔ مثلاً

$2\sqrt{3},\ 4+3\sqrt{5},\ 10-4\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{2}}{5},\ \frac{9}{\sqrt{7}}$ تمام غیر ناطق اعداد ہیں۔

اگر 'a' ایک حقیقی عدد ہو اور 'n' ایک مثبت صحیح عدد، تب ایک عدد کی طاقت $\frac{1}{n}$ لگانے سے $a^{1/n}$ حاصل ہو تو اسے a کا nواں جذر کہتے ہیں۔

$$\sqrt{2} = 2^{1/2},\ \sqrt[3]{2} = 2^{1/3},\ \sqrt[4]{5} = 5^{1/4}$$ پس

علامت $\sqrt[n]{\ }$ انڈیکس n کی جذری علامت کہلاتی ہے۔ $\sqrt[n]{a}$ میں a مجذور (Radicand) کہلاتا ہے۔

$\sqrt{a}$ ، دوسرا جذر کہلاتا ہے۔

$\sqrt[3]{a}$، تیسرا جذر کہلاتا ہے۔

$\sqrt[4]{a}$، چوتھا جذر کہلاتا ہے۔

$\sqrt[n]{a}$، nواں جذر کہلاتا ہے۔

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ اور $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ ایک دوسرے کے کانجوگیٹ کہلاتے ہیں۔ ان دو جذروں کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہوتا ہے۔

6.1.2 کسی جملہ کی جذری اور قوت نمائی اشکال
Radical Form and Exponential Form of an Expression

$\sqrt[3]{8}$ ایک جذری شکل ہے جبکہ $(8)^{\frac{1}{2}}$ اس کی قوت نمائی شکل ہے۔ کیونکہ جذر کو کسری قوت نما میں بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔

$5(3)^{1/2}$ کی جذری شکل $5\sqrt{3}$ ہے۔

$$5(3)^{1/2} = 5\sqrt{3}$$

مندرجہ بالا مثالوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ قوت نما کے قوانین کا اطلاق جذری جملوں پر بھی ہو سکتا ہے۔ پس کسی مثبت صحیح عدد 'n' اور مثبت ناطق عدد 'a' کے لیے ہم درج ذیل جدول (Table) پر غور کرتے ہیں۔

جذری شکل	قوت نمائی شکل
(i) $(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\left(a^{1/n}\right)^n = a$
(ii) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$
(iii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$
(iv) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n} = a^{m/n}$

مثال 1:- مختصر کیجیے۔ (i) $(a^3b^2)^{1/4}\times(a^{1/3}b)^{3/4}$ (ii) $x^{1/4}\div x^{2/3}$

حل:-

(i) $(a^3b^2)^{1/4}\times(a^{1/3}b)^{3/4}$

$= a^{3/4}b^{2/4}\times a^{3/12}b^{3/4}$

$= a^{3/4}b^{1/2}\times a^{1/4}b^{3/4}$

$= a^{3/4}\times a^{1/4}\times b^{1/2}\times b^{3/4}$

$= a^{(3/4+1/4)}\times b^{(1/2+3/4)}$

$= a^{4/4}\times b^{(2+3)/4}$

$= a^{1}\,b^{5/4}$

$= a\,b^{5/4}$

(ii) $x^{1/4}\div x^{2/3}$

$= x^{1/4}\times\frac{1}{x^{2/3}}$

$= x^{1/4}.x^{-2/3}$

$= x^{1/4-2/3}$

$= x^{(3-8)/12}$

$= (x)^{-5/12}$

$= \frac{1}{x^{5/12}}$

مثال 2:- مختصر کیجیے۔ (i) $\sqrt{(a^3b^2)^{1/4}(a^{1/3}b^{3/4})}$ (ii) $\sqrt{x^{1/4}\div x^{\frac{-2}{3}}}$

حل:-

(i) $\sqrt{(a^3b^2)^{1/4}(a^{1/3}b^{3/4})}$

$= \sqrt{a^{3/4}\times b^{2/4}\times a^{1/3}\times b^{3/4}}$

$= \sqrt{a^{(9+4)/12}\,b^{(2+3)/4}}$

$= \sqrt{a^{13/12}\,b^{5/4}}$

(ii) $\sqrt{x^{1/4}\div x^{\frac{-2}{3}}}$

$= \sqrt{\frac{x^{1/4}}{x^{-2/3}}}$

$= \sqrt{x^{1/4}\times x^{2/3}}$

$= \sqrt{x^{(3+8)/12}}$

$= \sqrt{x^{11/12}}$

6.1.3 جذری جملے کو قوت نما اور قوت نما جملے کو جذری جملے میں تبدیل کرنا۔

Transform an Expression into Radical Form to an Expression into Exponential Form and Vice Versa

آیئے ہم درج ذیل مثالیں دیکھتے ہیں۔

مثال 1۔ قوت نما کی شکل میں تبدیل کیجیے۔

(i) $\sqrt[4]{81a^{28}}$ (ii) $\sqrt[3]{27x^{18}}$ (iii) $\sqrt[3]{\frac{x^7y^9}{z^4}}$

حل:۔

(i) $\sqrt[4]{81a^{28}} = (81\,a^{28})^{1/4}$

$= (3^4\,a^{28})^{1/4}$

$= 3^{4/4} \times a^{28/4}$

$= 3^1 \times a^7 \quad = 3\,a^7$

(ii) $\sqrt[3]{27x^{18}} = (27\,x^{18})^{1/3}$

$= (3^3 \times a^{18})^{1/3}$

$= 3^{3/3} \times x^{18/3}$

$= 3^1 \times x^6$

$= 3\,x^6$

(iii) $\sqrt[3]{\frac{x^7y^9}{z^4}} = \left(\frac{x^7\,y^9}{z^4}\right)^{1/3}$

$= \frac{x^{7/3}\,y^{9/3}}{z^{4/3}}$

$= \frac{x^{7/3}\,y^3}{z^{4/3}} \quad = x^{7/3}\,y^3\,z^{-4/3}$

مثال 2:- مختصر کیجئے اور جواب جذری شکل میں دیجئے۔

(i) $\sqrt{18}\times\sqrt[5]{64}$ (ii) $a^{1/2}\times a^{2/3}\div a^{3/4}$ (iii) $(a^{1/3}b^{2/3})^{3/4}\div(a^{2/5}b^{1/3})^{5/6}$

حل:-

(i) $\sqrt{18}\times\sqrt[5]{64} = (18)^{1/2}\times(64)^{1/5}$

$= (9\times 2)^{1/2}\times(2^6)^{1/5}$

$= 9^{1/2}\times 2^{1/2}\times 2^{6/5}$

$= 9^{1/2}\times 2^{17/10}$

$= (9)^{1/2}\times(2^{17/5})^{1/2}$

$= \sqrt{9\times 2^{17/5}}$

(ii) $a^{1/2}\times a^{2/3}\div a^{3/4} = \dfrac{a^{1/2+2/3}}{a^{3/4}}$

$= a^{1/2+2/3-3/4}$

$= a^{(6+8-9)/12}$

$= a^{(14-9)/12}$

$= a^{5/12}$

$= \sqrt[12]{a^5}$

(iii) $(a^{1/2}b^{2/3})^{3/4}\div(a^{2/5}b^{1/3})^{5/6} = a^{1/2\times 3/4}\times b^{2/3\times 3/4}\div a^{2/5\times 5/6}\times b^{1/3\times 5/6}$

$= (a^{3/8}b^{1/2})\div a^{1/3}\,b^{5/18}$

$= a^{3/8-1/3}\,b^{1/2-5/18} = a^{(9-8)/24}\,b^{(9-5)/18}$

$= a^{(9-8)/24}\,b^{(9-5)/18} = a^{1/24}\,b^{4/18}$

$= \sqrt[24]{a}\;\sqrt[9]{b^2}$

مشق 6.1

-1 درج ذیل میں جذر اور مجذور بتایئے۔

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $4+3\sqrt{a}$ (iii) $\sqrt{11}$

(iv) $8-2\sqrt{6}$ (v) $\frac{\sqrt{5}}{7}$ (vi) $\frac{9}{\sqrt{13}}$

-2 درج ذیل کو قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) $\sqrt{a^3}$ (ii) $\sqrt[5]{a^3}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt[p]{a^k}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt[q]{a^k}}$

-3 جذر کی شکل میں لکھ کر حل کیجیے۔

(i) $(25)^{1/2}$ (ii) $(64)^{1/3}$ (iii) $(81)^{1/4}$ (iv) $(27)^{1/3}$

(v) $(27)^{2/3}$ (vi) $8^{-1/3}$ (vii) $(1000)^{2/3}$ (viii) $(64)^{1/2}$

-4 مختصر کیجیے اور جواب قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) $\sqrt{a^{16}}$ (ii) $\sqrt[3]{a^{15}}$ (iii) $\sqrt[3]{27a^9}$ (iv) $\sqrt[3]{8a^9}$

(v) $\sqrt[4]{x^{32}}$ (vi) $\sqrt[4]{81x^{20}}$ (vii) $\sqrt[3]{125\,x^9y^{15}}$ (viii) $\sqrt{(8+y)^7}$

(ix) $\sqrt[4]{16\,x^2 y^6}$ (x) $\sqrt[4]{\frac{x^5y^6}{z^2}}$ (xi) $\sqrt[3]{\frac{8\,x}{x+y}}$ (xii) $\sqrt[p]{\frac{y^n}{a^m}}$

-5 مختصر کیجیے۔

(i) $\sqrt{3}\times\sqrt{7}$ (ii) $\sqrt[5]{4}\times\sqrt[5]{128}$ (iii) $\sqrt[5]{81}\times\sqrt[5]{27}$

(iv) $\sqrt{2}\div\sqrt[8]{32}$ (v) $\sqrt[5]{118}\div\sqrt[5]{2}$ (vi) $\sqrt{27}\div\sqrt{81}$

(vii) $a^{1/4}\times a^{2/3}$ (viii) $x^{6/7}\times y^{1/4}$ (ix) $(x^{3/4}y^{1/6})^6$

(x) $(x^3y^2)^{1/2}\times(y^3x^4)^{-1/3}$ (xi) $(x^3y^2)^{1/4}\times(x^{1/3}y)^{3/4}$

(xii) $(a^{1/4}b^{1/3})^{-1/2}\div(a^{1/3}b^{1/4})^{-5}$ (xiii) $(x^2y^3)^{1/5}\times(x^{1/2}y^2)^{1/4}$

6.2 قوت نماؤں کے قوانین / انڈیسیز LAWS OF EXPONENTS/INDICES

6.2.1 اساس، قوت نما اور قیمت Base, Exponent and Value

بعض اوقات درج ذیل اقسام کی ضرب ہمارے علم میں آتی ہیں۔

$$3\times 3,\ 3\times 3\times 3,\ 3\times 3\times 3\times 3,\ 3\times 3\times 3\times 3\times 3$$

انہیں مختصر شکل میں ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$3\times 3 = 3^2$$
$$3\times 3\times 3 = 3^3$$
$$3\times 3\times 3\times 3 = 3^4$$
$$3\times 3\times 3\times 3\times 3 = 3^5$$

اور اسی طرح یہ سلسلہ جاری رہتا ہے۔

کسی حقیقی عدد 'a' اور مثبت صحیح عدد 'n' کے لیے ہم لکھتے ہیں۔

$$a^n = a\times a\times a\times a \ldots \times a \ (n \text{ مرتبہ})$$

یہاں 'a' کو ہم اساس (Base) اور n کو قوت نما یا انڈیکس (Exponents or index) کہتے ہیں۔
تعریف کے مطابق ہم $a^0 = 1$ لیتے ہیں۔ پس $2^0 = 1, 3^0 = 1, (0.5)^0 = 1$ اور اسی طرح یہ سلسلہ جاری رہتا ہے۔

نوٹ: "a^n" کو a کی n ویں (n^{th}) پاور کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر

$$3\times 3\times 3 = 3^3$$
$$4\times 4\times 4\times 4\times 4 = 4^5$$
$$7\times 7\times 7\times 7 = 7^4$$
$$8\times 8 = 8^2$$

6.2.2 قوت نما کے قوانین اور ان کا استعمال
Laws of Exponents and their Applications

1- قوتوں کی جمع کا قانون Law of Sum of Powers

کسی حقیقی عدد a جبکہ $a \neq 0$ اور صحیح اعداد m اور n کے لیے اس قانون کو علامتی طور پر اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال 1:-

مختصر کیجئے۔ $x^3 \times x^4 \times x^6$

حل:-

$$x^3 \times x^4 \times x^6 = x^{3+4+6}$$
$$= x^{13}$$

مثال 2:-

مختصر کیجئے۔ $x^3 \times y^4 \times x^4 \times y^3 \times x^5 \times y^5$

حل:-

$$x^3 \times y^4 \times x^4 \times y^3 \times x^5 \times y^5 = x^3 \times x^4 \times x^5 \times y^3 \times y^4 \times y^5$$
$$= x^{3+4+5} \times y^{3+4+5}$$
$$= x^{12} \times y^{12}$$
$$= x^{12}\, y^{12}$$

مثال 3:-

مختصر کیجئے۔ $x^3 \times y^4 \times x^{-2} \times y^{-2}$

حل:-

$$x^3 \times y^4 \times x^{-2} \times y^{-2} = x^3 \times x^{-2} \times y^4 \times y^{-2}$$
$$= x^{3-2} \times y^{4-2}$$
$$= xy^2$$

2- قوتوں کی تفریق کے قوانین Laws of Subtraction of Powers

اگر a ایک حقیقی عدد ہو جبکہ $a \neq 0$ اور m, n کوئی سے دو صحیح اعداد ہوں، تو

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

اس کی تین صورتیں ہیں۔

نمبر1-

جب: $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \cdots \text{ m اجزاء تک}}{a \times a \times a \times \cdots \text{ n اجزاء تک}}$$
$$= a \times a \times a \times \cdots \text{ (m − n) اجزاء تک}$$
$$= a^{m-n}$$

نمبر 2-

جب: $m = n$

اس صورت میں $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = \frac{a \times a \times a \times \cdots \text{ m اجزاء تک}}{a \times a \times a \times \cdots \text{ m اجزاء تک}}$

$= 1$

$= a^0$

$= a^{m-m}$

$= a^{m-n} \ [\because m = n]$

ہم a^{-n} کو اس طرح بیان کرتے ہیں $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ جبکہ n صحیح عدد ہے اور a حقیقی عدد ہے اور $a \neq 0$

نمبر 3-

جب: $m < n$

اس صورت میں $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \cdots \text{ m اجزاء تک}}{a \times a \times a \times \cdots \text{ n اجزاء تک}}$

$= \frac{1}{a \times a \times a \times \cdots \text{ (n - m) اجزاء تک}}$

$= \frac{1}{a^{n-m}}$

$= a^{-(n-m)}$

$= a^{-n+m}$

$= a^{m-n}$

پس $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ جب کہ $m < n$ یا $m = n$ یا $m > n$

مثال 1:- مختصر کیجیے۔ (i) $\frac{x^3\times x^5\times x^6}{x^2\times x^4\times x}$ (ii) $\frac{x^3\times x^4}{x^2\times x^5}$ (iii) $\frac{x^4\times x^5\times x^6}{x^5\times x^6\times x^8}$

حل:-

(i) $\frac{x^3\times x^5\times x^6}{x^2\times x^4\times x}=\frac{x^{3+5+6}}{x^{2+4+1}}$

$=\frac{x^{14}}{x^7}$

$=x^{14-7}$

$=x^7$

(ii) $\frac{x^3\times x^4}{x^2\times x^5}=\frac{x^{3+4}}{x^{2+5}}$

$=\frac{x^7}{x^7}$

$=x^{7-7}$

$=x^0$

$=1$

(iii) $\frac{x^4\times x^5\times x^6}{x^5\times x^6\times x^8}=\frac{x^{4+5+6}}{x^{5+6+8}}$

$=\frac{x^{15}}{x^{19}}$

$=x^{15-19}$

$=x^{-4}$

مثال 2:- مختصر کیجیے۔ (i) $x^{1/5}\times x^{2/5}$ (ii) $(x^2y^3)^{1/6}$ (iii) $\left(\frac{x^{2/3}}{y^{3/4}}\right)^{1/2}$

حل:-

(i) $x^{1/5}\times x^{2/5}$

$=x^{1/5+2/5}$

$=x^{\frac{1+2}{5}}$

$=x^{\frac{3}{5}}$

(ii) $(x^2y^3)^{1/6}$

$=x^{2/6}\times y^{3/6}$

$=x^{1/3}y^{1/2}$

(iii) $\left(\frac{x^{2/3}}{y^{3/4}}\right)^{1/2}$

$=\frac{(x^{2/3})^{1/2}}{(y^{3/4})^{1/2}}$

$=\frac{x^{1/3}}{y^{3/8}}$

3- حاصل ضرب کی قوت کا قانون Law of Power of Product

اگر a, b حقیقی عدد ہوں اور $a, b \neq 0$ اور n صحیح عدد ہو، تو

$$(i)\ (a\,b)^n = a^n b^n$$

$$(ii)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

مثال:- مختصر کیجیے۔

$(i)\ (x\,y)^3 \quad (ii)\ (x\,y)^6 \quad (iii)\ \left(\frac{x}{y}\right)^5 \quad (iv)\ \left(\frac{x}{y}\right)^4$

حل:-

(i) $(x\,y)^3 = x^3 y^3$

(ii) $(x\,y)^6 = x^6 y^6$

(iii) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$

(iv) $\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x^4}{y^4}$

4- قوتوں کی قوت کا قانون Law of Power of Power

اگر a ایک حقیقی عدد ہو جبکہ $a \neq 0$ اور m, n کوئی سے دو صحیح اعداد ہوں، تو

$$(a^m)^n = a^{m\,n}$$

مثال:- مختصر کیجیے۔

$(i)\ (x^3)^4 \quad (ii)\ (x^4)^6$

حل:-

(i) $(x^3)^4$
$= x^{3\times 4}$
$= x^{12}$

(ii) $(x^4)^6$
$= x^{4\times 6}$
$= x^{24}$

مشق 6.2

1- درج ذیل میں اساس (Base) اور قوت نما (Exponent) لکھیے۔

(i) $16x^3$ (ii) x^9 (iii) $(4y)^3$

(iv) $(x-2)^3$ (v) $18x^5$ (vi) $5x^{3/2} \times x^{1/2}$

مختصر کیجیے اور جواب مثبت قوت نما میں لکھیے۔

2- $\sqrt{(a^2b^3)^6}$ **3-** $\sqrt[9]{(x^{-4}y^3)^{-3}}$ **4-** $(x^a y^{-b})^3 \times (x^3 y^2)^{-a}$

5- $\left(\dfrac{16x^2}{y^{-2}}\right)^{-1/4}$ **6-** $\left(\dfrac{27x^3}{8a^{-3}}\right)^{-2/3}$ **7-** $\left(\dfrac{a^{-1/2}}{4c^2}\right)^{-2}$

8- $\sqrt{a^{-2}b} \times 3\sqrt{ab^{-3}}$ **9-** $\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{-2/3}c}\right)^{-3/2} \div \dfrac{ab^2c}{a^2c}$ **10-** $\dfrac{(a^4)^3(a^{-1}b)^{10}}{a^2b^7}$

11- $\dfrac{(x^3y)^3\ (2xy)^{-2}}{4x^{-4}y^{-5}}$ **12-** $\dfrac{(a^{-5})^3 \times (ab)^{15}}{a^{-1}b^2}$ **13-** $a^5b^4c^2 \div abc$

14- $(2ab^2)^2(3abc^2)^{-2} \div (ab)^{-4}(bca)^5$ **15-** $\dfrac{2^3 \times 6^5}{3^{-3} \times 4^{-4}}$

16- $\dfrac{2^5 \times 9^{-1}}{27^{-3} \times 8^{-3}}$ **17-** $(2^{-3}a^4b)^{-1} \times (4^{-2}b^{-5})$

حل کیجیے۔

18- $(3^2)^5 \div \left[9^3 \times 27^{-1}\right]$ **19-** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} \div \left(\left(\dfrac{4}{9}\right)^3 \times \left(\dfrac{27}{16}\right)^{-1}\right)$

20- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} \div \left(\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-2} \times 27\right)$ **21-** $\dfrac{5^4}{3^7} \times \left(\dfrac{9}{15}\right)^3 \div \dfrac{27}{25}$

22- $a^{1/2}b^{2/3} \times a^{2/3}b^{1/4}$ **23-** $a^{2/3}b^{5/6} \times a^{1/2}b \div (ab)^{1/3}$

24- $(a^{1/2}b^{1/3}c^{1/4})^6$ **25-** $(a^{1/2}b^{1/3})^{4/3} \div (a^{1/3}b^{1/4})^{1/2}$

26- $a^{2/3} \times a^{1/2} \div a^{1/4}$

27- درج ذیل میں سے ہر ایک کو مختصر کیجئے۔

(i) $4^{3/5} \times 4^{1/5}$ (ii) $2^{1/8} \times 2^{3/8}$

(iii) $x^{3/4} \times x^{2/5}$ (iv) $5x^{1/3} \times 2x^{1/5}$

(v) $\frac{1}{2}y^{3/7} \times 4y^{2/7}$ (vi) $5x^{3/2} \times x^{1/2}$

28- درج ذیل میں سے ہر ایک کو مختصر کیجئے۔

(i) $a^{2/3}b^{3/4} \times a^{1/3}b^{3/4}$ (ii) $x^{3/5}y^{2/9} \times x^{1/5}y^{1/3}$

(iii) $2ab^{1/3} \times 3a^{3/5}b^{4/5}$ (iv) $6x^{3/7} \times \frac{1}{3}x^{1/4}y^{2/5}$

(v) $x^{3}y^{1/2}z^{1/3} \times x^{1/6}y^{1/3}z^{1/2}$

29- درج ذیل میں سے ہر ایک کو مختصر کیجئے۔

(i) $3^{1/2} \div 3^{1/3}$ (ii) $\frac{x^{4/4}}{x^{5/9}}$ (iii) $\frac{2x^{3/4}}{4x^{3/5}}$

(iv) $\frac{25y^{3/5}}{20y^{1/4}}$ (v) $x^{3}y^{2} \div x^{4/3}y^{3/5}$ (vi) $a^{3/9}b^{2/3} \div a^{2/5}b^{2/5}$

(vii) $10x^{4/5}y \div 5x^{2/3}y^{1/4}$ (viii) $\frac{5a^{3/4}b^{3/5}}{20a^{1/5}b^{1/4}}$

6.3 سائنسی ترقیم SCIENTIFIC NOTATION

سائنس کی کچھ شاخوں میں ہم بہت بڑے اور بہت چھوٹے اعداد استعمال کرتے ہیں۔ روشنی کی رفتار186000میل (یا29933.24 کلومیٹر) فی سیکنڈ یا 30,000,000,000 سینٹی میٹر فی سیکنڈ ہے۔ ہائیڈروجن ایٹم کا رداس 0.00000073 سینٹی میٹر بالترتیب بہت بڑے اور بہت چھوٹے اعداد کی مثالیں ہیں۔ ایکس رے (X-Ray) کا طول موج0.0000001سینٹی میٹرایک اور بہت چھوٹے عدد کی مثال ہے۔

ان اعداد کو لکھنے کا ایک آسان طریقہ دریافت کیا گیا ہے جسے سائنسی ترقیم کہتے ہیں۔

اس طریقہ میں ایک عدد 'a' کو دو اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے جن میں ایک عدد صفر اور 10 کے درمیان ہوتا ہے اور دوسرا عدد 10 کے مثبت یا منفی قوت نما کی صورت میں ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$a = b \times 10^n$$

مثال 1:- درج ذیل کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

(i) 100 (ii) 1000 (iii) 10000 (iv) $\frac{1}{1000}$ (v) $\frac{1}{10000}$

حل:-

(i) $100 = 1 \times 10^2$

(ii) $1000 = 1 \times 10^3$

(iii) $10000 = 1 \times 10^4$

(iv) $\frac{1}{1000} = 1 \times 10^{-3}$

(v) $\frac{1}{10000} = 1 \times 10^{-4}$

مثال 2:- درج ذیل کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

(i) 90.85 (ii) 112.3 (iii) 12.35 (iv) 0.00018 (v) 0.0000281

حل:-

(i) $90.85 = \frac{9085}{100}$

$= 9085 \times 10^{-2}$

$= 9.085 \times 10^3 \times 10^{-2}$

$= 9.085 \times 10^{3-2}$

$= 9.085 \times 10^1$

(ii) 112.3

$$= \frac{1123}{10}$$
$$= 1123 \times 10^{-1}$$
$$= 1.123 \times 10^{3} \times 10^{-1}$$
$$= 1.123 \times 10^{2}$$
$$= 1.123 \times 10^{2}$$

(iii) 12.35

$$= \frac{1235}{100}$$
$$= 1235 \times 10^{-2}$$
$$= 1.235 \times 10^{+3} \times 10^{-2}$$
$$= 1.235 \times 10^{+3-2}$$
$$= 1.235 \times 10$$

(iv) 0.00018

$$= \frac{18}{100000}$$
$$= 18 \times 10^{-5}$$
$$= 1.8 \times 10 \times 10^{-5}$$
$$= 1.8 \times 10^{-4}$$

(v) 0.0000281

$$= \frac{281}{10000000}$$
$$= 281 \times 10^{-7}$$
$$= 2.81 \times 10^{2} \times 10^{-7}$$
$$= 2.81 \times 10^{2-7}$$
$$= 2.81 \times 10^{-5}$$

سائنسی ترقیم میں مثبت عدد کو دو اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے۔ اس میں پہلے عدد کو دیے گئے عدد کے بائیں جانب سے پہلے ہندسے کے بعد اعشاریہ لگا کر حاصل کیا جاتا ہے۔

دوسرے عدد کے لیے 10 کا قوت نما حاصل کرنے کے لیے ہم ہندسوں کی تعداد کو گنتے ہیں جو کہ اعشاریہ کی اصل جگہ اور نئی جگہ کے درمیان آتے ہیں۔ اگر اعشاریہ کی جگہ بائیں جانب بدل دی جائے تو 10 کی قوت مثبت جب کہ دائیں جانب تبدیل کرنے سے 10 کی قوت منفی ہوگی۔

مثال 1:-

18.42×10^{-4} کو اعشاریہ کی شکل میں لکھیے۔

حل:-

$$18.42 \times 10^{-4}$$

$$= \frac{1842}{100} \times 10^{-4}$$

$$= \frac{1842}{100 \times 10^{4}}$$

$$= \frac{1842}{1000000}$$

$$= 0.001842$$

مثال 2:-

50,00,000 کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل:-

$$50,000,000$$

$$= 5 \times 10000000$$

$$= 5 \times 10^{7}$$

مشق 6.3

درج ذیل کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

1- 0.051 2- 89.99

3- 0.424 4- 2566324

5- 0.00000075

اعشاریہ کی شکل میں لکھیے۔

6- 0.86×10^4 7- 1.345×10^{-5}

8- 5.1×10^{-9} 9- 0.525×10^{-7}

10- 636.5×10^{-6}

مختصر کیجیے اور جواب سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

11- $\dfrac{0.96 \times 10^7}{2 \times 10^4}$ 12- $\dfrac{2.61 \times 4 \times 10^8}{10^3}$

13- $\dfrac{521 \times 10^3 \times 12}{2 \times 10^2}$

14- 4.5×10^5 سینٹی میٹر کو میٹر میں تبدیل کیجیے اور جواب اعشاریہ کی شکل میں لکھیے۔

15- زمین کا رداس 6400 کلو میٹر ہے اسے میٹر میں تبدیل کیجیے اور جواب کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

6.4 لوگارتھم LOGARITHM

الخوارزمی نے لوگارتھم کے لیے کافی کام کیا۔ سترویں صدی میں جان نیپئر (John Napier) نے لوگارتھم میں مزید تبدیلیاں کیں اور اس کے لیے ایک جدول تیار کیا۔ اس نے ان جدول کے لیے ایک اساس 'e' تیار کیا۔ 'e' کی قیمت 2.7183 ہے۔

جان نیپئر اور ہینری برگز (Henry Briggs) نے اساس 10 کا جدول تیار کرنے کے لیے ایک منصوبہ بنایا۔ بعد میں ہینری برگز نے منصوبہ کو مکمل کیا اور اساس 10 میں جدول تیار کیے۔

سوئٹزرلینڈ کے جابسٹ برگی (Jobst Burgi) نے 1620 عیسوی میں اینٹی لوگارتھم کے لیے ایک جدول تیار کیا۔ اعداد پر حسابی عوامل کو ان جدولوں کے استعمال نے آسان بنادیا۔

6.4.1 کسی عدد کا لوگارتھم Logarithm of a Number

فرض کیا، $a > 0$ اور $a \neq 1$ اگر y ایک مثبت عدد ہو تو

$a^x = y$ اگر اور صرف اگر $x = \log_a y$

یا $\quad a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x \quad$ ....(1)

($\log_a y$ کو اس طرح بیان کیجئے "y کا لوگارتھم اساس 'a' کے ساتھ")

مثال 1:- درج ذیل کو قوت نمائی شکل میں تبدیل کیجئے۔

(i) $\log_5 25 = 2$ (ii) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (iii) $\log_{10} 1000 = 3$

حل:- $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$ کو استعمال کرتے ہوئے۔

(i) $\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 5^2 = 25$

(ii) $\log_3 \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9}$

(iii) $\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$

مثال 2:- $\log_3(x+1) = 2$ کو حل کیجئے۔

حل:- $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$ کو استعمال کرتے ہوئے۔

$3^2 = x + 1$ یا $x + 1 = 9$

$\Rightarrow x = 8$

6.4.2 کامن لوگارتھم Common Logarithm

اساس 10 میں شمار کیا گیا لوگارتھم کامن لوگارتھم کہلاتا ہے۔ہم $log_{10}m$ کو صرف $log\ m$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$10^1 = 10 \Leftrightarrow \log 10 = 1\ ;\ 10^2 = 100 \Leftrightarrow \log 100 = 2$$

$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log 1000 = 3. etc.$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1 \Leftrightarrow \log(0.1) = -1,$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01 \Leftrightarrow \log(0.01) = -2$$

مثال:- حل کیجیے۔ (i) $\log\ (x-2) = 1$ (ii) $\log\ (x+3) = 2$

حل:-

$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$ کو استعمال کرتے ہوئے۔

(i) $\log\ (x-2) = 1 \Rightarrow 10^1 = x-2 \Rightarrow x-2 = 10$

$\Rightarrow \boxed{x = 12}$

(ii) $\log\ (x+3) = 2 \Rightarrow x+3 = 10^2 \Rightarrow x+3 = 100$

$\Rightarrow \boxed{x = 97}$

خاصہ اور مینٹیسا Characteristic and Mantissa of a Log of a Number

کسی عدد کے لوگارتھم کے دو حصے ہوتے ہیں۔صحیح عددی حصے کو خاصہ (Charatiristic) اور کسری حصے کو مینٹیسا (mantissa) کہتے ہیں۔

مینٹیسا کو ہمیشہ مثبت لیا جاتا ہے۔جبکہ خاصہ صفر، مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔جب خاصہ منفی ہو تو ہم اس ہندسے پر لائن (Bar) لگا دیتے ہیں۔جو خاصہ کو ظاہر کرتا ہے۔یعنی ہم -2 کو $\bar{2}$ لکھتے ہیں۔$\bar{2}.7638$ کا مطلب $-2 + 0.7638$ ہے۔

6.4.3 عدد کا لوگارتھم معلوم کرنا Finding the Logarithm of a Number

عدد کا خاصہ Characteristic of a Number

فرض کیا عدد $m \times 10^p$ ہے تب خاصہ 'p' ہے یا

(i) اگر کوئی عدد ایک یا ایک سے زیادہ ہے تو اس کا خاصہ (Characteristic) کسر اعشاریہ (Decimal point) کی بائیں طرف کے ہندسوں کی تعداد سے ایک کم ہوگا۔

(ii) اگر کوئی عدد ایک سے کم ہو تو اس کا خاصہ منفی (Negative number) ہو گا جس کی عددی قیمت (Numerical value) عدد کے اعشاریہ اور پہلے نمایاں ہندسہ کے درمیان صفروں کی تعداد سے ایک زیادہ ہوگی۔

مثال کے طور پر:

عدد	معیاری شکل	خاصہ
5376.4	5.3764×10^3	3
537.64	5.3764×10^2	2
53.764	5.3764×10^1	1
5.3764	5.3764×10^0	0
0.5376	5.376×10^{-1}	$\bar{1}$
0.0537	5.37×10^{-2}	$\bar{2}$
0.00537	5.37×10^{-3}	$\bar{3}$
0.0000046	4.6×10^{-6}	$\bar{6}$

عدد کا مینٹیسا Mantissa of a Number

ہم مینٹیسا کو لوگارتھم کے جدول کی مدد سے معلوم کرتے ہیں۔ مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے کسی عدد میں نقطہ اعشاریہ کے مقام کی کوئی اہمیت نہیں ہوتی۔ ہم اپنے آپ کو صرف چار ہندسی عدد کے مینٹیسا معلوم کرنے تک پابند رکھتے ہیں۔ مثلاً

log(45), log(.45), log(.045), log(.0045) کا مینٹیسا ایک ہی عدد ہے۔ مینٹیسا ہمیشہ صفر سے بڑا اور ایک سے چھوٹا عدد ہوتا ہے۔

(i) لوگارتھم کے جدول کی مدد سے 4385 کا مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے ہم 43 کی قطار میں سیدھا جاتے ہوئے عدد 8 کے کالم میں ایک عدد معلوم کرتے ہیں اس عدد میں پانچ کے کالم میں اسی قطار میں (Mean difference) معلوم کر کے جمع کرتے ہیں۔

پس 4385 کا مینٹیسا $.6420 = (6415+5)$ ہے۔

(ii) لوگارتھم کی مدد سے 438 کا مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے ہم 43 کی قطار میں سیدھا جاتے ہوئے 8 کے کالم میں عدد معلوم کرتے ہیں جو کہ 0.6415 ہے۔

(iii) لوگارتھم کی مدد سے 43 کا مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے ہم 43 کی قطار میں سیدھا جاتے ہوئے صفر کے کالم میں عدد معلوم کرتے ہیں جو کہ 0.6335 ہے۔

(iv) لوگارتھم کی مدد سے 4 کا مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے ہم 40 کی قطار میں سیدھا جاتے ہوئے صفر کے کالم میں عدد معلوم کرتے ہیں جو کہ 0.6021 ہے۔

پس ہمارے پاس:

$log\ 4385 = 3.6420$ ، $log\ 0.4385 = \bar{1}.6420$

$log\ 438.5 = 2.6420$ ، $log\ 0.04385 = \bar{2}.6420$

$log\ 43.85 = 1.6420$ ، $log\ 0.004385 = \bar{3}.6420$

$log\ 4.385 = 0.6021$ ، $log\ 0.0004385 = \bar{4}.6420$

اور $log\ 43 = 1.6415$

$log\ 4.3 = 0.6415$

مزید $log\ 4 = 0.6021$

$log\ .04 = \bar{2}.6021$

6.4.4 اینٹی لوگارتھم کا تصور Concept of Antilogarithm

$log\ m = n$ سے مراد ہے کہ $m = n$ اینٹی لوگارتھم اسی طرح $log\ 1000 = 3$ سے مراد ہے $1000 = 3$ اینٹی لوگارتھم

کسی عدد کا اینٹی لوگارتھم معلوم کرنے کے لیے ہم عدد کا کسری حصہ استعمال کرتے ہیں اور اینٹی لوگارتھم جدول کو اسی طرح پڑھتے ہیں جس طرح ہم لوگارتھم جدول پڑھتے ہیں۔

اینٹی لوگارتھم جدول سے متعلقہ عدد معلوم کرنے کے بعد ہم نقطہ اعشاریہ کو اس طرح لگاتے ہیں۔

نمبر1-

جب خاصہ 'n' ہو تو نقطہ اعشاریہ کو th(n+1) ہندسہ کے بعد لگاتے ہیں۔

مثلاً اگر ہم 0.2346 اینٹی لوگارتھم معلوم کرنا چاہتے ہیں تو

(i) عدد $= 0.2346$

خاصہ $= n = 0$

مینٹیسا $= .2346$

اینٹی لوگارتھم جدول سے مینٹیسا 2346. کے لیے 1724 ہے۔ چونکہ خاصہ صفر ہے یعنی $n = 0$، اس لیے نقطہ اعشاریہ th(0 + 1) یا بائیں طرف سے پہلے ہندسہ کے بعد عدد 1724 میں لگایا جاتا ہے۔

پس اینٹی لوگارتھم $0.2346 = 1.724$

(ii) اگر ہم 2.6019 اینٹی لوگارتھم معلوم کرنا چاہتے ہیں تو

عدد $= 2.6019$

خاصہ $= n = 2$

مینٹیسا $= .6019$

اینٹی لوگارتھم جدول کی مدد سے مینٹیسا 6019. کے لیے عدد 3998 ہے۔ نقطہ اعشاریہ کو th(1 + 2) ہندسہ یا عدد کے بائیں طرف سے تیسرے ہندسے کے بعد لگایا جائے گا۔

پس اینٹی لوگارتھم $2.6019 = 399.8$

(iii) اسی طرح اگر ہم 5.2612 اینٹی لوگارتھم معلوم کرنا چاہتے ہیں تو

عدد $= 5.2612$

خاصہ $= n = 5$

مینٹیسا $= .2612$

اینٹی لوگارتھم جدول کی مدد سے مینٹیسا 0.2612 کے لیے عدد 1825 ہے۔ نقطہ اعشاریہ th(1 + 5) ہندسہ کے بعد عدد 1825 کے بائیں طرف سے چھٹے ہندسے کے بعد لگایا جائے گا۔

پس اینٹی لوگارتھم $5.2612 = 182500.00$

عدد 1825 میں چار ہندسے ہیں اس لیے ہم اس عدد کے دائیں طرف دو صفر لگا کر اسے 6 ہندسی عدد بنا دیتے ہیں۔ ان دو صفر کے بعد نقطہ اعشاریہ لگایا جائے گا۔

نمبر 2-

جب خاصہ $\bar{n}$ ہو تو نقطہ اعشاریہ اس طرح لگایا جاتا ہے کہ پہلا نمایاں عدد n ویں درجہ پر ہوگا۔

مثلاً اگر ہم $\bar{1}.4356$ اینٹی لوگارتھم معلوم کرنا چاہتے ہوں تو

(i) عدد $= \bar{1}.4356$

خاصہ $= \bar{n} = \bar{1}$

مینٹیسا $= .4356$

اینٹی لوگارتھم جدول کی مدد سے مینٹیسا 0.4356 کے لیے عدد 2727 ہے۔ چونکہ، $\bar{1} = \bar{n}$ اس سے پہلا نمایاں عدد نقطہ اعشاریہ سے پہلے درجہ پر ہوگا۔

پس اینٹی لوگارتھم $\bar{1}.4356 = 0.2727$

(ii) اسی طرح اگر ہم $\bar{3}.1459$ اینٹی لوگارتھم معلوم کرنا چاہتے ہوں تو

عدد $= \bar{3}.1459$

خاصہ $= \bar{n} = \bar{3}$

مینٹیسا $= .1459$

اینٹی لوگارتھم جدول کی مدد سے مینٹیسا 0.1459 کے لیے عدد 1399 ہے۔ چونکہ، $\bar{n} = \bar{3}$ اس لیے ایک نمایاں عدد نقطہ اعشاریہ کے بعد تیسرے درجہ پر ہوگا۔

پس اینٹی لوگارتھم $\bar{3}.1459 = 0.001399$

مثال 1:- قیمت معلوم کیجئے۔

(i) 0.654 اینٹی لوگارتھم (ii) 1.204 اینٹی لوگارتھم

(iii) $\bar{1}.3612$ اینٹی لوگارتھم (iv) $\bar{3}.4568$ اینٹی لوگارتھم

حل:-

(i) اینٹی لوگارتھم $(0.654) = 4.508$

(ii) اینٹی لوگارتھم $(1.204) = 16.00$

(iii) اینٹی لوگارتھم $(\bar{1}.3612) = 0.2297$

(iv) اینٹی لوگارتھم $(\bar{3}.4568) = 0.002863$

مثال 2:-

(i) $\bar{1}.3612,\ 3.1946,\ \bar{2}.0018$ اور $\bar{3}.4619$ کو جمع کیجئے۔

(ii) 2.1375 میں سے $\bar{4}.6342$ تفریق کیجئے۔

(iii) $\bar{3}.4103$ کو 6 سے ضرب دیجئے۔

(iv) $\bar{5}.1820$ کو 15 سے تقسیم کیجئے۔

حل:-

(i) $\bar{1}.3612+3.1946+\bar{2}.0018+\bar{3}.4619$

$$= -1+0.3612+3.1946-2+0.0018-3+0.4619$$

$$= -6+(.3612+3.1946+.0018+.4619)$$

$$= -6+(4.0195)$$

$$= -2+0.0195$$

$$= \bar{2}.0195$$

$$(ii)\ 2.1375-\bar{4}.6342 = 2.1375-[-4+.6342]$$
$$= 2.1375+4-.6342$$
$$= 6.1375-.6342$$
$$= 5.5033$$

$$(iii)\ \bar{3}.4103\times 6 = (-3+.4103)\times 6$$
$$= -18+2.4618$$
$$= (-18+2)+.4618$$
$$= -16+.4618$$
$$= \overline{16}.4618$$

$$(iv)\ (\bar{5}.1820)\div 15 = (-5.1820)\div 15$$
$$= (-5+.1820)\div 15$$
$$= -4.9180\div 15$$
$$= -0.3212$$
$$= -1+(1-(.3212))$$
$$= \bar{1}.6788$$

مثال 3:-

(i) اگر $\log x = 0.5019$ ہو تو x معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $\log x = \bar{2}.5321$ ہو تو x معلوم کیجیے۔

حل:-

$$(i)\ \log x = 0.5019$$

$\log x$ کا خاصہ $= 0$

$\log x$ کا مینٹیسا $= .0.5019$

اینٹی لوگارتھم کے جدول سے مینٹیسا کے لیے ہمارے پاس جو عدد ہے وہ

$$0.5019 = 3170+7 = 3177$$

چونکہ خاصہ صفر ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ $(0 + 1)$ ویں ہندسے یعنی 3 کے بعد لگایا جاتا ہے۔

$x =$ اینٹی لوگارتھم (0.0519)

$x = 3.177$

(ii) $\log x = \bar{2}.5321$

$\log x$ کا خاصہ $= \bar{2}$

$\log x$ کا مینٹسا $= .5321$

اب اینٹی لوگارتھم جدول میں ہمارے پاس مینٹسا کے لیے عدد ہے۔

$.5321 = 3404 + 1 = 3405$

چونکہ خاصہ $\bar{2}$ ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ کو اس طرح لگایا جائے گا کہ ہمارے پاس پہلا نمایاں عدد اعشاریہ کے بعد دوسرے درجہ پر ہو۔

$x =$ اینٹی لوگارتھم $\bar{2}.5321$

$= 0.03405$

پس $x = 0.03405$

مشق 6.4

-1 درج ذیل میں دیے گئے اعداد کا خاصہ لکھیے۔

(i) 6350 (ii) 2035.6 (iii) 2.057

(iv) 0.8657 (v) 0.0732 (vi) 0.000721

-2 درج ذیل کی قیمت لکھیے۔

(i) $\log 52.13$ (ii) $\log 6.304$ (iii) $\log 0.6127$

(iv) $\log 0.0057$ (v) $\log 0.00003$

-3 اگر $\log 6374 = 3.8044$ ہو تو درج ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\log 6.374$ (ii) $\log 0.6374$ (iii) $\log 0.00637$

-4 (i) اگر $\log x = \bar{2}.0374$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $\log x = 0.1597$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

(iii) اگر $\log x = 4.4236$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

6.5 لوگارتھم کے قوانین LAWS OF LOGARITHM

(i) $\log_a (m\,n) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a m^n = n \log_a m$

ثبوت:

(i) اگر m اور n مثبت حقیقی اعداد ہوں اور a ایک ممکن اساس ہو تو فرض کیجیے کہ

$$x = \log_a m \text{ ....(i)}$$
$$y = \log_a n \text{ ....(ii)}$$

اس لیے $a^x = m, \;\; a^y = n$

پس $m\,n = a^x . a^y = a^{x+y}$

اس طرح $\log_a m\,n = x + y$

$$= x + y$$

x اور y کی قیمتیں (i) اور (ii) کی مدد سے درج کرنے سے $\boxed{\log_a m\,n = \log_a m + \log_a n}$

(ii) اگر m اور n مثبت حقیقی اعداد ہوں اور a ایک ممکن اساس ہے (جبکہ $a > 1$) تو فرض کیجیے کہ۔

$$x = \log_a m \text{ ...(i)}$$
$$y = \log_a n \text{ ...(ii)}$$

اس لیے $a^x = m, \;\; a^y = n$

$$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$= a^x . a^{-y}$$
$$= a^{x-y}$$

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = x - y$$

x اور y کی قیمتیں (i) اور (ii) کی مدد سے درج کرنے سے $\boxed{\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n}$

(iii) فرض کیجئے کہ $x = \log_a m$

$$a^x = m$$

اور $(a^x)^n = m^n$

$$m^n = (a^x)^n$$

$$= a^{nx}$$

اس لیے $\log_a m^n = nx$

x کی قیمت درج کرنے سے $\boxed{\log_a m^n = n \log_a m}$

6.6 لوگارتھم کا استعمال APPLICATION OF LOGARITHM

اساس 10 میں لوگارتھم کو کامن لوگارتھم کہتے ہیں۔ ہم $\log_{10} m$ کو $\log m$ سے ظاہر کریں گے۔

مثال 1:- ثابت کیجئے۔

(i) $3\log 2 + \log 5 = \log 40$

(ii) $\log 2 + 2\log 5 - \log 3 - 2\log 7 = \log\left(\frac{50}{147}\right)$

(iii) $\log\left(\frac{9}{14}\right) + \log\left(\frac{35}{24}\right) - \log\left(\frac{15}{16}\right) = 0$

(iv) $7\log\left(\frac{16}{15}\right) + 5\log\left(\frac{25}{24}\right) + 3\log\left(\frac{81}{80}\right) = \log 2$

$$\text{(i) } L.H.S = 3\log 2 + \log 5$$ حل:-

$$= \log 2^3 + \log 5$$

$$= \log 8 + \log 5$$

$$= \log (8 \times 5)$$

$$= \log 40$$

$$= R.H.S$$

پس $3\log 2 + \log 5 = \log 40$

$$\text{(ii) } L.H.S \log 2 + 2\log 5 - \log 3 - 2\log 7$$

$$= \log 2 + \log 5^2 - (\log 3 + 2\log 7)$$

$$= \log 2 + \log 25 - (\log 3 + \log 7^2)$$

$$= \log(2 \times 25) - (\log 3 + \log 49)$$

$$= \log(50) - (\log 3 \times 49)$$

$$= \log 50 - \log 147$$

$$= \log\left(\frac{50}{147}\right)$$

$$= R.H.S$$

$$\text{(iii) } L.H.S = \log\left(\frac{9}{14}\right) + \log\left(\frac{35}{24}\right) - \log\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$= \log\left(\frac{9}{14} \times \frac{35}{24}\right) - \log\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$= \log\left(\frac{3}{2}\times\frac{5}{8}\right) - \log\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$= \log\left(\frac{15}{16}\right) - \log\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$= 0$$

$$= R.H.S$$

پس $\log\left(\frac{9}{14}\right) + \log\left(\frac{35}{25}\right) - \log\left(\frac{15}{16}\right) = 0$

(iv) $L.H.S = 7\log\left(\frac{16}{15}\right) + 5\log\left(\frac{25}{24}\right) + 3\log\left(\frac{81}{80}\right)$

$$= \log\left(\frac{16}{15}\right)^7 + \log\left(\frac{25}{24}\right)^5 + \log\left(\frac{81}{80}\right)^3$$

$$= \log\left[\left(\frac{16}{15}\right)^7 \times \left(\frac{25}{24}\right)^5 \times \left(\frac{81}{80}\right)^3\right]$$

$$= \log\left[\left(\frac{2^4}{3\times 5}\right)^7 \times \left(\frac{5^2}{2^3\times 3}\right)^5 \times \left(\frac{3^4}{2^4\times 5}\right)^3\right]$$

$$= \log\left[\frac{2^{28}}{3^7\times 5^7} \times \frac{5^{10}}{2^{15}\times 3^5} \times \frac{3^{12}}{2^{12}\times 5^3}\right]$$

$$= \log\left[2^{28-15-12} \times 5^{10-7-3} \times 3^{12-7-5}\right]$$

$$= \log\left[2^1 \times 5^0 \times 3^0\right]$$

$$= \log\left[2\times 1\times 1\right]$$

$$= \log 2$$

$$= R.H.S$$

مثال 2:- حل کیجئے۔

(i) $\frac{\log 32}{\log 4}$ (ii) $\frac{\log 27}{\log 9}$

حل:-

(i) $$\frac{\log 32}{\log 4} = \frac{\log 2^5}{\log 2^2}$$

$$= \frac{5 \log 2}{2 \log 2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

پس $$\frac{\log 32}{\log 4} = \frac{5}{2}$$

(ii) $$\frac{\log 27}{\log 9} = \frac{\log 3^3}{\log 3^2}$$

$$= \frac{3 \log 3}{2 \log 3}$$

$$= \frac{3}{2}$$

پس $$\frac{\log 27}{\log 9} = \frac{3}{2}$$

مثال 3:- لوگارتھم کا جدول استعمال کیے بغیر مختصر کیجئے۔

(i) $\log 5 + \log 6 - \log 2$

(ii) $\log 88.44 + \log 66.76 - \log 48.55$

(iii) $\log 7.44 + \log 5 + \log 99 - \log 7$

حل:-

(i) $\log 5 + \log 6 - \log 2$

$$= \log (5 \times 6) - \log 2$$

$$= \log \left(\frac{5 \times 6}{2}\right)$$

(ii) $\log 88.44 + \log 66.76 - \log 48.55$

$$= \log(88.44 \times 66.76) - \log 48.55$$

$$= \log\left(\frac{88.44 \times 66.76}{48.55}\right)$$

(iii) $\log 7.44 + \log 5 + \log 99 - \log 7$

$$= \log(7.44 \times 5 \times 99) - \log 7$$

$$= \log\left(\frac{7.44 \times 5 \times 99}{7}\right)$$

مثال 4:- $\frac{25.36 \times 2.4569}{847.5}$ کو لوگارتھم کے جدول کی مدد سے حل کیجئے۔

حل:- فرض کیا: $x = \frac{25.36 \times 2.4569}{847.5}$

تب

$$\log x = \log\left(\frac{25.36 \times 2.4569}{847.5}\right)$$

$$= \log(25.36 \times 2.4569) - \log(847.5)$$

$$= \log(25.36) + \log(2.4569) - \log(847.5)$$

$$= 1.4041 + 0.3903 - 2.9281$$

$$= -1.1337 = -1 - 0.1337$$

$$= -1 - 1 + 1 - 0.1337$$

$$= -2 + 0.8663$$

$x =$ ضد لوگارتھم $(\bar{2}.8663)$

$$x = 0.07351$$

مثال 5:-

$\dfrac{8492\times 3.72}{47.82\times 52.24}$ کو لوگارتھم کے جدول کی مدد سے حل کیجئے۔

حل:- فرض کیا:
$$x = \frac{8492\times 3.72}{47.8\times 52.24}$$

تب
$$\log x = \log\left(\frac{8492\times 3.72}{47.8\times 52.24}\right)$$
$$= \log(8432\times 3.72) - \log(47.8\times 52.24)$$
$$= \log 8492 + \log 3.72 - (\log 47.8 + \log 52.24)$$
$$= \log 8492 + \log 3.72 - \log 47.8 - \log 52.24$$
$$= 3.9290 + 0.5705 - 1.6794 - 1.7180$$
$$= 4.4995 - 3.3974$$
$$= 1.1021$$
x = اینٹی لوگارتھم(1.1021)
$$= 12.65$$

پس دی ہوئی مساوی کی قیمت $= 12.65$

مشق 6.5

1- حل کیجیے۔

(i) $\frac{\log 81}{\log 9}$ (ii) $\frac{\log 36}{\log 6}$ (iii) $\frac{\log 243}{\log 9}$

2- حل کیجیے۔

(i) $\log 5+\log 4+\log 3-\log 6$

(ii) $\log 5+\log 20+\log 24+\log 25-\log 60$

(iii) $2\log 3+3\log 4+4\log 5-2\log 6$

(iv) $2\log 5+\log 8-\frac{1}{2}\log 4$

(v) $\log 200+\log 5$

$$\left(\log 5=\log\left(\frac{10}{2}\right)=\log 10-\log 2=1-\log 2 \text{ جبکہ}\right)$$

3- لوگارتھم کا جدول استعمال کیے بغیر حل کیجیے۔

(i) $\log 1.3472+\log 22.79-\log 5$

(ii) $\log 22.13+\log 0.354+\log 7-\log 3$

(iii) $\log 57.86+\log 4.385-\log 2.391-\log 3.072$

4- لوگارتھم کے جدول کی مدد سے حل کیجیے۔

(i) $\frac{2.38\times 3.901}{4.83}$ (ii) $\frac{8.67\times 3.94}{1.78}$

(iii) $\frac{25.36\times 3.4569}{9.87\times 8.93}$

5- ثابت کیجیے۔

(i) $\log\left(\frac{a^2}{bc}\right)+\log\left(\frac{b^2}{ca}\right)+\log\left(\frac{c^2}{ab}\right)=0$

(ii) $3\log 2+2\log 3+\log 5=\log 360$

(iii) $5\log 3-\log 9=\log 27$

(iv) $\log\left(\frac{75}{16}\right)+\log\left(\frac{32}{243}\right)-2\log\left(\frac{5}{9}\right)=\log 2$

(v) $2\log\left(\frac{11}{13}\right)+\log\left(\frac{130}{77}\right)-\log\left(\frac{55}{91}\right)=\log 2$

6- ثابت کیجیے۔ $3\log 4+2\log 5-\frac{1}{3}\log 64-\frac{1}{2}\log 16=2$

7- ثابت کیجیے۔ $\log(1\times 2\times 3)=\log 1+\log 2+\log 3$

8- لوگارتھم کا جدول استعمال کیجیے اور درج ذیل کو حل کیجیے۔

(i) $69.13\times 0.34\times 0.014$ (ii) $\frac{8.67\times 3.94}{1.78}$ (iii) $\frac{4}{3}\times 3.142\times(1.5)^3$

(iv) $\frac{(25.36)^2\times(0.4569)}{847.5}$ (v) $\frac{0.9876\times(16.42)^2}{(4.567)^{1/3}}$

(vi) $\sqrt{\frac{3\sqrt{0.0125}\times\sqrt{31.15}}{0.00081}}$ (vii) $\frac{(6.45)^3\times(0.00034)^{1/3}\times(981.9)}{(9.37)^2\times(8.93)^{1/4}\times(0.0617)}$

(viii) $\frac{(0.0437)^{2/3}\times(1.407)^2}{(0.0015)^{1/3}\times(1.235)^{1/7}}$

9- اگر $v=\sqrt{\frac{g\ell}{2\pi}}$ ہو تو v معلوم کیجیے جبکہ $\ell=150,\ g=32.16,\ \pi=3.142$

10- اگر $H=\frac{I^2Rt}{4.2}$ ہو تو H معلوم کیجیے جبکہ $I=1.3,\ R=6.7$ اور $t=25$

11- اگر $h=\frac{v}{\pi(R^2-r^2)}$ ہو تو h معلوم کیجیے جبکہ $v=1190,\ R=83.6, r=62.4$ اور $\pi=3.14$

جائزہ مشق 6

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگایئے۔

(i) $\sqrt{3}$ کیسا عدد ہے؟

(a) ناطق عدد (b) غیر ناطق عدد
(c) قدرتی عدد (d) صحیح عدد

(ii) $\sqrt[3]{7}$ کو کیا کہتے ہیں؟

(a) جذر (b) مجذور
(c) ناطق عدد (d) صحیح عدد

(iii) $\sqrt{3}$ میں 3 کو کیا کہتے ہیں؟

(a) جذر (b) مجذور
(c) صحیح عدد (d) قدرتی عدد

(iv) a^n میں n کو کیا کہتے ہیں؟

(a) جذر (b) مجذور
(c) قوت نما (d) اساس

(v) 4^5 میں 4 کو کیا کہتے ہیں؟

(a) اساس (b) قوت نما
(c) صحیح عدد (d) جذر

(vi) اساس 10 میں حل کیے گئے لوگارتھم کو کیا کہتے ہیں؟

(a) مینٹیسا (b) کامن لوگارتھم
(c) خاصہ (d) قدرتی عدد

(vii) کسی عدد کے لوگارتھم میں صحیح عدد والے حصہ کو کیا کہتے ہیں؟

(a) خاصہ (b) مینٹیسا
(c) اعشاریہ والا حصہ (d) حقیقی حصہ

(viii) کسی عدد کے لوگارتھم میں کسری حصہ کو کیا کہتے ہیں؟

(a) خاصہ (b) مینٹیسا
(c) ناطق عدد (d) حقیقی حصہ

(ix) $\sqrt{\sqrt{2}} = ?$

(a) 2^2 (b) 2
(c) $2^{1/2}$ (d) $2^{1/4}$

(x) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ایک جذر نہیں ہے کیونکہ $2+\sqrt{3}$ ایک

(a) غیر ناطق عدد ہے (b) ناطق عدد ہے
(c) صحیح عدد ہے (d) جذر ہے

-2 خالی جگہ پر کیجئے۔

(i) اگر $\sqrt[n]{a}$ غیر ناطق عدد ہو جبکہ a ناطق عدد ہو تو $\sqrt[n]{a}$ کو __________ کہتے ہیں۔

(ii) علامت $\sqrt[n]{}$ کو __________ کہتے ہیں۔

(iii) 3^5 میں 5 کو __________ کہتے ہیں۔

(iv) a^n میں a کو __________ کہتے ہیں۔

(v) اساس 10 میں حل لوگارتھم کو __________ کہتے ہیں۔

(vi) کسی عدد میں لوگارتھم کے دو حصے ہوتے ہیں۔ صحیح عددی حصے کو __________ کہتے ہیں۔

(vii) کسی عدد کے لوگارتھم میں کسری حصہ کو __________ کہتے ہیں۔

-3 مختصر کیجئے۔

(i) $(x^5y^3)^{1/2} \times (y^7x^3)^{-1/3}$

(ii) $(a^{1/4}b^{1/3})^{-1/2} \div (a^{1/3}b^{1/4})^{-3}$

-4 حل کیجئے۔

(i) $x^{2/3}y^{5/8} \times y^{1/2} \div (xy)^{1/3}$

(ii) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \div \left(\frac{4}{25}\right) \times 625$

-5 ثابت کیجئے $\log\frac{(3\times4\times5)}{7} = \log3+\log4+\log5-\log7$

-6 درج ذیل کو لوگارتھم جدول کی مدد سے حل کیجئے۔

(i) $62.14\times0.32\times0.015$

(ii) $\frac{3.64\times3.94}{2.78}$

(iii) $\frac{(13.26)^2\times(0.4564)}{325.5}$

خلاصہ

- اگر $\sqrt[n]{a}$ غیر ناطق عدد ہو جبکہ a ایک ناطق عدد ہے تو $\sqrt[n]{a}$, a کا n واں جذر کہلاتا ہے۔

- علامت $\sqrt[n]{\ }$ جذر کی علامت کہلاتی ہے۔ جس کا انڈیکس n ہے۔ $\sqrt[n]{a}$ میں a کو مجذور کہتے ہیں۔

- کسی حقیقی عدد a اور مثبت صحیح عدد n کے لیے ہم a^n کو بیان کرتے ہیں۔

$$a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a \ (n \text{ مرتبہ})$$

یہاں $'a'$ کو اساس اور n کو قوت نما کہتے ہیں۔

- اساس 10 میں حل کیے گئے لوگارتھم کو کامن لوگارتھم کہتے ہیں۔

- کسی عدد کے لوگارتھم کے دو حصے ہوتے ہیں۔ صحیح حصہ کو خاصہ اور کسری حصہ کو مینٹیسا کہتے ہیں۔

- سائنسی ترقیم ایک طریقہ تحریر ہے جس میں بہت بڑے اور بہت چھوٹے عدد کو $a = b \times 10^n$ کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔

- ایسا عدد جس کا مربع ایک غیر منفی عدد ہو حقیقی عدد کہلاتا ہے۔

یونٹ

7

اعداد کے جمعی اور ضربی سلسلے

ARITHMETIC AND GEOMETRIC SEQUENCES

- اعداد کا سلسلہ
- اعداد کا جمعی سلسلہ
- جمعی وسط
- اعداد کا ضربی سلسلہ
- ضربی وسط

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- اعداد کا سلسلہ اور اس کے ارکان کیا ہیں۔
- کہ اعداد کا سلسلہ ایک قاعدہ یا استقرائی تعریف کے تحت ہے۔
- اعداد کا سلسلہ اعداد کا جمعی سلسلہ کیا ہے۔
- کسی جمعی سلسلے کی n ویں رقم کیا ہے۔
- جمعی سلسلوں پر مبنی سوالات کیسے حل کرتے ہیں۔
- کہ دو اعداد کے درمیان جمعی وسط کیسے معلوم کر سکتے ہیں۔
- دو اعداد کے درمیان n جمعی وسط کیسے معلوم کر سکتے ہیں۔
- کہ ضربی سلسلے کی پہچان کیا ہے۔
- کہ ہندسی سیکوئینس کی nth یا نمائندہ رکن *(General Term)* کیسے معلوم کی جاتی ہے۔
- ضربی سلسلہ پر مبنی سوالات کیسے معلوم کر سکتے ہیں۔
- کہ دو اعداد کے درمیان ضربی وسط کیسے معلوم کیا جا سکتا ہے۔
- کہ دو اعداد کے درمیان n ضربی وسط کیسے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

7.1 اعداد کا سلسلہ Sequence (progression)

روز مرہ زندگی میں ہم اکثر مشاہدہ کرتے ہیں کہ چیزیں ایک مقررہ مقدار سے سلسلہ وار بڑھتی یا کم ہوتی ہیں۔ مثلاً

1- سال میں دن ہفتہ وار 7 ایام کے حساب سے گزرتے ہیں۔
2- ہماری عمر ہر سال 12 ماہ کے حساب سے بڑھتی ہے۔
3- کسی شے کی قیمت مقررہ مقدار سے بڑھتی جاتی ہے جیسے جیسے آپ اس کی تعداد میں ایک ایک کر کے اضافہ کرتے چلے جاتے ہیں۔

ہماری زندگی میں ایسے معاملات کے مطالعہ کے لیے آیئے ہم سلسلہ کے تصور پر غور کرتے ہیں۔ "ایک عددی سلسلہ مخصوص قاعدہ کے مطابق لکھے گئے اعداد کی ترتیب ہوتی ہے"۔ عددی سلسلے کو انگریزی میں سیکوینس یا پروگریشن *(Sequence or Progression)* کہتے ہیں۔

اعداد کے درج ذیل نمونہ جات *(Number Pattern)* پر غور کیجئے۔

(i) $1, 3, 5, 7, 9, \cdots$

(ii) $2, 4, 6, 8, 10, \cdots$

(iii) $1, 4, 9, 16, 25, \cdots$

(iv) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

(v) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots$

اعداد کے ان دیئے گئے سلسلوں سے یہ بات مشاہدہ کی جا سکتی ہے کہ ہر آنے والا رکن *(Term)* خاص قاعدہ کے تحت معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس قاعدہ کے مطابق ایک رکن کے بعد آنے والا رکن معلوم کیا جا سکتا ہے۔ دی گئی مثالوں میں

(i) میں قاعدہ یہ ہے کہ '1' سے شروع کر کے ہر رکن میں '2' جمع کرنے سے آنے والا رکن حاصل ہوتا ہے۔
(ii) میں قاعدہ یہ ہے کہ '2' سے شروع کر کے ہر رکن کی رقم میں '2' جمع کرنے سے آنے والا رکن حاصل ہوتا ہے۔

(iii) میں قاعدہ یہ ہے کہ سلسلہ کی ہر رقم قدرتی اعداد کا مربع ہے۔

(iv) میں قاعدہ یہ ہے کہ '1' سے شروع کر کے اگلی رقم (Next Term) کو حاصل کرنے کے لیے پچھلی رقم (Preceeding Term) کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دی گئی۔

(i) تا (iv) میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہر ایک، ایک عددی سلسلہ (Number Sequence) ہے۔ یہی اعداد اس سلسلہ کو (Sequence) کی رقوم (Terms) کہلاتے ہیں۔

کسی بھی سلسلہ کو ظاہر کرنے کے لیے علامت a_n یا $\{a_n\}$ یا $\cdots$,$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ استعمال ہوتی ہے۔

(آخر میں دیئے نقاط ... وغیرہ وغیرہ کہے جاتے ہیں)۔

a_1 =	پہلی رقم	= First term
a_2 =	دوسری رقم	= Second term
a_3 =	تیسری رقم	= Third term
....		
....		
a_n =	نمائندہ رقم یا n ویں رقم	= n^{th} term or general term

7.1.1 محدود اور غیر محدود سلسلے Finite and Infinite Sequences

درج ذیل مترتب اعداد پر غور کیجئے۔

(i) $1, 2, 3, 4, \cdots$	(ii) $1, 3, 5, 7, \cdots, 15$
(iii) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$	(iv) $2, 4, 6, 8, \cdots, 20$
(v) $1, 4, 7, 10, \cdots$	(vi) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$

اگر کسی سلسلہ میں آخری رقم موجود ہو تو یہ محدود سلسلہ کہلاتا ہے۔ جیسا کہ اوپر مثالوں میں (ii) اور (iv) محدود سلسلے ہیں۔

اگر کسی سلسلہ میں آخری رقم (Last Term) موجود نہیں تو یہ لامحدود سلسلہ کہلاتا ہے۔ جیسا کہ اوپر مثالوں میں (i)، (iii)، (v) اور (vi) لامحدود سلسلے (Infinite Sequences) ہیں۔

7.1.2 قاعدہ کے تحت سیکوینس کی بناوٹ

آیئے اب ہم سلسلہ کو nویں رقم (nth term) کی مدد سے لکھتے ہیں اگر

اگر $a_n = 2n + 3$ جبکہ $n = 1, 2, 3, ..., 8$ ہو تو

$a_1 = 2\times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$

$a_2 = 2\times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$

$a_3 = 2\times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$

$a_4 = 2\times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$

$a_5 = 2\times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$

$a_6 = 2\times 6 + 3 = 12 + 3 = 15$

$a_7 = 2\times 7 + 3 = 14 + 3 = 17$

$a_8 = 2\times 8 + 3 = 16 + 3 = 19$

$a_1, a_2, a_3, ... a_8$ کی مدد سے سلسلہ $5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$ حاصل ہوتا ہے
جس میں رقوم کا سلسلہ $\{a_n\}$ میں n کی جگہ $1, 2, 3, ..., 8$ رکھنے سے حاصل ہوئیں۔

مثلاً

اگر $a_n = (-1)^{n+1}\ (n+3)$ اور $n = 1, 2, 3, 4$ ہو تو

$a_1 = (-1)^{1+1}\ (1+3) = (-1)^2\ (4) = 1\times 4 = 4$

$a_2 = (-1)^{2+1}\ (2+3) = (-1)^3\ (5) = -1\times 5 = -5$

$a_3 = (-1)^{3+1}\ (3+3) = (-1)^4\ 6 = 1\times 6 = 6$

$a_4 = (-1)^{4+1}\ (4+3) = (-1)^5\ 7 = -1\times 7 = -7$

لہٰذا سلسلہ $4, -5, 6, -7$ حاصل ہوتا ہے۔

ہم nویں رقم میں n کی مخصوص قیمت درج کر کے مطلوبہ رقم لکھ سکتے ہیں۔

مشق 7.1

1- درج ذیل کی پہلی تین رقوم (Terms) لکھیے۔

(i) $a_n = n + 3$ (ii) $a_n = (-1)^n n^3$ (iii) $a_n = 3n + 5$

(iv) $a_n = \frac{n+1}{2n+5}$ (v) $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$ (vi) $a_n = n + 3 = 2$

(vii) $a_n = \frac{1}{3^n}$ (viii) $a_n = 3n - 5$ (ix) $a_n = (n+1)a_{n-1}, a_1 = 1$

2- درج ذیل سلسلوں کی نشاندہی کی گئی رقم معلوم کیجیے۔

(i) $2, 6, 11, 17, \cdots, a_8$ (ii) $1, 3, 12, 60, \cdots, a_7$ (iii) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots, a_6$

(iv) $-1, 1, 3, 5, \cdots, a_9$ (v) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \cdots, a_5$ (vi) $1, -3, 5, -7, \cdots, a_9$

3- مندرجہ ذیل سلسلوں میں اگلی چار رقوم لکھیے۔

(i) $12, 16, 21, 27, \cdots$ (ii) $1, 3, 7, 15, 31, \cdots$ (iii) $-1, 2, 12, 40, \cdots$

(iv) $9, 11, 14, 17, 19, 22, \cdots$ (v) $4, 8, 12, 16, \cdots$ (vi) $-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \cdots$

7.2 جمعی سلسلہ Arithmetic Sequence (progression)

جمعی سلسلہ (مخفف A.P) اعداد کی ایسی ترتیب ہوتی ہے جس میں پچھلی رقم سے اگلی رقم ایک قدر مشترک (Common difference) 'd' جمع کر کے حاصل کی جاتی ہے۔

فرض کیا کسی جمعی سلسلہ میں 'a' پہلی رقم اور 'd' قدر مشترک (Common difference) ہو تو اس کی دوسری رقم $a + d$ جبکہ تیسری رقم $a + 2d$ ہوتی ہے۔ ان میں سے ہر رقم میں 'd' کا عددی سر رقم کی حیثیت میں سے '1' کم ہے۔ اس طرح $a + 9d$ 10 ویں رقم کو ظاہر کرتی ہے۔

چونکہ n ویں رقم پہلی رقم کے بعد $(n-1)$ مقام پر آتی ہے لہٰذا یہ رقم d کا عددی سر $(n-1)$ رکھنے سے حاصل ہوگی۔

نمائندہ ٹرم (جنرل ٹرم) = n ویں رقم $= a_n = a + (n-1)d.$

اگر $n = 12$ ہو تو 12 ویں رقم $= a_{12} = a + (12-1)d$

$= a + 11d$

مثال 1:- اس A.P کی n ویں رقم اور 14 ویں رقم معلوم کیجیے جس کی پہلی رقم 2 اور مشترکہ فرق (Common difference) 5 ہے۔

حل:- چونکہ $a_1 = a = 2,\ d = 5$

ہم جانتے ہیں $a_n = a+(n-1)d$

$= 2+(n-1)5$

$= 2+5n-5$

$= 2-5+5n$

$= 5n-3$

n ویں رقم $= a_n = 5n-3$

اب $n = 14$ رکھنے سے

$a_{14} = a+(14-1)d$

$= 2+13\times 5$

$= 2+65$

$= 67$

$a_{14} = 67$

مثال 2:- اگر کسی جمعی سلسلہ کی 5 ویں رقم 16 اور 20 ویں رقم 46 ہو تو اس کی 15 ویں رقم کیا ہوگی۔

حل:- چونکہ $a_5 = 16$ اور $a_{20} = 46$

چونکہ $a_n = a+(n-1)d$ .... (i)

اس لیے مساوات (i) میں $n = 5$ رکھنے سے

$a_5 = a+(5-1)d$

$16 = a+4d$ .... (ii)

مساوات (i) میں $n = 20$ رکھنے سے

$a_{20} = a+(20-1)d$

$46 = a+19d$ .... (iii)

مساوات (ii) کو (iii) میں سے تفریق کرنے سے

$$46 - 16 = a - a + 19d - 4d$$

$$30 = 15d \Rightarrow \boxed{d = 2}$$

$d = 2$ مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$16 = a + 4 \times 2$$

$$16 = a + 8 \Rightarrow 16 - 8 = a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 8}$$

مساوات (i) میں $n = 15$، $d = 2$ اور $a = 8$ رکھنے سے

$$a_{15} = a + (15 - 1)d$$

$$= 8 + 14 \times 2$$

$$= 8 + 28$$

$$= 36$$

لہٰذا $\boxed{a_{15} = 36}$

مثال 3:- جمعی سلسلہ میں رقم کی تعداد معلوم کیجئے۔

جبکہ $a_1 = 3, \;\; d = 4, \;\; a_n = 59$

حل:- ہمیں معلوم ہے کہ $a_1 = a = 3, \;\; d = 4, \;\; a_n = 59$

چونکہ $a_n = a + (n - 1)d$

اس لیے $59 = 3 + (n - 1)4$

$$= 3 + 4n - 4$$

$$= 4n - 1$$

$$60 = 4n$$

$$n = \frac{60}{4} = 15$$

$$\boxed{n = 15}$$

مثال 4:- اگر $a_{n-3} = 2n-12$ ہو تو a_n معلوم کریں۔

حل:- ہمیں معلوم ہے کہ $a_{n-3} = 2n-12$

n کی جگہ $n+3$ رکھنے سے

$$a_{n+3-3} = 2(n+3)-12$$

$$a_n = 2n+6-12$$

$$= 2n-6$$

$$\boxed{a_n = 2n-6}$$

مشق 7.2

-1 مندرجہ ذیل میں مطلوبہ رقم معلوم کریں۔

(i) 3,7,11,..., 61ویں رقم　　(ii) $-4,-7,-10,\cdots,a_{19}$

(iii) 6,4,2,..., 45ویں رقم　　(iv) $9,14,19,\cdots,a_{14}$

(v) $11,6,1,\cdots,a_{18}$

-2 جمعی سلسلہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے نامعلوم عنصر (Element) معلوم کیجیے۔

$$a_n = a+(n-1)d$$

(i) $a = 2,\ a_n = 402,\ n = 26,$　　(ii) $a_n = 81,\ d = -3,\ n = 18$

(iii) $a = 5,\ a_n = 61,\ n = 15$　　(iv) $a = 16,\ a_n = 0,\ d = -\frac{1}{4}$

(v) $a = 10,\ a_n = 400,\ d = 5$　　(vi) $a_n = 261,\ d = 4,\ n = 18$

-3 جمعی سلسلہ کی 15ویں رقم معلوم کریں جبکہ تیسری رقم 8 اور مشترک قدر (Common difference) $\frac{1}{3}$ ہے۔

-4 جمعی سلسلہ ...,6,2,-2 کی کونسی رقم 146- ہے؟

-5 جمعی سلسلہ ... ,5,2,-1 کی کونسی رقم 118- ہے؟

-6 جمعی سلسلہ کی کتنی رقم (Terms) ہیں کہ جس میں $a_1 = a = 11,\ a_n = 68,\ d = 3$ ہو۔

-7 جمعی سلسلہ ...,$2-x,\ 3-2x,\ 4-3x$ کی 11ویں رقم معلوم کیجیے۔

-8 جمعی سلسلہ کی nویں رقم معلوم کیجیے جبکہ $a_{n-5} = 3n+9$

-9 جمعی سلسلہ ...,$\left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{7}\right)^2, \left(\frac{3}{10}\right)^2$ کی nویں رقم معلوم کیجیے۔

-10 اگر جمعی سلسلہ کی nویں رقم $3n-5$ ہو تو جمعی سلسلہ معلوم کیجیے۔

7.3 جمعی وسط Arithmetic Mean

کوئی عدد 'A' دو اعداد a اور b کے درمیان جمعی وسط (A.M) کہلاتا ہے اگر a, A, b ایک جمعی سلسلہ میں ہوں۔

مشترکہ قدر (Common Difference)

$$A - a = b - A$$
$$A + A = a + b$$
$$2A = a + b$$
$$A = \frac{a+b}{2}$$

مثال 1:- 4 اور 8 کے درمیان جمعی وسط (A.M) معلوم کیجئے۔

حل:- $a = 4,\ b = 8$

اس لیے

$$A = \frac{a+b}{2}$$
$$= \frac{4+8}{2}$$
$$= \frac{12}{2} = 6$$
$$A = 6$$

> A.M جمعی وسط
> Arithematic Mean
> کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 2:- $2\sqrt{5}$ اور $6\sqrt{5}$ میں جمعی وسط معلوم کیجئے۔

حل:- چونکہ $a = 2\sqrt{5},\ b = 6\sqrt{5}$

اس لیے

$$A = \frac{a+b}{2}$$
$$= \frac{2\sqrt{5}+6\sqrt{5}}{2}$$
$$= \frac{8\sqrt{5}}{2}$$
$$= 4\sqrt{5}$$

7.3.2 دو اعداد کے درمیان n جمعی وسط

"n" Arithmetic Means Between Two Numbers

فرض کیا کہ دو اعداد a, b کے درمیان مطلوبہ "n" جمعی وسط $A_1, A_2, A_3 \cdots A_n$ اس طرح ہیں کہ

$a, A_1, A_2, A_3 \cdots, A_n, b$ ایک جمعی سلسلہ ہے۔

یہاں $a_1 = a, \quad a_{n+2} = b,$ کیونکہ اس جمعی سلسلہ میں رقوم کی تعداد $n + 2$ ہے۔

کلیہ $a_n = a + (n-1)d$ کا استعمال کرتے ہوئے

$$a_{n+2} = a + (n+2-1)d$$

$$b = a + (n+1)d$$

$$b - a = (n+1)d$$

$$\frac{(b-a)}{n+1} = d \quad \text{یا} \quad \boxed{d = \frac{b-a}{n+1}}$$

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1} = \frac{an+a+b-a}{n+1} = \frac{na+b}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + 2\left(\frac{b-a}{n+1}\right) = \frac{na+a+2b-2a}{n+1} = \frac{na+a+2b}{n+1} = \frac{(n-1)a+2b}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + 3\left(\frac{b-a}{n+1}\right) = \frac{na+a+3b-3a}{n+1} = \frac{na-2a+3b}{n+1} = \frac{(n-2)a+3b}{n+1}, \cdots,$$

$$A_n = a + nd = a + n\left(\frac{b-a}{n+1}\right) = \frac{na+a+nb-na}{n+1} = \frac{a+nb}{n+1}$$

مثال 1:- اگر a اور b کے درمیان 8 اور 12 دو جمعی وسط ہوں تو a اور b معلوم کیجئے۔

حل:- چونکہ $a, 8, 12, b$ ایک جمعی سلسلہ میں ہیں۔

لہٰذا $d =$ مشترک قدر (Common difference)

$$= a_3 - a_2$$

$$= 12 - 8 = 4$$

$$b = a_4$$

$$= a_3 + d$$

$$b = 12 + 4 = 16$$

$$a = a_2 - d$$

$$= 8 - 4 = 4$$

لہٰذا $a = 4, b = 16$

مثال 2:- $\sqrt{3}$ اور $9\sqrt{3}$ کے درمیان تین جمعی وسط معلوم کیجیے۔

حل:- فرض کیا $\sqrt{3}$، $9\sqrt{3}$ کے درمیان A_1, A_2, A_3 تین جمعی وسط ہیں۔

اس طرح $\sqrt{3}, A_1, A_2, A_3, 9\sqrt{3}$ ایک جمعی سلسلہ ہیں۔

یہاں $a_1 = a = \sqrt{3}, n = 5, a_5 = 9\sqrt{3}$

اس لیے $a_n = a + (n-1)d$

$$a_5 = a + (5-1)d$$

$$9\sqrt{3} = a + 4d$$

$$9\sqrt{3} = \sqrt{3} + 4d$$

$$9\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4d$$

$$4d = 8\sqrt{3}$$

$$d = 2\sqrt{3}$$

لہٰذا $A_1 = a + d = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$$A_2 = A_1 + d = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$A_3 = A_2 + d = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

پس $9\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ کے درمیان $3\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 7\sqrt{3}$ مطلوبہ تین جمعی وسط ہیں۔

مشق 7.3

1- درج ذیل کے درمیان جمعی وسط معلوم کیجیے۔

(i) $-3, 7$ (ii) $x-1, x+7$

(iii) $\sqrt{7}, 3\sqrt{7}$ (iv) $x^2+x+1 \; ; \; x^2-x+1$

2- اگر a اور b کے درمیان 3، 6 دو جمعی وسط ہیں تو a اور b معلوم کیجیے۔

3- 11 اور 19 کے درمیان تین جمعی وسط معلوم کیجیے۔

4- $6\sqrt{2}$ اور $2\sqrt{2}$ کے درمیان تین جمعی وسط معلوم کیجیے۔

5- 5 اور 8 کے درمیان چھ جمعی وسط معلوم کیجیے۔

6- 8 اور 12 کے درمیان سات جمعی وسط معلوم کیجیے۔

7- اگر 5 اور b کے درمیان جمعی وسط 10 ہو تو b کی قیمت معلوم کیجیے۔

8- اگر a اور 10 کے درمیان جمعی وسط 40 ہو تو a کی قیمت معلوم کیجیے۔

9- اگر دو اعداد a اور b کے درمیان 9.5 اور 13 تین جمعی وسط ہوں تو a اور b کی قیمت معلوم کیجیے۔

7.4 ضربی سلسلہ Geometric Sequence (progression)

ضربی سلسلہ Geometric Progression (مختصراً G.P)، اعداد کی ایسی ترتیب ہے کہ جس میں ہر آنے والا عدد (رقم) پچھلی رقم کو ایک مقررہ مقدار (مشترکہ نسبت/ضارب Common Ratio) سے ضرب دے کر حاصل ہوتا ہے۔ مشترکہ نسبت کو 'r' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جبکہ ترتیب میں ہر عدد، ضربی سلسلہ کی رقم (Term) کہلاتی ہے۔ 'r' کبھی بھی صفر نہیں ہوتا۔

پس 'r' کی قیمت:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots$$

کسی بھی ضربی سلسلہ میں اگر پہلی رقم 'a' ہو اور مشترکہ نسبت 'r' ہو تو دوسری رقم 'ar' ہوگی اور تیسری رقم ar^2 ہوگی۔ ہر رقم میں 'r' کا قوت نما اس رقم کے مقام سے ایک کم ہوتا ہے اس طرح 8 ویں رقم ar^7 ہوگی۔ جبکہ n ویں رقم ar^{n-1} ہوگی۔

پس ضربی سلسلہ کی نمائندہ رقم یوں ہوگی $a_n = ar^{n-1}$ ۔

مثال 1:- اس ضربی سلسلہ کی 5 ویں رقم معلوم کیجیے۔ جس میں $a = 2$ اور $r = 3$ ہو۔

حل:- جیسا کہ معلوم ہے کہ $a = 2 \; , \; r = 3 \; , \; n = 5, \; a_5 = ?$

چونکہ $a_n = ar^{n-1}$

$$a_5 = ar^{5-1}$$
$$a_5 = 2(3)^4$$
$$= 2\times 81$$
$$= 162$$
$$\boxed{a_5 = 162}$$

مثال 2:- اگر کسی ضربی سلسلہ میں $a_7 = \frac{-64}{729}$, $a_4 = \frac{8}{27}$ ہو تو a_{10} معلوم کیجئے۔

حل:- چونکہ $a_4 = \frac{8}{27}$, $a_7 = \frac{-64}{729}$

یہاں پہلے ہم a اور r کی قیمتیں معلوم کریں گے۔

چونکہ $a_n = ar^{n-1}$

لہٰذا $a_4 = ar^{4-1}$

$$\frac{8}{27} = ar^3$$
$$ar^3 = \frac{8}{27} \quad ....(i)$$

اور $a_7 = ar^{7-1}$

$$\frac{-64}{729} = ar^6$$
$$ar^6 = -\frac{64}{729} \quad ....(ii)$$

اب مساوات (ii) کو (i) پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{-64}{729}}{\frac{8}{27}}$$
$$r^3 = \frac{-64\times 27}{729\times 8} = -\frac{8}{27} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3$$
$$r = -\frac{2}{3}$$

مساوات (i) میں $r = -\frac{2}{3}$ رکھنے سے

$$a\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow a\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$a = -1$$

پس $a_{10} = ar^{10-1}$

$$= (-1)\left(\frac{2}{3}\right)^9 = -\left(\frac{2}{3}\right)^9$$

مشق 7.4

1- ضربی سلسلہ ... ,2,8,32 میں 7 ویں رقم لکھیے۔

2- ضربی سلسلہ ... ,2,6,18 کی 11 ویں رقم معلوم کیجیے۔

3- ضربی سلسلہ ... $-\frac{3}{2}, 3, -6$ کی 6 ویں رقم معلوم کیجیے۔

4- ضربی سلسلہ ... ,4,-12,36 کی 5 ویں رقم معلوم کیجیے۔

5- دیے گئے ضربی سلسلہ کی n, a_n, a اور r میں سے نامعلوم کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $r = 10\ ,\ a_n = 100\ ,\ a = 1$ (ii) $a_n = 400\ ,\ r = 2\ ,\ a = 25$

(iii) $a = 128\ ,\ r = \frac{1}{2}\ ,\ a_n = \frac{1}{4}$

6- ایسے ضربی سلسلہ کی 11 ویں رقم معلوم کیجیے جس کی 5 ویں رقم کی قیمت 9 اور مشترک نسبت 2 ہے۔

7- ایسے ضربی سلسلہ کی 13 ویں رقم کیا ہوگی۔ جس میں 7 ویں رقم 25 اور مشترک نسبت 3 ہے۔

8- اگر a, b, c, d ایک ضربی سلسلہ میں ہوں تو ثابت کیجیے کہ $a-b,\ b-c,\ c-d$ بھی ضربی سلسلہ میں ہیں۔

9- اگر $\frac{4}{9} = \frac{a_5}{a_3}$ اور $a_2 = \frac{4}{9}$ ہو تو ضربی سلسلہ کی n ویں رقم کیا ہوگی؟

10- ضربی سلسلہ میں تین یکے بعد دیگرے اعداد معلوم کیجیے جن کا مجموعہ 26 اور حاصل ضرب 216 ہو۔

11- ... $x, 1, \frac{1}{x},$ ضربی سلسلہ کی 30 ویں رقم معلوم کیجیے۔

12- ... $x, x^3, x^5,$ ضربی سلسلہ کی P ویں رقم معلوم کیجیے۔

7.5 ضربی وسط Geometric Mean (G.M)

دو اعداد 'a' اور 'b' کے درمیان 'G' ضربی وسط کہلاتا ہے اگر a, G, b ایک ضربی سلسلہ میں ہوں۔

یعنی

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$$

$$G^2 = ab$$

$$G = \pm\sqrt{ab}$$

جبکہ a, b کے درمیان مثبت ضربی وسط $\sqrt{ab}$ ہے۔

مثال 1:- 3 اور 27 کے درمیان ضربی وسط معلوم کیجئے۔

حل:- چونکہ $a = 3,\ b = 27$

لہٰذا

$$G = \pm\sqrt{ab}$$
$$= \pm\sqrt{3\times 27}$$
$$= \pm\sqrt{81}$$
$$= \pm 9$$

مثال 2:- $2x^2$ اور $8y^4$ کے درمیان ضربی وسط معلوم کیجئے۔

حل:- چونکہ $a = 2x^2\ ,\ b = 8y^4$

اس لیے

$$G = \pm\sqrt{ab}$$
$$= \pm\sqrt{2x^2\times 8y^4}$$
$$= \pm\sqrt{16x^2y^4}$$
$$= \pm\sqrt{(4xy^2)^2}$$
$$= \pm 4xy^2$$

7.5.1 دو اعداد کے درمیان 'n' ضربی وسط
'n' Geometric Means Between Two Numbers

فرض کیا دو اعداد 'a' اور 'b' کے درمیان $G_1, G_2, G_3 \cdots, G_n$ مطلوبہ n ضربی سلسلہ ہیں۔

اس طرح $a, G_1, G_2, G_3 \cdots, G_n, b$ ایک ضربی سلسلہ میں ہیں۔

اب اس ضربی سلسلہ میں رقوم کی تعداد $n + 2$ بنتی ہے۔

جس میں $a_{n+2} = b\ ,\ a_1 = a$

تو $a_n = ar^{n-1}$

میں n کی قیمت $n + 2$ رکھنے سے

$$a_{n+2} = ar^{n+2-1}$$
$$b = ar^{n+1}$$
$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$
$$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_1 = a \times r = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_2 = G_1 \times r = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$G_3 = G_2 \times r = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$G_n = G_{n-1} \times r = ar^n = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

مثال 1:- 4 اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان دو ضربی وسط معلوم کیجئے۔

حل:- فرض کیا 4 اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان G_1, G_2 دو مطلوبہ ضربی وسط معلوم کیجئے۔

یہاں $a = 4 \ , n = 4 \ , a_4 = \frac{1}{2},$

چونکہ $a_n = ar^{n-1}$

اس لیے $a_4 = ar^{4-1}$

$$\frac{1}{2} = ar^3$$

$$ar^3 = \frac{1}{2}$$

$$4r^3 = \frac{1}{2}$$

$$r^3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$$

$$r^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$r = \frac{1}{2}$$

پس $G_1 = a \times r = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

$$G_2 = G_1 \times r = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

مشق 7.5

1- ضربی وسط معلوم کیجیے۔ (i) 9 اور 5 میں (ii) 4 اور 9 میں (iii) 2- اور 8- میں

2- دو ضربی وسط لکھیے۔ (i) 1 اور 8 کے درمیان (ii) 3 اور 81 کے درمیان

3- تین ضربی وسط لکھیے۔ (i) 1 اور 16 کے درمیان (ii) 2 اور 32 کے درمیان

4- 3 اور 96 کے درمیان چار حقیقی ضربی وسط لکھیے۔

5- دو اعداد کا جمعی وسط 5 ہے جبکہ ان کا مثبت ضربی وسط 4 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

6- دو اعداد کا مثبت ضربی وسط 6 ہے اور ان کا جمعی وسط 10 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

7- ثابت کیجیے کہ دو اعداد 4 اور 8 کا جمعی وسط ان کے ضربی وسط سے بڑا ہے۔

8- 160 اور 5 کے درمیان چار ضربی وسط لکھیے۔

9- 486 اور 6 کے درمیان تین ضربی وسط لکھیے۔

10- $\frac{1}{8}$ اور 128 کے درمیان چار ضربی وسط لکھیے۔

11- 56 اور $\frac{7}{16}$ کے درمیان چھ ضربی وسط لکھیے۔

12- $\frac{32}{81}$ اور $\frac{9}{2}$ کے درمیان پانچ ضربی وسط لکھیے۔

جائزہ مشق 7

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) $a_n + n = 3$ کی تیسری رقم کیا ہے؟

(a) 3 (b) 6 (c) 0 (d) 1

(ii) $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$ کی چوتھی رقم کیا ہے؟

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{1}{49}$ (c) $\frac{1}{81}$ (d) 0

(iii) ... 2,6,11,17 میں a_5 کی قیمت کیا ہے؟

(a) 24 (b) 30 (c) 21 (d) 22

(iv) 12,16,21,27 میں اگلی رقم کیا ہے؟

(a) 34 (b) 30 (c) 31 (d) 32

(v) ...,3,7,11 کی a_6 کیا ہے؟

(a) 3 (b) 19 (c) 23 (d) 20

(vi) $\sqrt{3}$ اور $3\sqrt{3}$ میں جمعی وسط کیا ہے؟

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $5\sqrt{3}$ (c) $9\sqrt{3}$ (d) $4\sqrt{3}$

(vii) $6\sqrt{5}$ اور $2\sqrt{5}$ میں جمعی وسط کیا ہے؟

(a) $4\sqrt{5}$ (b) $3\sqrt{5}$ (c) $5\sqrt{5}$ (d) $7\sqrt{5}$

(viii) ...,2,6,18 میں a_5 کی قیمت کیا ہے؟

(a) 160 (b) 161 (c) 162 (d) 30

(ix) -3 اور -12 کے درمیان ضربی وسط کیا ہے؟

(a) ± 6 (b) ± 9 (c) ± 36 (d) ± 3

(x) 1 اور 8 کے درمیان ضربی وسط کیا ہے؟

(a) $2\sqrt{2}$ (b) $\pm 2\sqrt{2}$ (c) $-2\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}$

2- خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) کسی سلسلہ کی جنرل ٹرم یا n ویں رقم کو ______ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(ii) اگر $a_n = 2n + 3$ ہو تو $a =$ ______

(iii) کسی A.P میں $a_n = a + (n-1)\,d$ کہلاتی ہے ______

(iv) 5 اور 15 کے درمیان ______ = جمعی وسط

(v) اگر a, A, b ایک جمعی سلسلہ میں ہو تو $A =$ ______

(vi) ایک ضربی سلسلہ میں "r" ______ کہلاتا ہے۔

(vii) کسی ضربی سلسلہ میں ______ = a_n

(viii) اگر $a,\ G,\ b$ ایک ضربی سلسلہ میں ہوں تو $G =$ ______

(ix) 8 اور 2 کا مثبت ضربی وسط ______ ہے۔

(x) $a_{n-5} = 3n + 9$ A.P کی n ویں رقم کو ______ ہے۔

3- اس جمعی سلسلہ کی n ویں رقم اور 18 ویں رقم معلوم کیجیے جس کی پہلی رقم 3 اور مشترکہ قدر 2 ہو۔

4- جمعی سلسلہ .... $\left(\frac{3}{5}\right)^3, \left(\frac{3}{7}\right)^3, \left(\frac{3}{9}\right)^3$ کی n ویں رقم معلوم کیجیے۔

5- اگر a اور 16 کا جمعی وسط 24 ہو تو 'a' کی قیمت معلوم کیجیے۔

6- ایسی 15 ویں رقم کا ضربی سلسلہ معلوم کیجیے جس کی 7 ویں رقم 27 اور مشترک نسبت 3 ہے۔

7- $\frac{1}{2}$ اور 16 کے درمیان چار ضربی وسط لکھیے۔

8- ضربی سلسلہ کی تین ایسی متواتر رقوم لکھیے جن کا مجموعہ 26 اور حاصل ضرب 216 ہو۔

خلاصہ

- اعداد کی ایسی ترتیب جس میں ہر اگلی رقم خاص قاعدہ کے اطلاق سے حاصل کی گئی ہو اور یہ قاعدہ اس رقم کے مقام کا تعین بھی کرتا ہو۔ یعنی کہ اس ترتیب کے تمام اراکین سلسلہ وار مخصوص ترتیب میں ہوں۔ اعداد کی ایسی ترتیب کو سلسلہ (Sequence) کہتے ہیں۔

- ایسا سلسلہ جس میں ہر اگلی رقم، پچھلی رقم میں ایک مقررہ عدد (مشترکہ قدر) جمع کر کے حاصل کی گئی ہو۔ جمعی سلسلہ *Arithematic Sequence* کہلاتی ہے۔

- کوئی عدد 'A' دو اعداد 'a'، 'b' کے درمیان جمعی وسط کہلاتا ہے اگر a, A, b ایک جمعی سلسلہ میں ہوں۔

- ایک سلسلہ جس میں ہر اگلی رقم، پچھلی رقم کو ایک مشترکہ نسبت سے ضرب دے کر حاصل کی ہو۔ ضربی سلسلہ کہلاتی ہے۔

- "G" دو اعداد 'a' اور 'b' کے درمیان ضربی وسط کہلاتا ہے اگر a, G, b ایک ضربی سلسلہ میں ہوں۔

یونٹ

8

سیٹ اور تفاعل

SETS AND FUNCTIONS

◀ سیٹوں پر عوامل

◀ ثنائی روابط

◀ تفاعل

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

◀ Q اور N,Z,W,E,O,P کی علامت سے ظاہر کیے گئے سیٹوں کی شناخت کیا ہیں۔

◀ سیٹوں پر (... , \ , ∩ , ∪) کے عوامل کیا ہیں۔

◀ سیٹوں پر مندرجہ ذیل عوامل کیسے کرائیں۔

- یونین *Union*
- تقاطع *Intersection*
- کمپلیمنٹ *Complement*

◀ دو یا تین سیٹوں پر یونین اور تقاطع کے درج ذیل خواص کی تصدیق کیسے کرنا ہے۔

- یونین اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ
- یونین اور تقاطع کی خاصیت تلازم

◀ وین اشکال سے مندرجہ ذیل کا اظہار کیسے کرنا ہے۔

- سیٹوں کا یونین اور انٹرسیکشن
- سیٹ کا کمپلیمنٹ

◀ وین اشکال سے مندرجہ ذیل کا ثبوت فراہم کیسے کرنا ہے۔

- سیٹوں کے یونین اور انٹرسیکشن کے قوانین مبادلہ
- سیٹوں کے یونین اور انٹرسیکشن کے لحاظ سے قوانین تلازم
- ڈی مارگن کے قوانین

◀ ثنائی ربط (***Binary Relation***) کی تعریف کرنا اور اس کی ڈومین (***Domain***) اور رینج (***Range***) کا تعین کرنا۔

◀ تفاعل (***Funtion***) کی تعریف کرنا اور اس کی ڈومین (***Domain***) اور رینج (***Range***) کی پہچان کیسے کرنا ہے۔

◀ مندرجہ ذیل کو واضح کیسے کرنا ہے۔

- ان ٹو فنکشن
- ون ۔ ون فنکشن
- ان ٹو، ون ۔ ون فنکشن (***Injective Function***)
- آن ٹو فنکشن (***Surjective Function***)
- ون ۔ ون، آن ٹو فنکشن (***Bijective Function***)

8.1 سیٹ Set

کائنات کی ہر چیز چاہے وہ جاندار ہو یا بے جان "شے" کہلاتی ہے۔ ہم مخصوص اشیاء کے اجتماع یا اکٹھ کو مخصوص نام دیتے ہیں جیسا کہ "ہاکی ٹیم"، "بھیڑوں کا ریوڑ"، "پھولوں کا گلدستہ" وغیرہ۔

سیٹ سے مراد واضح متعارف اشیاء کا اجتماع یا اکٹھ ہے۔ یعنی کہ اشیاء کا اجتماع یا اکٹھ اس طرح سے لیا گیا ہو کہ بغیر کسی شک وشبہ کے ہم بتا سکیں کہ کوئی دی ہوئی شے کا اس اکٹھ سے تعلق ہے یا نہیں۔

واضح متعارف اشیاء کے اکٹھ کو "سیٹ" کہتے ہیں۔
کسی سیٹ کے نام کو بالعموم حروف تہجی $A, B, C, ... X, Y, Z$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

سیٹ میں موجود اشیاء ممبران یا ارکان کہلاتے ہیں۔ اراکین سیٹ کو چھوٹے حروف تہجی یا اعداد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر

(i) $A = \{1,3,4,5\}$
(ii) $B = \{a,e,i,o,u\}$ تمام سیٹ کہلاتے ہیں۔
(iii) $C = \{1,3,5,7,9, \cdots\}$

اگر کوئی شے x سیٹ 'A' سے تعلق رکھتی ہو تو اسے یوں لکھتے ہیں $x \in A$ جس کا مطلب ہے x، سیٹ 'A' کا رکن ہے۔
اور اگر کوئی شے x سیٹ 'A' سے تعلق نہ رکھتی ہو تو ہم لکھتے ہیں $x \notin A$۔

اہم سیٹ Important Sets

قدرتی اعداد کا سیٹ Set of Natural Number

گنتی کے اعداد مثلاً ...1,2,3 وغیرہ قدرتی اعداد کہلاتے ہیں۔ قدرتی اعداد کا سیٹ 'N' سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ

$$N = \{1,2,3,4,5, \cdots\}$$

مکمل اعداد کا سیٹ Set of Whole Numbers

مکمل اعداد کے سیٹ کو 'W' سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ

$$W = \{0,1,2,3,4,5, \cdots\}$$

صحیح اعداد کا سیٹ Set of Integers

صحیح اعداد کے سیٹ کو علامت 'Z' سے ظاہر کیا

$$Z = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

جفت اعداد کا سیٹ Set of Even Numbers

جفت اعداد کے سیٹ کو 'E' سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ

$$E = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \cdots\}$$

طاق اعداد کا سیٹ Set of Odd Numbers

طاق اعداد کے سیٹ کو 'O' سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ

$$O = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots\}$$

مفرد اعداد کا سیٹ Set of Prime Numbers

مفرد اعداد کے سیٹ کو 'P' سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots\}$$

مفرد اعداد ایسے اعداد ہیں جو کہ '1' اور اپنے آپ پر تقسیم ہوتے ہیں۔ اس کے علاوہ وہ کسی اور عدد سے تقسیم نہیں ہوتے۔

ناطق اعداد کا سیٹ Set of Rational Numbers

ناطق اعداد کے سیٹ کو 'Q' سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ

$$Q = \{\frac{p}{q} : q \neq 0,\ p, q \in Z\}$$

8.1.1 سیٹوں پر عوامل Operations on Sets

حساب، میں اعداد پر جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے عوامل کی طرح سیٹوں پر یونین، تقاطع اور کمپلیمنٹ جیسے عوامل ہوتے ہیں۔

سیٹوں کا یونین (Union of Sets)

اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہوں تو سیٹ A اور سیٹ B کے یونین سے مراد اُن ممبران پر مشتمل سیٹ ہوتا ہے جو کہ سیٹ A اور سیٹ B کے تمام ارکان ہوں۔

لہٰذا $A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$

مثال کے طور پر اگر $A = \{1,2,3,4,5\}$

ہو تو $B = \{2,4,6,8,10\}$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\} \cup \{2,4,6,8,10\}$$

$$= \{1,2,3,4,5,6,8,10\}$$

مثالیں:-

(i) $A \cup B$ معلوم کیجئے اگر

$A = \{a,b,c\}$ اور $B = \{a,e,i,o,u\}$

حل:- $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a,e,i,o,u\}$

تو $A \cup B = \{a,b,c\} \cup \{a,e,i,o,u\}$

$$= \{a,b,c,e,i,o,u\}$$

(ii) $C \cup D$ معلوم کیجئے اگر

$C = \{2,3,4,5\}$ اور $D = \{6,7\}$

حل:- چونکہ $C = \{2,3,4,5\}$, $D = \{6,7\}$

تو $C \cup D = \{2,3,4,5,\} \cup \{6,7\}$

$$= \{2,3,4,5,6,7\}$$

(iii) $E \cup F$ معلوم کیجئے اگر

$E = \{1,2,3,5,7\}$ اور $F = \{2,4,6,8\}$

حل:- $E = \{1,2,3,5,7\}$, $F = \{2,4,6,8\}$

$$E \cup F = \{1,2,3,5,7\} \cup \{2,4,6,8\}$$

$$= \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

سیٹوں کا تقاطع Intersection of Sets

دو سیٹوں A اور B کا تقاطع $A \cap B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ ان ارکان پر مشتمل ہوتا ہے جو A اور B دونوں کے مشترکہ ارکان ہوں۔

لہٰذا $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

مثال:- $A \cap B$ معلوم کیجیے اگر

(i) $A = \{2,3,5,7,11\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$

(ii) $A = \{3,6,9,12,15,18,21,24\}$, $B = \{4,8,12,16,20,24,28,32\}$

(iii) $A = \{1,2,3,4,6,12\}$, $B = \{1,2,3,4,6,9,18\}$

حل:-

(i) چونکہ $A = \{2,3,5,7,11\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$

اس لیے $A \cap B = \{2,3,5,7,11\} \cap \{1,3,5,7,9\}$

$= \{3,5,7\}$

(ii) چونکہ $A = \{3,6,9,12,15,18,21,24\}$, $B = \{4,8,12,16,20,24,28,32\}$

لہٰذا $A \cap B = \{3,6,9,12,15,18,21,24\} \cap \{4,8,12,16,20,24,28,32\}$

$= \{12,24\}$

(iii) چونکہ $A = \{1,2,3,4,6,12\}$, $B = \{1,2,3,4,6,9,18\}$

$A \cap B = \{1,2,3,4,6,12\} \cap \{1,2,3,4,6,9,18\}$

$= \{1,2,3,4,6\}$

یونیورسل سیٹ Universal Set

اگر کچھ سیٹ زیر بحث ہوں تو ان میں ایک سیٹ ایسا بھی ہو سکتا ہے کہ وہ ان سب سیٹوں کا فوقی سیٹ (Super Set) ہو۔ ایسا سیٹ یونیورسل سیٹ کہلاتا ہے۔ جسے ہم علامت 'U' سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر

اگر $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{1,3\}$ ہو تو $U = \{1,2,3\}$ تمام سیٹوں A,B,C کا فوقی سیٹ Super set ہے اور سیٹ A,B,C سیٹ U کے تحتی سیٹ کہلاتے ہیں۔

سیٹ کا کمپلیمنٹ Complement of a Set

فرض کریں کہ 'A' کسی یونیورسل سیٹ کا تحتی سیٹ ہے۔ تو سیٹ A کا کمپلیمنٹ سیٹ، یونیورسل سیٹ U کے لحاظ سے، سیٹ U کے ان تمام ارکان پر مشتمل ہوگا جو سیٹ A میں نہ ہوں اسے علامتی طور پر A', $U - A$ یا A^c سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

پس $A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$

$$x \in A' \Rightarrow x \notin A$$

اور $x \in A \Rightarrow x \notin A'$

یادرہے کہ

$$A^c = U - A$$
$$U^c = U - U = \Phi,\ \Phi^c = U - \Phi = U$$
$$(A^c)^c = U - A^c = A$$

مثال 1:-

اگر $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ اور $A = \{3,4,5\}$ ہو تو A^c معلوم کیجیے۔

حل:-

چونکہ $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

اس لیے $A = \{3,4,5\}$

تو $A^c = U - A$

$= \{1,2,3,4,5,6,7\} - \{3,4,5\}$

لہٰذا $A^c = \{1,2,6,7\}$

مثال 2:-

اگر $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ اور $A = \{2,3,5,7\}$ ہو تو $A \cap A^c$, $A \cup A^c$, A^c معلوم کیجیے۔

حل:-

چونکہ $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,

$A = \{2,3,5,7\}$

اس لیے $A^c = U - A$

$= \{1,2,3,4,5,6,7,8\} - \{2,3,5,7\}$

$= \{1,4,6,8\}$

اب $A \cup A^c = \{2,3,5,7\} \cup \{1,4,6,8\}$

$= \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$= U$

$$A \cap A^c = \{2,3,5,7\} \cap \{1,4,6,8\}$$
$$= \{\ \}$$
$$= \Phi$$

یعنی کہ

$A \cup A^c = U$ اور $A \cap A^c = \Phi$

مثال 3:-

اگر $A = \{9,10,11,12,...,20\}$, $U = \{1,2,3,...,20\}$ ہو تو A^c, $A \cup A^c$ اور $A \cap A^c$ معلوم کیجئے۔

حل:-

$$A^c = U - A$$
$$= \{1,2,3,...,20\} - \{9,10,11,12,...,20\}$$
$$= \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

اب

$$A \cup A^c = \{9,10,11,12,...,20\} \cup \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$
$$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9...,20\}$$
$$= U$$
$$A \cap A^c = \{9,10,11,12,...,20\} \cap \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$
$$= \{\ \}$$
$$= \Phi$$

$A \cup A^c = U$ اور $A \cap A^c = \Phi$

دو سیٹوں کا فرق Difference of two sets

اگر A اور B دو سیٹ ہوں۔ تو A سے B کا فرق سیٹ A کے ان ارکان پر مشتمل ہو گا جو سیٹ B میں موجود نہ ہوں۔ علامتی طور پر اسے $A-B$ یا $A \setminus B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح B سے A کا فرق سیٹ B کے ان ارکان پر مشتمل ہو گا جو سیٹ A میں موجود نہ ہوں جسے $B-A$ یا $B \setminus A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(i) فرض کیا کہ $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{2,4,6,8\}$

تب $A - B = \{2,3,4,5\} - \{2,4,6,8\} = \{3,5\}$

اور $B - A = \{2,4,6,8\} - \{2,3,4,5\} = \{6,8\}$

(ii) فرض کیا $A = \{3,4,5,6,7\}$, $B = \{1,2,3,4,7,8,9,10\}$

$A \setminus B = \{3,4,5,6,7\} \setminus \{1,2,3,4,7,8,9,10\} = \{5,6\}$

اور $B \setminus A = \{1,2,3,4,7,8,9,10\} \setminus \{3,4,5,6,7\}$

$$= \{1,2,8,9,10\}$$

$$A - B \neq B - A$$

8.1.2 سیٹوں کے یونین کے خواص Properties of Union of Sets

خاصیت مبادلہ Commutative Property

کوئی سے دو سیٹوں A اور B کے لیے

$$A \cup B = B \cup A$$

فرض کیا کہ

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x : x \in A \text{ or } x \in B\} \\ &= \{x : x \in B \text{ or } x \in A\} \\ &= B \cup A \end{aligned}$$

پس

$$A \cup B = B \cup A$$

خاصیت تلازم Associative Property

کوئی سے تین سیٹوں A, B, C کے لیے

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

فرض کیا

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= \{x : x \in (A \cup B) \text{ or } x \in C\} \\ &= \{x : (x \in A \text{ or } x \in B) \text{ or } x \in C\} \\ &= \{x : x \in A \text{ or } (x \in B \text{ or } x \in C)\} \\ &= \{x : x \in A \text{ or } x \in (B \cup C)\} \\ &= A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

پس

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

مثال:- اگر $A = \{1,2,3,4\}$ ، $B = \{7,8,9,10\}$ اور $C = \{2,6\}$ ہو تو ثابت کیجئے کہ

(a) $A \cup B = B \cup A$

(b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

حل:- چونکہ $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{7,8,9,10\}$, $C = \{2,6\}$

اس لیے

(a) $A \cup B = \{1,2,3,4\} \cup \{7,8,9,10\}$

$= \{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ .... (i)

$B \cup A = \{7,8,9,10\} \cup \{1,2,3,4\}$

$= \{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ .... (ii)

نتائج (i) اور (ii) سے

$$A \cup B = B \cup A$$

(b) $(A \cup B) \cup C = (\{1,2,3,4\} \cup \{7,8,9,10\}) \cup \{2,6\}$

$= \{1,2,3,4,7,8,9,10\} \cup \{2,6\}$

$= \{1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$..........(i)

$A \cup (B \cup C) = \{1,2,3,4\} \cup (\{7,8,9,10\} \cup \{2,6\})$

$= \{1,2,3,4\} \cup \{2,6,7,8,9,10\}$

$= \{1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$..........(ii)

نتائج (i) اور (ii) سے $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Properties of Intersection of Sets سیٹوں پر تقاطع کے خواص

خاصیت مبادلہ Commutative Property

کسی دو سیٹوں A اور B کے لیے

$$A \cap B = B \cap A$$

ثبوت: فرض کیا کہ $A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$

$= \{x : x \in B \text{ and } x \in A\}$

$= \{x : x \in (B \cap A)\}$

$= B \cap A$

پس $A \cap B = B \cap A$

خاصیت تلازم Associative Property

کوئی سے تین سیٹوں A,B,C کے لیے

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

فرض کیا کہ $(A \cap B) \cap C = \{x : x \in (A \cap B) \text{ and } x \in C\}$

$= \{x : (x \in A \text{ and } x \in B) \text{ and } x \in C\}$

$= \{x : x \in A \text{ and } x \in B \text{ and } x \in C\}$

$= \{x : x \in A \text{ and } (x \in B \text{ and } x \in C)\}$

$= \{x : x \in A \text{ and } x \in (B \cap C)\}$

$= \{x : x \in A \cap (B \cap C)\}$

$= A \cap (B \cap C)$

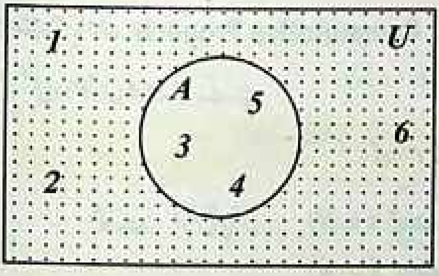
پس $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

8.1.3 وین اشکال Venn Diagram

سیٹوں کے درمیان تعلق کو مناظری لحاظ سے ظاہر کرنے کے لیے، ہم سیٹوں کو اشکال کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔ جو کہ وین اشکال کہلاتی ہیں۔ وین اشکال کو سب سے پہلے انگریز ماہر منطق اور ریاضی دان جان وین John Venn (1834-1883) نے استعمال کیا۔

وین اشکال میں عموماً یونیورسل سیٹ کو ایک مستطیلی علاقہ اور اس کے متعلقہ تحتی سیٹوں کو اس کے اندر بند علاقوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثلاً اگر $U = \{1,2,3,4,5,6,\}$ اور $A = \{3,4,5\}$



دی ہوئی شکل میں مستطیلی علاقہ یونیورسل سیٹ U کو ظاہر کرتا ہے۔ جبکہ اس کے اندر دائروی بند علاقہ سیٹ A کو ظاہر کرتا ہے۔

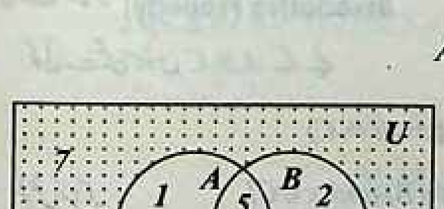
A سے باہر U کا نقاط دار علاقہ A کے کمپلیمنٹ یعنی A^c کو ظاہر کرتا ہے پس $A^c = \{1,2,6\}$

سیٹوں کا یونین اور تقاطع Union and Intersection of Sets

فرض کیا $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

اور $A = \{1, 3, 4, 5\}$ اور $B = \{2, 4, 5, 6\}$

اس کے کوئی دو تحتی سیٹ ہیں تب۔



شکل میں مستطیلی علاقہ U کائناتی سیٹ کو ظاہر کرتا ہے چونکہ A اور B دو متقاطع سیٹ ہیں۔ لہٰذا دو متقاطع دائرے A اور B کو ظاہر کرتے ہیں۔

(1) A اور B سے گھرا ہوا علاقہ $A \cup B$ ظاہر کرتا ہے۔

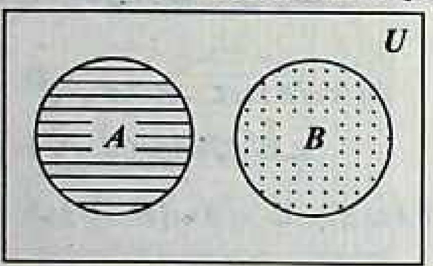
لہٰذا $A \cup B = \{1, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) دونوں سیٹوں A اور B کا مشترکہ علاقہ $A \cap B$ کو ظاہر کرتا ہے۔

لہٰذا $A \cap B = \{1, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 5, 6\} = \{4, 5\}$

8.1.4 سیٹوں کی یونین اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ وین اشکال میں

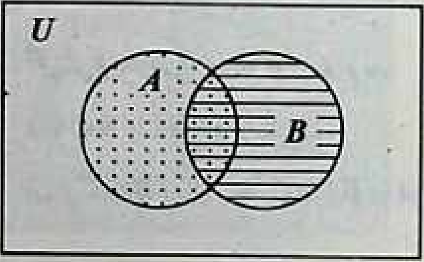
سیٹوں کا یونین جب دو سیٹ غیر متراکب ہوں When two Sets are Disjoint



شکل میں لکیر دار اور نقاط دار حصہ $A \cup B$ کو ظاہر کرتا ہے اور یہی نقاط دار اور لکیر دار حصہ $B \cup A$ کو بھی ظاہر کرتا ہے۔ جس کا مطلب ہوا کہ $A \cup B$ اور $B \cup A$ کو ایک ہی طرح کا حصہ ظاہر کرتا ہے پس

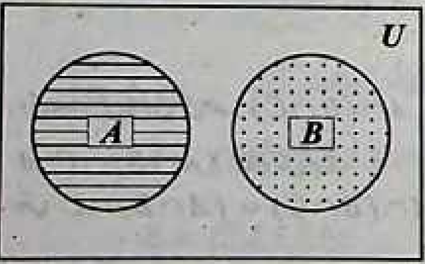
$$A \cup B = B \cup A$$

سیٹوں کا یونین جب سیٹ متراکب ہوں When two Sets are Overlapping



دی گئی شکل میں نقاط دار، نقاط دار اور لکیر دار حصہ $A \cup B$ کو ظاہر کرتا ہے اور اسی طرح لکیر دار، لکیر دار اور نقاط دار حصہ $B \cup A$ کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا $A \cup B = B \cup A$

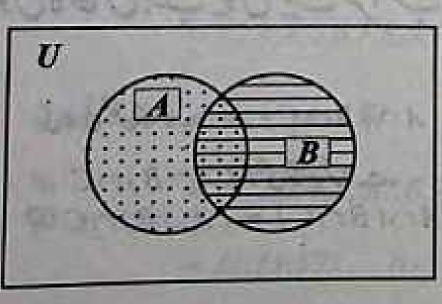
سیٹوں کا تقاطع جب دونوں سیٹ غیر متراکب ہوں When two Sets are Disjoint



شکل میں لکیر دار حصہ سیٹ A کو جبکہ نقاط دار حصہ سیٹ B کو ظاہر کرتا ہے۔ یعنی کہ U کا کوئی بھی حصہ $A \cap B$ اور $B \cap A$ کو ظاہر نہیں کرتا۔

پس $A \cap B = B \cap A$

سیٹوں کا تقاطع جب دونوں سیٹ متراکب ہوں When two Sets are Overlapping

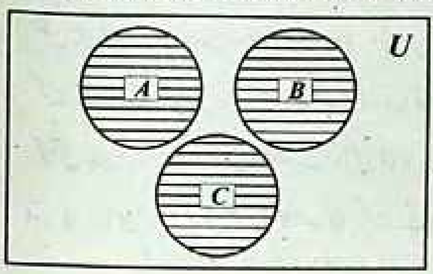


شکل میں نقاط دار، نقاط دار اور لکیر دار حصہ A سیٹ کو ظاہر کرتا ہے۔ جبکہ لکیر دار اور نقاط دار، لکیر دار حصہ سیٹ B کو ظاہر کرتا ہے۔ لکیر دار اور نقاط دار حصہ دونوں سیٹوں کا مشترکہ علاقہ ہے جو کہ $A \cap B$ اور $B \cap A$ کو ظاہر کرتا ہے۔

پس $A \cap B = B \cap A$

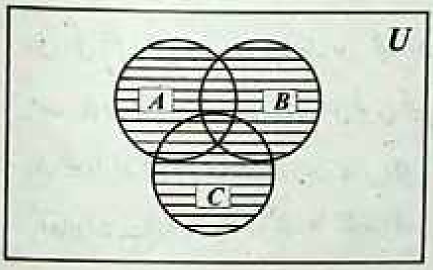
سیٹوں کی یونین اور تقاطع کی خاصیت تلازم وین اشکال میں

When three Sets are Disjoint سیٹوں کا یونین جب تینوں سیٹ غیر متراکب ہوں



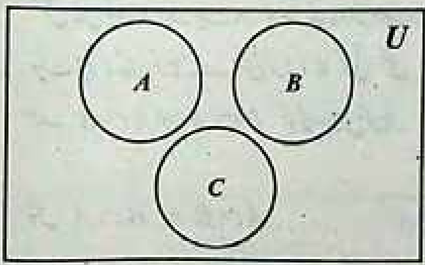
شکل میں لکیر دار حصہ $(A\cup B)\cup C$ اور
$A\cup(B\cup C)$ کو ظاہر کرتا ہے۔
پس $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

When three Sets are Overlapping سیٹوں کا یونین جب تینوں سیٹ متراکب ہوں



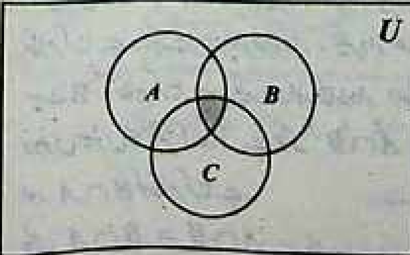
شکل میں لکیر دار حصہ $(A\cup B)\cup C$ اور
$A\cup(B\cup C)$ کو ظاہر کرتا ہے۔
پس $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

When three Sets are Disjoint سیٹوں کا تقاطع جب تینوں سیٹ غیر متراکب ہوں



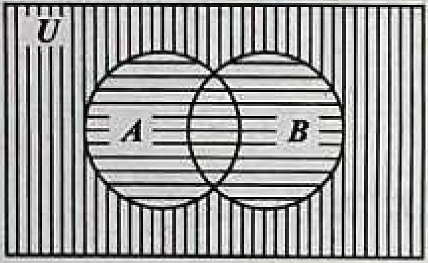
دی ہوئی شکل کا کوئی بھی حصہ $A\cap(B\cap C)$
اور $(A\cap B)\cap C$ ظاہر نہیں کرتا۔
پس $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

When three Sets are overlapping سیٹوں کا تقاطع جب تینوں سیٹ متراکب ہوں



دی ہوئی شکل کا سایہ دار حصہ $A\cap(B\cap C)$
اور $(A\cap B)\cap C$ کو بھی ظاہر کرتا ہے۔
لہٰذا $A\cap(B\cap C) = (A\cup B)\cap C$

ڈی مارگن کے قوانین De Morgan's Laws

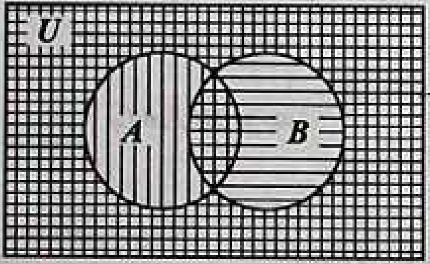


یونیورسل سیٹ U کے دو تحتی سیٹوں A اور B کے لئے

$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ (i)

$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$ (ii)

شکل میں ≡ لائنوں سے ظاہر کیا گیا حصہ $A\cup B$ کو جبکہ |||| حصہ $(A\cup B)^c$ کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل میں ▦ چیک دار حصہ $A^c \cap B^c$ کو ظاہر کرتا ہے۔ لہٰذا دونوں اشکال میں |||| اور ▦ ایک ہی جگہ ہیں۔

پس $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$

اس کا دوسرا قانون طلبہ کے لیے بطور مشق چھوڑ دیا گیا ہے۔

مثال:- اگر، $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ $A = \{2,3,4,6,7,8,9,10\}$ اور $B = \{2,3,5,7,9\}$ ہو تو ڈی مارگن کے قوانین ثابت کیجئے۔

حل:- چونکہ $A = \{2,3,4,6,7,8,9,10\}$

$B = \{2,3,5,7,9\}$

(a) $A\cup B = \{2,3,4,6,7,8,9,10\}\cup\{2,3,5,7,9\}$

$= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$(A\cup B)^c = U - (A\cup B)$

$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}-\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$= \{1,11,12\}$......(i)

$$A^c = U - A$$

$$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} - \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$= \{1,11,12\}$$

$$B^c = U - B$$

$$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} - \{2,3,5,7,9\}$$

$$= \{1,4,6,8,10,11,12\}$$

$$A^c \cap B^c = \{1,11,12\} \cap \{1,4,6,8,10,11,12\}$$

$$= \{1,11,12\} ......(ii)$$

(i) اور (ii) کی مدد سے

$$(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$$

(b) $$A \cap B = \{2,3,4,6,7,8,9,10\} \cap \{2,3,5,7,9\}$$

$$= \{2,3,7,9\}$$

$$(A \cap B)^c = U - (A \cap B)$$

$$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} - \{2,3,7,9\}$$

$$= \{1,4,5,6,8,10,11,12\} ......(i)$$

$$A^c = U - A$$

$$= \{1,5,11,12\}$$

$$B^c = U - B$$

$$= \{1,4,6,8,10,11,12\}$$

$$A^c \cup B^c = \{1,4,6,8,10,11,12\} ......(ii)$$

(i) اور (ii) کی مدد سے

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

مشق 8.1

-1 اگر $A = \{1,4,7,8\}$، $B = \{4,6,8,9\}$ اور $C = \{3,4,5,7\}$ ہو تو درج ذیل معلوم کیجیے۔

(i) $A \cup B$ (ii) $B \cup C$

(iii) $A \cap C$ (iv) $A \cap (B \cap C)$

(v) $(A \cup B) \cup C$ (vi) $(A \cap B) \cap C$

-2 اگر $A = \{1,7,11,15,17,21\}$، $B = \{11,17,19,23\}$ اور $C = \{2,3,5\}$ ہو تو

ثابت کیجیے کہ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

-3 اگر $A = \{2,4,6\}$، $B = \{3,6,9,12\}$ اور $C = \{4,6,8,10\}$ ہو تو

ثابت کیجیے کہ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

-4 اگر $A = \{2,3,5,7,9\}$، $B = \{1,3,5,7\}$ اور $C = \{2,3,4,5,6\}$ ہو تو

ثابت کیجیے کہ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

-5 اگر $U = \{7,8,9,10,11,12,13,14\}$

$A = \{7,10,13,14\}$

اور $B = \{7,8,11,12\}$ ہو تو

ثابت کیجیے کہ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

-6 ڈی مارگن کے قوانین ثابت کیجیے اگر $U = \{4,6,8,9,10\}$، $A = \{4,6\}$ اور $B = \{6,8,9\}$

-7 اگر $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$، $A = \{2,3,6,9\}$

اور $B = \{1,3,6,7,8\}$ ہو تو

ثابت کیجیے کہ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

-8 خالی جگہ پُر کیجیے۔

(i) $A \cup A =$ ________ (ii) $A \cap A =$ ________

(iii) $A \cup \Phi =$ ________ (iv) $A \cap \Phi =$ ________

(v) $\Phi \cup \Phi =$ ________ (vi) $(A \cap B)^c =$ ________

(vii) $(A \cup B)^c =$ ________ (viii) $(A^c)^c =$ ________

(ix) $\Phi \cap \Phi^c =$ ________ (x) $A \cap A^c =$ ________

8.2 ثنائی ربط BINARY RELATION

دو غیر خالی سیٹ $A = \{1,2\}$ اور $B = \{3,4\}$ لیجیے پھر $A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$ جبکہ $A \times B$، A سے B کا کارتیسی حاصل ضرب (Cartesian Product) کہلاتا ہے۔ $A \times B$ کے ارکین $(1,3),(1,4),(2,3)$ اور $(2,4)$ مترتب جوڑے کہلاتے ہیں۔

اسی طرح $B \times A = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$، B سے A کا کارتیسی حاصل ضرب کہلاتا ہے۔ بالعموم $A \times B \neq B \times A$ درج ذیل $A \times B$ کے تمام تحتی سیٹ (Sub sets) A سے B ثنائی روابط (A to B, Binary Relations) کہلاتے ہیں۔

$R_1 = \{\ \}$, $R_2 = \{(1,3)\}$, $R_3 = \{(1,4)\}$

$R_4 = \{(2,3)\}$, $R_5 = \{(2,4)\}$, $R_6 = \{(1,3),(1,4)\}$

$R_7 = \{(1,3),(2,3)\}$, $R_8 = \{(1,3),(2,4)\}$, $R_9 = \{(1,4),(2,3)\}$

$R_{10} = \{(1,4),(2,4)\}$, $R_{11} = \{(2,3),(2,4)\}$, $R_{12} = \{(1,3),(1,4),(2,3)\}$

$R_{13} = \{(1,3),(2,3),(2,4)\}$, $R_{14} = \{(1,4),(2,3),(2,4)\}$,

$R_{15} = \{(1,3),(1,4),(2,4)\}$, $R_{16} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$.

کسی بھی ثنائی ربط کے مترتب جوڑوں کے پہلے مقام کے ارکین پر مشتمل سیٹ اس ثنائی ربط کا ڈومین (Dom) کہلاتا ہے۔ جبکہ مترتب جوڑوں کے دوسرے مقام پر موجود ارکین کا سیٹ اس ثنائی ربط کی رینج (Range) کہلاتا ہے۔ درج ذیل مثال پر غور کیجیے۔

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$,

$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$

ہم $A \times B$ کا ایک تحتی سیٹ لیتے ہیں۔

$R_1 = \{(1,3),(2,4),(3,4)\}$

R_1 ایک ربط یا ثنائی ربط ہے۔

ڈومین $R_1 = \{1,2,3\}$

رینج $R_1 = \{3,4\}$

اسی طرح اگر $A = \{4,5,6\}$ ہو تو

$A \times A = \{(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

تو ہم $A \times A$ کا تحتی سیٹ 'R' اس طرح لیتے ہیں کہ $R = \{(4,4),(5,5),(6,6)\}$

ڈومین $R = \{4,5,6\}$

رینج $R = \{4,5,6\}$

مثال:- اگر $C = \{1,2\}$ ہو تو $C \times C$ میں ثنائی روابط کی تعداد لکھیے۔

حل:-

چونکہ $C = \{1,2\}$

$C \times C = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

تو $C \times C$ کے ثنائی روابط کی تعداد 2^4 یا 16 ہو گی۔

8.3 تفاعل FUNCTION

دو سیٹوں A اور B میں اسی طرح کا ثنائی ربط 'f' ایسا ہو کہ

(i) A = 'f' ڈومین

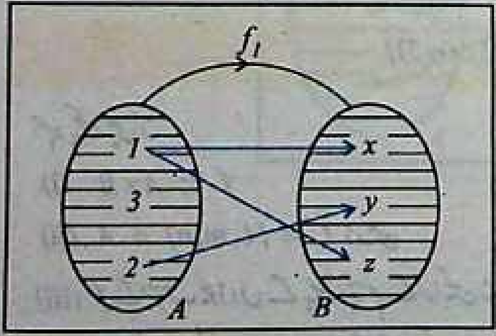
(ii) 'f' کے ہر مترتب جوڑوں کے پہلے مقام کے ارا کین میں تکرار (Repetition) نہ ہو۔

تب 'f' کو A سے B کی جانب فنکشن کہتے ہیں اور اسے یوں ظاہر کرتے ہیں۔ $f : A \rightarrow B$

مثال:-

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{x,y,z\}$

$A \times B = \{(1,x), (2,x), (3,x), (1,y), (2,y), (3,y), (1,z), (2,z), (3,z)\}$



درج ذیل دو ثنائی روابط لیجیے۔

$f_1 = \{(1,x),(2,y),(1,z)\}$

$f_2 = \{(1,y),(2,x),(3,y)\}$

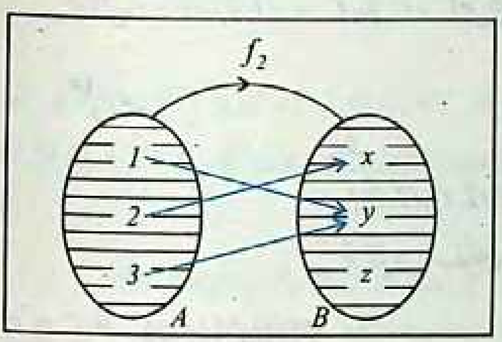
ثنائی ربط f_1 :

(i) $f_1 \subset A \times B.$

(ii) Dom $f_1 \neq A$

(iii) 'f_1' کے مترتب جوڑوں $(1,x),(1,z)$ کے پہلے ارکان میں تکرار پائی جاتی ہے۔

لہٰذا f_1 ایک ثنائی ربط ہے مگر فنکشن نہیں ہے۔ $f_1 = \{x, y, z\}$ رینج



ثنائی ربط f_2 :

(i) $f_2 \subset A \times B$

(ii) ڈومین $f_2 = \{1, 2, 3\} = A$

(iii) f_2 کے مرتب جوڑوں کے پہلے مقام کے اراکین میں تکرار نہیں پائی جاتی۔

رینج $f_2 = \{x, y\} \subset B$ لیکن رینج $f_2 \neq B$

لہٰذا f_2 A سے B کی جانب فنکشن ہے۔

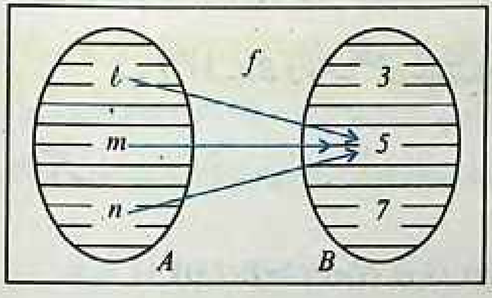
اِن ٹو فنکشن Into Function

اگر f ,A سے B کی جانب فنکشن ہو۔

یعنی رینج $f \subset B$ مگر رینج $f \neq B$

تو f کو A اِن ٹو B فنکشن کہتے ہیں۔

مثال:-



$A = \{\ell, m, n\}, \quad B = \{3, 5, 7\}$

$A \times B = \{(\ell, 3), (\ell, 5), (\ell, 7), (m, 3), (m, 5), (m, 7), (n, 3), (n, 5), (n, 7)\}$

ایک ثنائی ربط 'f' لیا۔

$$f = \{(\ell, 5), (m, 5), (n, 5)\}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ

(i) $f \subset A \times B$

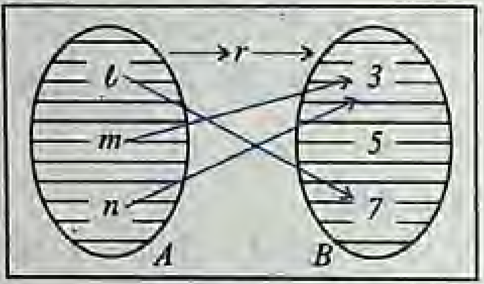
(ii) ڈومین $f = \{\ell, m, n\} = A$

(iii) f کے مرتب جوڑوں کے پہلے مقام کے اراکین میں تکرار نہیں پائی جاتی۔ یا یوں کہ سیٹ A کا ہر ایک رکن ایک اور صرف ایک مرتبہ سیٹ B کے ایک رکن سے جوڑا گیا ہے۔

(iv) رینج $f = \{5\} \subset B$ لیکن رینج $f \neq B$

لہٰذا "f" "A اِن ٹو B" فنکشن ہے۔

ایک اور ثنائی ربط 'r' پر غور کیجئے۔ جو کہ یوں ہے۔



$r = \{(\ell,7), (m,3), (n,3)\}.$

(i) $r \subset A \times B$

(ii) ڈومین $r = \{\ell, m, n\} = A$

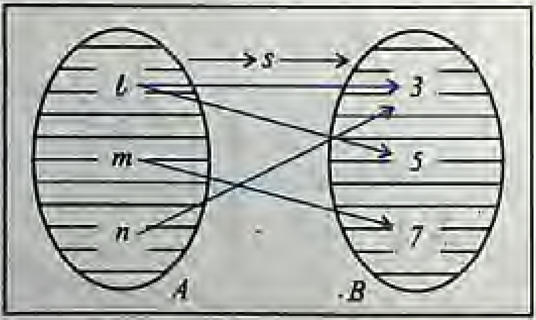
(iii) مترتب جوڑوں میں سیٹ A کے ہر ایک رکن کو سیٹ B کے ارکان سے جوڑا گیا ہے۔
یعنی کے r کے کسی دو مترتب جوڑوں کے پہلے مقام کے اراکین میں تکرار نہیں پائی جاتی۔

(iv) رینج $r = \{3,7\} \neq B$

لہٰذا 'r' A ان ٹو B فنکشن ہے۔

آیئے سیٹ 'S' A سے B کی جانب ایک اور ثنائی ربط لیتے ہیں۔

$S = \{(\ell,3), (\ell,5), (m,7), (n,3)\}$



(i) $S \subset A \times B$

(ii) $\text{Dom}\, S = \{\ell, m, n\} = A$

(iii) مترتب جوڑوں $(\ell,3)$, $(\ell,5)$ میں پہلے رکن 'ℓ' کی تکرار ہے یعنی $\ell \in A$ کو $3,5 \in B$ کے دو اراکین سے جوڑا گیا ہے۔

لہٰذا 'S' ایک فنکشن نہیں ہے۔

ان جیکٹو فنکشن Injective Function

اگر 'f' A اِن ٹو B اس طرح سے فنکشن ہو کہ 'f' کے کسی دو مترتب جوڑوں کے دوسرے مقام کے ارکین ایک جیسے نہ ہوں۔ تو پھر f کو "اِن جیکٹو" فنکشن کہتے ہیں۔

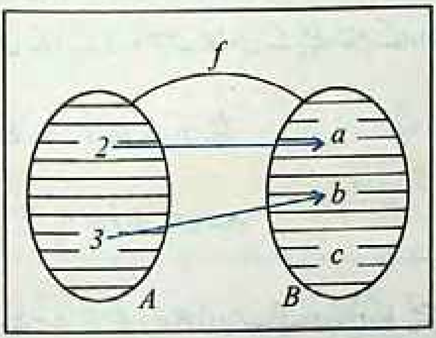
مثلاً $A = \{2,3\}, \quad B = \{a,b,c\},$

$f = \{(2,a),(3,b)\}$

(i) ڈومین $f = \{2,3\} = A$

(ii) f کے مترتب جوڑوں کے پہلے مقام کے ارکین میں تکرار نہیں پائی جاتی۔

(iii) رینج $f \neq B$



لہٰذا 'f' A اِن ٹو B فنکشن ہے۔

(iv) f کے مترتب جوڑوں کے دوسرے مقام کے ارکین ایک جیسے نہیں (تکرار نہیں پائی جاتی) پس 'f' ون۔ون ہے۔ لہٰذا 'f' اِن جیکٹو فنکشن ہے۔

آن ٹو فنکشن Surjective Function

اگر 'f' سیٹ A ٹو B ایسا فنکشن ہو کہ 'f' کی رینج سیٹ B کے برابر ہو یعنی رینج $f = B$ تب 'f' A آن ٹو B فنکشن کہلاتا ہے۔

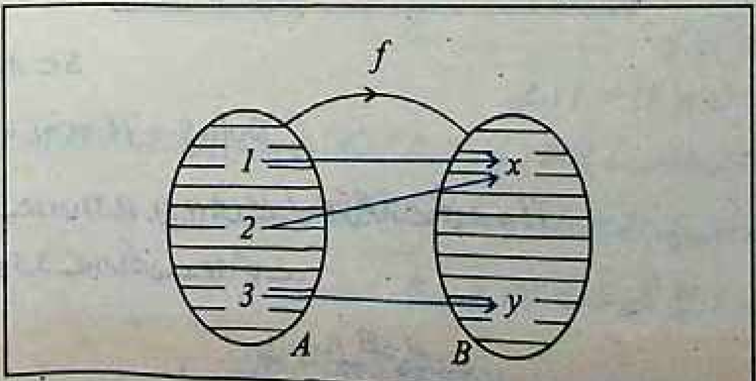
مثال کے طور پر

$A = \{1,2,3\}, \; B = \{x,y\}$

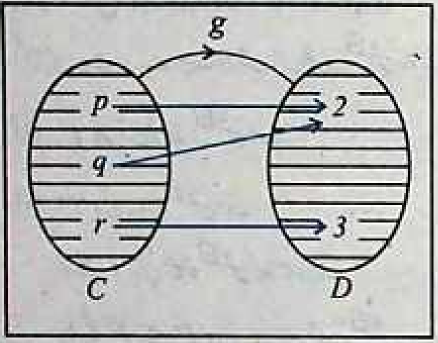
$f = \{(1,x),(2,x),(3,y)\}$

رینج $f = \{x,y\} = B$

لہٰذا 'f' A آن ٹو B فنکشن ہے۔



مثال :- فرض کیا



$C = \{p, q, r\}$

$D = \{2, 3\}$

$C \times D = \{(p,2), (q,2), (r,2), (p,3), (q,3), (r,3)\}$

$g = \{(p,2), (q,2), (r,3)\}$

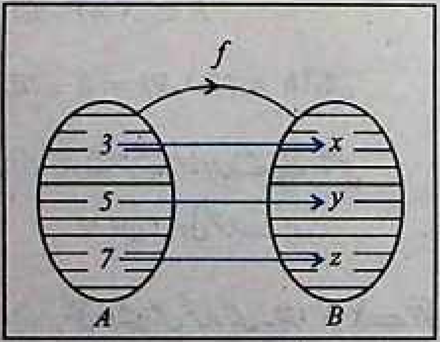
(i) ڈومین $g = \{p, q, r\}$

(ii) g کے کسی بھی دو مترتب جوڑوں کے پہلے ارکان میں تکرار نہیں پائی جاتی ہے۔
لہٰذا g ,C سے D کی جانب فنکشن ہے۔

(iii) رینج $(g) = D$

پس 'g' ,C آن ٹو D فنکشن ہے۔

مثال :- فرض کیا



$A = \{3, 5, 7\}$

$B = \{x, y, z\}$

$A \times B = \{(3,x), (3,y), (3,z), (5,x), (5,y), (5,z), (7,x), (7,y), (7,z)\}$

$f = \{(3,x), (5,y), (7,z)\}$

(i) ڈومین $f = \{3, 5, 7\} = A$

(ii) 'f' کے کسی بھی دو مترتب جوڑوں کے پہلے مقام کے ارکان میں تکرار نہیں پائی جاتی ہے۔
لہٰذا 'f' A سے B فنکشن ہے۔

(iii) رینج $f = B$

پس 'f' A آن ٹو B فنکشن ہے۔

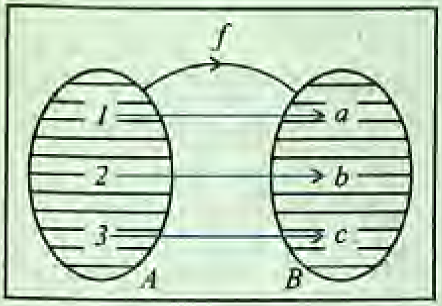
بائی جیکٹو فنکشن Bijective Function

اگر 'f' سیٹ A سے سیٹ B میں اس طرح فنکشن ہو کہ

(i) 'f' A آن ٹو B فنکشن ہو۔

(ii) 'f' ون۔ون فنکشن ہو۔

تو پھر 'f' بائی جیکٹو فنکشن کہلاتا ہے۔



دی گئی شکل میں 'f' ون۔ون اور آن ٹو فنکشن ہے۔

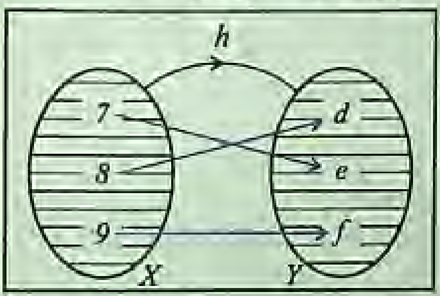
$f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

مثال:- فرض کیا

$X = \{7, 8, 9\}, \ Y = \{d, e, f\}$

تب، $X \times Y = \{(7,d),(8,d),(9,d),(7,e),(8,e),(9,e),(7,f),(8,f),(9,f)\}$

اور $h = \{(7,e),(8,d),(9,f)\}$



(i) $h \subset X \times Y$

(ii) ڈومین $h = \{7,8,9\} = X$

(iii) h کے مرتب جوڑوں کے پہلے مقام کے ارکان میں کوئی تکرار نہ ہے۔

یعنی ڈومین میں تکرار نہیں۔ لہٰذا 'h' X سے Y کی جانب فنکشن ہے۔

(iv) رینج $h = Y = \{d,e,f\}$

پس h، X آن ٹو Y فنکشن ہے۔

(v) مرتب جوڑوں کے دوسرے مقام کے ارکان جو کہ Y سے ہیں میں تکرار نہیں ہے۔

لہٰذا 'h' (ون۔ون) فنکشن ہے۔ اس لیے 'h' بائی جیکٹو فنکشن ہے۔

مشق 8.2

-1 اگر $A = \{3,5,6\}$, $B = \{1,3\}$ ہو تو $A \times B$ اور $B \times A$ معلوم کیجیے۔
اور خود سے دو دو ثنائی روابط لکھ کر ان کی ڈومین اور رینج معلوم کیجیے۔

-2 اگر $A = \{-2,1,4\}$ تو A میں دو ثنائی روابط لکھ کر اُن کی ڈومین اور رینج لکھیے۔

-3 مندرجہ ذیل میں ہر ایک کے ممکن ثنائی روابط کی تعداد لکھیے۔

(i) $C \times C$ میں جبکہ C کے ارکان کی تعداد 3 ہے۔

(ii) $A \times B$ میں جبکہ A میں 3 ارکان اور B میں 4 ارکان ہوں۔

-4 اگر $L = \{1,2,3\}$ اور $M = \{2,3,4\}$ ہو تو 'R' ثنائی ربط ایسا لکھیے کہ:
$R = \{(x,y) \mid x \in L, y \in M \wedge y \leq x\}$ اور R کی ڈومین اور رینج بھی لکھیے۔

-5 اگر $X = \{0,3,5\}$ اور $Y = \{2,4,8\}$ ہو تو $X \times Y$ میں چار ثنائی روابط لکھیے۔

-6 اگر $A = \{a,b,c\}$ اور $B = \{2,4,6\}$ اور $f = \{(a,4),(b,4),(c,4)\}$
ایک $A \times B$ سے ثنائی ربط ہو تو ثابت کیجیے کہ 'f' A ان ٹو B فنکشن ہے۔

-7 اگر $A = \{\ell, m, n\}$ اور $B = \{1,2,3\}$ اور $g = \{(\ell,3)(m,1)(n,1)\}$
ایک $A \times B$ سے ثنائی ربط ہو تو ثابت کیجیے کہ 'g' A ان ٹو B فنکشن ہے۔

-8 اگر $A = \{1,3,5\}$ اور $B = \{x,y,z\}$ اور $g = \{(1,x),(3,y),(5,z)\}$
ایک $A \times B$ سے ثنائی ربط ہو تو ثابت کیجیے g, A آن ٹو B فنکشن ہے۔

جائزہ مشق 8

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو $A \cup B = ?$

(a) Φ (b) $B \cup A$ (c) $A \cap B$ (d) $B \cap A$

(ii) اگر A اور B دو متراکب (Overlapping) سیٹ ہوں تو $A \cap B = ?$

(a) Φ (b) $B \cap A$ (c) $A \cap B$ (d) $B \cup A$

(iii) دو سیٹوں A اور B کے لیے $A \cup B = B \cup A$ کہلاتا ہے۔

(a) خاصیت مبادلہ (b) خاصیت تلازم (c) ڈی مارگن کا قانون (d) دو سیٹوں کا کمپلیمنٹ

(iv) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ کہلاتی ہے۔

(a) خاصیت مبادلہ (b) خاصیت تلازم (c) ڈی مارگن کا قانون (d) سیٹوں کا تقاطع

(v) اگر $U = \{1,2,3,4\}$, $A = \{4\}$ تو $A^c = ?$

(a) $\{1,2,3\}$ (b) Φ (c) $\{1\}$ (d) $\{1,2,3,4\}$

(vi) اگر $U = \{1,2,3\}$, $A = \{1\}$ ہو تو $U - A = ?$

(a) $\{2,3\}$ (b) $\{1,2\}$ (c) $\{1,3\}$ (d) Φ

(vii) $(A \cup B)^c = ?$

(a) $A^c \cup B^c$ (b) $A^c \cap B^c$ (c) $(A \cap B)^c$ (d) Φ

(viii) $(A \cap B)^c = ?$

(a) $A^c \cap B^c$ (b) $A^c \cup B^c$ (c) $A \cap B$ (d) $A \cup B$

(ix) اگر $R = \{(4,5),(5,4),(5,6),(6,4)\}$ ہو تو ڈومین $(R) = ?$

(a) $\{4,6\}$ (b) $\{4,5\}$ (c) $\{4,5,6\}$ (d) $\{5,6\}$

(x) اگر $R = \{(4,5),(5,4),(5,6),(6,4)\}$ ہو تو رینج $(R) = ?$

(a) $\{4\}$ (b) $\{5\}$ (c) $\{6\}$ (d) $\{4,5,6\}$

2- خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) $(A \cup B)' =$ ____________

(ii) $(A \cap B)' =$ ____________

(iii) $A \cup (B \cup C) =$ ____________

(iv) $A \cap (B \cap C) =$ ____________

(v) اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو $A \cup B = B \cup A$ ____________ کہلاتی ہے۔

(vi) اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو $A \cap B = B \cap A$ ____________ کہلاتی ہے۔

(vii) دو سیٹوں کے کارتیسی حاصل ضرب کا تحتی سیٹ ____________ کہلاتا ہے۔

(viii) اگر $R_1 = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ ہو تو R_1 کی ڈومین ____________ ہے۔

(ix) اگر $R_1 = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ ہو تو R_1 کی رینج ____________ ہے۔

(x) اگر $f : A \rightarrow B$ ہو تو سیٹ A کے ہر رکن کی امیج ____________ میں ہوگی۔

3- اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$، $B=\{2,3,4,6\}$ اور $C=\{2,3,4,7,8,9\}$ ہو تو ثابت کیجئے کہ

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4- اگر $A=\{2,3,4\}$، $B=\{3,6,9,12\}$ اور $C=\{4,6,8,10\}$ ہو تو ثابت کیجئے کہ

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

5- اگر $A=\{2,3,4\}$ اور $B=\{1,3\}$ ہو تو $A \times B$ اور $B \times A$ لکھیے۔ نیز ان میں دو، دو ثنائی روابط بھی بنائیے۔

6- درج ذیل میں ممکن ثنائی روابط کی تعداد لکھیے۔

(i) $C \times C$ میں اگر C میں ارکان کی تعداد 4 ہو۔

(ii) $A \times B$ میں اگر A میں 2 اور B میں 3 ارکان ہوں۔

7- اگر $R = \{(a,b) : a,b \in W, 3a + 2b = 16\}$ ہو تو R کی ڈومین اور رینج لکھیے۔

خلاصہ

- واضح اور جدا جدا اشیاء کے اجتماع یا اکٹھ کو سیٹ کہتے ہیں۔

قدرتی اعداد کا سیٹ $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$

مکمل اعداد کا سیٹ $W = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

صحیح اعداد کا سیٹ $Z = \{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

ناطق اعداد کا سیٹ $Q = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in Z, q \neq 0\}$

غیر ناطق اعداد کا سیٹ Q'

حقیقی اعداد کا سیٹ $R = Q \cup Q'$

- اگر زیرِ بحث سیٹ اس طرح سے ہوں کہ ان میں ایک ایسا سیٹ ہو جو ان تمام سیٹوں کا فوقی (سُپر) سیٹ ہو تو ایسا سیٹ یونیورسل سیٹ کہلاتا ہے جسے علامت 'U' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

- اگر سیٹ A کسی یونیورسل سیٹ U کا تحتی سیٹ ہو تو A کمپلیمنٹ جسے A' ، A^c سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ U کے ان تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے جو A میں نہ ہوں اسے ہم A کا کمپلیمنٹ کہتے ہیں۔

- اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہوں تو کارتیسی ضرب $A \times B$ کا ہر تحتی سیٹ A سے B کی جانب ثنائی ربط کہلاتا ہے۔

- ایک ثنائی ربط 'f' دو غیر خالی سیٹوں A اور B کے درمیان اس طرح ہو کہ

(i) f ڈومین $= A$

(ii) ثنائی ربط 'f' کوئی سے بھی دو مترتب جوڑوں کے پہلے مقام کے ارکان میں تکرار نہ ہو تو 'f' کو A سے B کا فنکشن کہتے ہیں۔

- دو سیٹوں A اور B کے یونین سے مراد ان ارکان کا سیٹ ہے جو یا تو A میں یا B میں ہوں اسے $A \cup B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

- دو سیٹوں A اور B کا تقاطع جسے $A \cap B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، سے مراد ایسا سیٹ ہے جو A اور B دونوں کے مشترک ارکان پر مشتمل ہو۔

- اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو A سے B کے فرق سے مراد A کے ان ارکان کا سیٹ جو سیٹ B میں نہ ہوں اسے علامتی طور پر $(A-B)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

یونٹ

9

خطی گراف

LINEAR GRAPHS

- کارتیسی مستوی اور خطی گراف
- گراف مبادلہ

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- کہ حقیقی اعداد کے جوڑے کو مترتب جوڑے کے طور پر لے سکتے ہیں۔
- مترتب جوڑے کی پہچان کیا ہے مثلاً مترتب جوڑے $(2,3)$ کو کسی امتحانی مرکز میں کی سیٹنگ پلان میں سیٹ کا تعین دوسری قطار اور تیسرے کالم کی صورت میں کر سکیں۔
- کہ کسی مستطیلی یا کارتیسی مستوی پر ایک دوسرے پر متقاطع محددی خطوط جو نقطہ پر قطع کرتے ہوں کو ظاہر کرتے ہیں۔
- کہ مبداء (O) اور محددی محوروں کی پہچان بطور $X\text{-}axis$ محور اور $Y\text{-}axis$ محور کیا ہے۔
- کہ کسی مترتب جوڑے (a,b) کو محددی مستوی پر ظاہر کیسے کرتے ہیں۔
  - $'a'$ کو x-محدد یا $(Abscisa)$
  - $'b'$ کو y محدد یا $(Ordinate)$
- کہ دیے گئے نقاط کے سیٹ کو ملا کر جیومیٹری کی مختلف اشکال مثلاً خط۔ مثلث۔ یا مستطیل وغیرہ کیسے بنتے ہیں۔
- کہ دو متغیرات میں دی گئی مساواتوں کی ان متغیرات کی مساوات پر پورا اترنے والی جوڑا قیمتوں کا جدول بنانا۔
- کہ ریاضی کے کسی فقرہ کو ان جوڑوں کی مدد سے گراف میں ظاہر کیسے کرتے ہیں۔
- کہ مناسب سکیل کا تعین کر کے گراف کیسے بناتے ہیں۔
- گراف بنانا درج ذیل مساواتوں کی صورت میں۔
  - $y = mx + c$
  - $y = mx$
  - $x = a$
  - $y = c$
- کہ کسی جدول میں دی گئی عددی قیمتوں سے گراف کیسے بنتا ہے۔
- کہ گراف کی مدد سے کسی فنکشن (تفاعل) کی ڈومن اور رینج کا تعین کیسے ہوتا ہے۔
- کہ راست تناسب میں دی گئی دو مقداروں کے باہمی تعلق کو گراف کی مدد سے واضح کیسے کیا جاتا ہے۔
- کہ گراف کی مدد سے ایک مقدار کا دوسری مقدار سے موازنہ کیسے بنتا ہے۔
- کہ گراف کی مدد سے مقداروں میں باہمی تبدیلی کا مطالعہ کیسے کیا جاتا ہے۔
  - میل اور کلو میٹر کا
  - ایکڑ اور ہیکٹر کا
  - سینٹی گریڈ سے فارن ہیٹ ڈگری کا
  - پاکستانی کرنسی سے کسی دوسرے ملک کی کرنسی میں تبادلہ

9.1 کارتیسی مستوی اور خطی گراف CARTESIAN PLANE AND LINEAR GRAPHS

9.1.1 دو حقیقی اعداد کا جوڑا بطور مترتب جوڑا
Pair of Real Numbers as an Ordered Pair

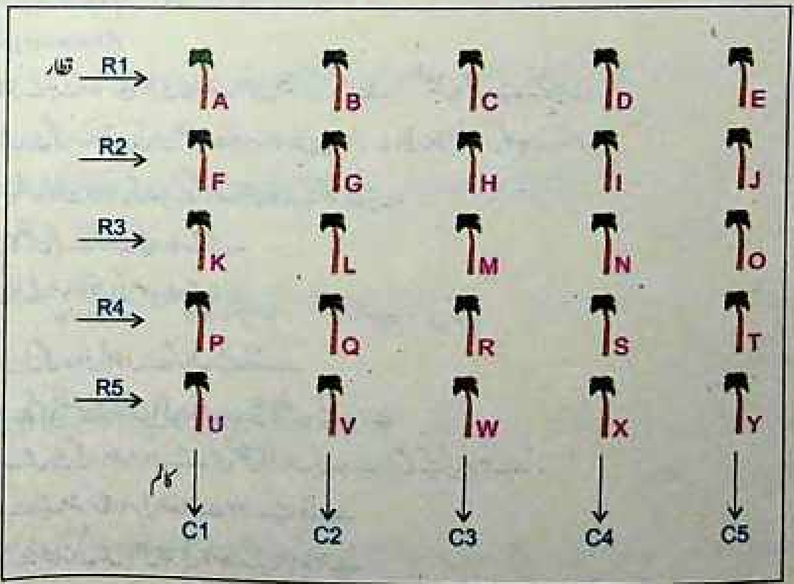
دو مساوی سیٹوں کی تعریف کی رو سے کسی بھی دو ارکان 'a' اور 'b' کے لیے ہم لکھ سکتے ہیں $\{a,b\} = \{b,a\}$

تاہم اگر ہم ارکان کی ترتیب جس میں یہ رکن لکھے گئے ہوں کو اپنے ذہن میں رکھیں تو دو ارکان کا جوڑا جو ایک مخصوص ترتیب میں ہو مترتب جوڑا کہلاتا ہے اور اسے (a,b) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ پس اگر 'a' اور 'b' دو مختلف رکن ہوں تو $(a,b) \neq (b,a)$

عموماً اگر $(a_1,b_1) = (a_2,b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ اور $b_1 = b_2$ ہم مستوی پر کسی نقطہ کو (x,y) سے ظاہر کرتے ہیں۔

9.1.2 مترتب جوڑے Ordered Pairs

کسی باغ کا مالی ایک مربع کھیت میں درختوں کو ترتیب دیتا ہے۔ درختوں کی نشاندہی اعداد سے کرتا ہے۔ کسی درخت کی نشاندہی کو زیادہ سہل بنانے کے لئے وہ اس درخت کو قطار نمبر اور کالم نمبر جس میں وہ موجود ہے سے نسبت دیتا ہے۔ درخت H، دوسری قطار اور تیسرے کالم میں موجود ہے جبکہ درخت R قطار نمبر 4 اور کالم نمبر 3 میں موجود ہے۔



مالی درخت کے نمبر کے سامنے اِن عددی جوڑوں کو اس طرح لکھ سکتا ہے۔

$A(1,1)$,	$B(1,2)$,	$C(1,3)$,	$D(1,4)$,	$E(1,5)$
$F(2,1)$,	$G(2,2)$,	$H(2,3)$,	$I(2,4)$,	$J(2,5)$
$K(3,1)$,	$L(3,2)$,	$M(3,3)$,	$N(3,4)$,	$O(3,5)$
$P(4,1)$,	$Q(4,2)$,	$R(4,3)$,	$S(4,4)$,	$T(4,5)$
$U(5,1)$,	$V(5,2)$,	$W(5,3)$,	$X(5,4)$,	$Y(5,5)$

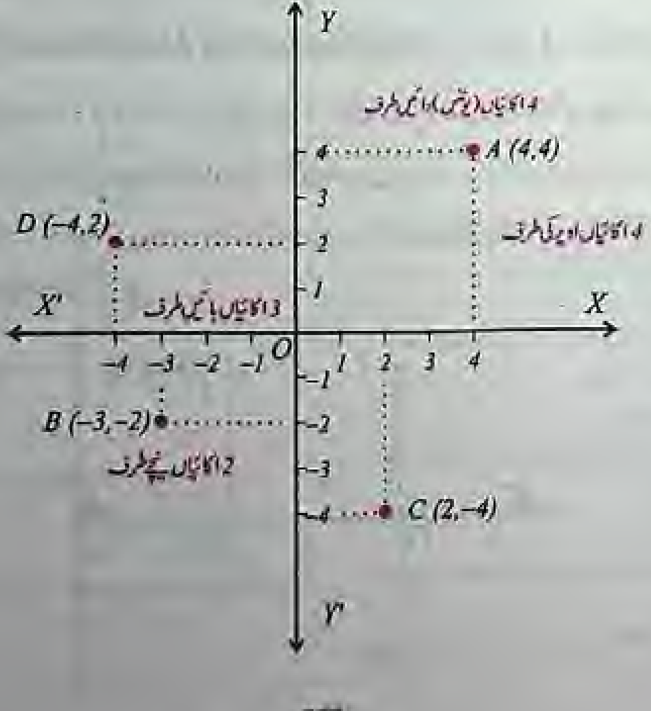
کیا ہم درخت نمبر F, G, H, K اور M کو ان عددی جوڑوں سے لکھ سکتے ہیں۔

ہاں یہ بالترتیب $F(2,1)$, $G(2,2)$, $H(2,3)$, $I(2,4)$, $K(3,1)$ اور $M(3,3)$ ہیں۔

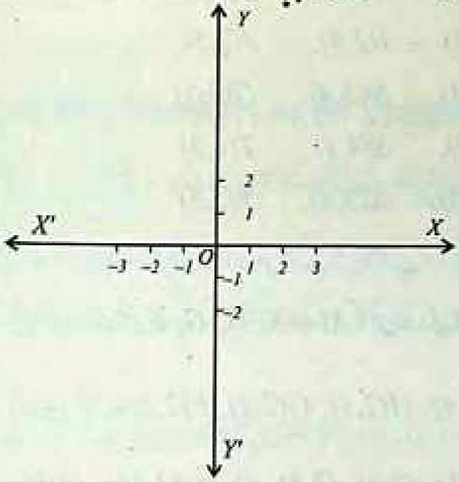
عددی جوڑے $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,1)$ $(3,3)$ وغیرہ وغیرہ مترتب جوڑوں کی مثالیں ہیں۔

9.1.3 مستطیلی یا کارتیسی مستوی Rectangular or Cartesian Plane

دی گئی تصویر میں ایک مستطیلی یا کارتیسی مستوی کو ظاہر کیا گیا ہے جو کہ نقطہ 'O' پر دو متقاطع عددی خطوط 'XOX' اور 'YOY' پر مشتمل ہے۔



9.1.4 مستطیلی مستوی میں مبداء (O) اور محددی محوروں کی پہچان



کسی بھی کارتیسی مستوی میں XOX' اور YOY' آپس میں نقطہ O پر عموداً متقاطع ہوتے ہیں، محددی محور کہلاتے ہیں۔ ہم O کو مبداء کہتے ہیں۔

افقی خط XOX' کو X۔محور اور عمودی خط YOY' کو Y۔محور کہتے ہیں۔

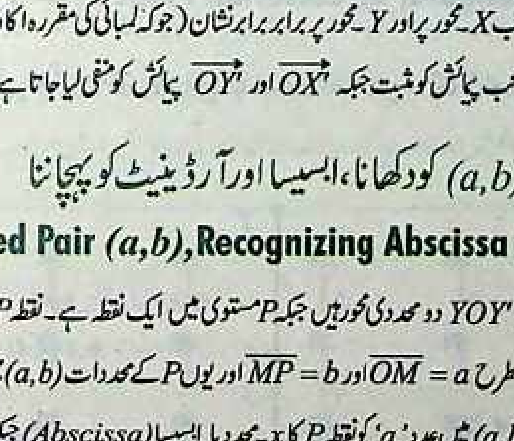
ہم لمبائی کی مناسب اکائی مقرر کر لیتے ہیں اور مبداء O کا تعین کر لیتے ہیں۔

اب ہم O کے دونوں جانب X۔محور پر اور Y۔محور پر برابر برابر نشان (جو کہ لمبائی کی مقررہ اکائی کے برابر ہوتے ہیں) لگاتے ہیں۔ $\overrightarrow{OX}$ اور $\overrightarrow{OY}$ کی جانب پیمائش کو مثبت جبکہ $\overrightarrow{OX'}$ اور $\overrightarrow{OY'}$ پیمائش کو منفی لیا جاتا ہے۔

9.1.5 مترتب جوڑا (a,b) کو دکھانا، ابسیسا اور آرڈینیٹ کو پہچاننا

Locating an Ordered Pair (a,b), Recognizing Abscissa and Ordinate

فرض کیا XOX' اور YOY' دو محددی محور ہیں جبکہ P مستوی میں ایک نقطہ ہے۔ نقطہ P سے Y محور کے متوازی XOX' پر عمود $\overline{MP}$ گرایا۔ اسطرح $\overline{OM} = a$ اور $\overline{MP} = b$ اور یوں P کے محددات (a,b) میں ہوئے۔ ہم اس نقطہ کو P(a,b) سے ظاہر کرتے ہیں۔ (a,b) میں عدد 'a' کو نقطہ P کا x۔محدد یا ابسیسا (Abscissa) جبکہ عدد 'b' کو نقطہ P کا y۔محدد یا آرڈینیٹ (Ordinate) کہتے ہیں۔



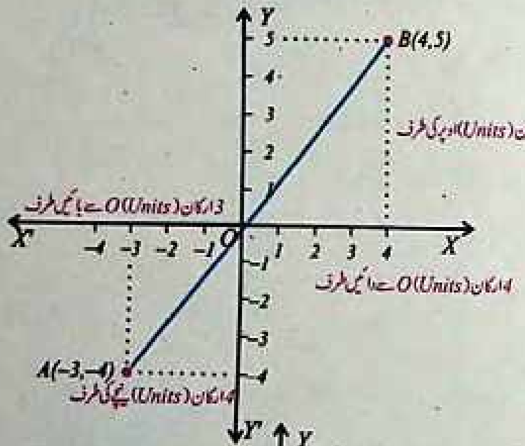
9.1.6 دیئے گئے نقاط کے سیٹ کو ملانے سے جیومیٹریکل اشکال بنانا
Geometrical Shapes by Joining a Set of Given Points

مثالیں:- دیے گئے نقاط کی مدد سے قطعہ خط، مثلث اور مستطیل بنانا

(i) $A(-3,-4)$, $B(4,5)$,

(ii) $A(2,3)$, $B(-3,4)$, $C(4,-5)$, (iii) $A(4,3)$, $B(-4,3)$, $C(-4,-3)$, $D(4,-3)$

حل:-



(i) مرتب جوڑے $A(-3,-4)$, $B(4,5)$ ہیں۔

نقطہ $A(-3,-4)$ کے لیے

ہم O سے X محور پر بائیں جانب 3 اکائیاں اور پھر وہاں سے Y۔محور کے متوازی X۔محور کے نیچے 4 اکائیاں چلتے ہیں۔

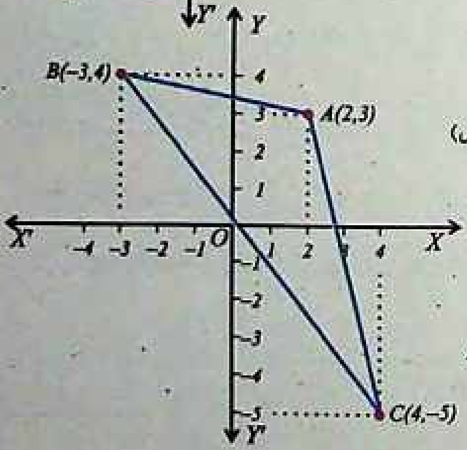
نقطہ $B(4,5)$ کے لیے

مبداء O سے ہم X۔محور پر دائیں جانب 4 اکائیاں چلتے ہیں اور پھر وہاں سے محور کے متوازی X۔محور کے اوپر 5 اکائیاں چلتے ہیں A اور B کو ملا کر AB قطعہ خط حاصل کریں۔

(ii) $A(2,3)$, $B(-3,4)$, $C(4,-5)$ دیے گئے مرتب جوڑے ہیں۔

نقطہ $A(2,3)$ کے لیے

X۔محور کے ساتھ مبداء 'O' کی دائیں جانب 2 یونٹ چلئے اور پھر 3 یونٹ X۔محور کے اوپر Y۔محور کے متوازی چلئے۔



نقطہ $B(-3,4)$ کے لیے

ہم X۔محور پر مبداء 'O' کی بائیں جانب 3 یونٹس اور پھر وہاں سے 4 یونٹ (اکائیاں) X۔محور کے اوپر Y۔محور کے متوازی چلتے ہیں۔

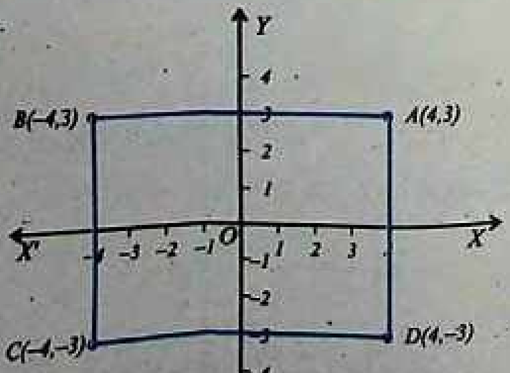
نقطہ $B(4,-5)$ کے لیے

ہم مبداء 'O' سے X۔محور پر دائیں جانب 4 یونٹ اور وہاں سے Y۔محور کے متوازی X۔محور پر عمود نیچے کی جانب 5 یونٹ چلتے ہیں۔ ہم مثلث ABC کے لیے A کو B سے، B کو C سے اور C کو A سے ملاتے ہیں۔

(iii) مرتب جوڑے $A(4,3)$, $B(-4,3)$, $C(-4,-3)$ $D(4,-3)$ دیے گئے ہیں۔

نقطہ $A(4,3)$ کے لیے

ہم 4 یونٹ X۔محور پر مبداء 'O' سے دائیں جانب اور پھر وہاں سے 3 یونٹ Y۔محور کے متوازی X۔محور سے اوپر چلتے ہیں۔



نقطہ $B(-4,3)$ کے لیے

ہم X۔محور پر مبداء 'O' کی بائیں جانب 4 یونٹ اور وہاں سے 3 یونٹ X۔محور کے اوپر حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ $C(-4,-3)$ کے لیے

ہم X۔محور پر مبداء 'O' کی بائیں جانب 4 یونٹ اور پھر وہاں سے X۔محور کے نیچے 3 یونٹ چلتے ہیں۔

نقطہ $D(4,-3)$ کے لیے

ہم X۔محور پر مبداء 'O' کے دائیں جانب 4 یونٹ پھر X۔محور کے نیچے 3 یونٹ چلتے ہیں۔

ہم پھر ABCD کو حاصل کرنے کے لیے A کو B، B کو C، C کو D اور D کو A سے ملاتے ہیں۔

9.1.7 دو متغیرات میں یک درجی مساوات پر پورا اترنے والے مترتب جوڑوں کا جدول
Table for Pairs of Values Satisfying a Linear Equation in two Variables

آیئے مساوات $y = 2x$ کو دیکھیں۔ ہم اُن اعداد کے چند جوڑے بناتے ہیں جو کہ مساوات $y = 2x$ پر پورا اترتے ہیں۔

جب $x = -2$ ہو تو $y = 2(-2) = -4$

$x = -1$ $\quad y = 2(-1) = -2$

$x = 0$ $\quad y = 2(0) = 0$

$x = 1$ $\quad y = 2(1) = 2$

$x = 2$ $\quad y = 2(2) = 4$

$x = 3$ $\quad y = 2(3) = 6$

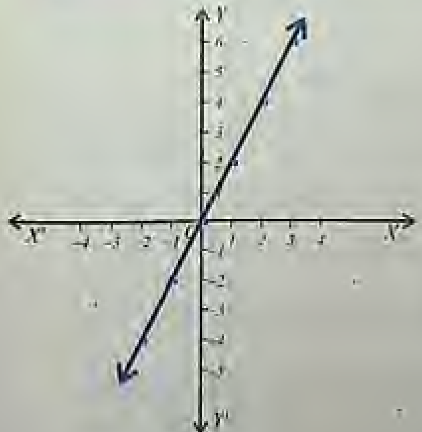
عددوں کا جوڑا $x = -2$، $y = -4$ مساوات $y = 2x$ پر پورا اترتا ہے۔

اسی طرح $x = -1$، $y = -2$ اور $x = 2$، $y = 4$ وغیرہ مساوات $y = 2x$ پر پورا اترتے ہیں۔

ہم x اور y کے لئے وہ تمام قیمتیں جو مساوات $y = 2x$ پر پورا اتریں لکھ تو نہیں سکتے مگر ان تمام قیمتوں کو گراف کی صورت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

درج ذیل جدول (Table) میں x اور y کی قیمتوں کے چھ جوڑے مساوات $y = 2x$ پر پورا اترتے ہوئے لکھے گئے ہیں۔

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x$	-4	-2	0	2	4	6



درج بالا جدول میں مترتب جوڑے

$(-2,-4), (-1,-2), (0,0), (1,2), (2,4), (3,6)$

ان چھ مترتب جوڑوں کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

9.1.8 دیے گئے جملہ کا گراف اس کے نقاط کے جوڑوں کو ظاہر کر کے حاصل کرنا

Plot the Pairs of Points to Obtain the Graph of a given Expression

مساوات $y = 3x + 1$ کو لیجیے۔

ہم x اور y کیلئے اعداد کے چند ایسے جوڑوں کو دیکھتے ہیں جو اس مساوات $y + 3x = 1$ پر پورا اترتے ہیں۔

جب

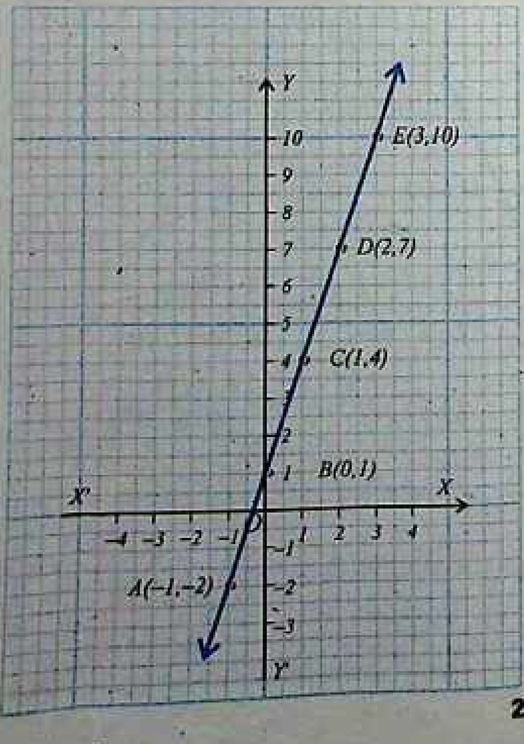
$$x = -1 \Rightarrow y = 3(-1) + 1 = -2$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 3(0) + 1 = 1$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 3(1) + 1 = 4$$
$$x = 2 \Rightarrow y = 3(2) + 1 = 7$$
$$x = 3 \Rightarrow y = 3(3) + 1 = 10$$

نیچے جدول میں x اور y کی قیمتوں کے پانچ جوڑے درج ہیں۔

x	-1	0	1	2	3
$y = 3x + 1$	-2	1	4	7	10

پانچ مترتب جوڑے

$A(-1,-2)$, $B(0,1)$, $C(1,4)$, $D(2,7)$, $E(3,10)$ ہیں۔



اب ہم ان نقاط کے جوڑوں کو گراف پر ظاہر کرتے ہیں۔

نقطہ $A(-1,-2)$ کے لیے

ہم مبداء 'O' سے X-محور پر بائیں جانب 1 یونٹ اور پھر وہاں سے Y-محور کے متوازی 2 یونٹس X-محور کے نیچے حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ $B(0,1)$ کے لیے

ہم مبداء 'O' سے Y-محور پر X-محور سے اوپر 1 یونٹ حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ $C(1,4)$ کے لیے

ہم مبداء 'O' سے X-محور پر دائیں جانب 1 یونٹ پھر وہاں سے Y-محور کے متوازی X-محور سے اوپر عموداً 4 یونٹ حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ $D(2,7)$ کے لیے

ہم مبداء 'O' سے X-محور پر دائیں جانب 2 یونٹس پھر وہاں سے Y-محور کے متوازی عموداً X-محور سے اوپر 7 یونٹس حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ $E(3,10)$ کے لیے

ہم مبداء 'O' سے X-محور پر دائیں 3 یونٹس پھر وہاں سے Y-محور کے متوازی عموداً X-محور پر اوپر 10 یونٹس حرکت کرتے ہیں۔

ہم A اور E کو ملا کر لائن AE کھینچتے ہیں۔

9.1.9 گراف کھینچنے کے لئے مناسب سکیل کا انتخاب

Choosing an Appropriate Scale to Draw a Graph

مساوات $y = 2x + 1$ کو لیتے ہیں۔

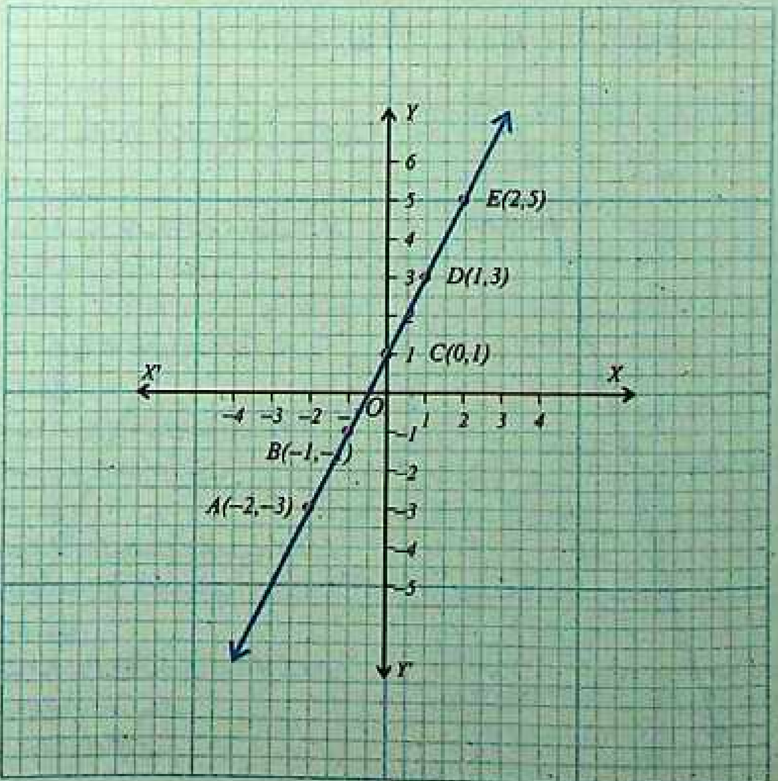
جب

$$x = -2, \quad y = 2(-2) + 1 = -3$$
$$x = -1, \quad y = 2(-1) + 1 = -1$$
$$x = 0, \quad y = 2(0) + 1 = 1$$
$$x = 1, \quad y = 2(1) + 1 = 3$$
$$x = 2, \quad y = 2(2) + 1 = 5$$

درج بالا x اور y کی قیمتوں کے 5 جوڑوں کی جدول نیچے بنائی جاتی ہے۔

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x + 1$	-3	-1	1	3	5

X۔محور اور Y۔محور دونوں پر ہم 1 بڑا مربع = 1 یونٹ سکیل استعمال کرتے ہیں۔



مشق 9.1

1- نیچے درج کیے گئے نقاط کو گراف پر ظاہر کیجیے۔

(i) $A(2,-4)$ (ii) $B(3,2)$

(iii) $C(-5,-1)$ (iv) $D(6,-3)$

(v) $E(4,4)$ (vi) $F(-3,7)$

(vii) $G(0,7)$ (viii) $H(5,0)$

2- نیچے دیے گئے نقاط کے محددات لکھیے۔

(i) مبداء۔

(ii) ایسا نقطہ x-محور پر بائیں جانب جو مبداء سے 5 یونٹس کے فاصلہ پر ہو۔

(iii) ایسا نقطہ x-محور پر دائیں جانب جو مبداء سے 3 یونٹس کے فاصلہ پر ہو۔

(iv) ایسا نقطہ y-محور پر x-محور سے اوپر 4 یونٹس ہو۔

(v) ایسا نقطہ y-محور پر x-محور سے نیچے 6 یونٹس ہو۔

3- درج ذیل نقاط کو گراف پیپر پر بنا کر اور ان کو ملا کر اشکال بنایئے۔

(i) $A(7,2)$, $B(-6,-3)$, $C(5,3)$

(ii) $A(0,-7)$, $B(3,-2)$, $C(4,0)$, $D(5,6)$, $E(7,8)$

(iii) $A(4,0)$, $B(0,4)$, $C(-4,0)$, $D(0,-4)$

(iv) $A(10,6)$, $B(-10,6)$, $C(-10,-6)$, $D(10,-6)$,

9.1.10 یک درجی مساوات $y = c$ کی شکل کا گراف
Graphs of Linear Equations of the form $y = c$

$y = c$ کا گراف کھینچنے کے لئے ہم $y = c$ کو $0 . x + y = c$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ گراف کھینچنے کا عمل مندرجہ ذیل مثال سے واضح کیا جاتا ہے۔

مثال :- مساوات $y = 5$ کا گراف کھینچیے۔

حل :-

مساوات $y = 5$ کو $y = 0 \times x + 5$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات میں $x = 0$ رکھنے سے ہمیں مساوات $y = 5$ حاصل ہوتی ہے۔

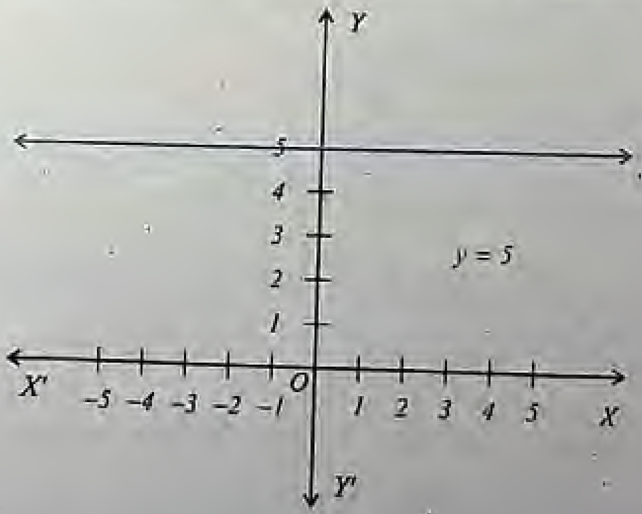
اسی طرح $y = 0.x + 5$ میں $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ رکھنے

سے بھی ہمیں $y = 5$ حاصل ہوتی ہے۔ x کی تمام قیمتوں کے لیے

$y = 5$ یعنی y کی قیمت مستقل ہی رہتی ہے۔

x اور y قیمتوں کا جدول کچھ یوں ہے۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	5	5	5	5	5	5



یک درجی مساوات $x = a$ کی شکل کا گراف

Graph of a Linear Equation of the form $x = a$

$x = a$ کا گراف کھینچنے کے لیے ہم $x = a$ کو $y = a$. $0 + x$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔گراف کھینچنے کی وضاحت درج ذیل مثال سے کرتے ہیں۔

مثال:- $x = -2$ کا گراف کھینچیے۔

حل:-

مساوات $x = -2$ کو $y = -2$. $0 + x$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

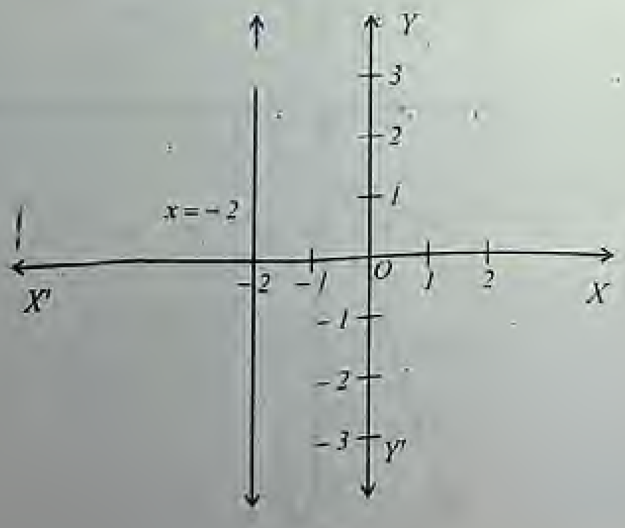
اگر ہم مساوات میں $y = 0$ رکھیں تو ہمیں $x = -2$ حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح مساوات $y = -2$. $0 + x$ میں $y=\pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ رکھنے سے $x = -2$ ہی حاصل ہوتا ہے۔

y کی تمام قیمتوں کے لیے ہمیں $x = -2$ حاصل ہوتا ہے یعنی کہ x کی قیمت مستقل ہے۔

x اور y کی قیمتوں کا جدول درج ذیل ہے۔

x	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
y	-3	-2	-1	0	1	2	3



Graph of a Linear Equation $y = mx$ یک درجی مساوات $y = mx$ کا گراف

$y = mx$ کا گراف کھینچنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل مثال دیکھتے ہیں۔

مثال :- $y = 3x$ کا ترسیم (گراف) کھینچیے۔

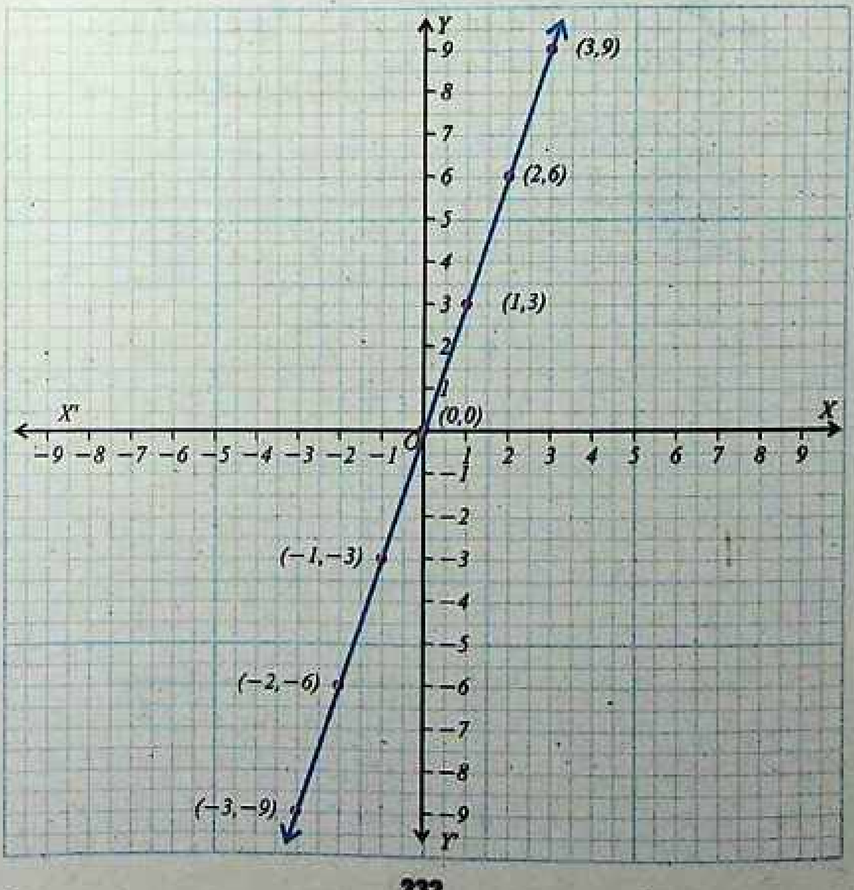
حل :-

مساوات $y = 3x$ میں ...,$x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ رکھنے سے ہمیں

$y = \pm 3,\ y = \pm 6,\ y = \pm 9, \ldots$ حاصل ہوتا

x اور y کی قیمتوں کا جدول اور گراف نیچے یوں ہے۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-6	-3	0	3	6	9



Graph of an Equation $y = mx + c$ یک درجی مساوات $y = mx + c$ کا گراف

$y = mx + c$ کا گراف کھینچنے کے لیے ہم درج ذیل مثال کو لیتے ہیں۔

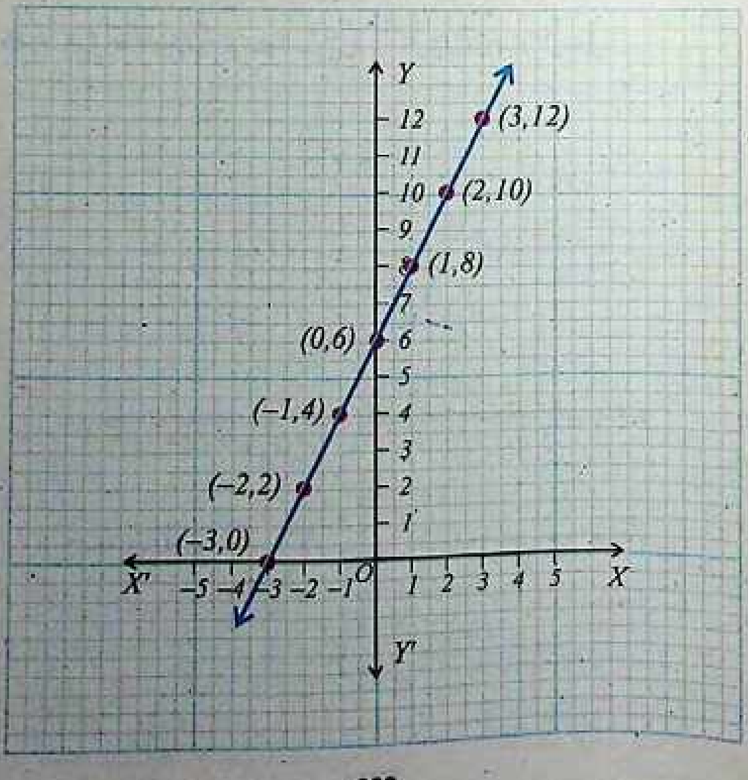
مثال:- $y = 2x + 6$ کا گراف کھینچیے۔

حل:-

اس مساوات کا گراف کھینچنے کے لیے ہم اس x-محور پر قاطع اور y-محور پر قاطع دیکھتے ہیں۔ x-محور پر قاطع کے لیے $y = 0$ رکھنے سے ہمیں $x = 3$ لہٰذا x-محور پر قاطع نقطہ $(3,0)$ اور y-محور پر قاطع کے لیے $x = 0$ رکھنے سے $y = 6$ یعنی قاطع نقطہ $(0,6)$ حاصل ہوتے ہیں۔

اسی طرح $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ رکھنے سے ہمیں y کی قیمتیں درج ذیل جدول کے مطابق حاصل ہوتی ہیں۔

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	0	2	4	6	8	10	12



9.1.11 دی گئی جدول کی ترسیم (گراف) کھینچنا Draw a Graph from a given Table

ہم نیچے دی گئی جدول کے نقاط کا گراف پیپر پر ترسیم (گراف) بناتے ہیں۔

x	6	−6	−6	6
y	4	4	−4	−4

جدول سے ہمیں چار مترتب جوڑے
$A(6,4)$ ، $B(-6,4)$ ، $C(-6,-4)$ اور $D(6,-4)$ ملتے ہیں۔

نقطہ $A(6,4)$ کے لیے

ہم x۔محور پر مبداء 'O' سے دائیں جانب 6 یونٹس اور پھر y۔محور کے متوازی x۔محور کے عمودا اوپر 4 یونٹس چلتے ہیں۔

نقطہ $B(-6,4)$ کے لیے

ہم x۔محور پر مبداء 'O' کے بائیں جانب 6 یونٹس اور پھر y۔محور کے متوازی x۔محور کے نیچے عمودا 4 یونٹس اوپر کی جانب چلتے ہیں۔

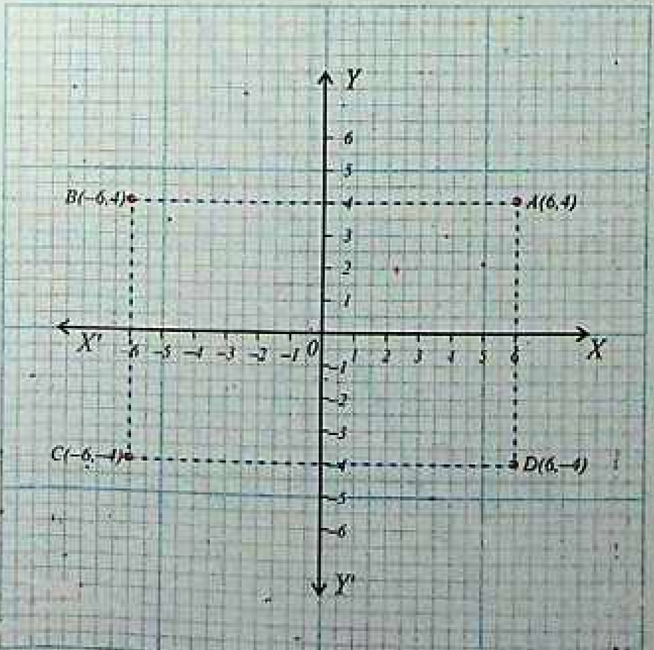
نقطہ $C(-6,-4)$ کے لیے

ہم x۔محور پر مبداء 'O' کے بائیں جانب 6 یونٹس اور پھر y۔محور کے متوازی x۔محور کے نیچے عمودا 4 یونٹس چلتے ہیں۔

نقطہ $D(6,-4)$ کے لیے

ہم x۔محور پر مبداء 'O' کے دائیں 6 یونٹس پھر وہاں سے عمودا x۔محور کے نیچے 4 یونٹس چلتے ہیں۔

ہم A کو B، B کو C، C کو D اور D کو A سے ملاتے ہیں تو مستطیل $ABCD$ حاصل ہوتی ہے۔



9.1.12 تفاعل (فنکشن) کی ڈومین اور رینج کی بذریعہ گراف نشاندہی

Identification of Domain and Range of a Function Through Graph

شکل میں فنکشن $y = 2x + 1$ کا گراف دکھایا گیا ہے۔ یہ گراف درج ذیل مترتب جوڑوں کی مدد سے بنایا گیا ہے۔

$A(-2,-3)$, $B(-1,-1)$, $C(0,1)$, $D(1,3)$ اور $E(2,5)$

ہم ان مترتب جوڑوں سے x اور y کی قیمتوں پر مشتمل جدول تیار کرتے ہیں۔

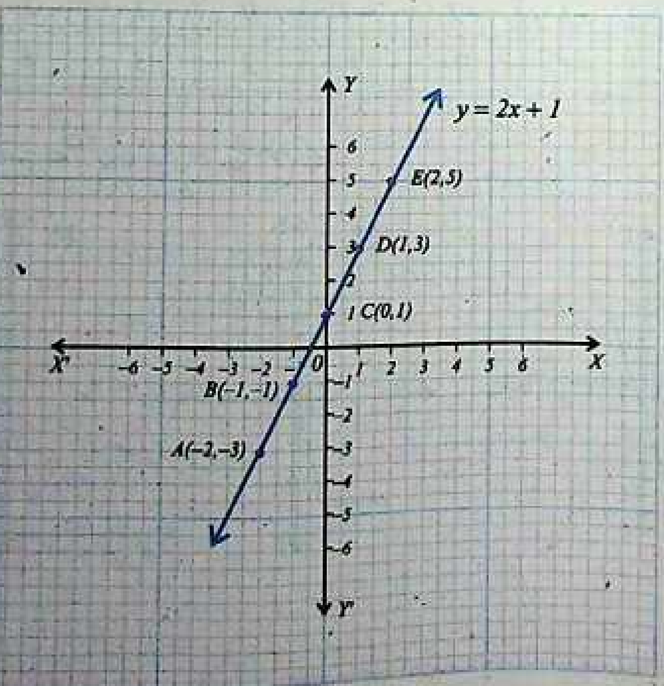
x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5

فنکشن $y = 2x + 1$ میں x کی قیمتوں کا سیٹ ڈومین جبکہ y کی قیمتوں پر مشتمل سیٹ اس فنکشن کی رینج کہلاتا ہے۔

پس فنکشن $y = 2x + 1$ کے لیے

فنکشن کی ڈومین کا سیٹ $\{-2,-1,0,1,2\}$

فنکشن کی رینج کا سیٹ $\{-3,-1,1,3,5\}$



مشق 9.2

مندرجہ ذیل کے گراف کھینچیے۔

1. $y = 3x$
2. $y = x + 7$
3. $y = 2x - 3$
4. $y = 4x + 1$
5. $y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$
6. $y = x - 1$
7. $y = 2x - 3$
8. $y = 3x + 5$
9. $y = \frac{x}{2}$

-10 نقاط $A(1,0)$, $B(7,0)$, $C(1,8)$ کے گراف کھینچیے۔

-11 دیے گئے جدولوں کے گراف کھینچیے۔

(i)

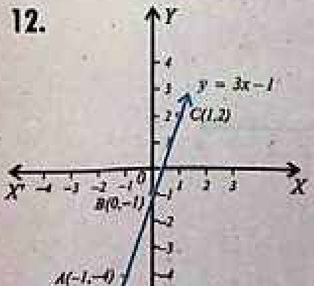
x	3	2	1	0	−1	−2	−3
y	−5	−3	−1	1	3	5	7

(ii)

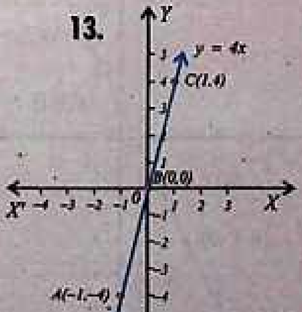
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−1	0	1	2	3	4	5

دیے گئے گراف کی مدد سے فنکشن کی ڈومین اور رینج معلوم کیجیے۔

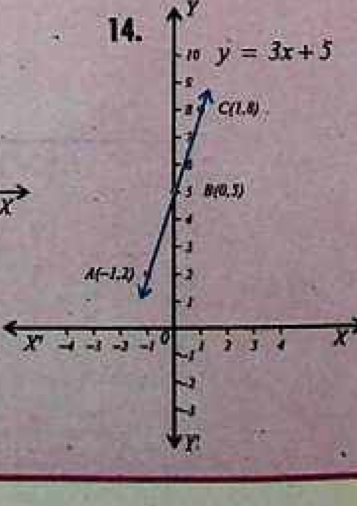
12.



13.



14.



9.2 تحویلی گراف CONVERSION GRAPHS

اگر ہمیں چھٹیوں میں لندن جانا ہو تو ممکن ہے کہ ہمیں اشیاء کی پونڈوں (£ Pounds) اور پنس (Pence) میں قیمتیں جاننا ذرا مشکل ہوں۔ مگر اگر ہمیں کرنسی کی شرح تبدیلی کا علم ہو تو ہم دیئے گئے روپوں کو پونڈوں میں اور دیئے گئے پونڈوں کو روپوں میں تحویل کرنے کے لئے ایک سادہ ساخطی گراف استعمال کر سکتے ہیں۔

سیدھا خط جو اس مقصد کے لئے استعمال ہوتا ہے تحویلی گراف کہلاتا ہے۔

9.2.1 تحویلی گراف بطور خطی گراف Conversion Graph as a Linear Graph

کسی مربع کا احاطہ کا فارمولا $P = 4s$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جس میں P یونٹ (اکائیاں) احاطہ اور 's' اکائیاں ایک ضلع کی لمبائی ہوتی ہے۔ یہ ایک راست تناسب کی مثال ہے۔ کیونکہ اس میں ایک مقدار میں اضافہ سے دوسری مقدار میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔

مثلاً

جب $s = 1 \Rightarrow P = 4\times 1 = 4,$

جب $s = 2 \Rightarrow P = 4\times 2 = 8,$

جب $s = 3 \Rightarrow P = 4\times 3 = 12,$

جب $s = 4 \Rightarrow P = 4\times 4 = 16,$

جب $s = 5 \Rightarrow P = 4\times 5 = 20$

9.2.2 ایک مقدار سے دوسری مقدار میں تبدیلی کا بذریعہ گراف مطالعہ کرنا

Read a given Graph to Know One Quantity Corresponding to Another

آیئے مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کیجئے۔

مثال:-

نیچے دیا گیا گراف مختلف رقوم کی مقداروں کے لئے ڈالروں سے پونڈوں میں منتقلی کو ظاہر کرتا ہے۔

$	50	100	200	250
£	35	70	140	175

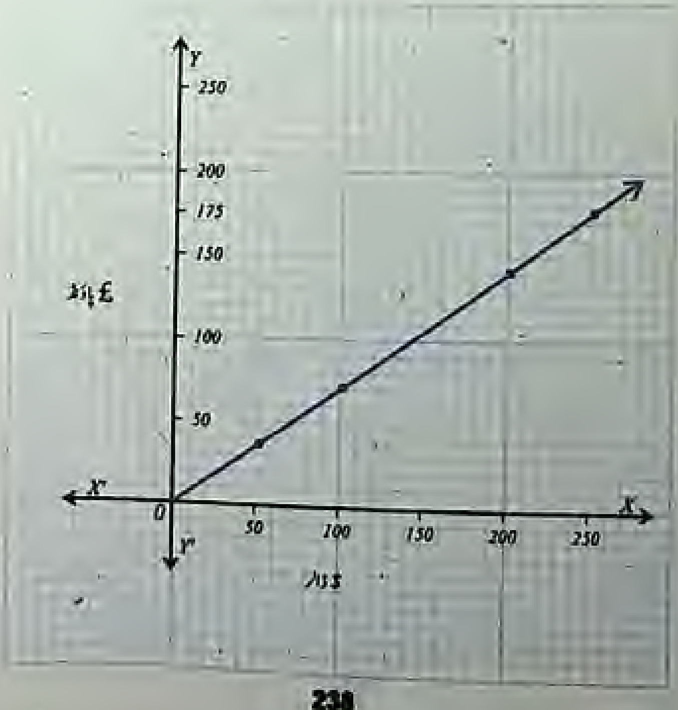
حل:-

(i) 50 ڈالر، 35 پونڈ میں تبدیل ہوتے ہیں۔

(ii) 100 ڈالر، 70 پونڈ میں تبدیل ہوتے ہیں۔

(iii) 150 ڈالر، 105 پونڈ میں تبدیل ہوتے ہیں۔

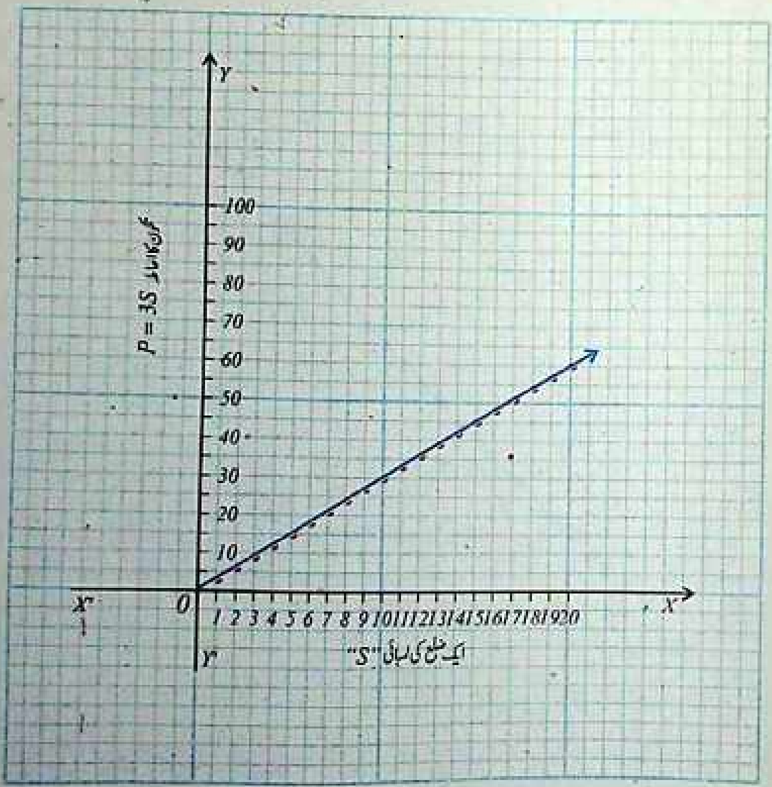
(iv) 250 ڈالر، 175 پونڈ میں تبدیل ہوتے ہیں۔



مثال 2:-

درج ذیل گراف مساوی الاضلاع مثلث کے احاطہ اور اضلاع کے درمیان تعلق $P = 3S$ دکھایا گیا ہے۔
جبکہ 'S' کی قیمتیں 1 تا 20 ہیں۔

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$P = 3S$	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60



(i) ضلع کی لمبائی 1 یونٹ ہو تو احاطہ 3 یونٹ

(ii) ضلع کی لمبائی 3 یونٹ ہو تو احاطہ 9 یونٹ

(iii) $S = 4$ ، $P = 12$

(iv) $S = 6$ ، $P = 18$

(v) $S = 9$ ، $P = 27$

(vi) $S = 11$ ، $P = 33$

(vii) $S = 14$ ، $P = 42$

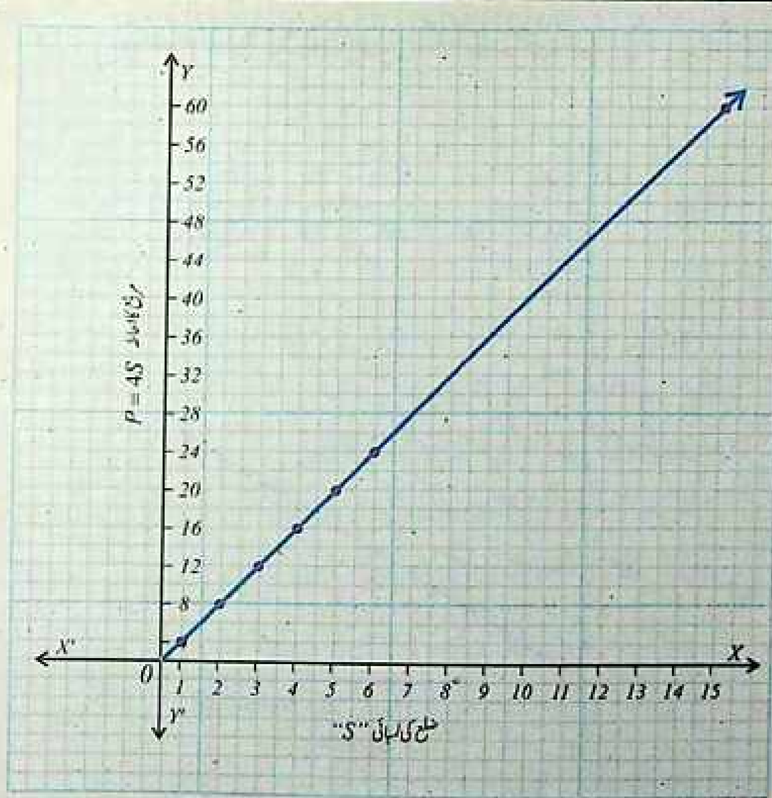
(viii) $S = 16$ ، $P = 48$

(ix) $S = 20$ ، $P = 60$

مثال 3:-

مربع کے ضلع S اور احاطہ P کی لمبائیوں میں گراف فارمولا $P = 4S$ میں دکھایا گیا ہے۔ جبکہ 'S' کی قیمتیں 1 تا 15 ہیں۔

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P = 4S$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60



(i) ضلع کی لمبائی 1 یونٹ کیلئے احاطہ 4 یونٹ

(ii) ضلع کی لمبائی 2 یونٹ ہو تو احاطہ 8 یونٹ

(iii) $P = 12 ، S = 3$

(iv) $P = 16 ، S = 4$

(v) $P = 20 ، S = 5$

(vi) $P = 24 ، S = 6$

(vii) $P = 28 ، S = 7$

(viii) $P = 32 ، S = 8$

(ix) $P = 36 ، S = 9$

(x) $P = 40 ، S = 10$

(xi) $P = 44 ، S = 11$

(xii) $P = 48 ، S = 12$

(xiii) $P = 52 ، S = 13$

(xiv) $P = 56 ، S = 14$

(xv) $P = 60 ، S = 15$

9.2.3 تحویلی گراف کا مطالعہ کرنا Read the Graph for Conversion

میل اور کلومیٹر

تحویلی گراف کا مطالعہ کیجیے۔

تحویلی 1 میل = 1.6 کلومیٹر

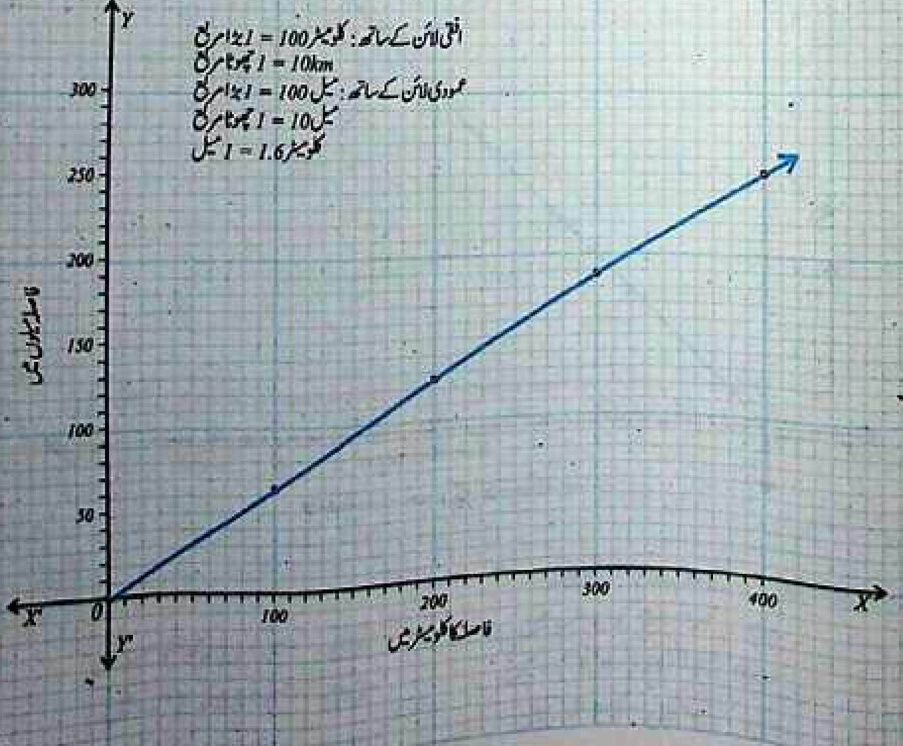
(i) 0 کلومیٹر = 0 میل

(ii) 100 کلومیٹر = 62.5 میل

(iii) 200 کلومیٹر = 125 میل

(iv) 300 کلومیٹر = 187.5 میل

(v) 400 کلومیٹر = 250 میل

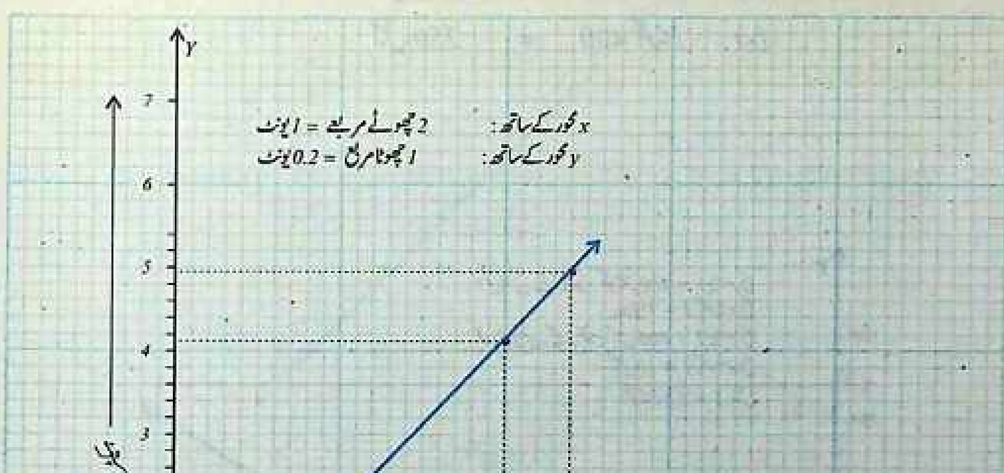


ایکڑ اور ہیکٹر Acres and Hacters

جدول رقبہ کی مقداریں ایکڑوں سے ہیکٹروں میں تبدیلی کو ظاہر کرتا ہے۔

ایکڑ	1	4	10	12
ہیکٹر	0.4046	1.6187	4.0468	4.8562

ان نقاط کے گراف کو گراف پیپر پر ایکڑ کی قیمتوں 0 تا 30 اور ہیکٹروں 0 تا 12.1405 تک ظاہر کیا گیا۔ فرض کیا X۔محور پر 2 چھوٹے مربع ایک اکائی کو ظاہر کرتے ہیں۔ جبکہ Y محور پر 1 چھوٹا مربع 0.2 یونٹس کو ظاہر کرتا ہے۔



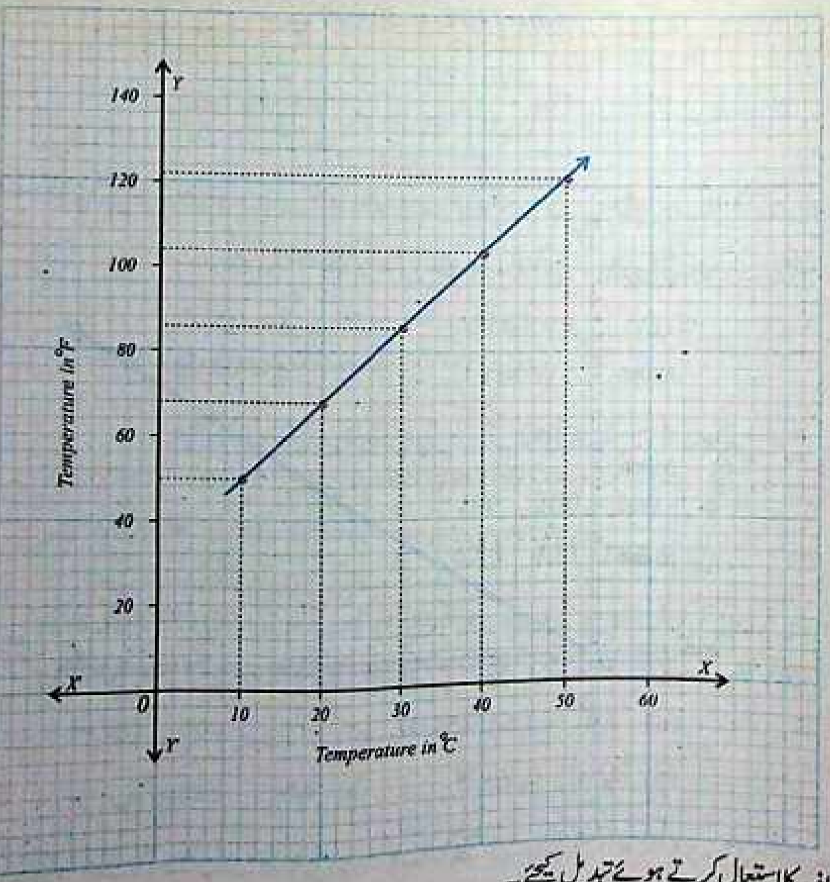
درجہ حرارت سینٹی گریڈ اور فارن ہائیٹ کی باہمی تبدیلی

Degrees Celsius and Degrees Fahrenheit

دیا گیا گراف درجہ فارن ہائیٹ ($°F$) کی تحویلی قیمت کو درجہ سینٹی گریڈ میں ظاہر کرتا ہے۔ گراف کا احتیاط کے ساتھ مطالعہ کیجیے اور سوالوں کے جوابات دیجیے۔

افقی محور یعنی X۔محور پر سینٹی گریڈ کو $10°C$ کو 5 چھوٹے مربع کے برابر لے کر 0 درجہ تا 50 درجہ جبکہ عمودی محور یعنی Y۔محور پر فارن ہائیٹ $20°F$ کو 5 چھوٹے مربع کے برابر رکھ کر گراف بنایا گیا۔

تبدیلی (کنورژن) $°F = \left(\frac{9}{5} \times °C\right) + 32$, $°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$



گراف کا استعمال کرتے ہوئے تبدیل کیجیے۔

(i) $95°F$ کو $°C$ ... میں

(ii) $113°F$ کو $°C$ ... میں

(iii) $150°F$ کو $°C$ ... میں

(iv) $86°C$ کو $°F$ ... میں

(v) $20°C$ کو $°F$ ... میں

(vi) $220°F$ کو $°C$ ... میں

پاکستانی کرنسی کی دوسرے ملک کی کرنسی میں تبدیلی

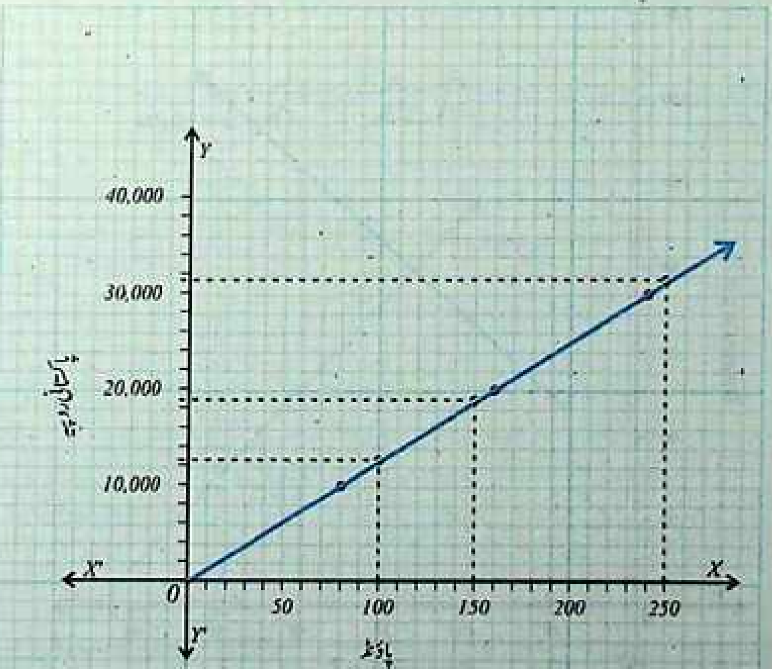
Pakistani Currency and another Currency

دیا گیا گراف برطانوی پونڈ کی مختلف قیمتوں کے برابر پاکستانی روپوں کی قدروں کو ظاہر کرتا ہے۔

افقی محور پر 5 چھوٹے مربع = £50 اور عمودی محور پر 5 چھوٹے مربع = 10,000 روپے اور 125 روپے = £1

گراف سے:

(i) 80£ = 10,000 روپے
(ii) 160£ = 20,000 روپے
(iii) 240£ = 30,000 روپے



گراف کا مطالعہ کر کے بتائیے کہ

(iv) 250£ = ____ روپے   (v) 150£ = ____ روپے   (vi) 100£ = ____ روپے

(vii) 5000 روپے = £ ____   (viii) 8000 روپے = £ ____

مشق 9.3

-1 جدول میں فارن ہائیٹ F^{o} اور اس کے مساوی سینٹی گریڈ میں قیمتیں درج ہیں۔

درجہ حرارت فارن ہائیٹ	^{o}F	57	126	158	194
درجہ حرارت سینٹی گریڈ	^{o}C	14	52	70	90

ان نقاط کو 0^{o} تا 100^{o} اور فارن ہائیٹ سکیل 0^{o} تا 220^{o} گراف پیپر پر ظاہر کیجئے۔ جبکہ دونوں محوروں پر یونٹس $20 = 5^{o}$ چھوٹے مربع رکھیں۔ اپنے گراف کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی تبدیلی معلوم کیجئے۔

(a) $97^{o}F$ کو ^{o}C میں (b) $127^{o}F$ کو ^{o}C میں (c) $25^{o}C$ کو ^{o}F میں (d) $80^{o}C$ کو ^{o}F میں

-2 دی گئی جدول مختلف رقوم کے لئے امریکی ڈالروں (\$) سے پونڈوں (£) میں تبدیلی کو ظاہر کرتی ہے۔

\$	50	100	200
£	35	70	140

ان نقاط کو گراف پیپر پر ظاہر کر کے ان کو ملا کر ایک سیدھا خط حاصل کیجئے۔ دونوں محوروں پر یونٹس 50 = 5 چھوٹے مربع لے کر گراف مکمل کیجئے۔ اپنے گراف کو درج ذیل تبدیلی کیلئے استعمال کیجئے۔

(a) \$160 = £ ... (b) \$160 = £ ...

(c) £160 = \$ ... (d) £160 = \$ ...

-3 نیچے دیئے گئے جدول میں کلومیٹر کی مختلف قدروں کی مساوی میل میں قدریں دی گئی ہیں۔

کلومیٹر	0	100	200	300
میل	0	62.5	125	187.5

ان قدروں کو گراف پیپر پر ظاہر کیجئے۔ x-محور پر 10 چھوٹے مربع = 100 کلومیٹر جبکہ y-محور پر 10 چھوٹے مربع = 100 میل رکھئے۔ اپنے گراف کو مندرجہ ذیل تبدیلیوں کے لئے استعمال کیجئے۔

(a) میل ... = 140 کلومیٹر (b) میل ... = 175 کلومیٹر

(c) کلومیٹر ... = 50 میل (d) کلومیٹر ... = 100 میل

-4 صفحہ نمبر 241 پر 9.2.3 آرٹیکل میں دیئے گئے گراف کو مندرجہ ذیل تبدیلیوں میں لکھنے کے لئے استعمال کیجئے۔

(a) ہیکٹر ... = 16 ایکڑ (b) ہیکٹر ... = 18 ایکڑ

(c) ایکڑ ... = 6.0702 ہیکٹر (d) ہیکٹر ... = 24 ایکڑ

(e) ایکڑ ... = 11.3311 ہیکٹر

جائزہ مشق 9

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) مبداء کے محددات کیا ہوتے ہیں؟

(a) $(1,1)$ (b) $(0,1)$ (c) $(0,0)$ (d) $(1,0)$

(ii) کسی نقطہ کا Y۔محور سے عمودی فاصلہ کیا کہلاتا ہے؟

(a) افقی لائن (b) مبداء (c) عمودی لائن (d) محور

(iii) کسی نقطہ کا X۔محور سے عمودی فاصلہ کیا کہلاتا ہے؟

(a) افقی لائن (b) مبداء (c) ایبسا (d) آرڈینیٹ

(iv) $2x = y + 6$ میں $x = 1$ رکھنے سے $y = ?$

(a) -4 (b) -8 (c) 4 (d) 8

(v) $2x = y - 6$ میں $y = 2$ رکھنے سے $x = ?$

(a) -2 (b) 2 (c) -4 (d) 4

(vi) مساوات $y = c$ کی شکل میں گراف پر y محدد کیا ہوتا ہے؟

(a) -1 (b) 0 (c) c (d) 1

(vii) مساوات $y = a$ کے گراف پر x محدد کیا ہوتا ہے؟

(a) c (b) 1 (c) متغیر (d) a

(viii) $f(x) = \frac{x}{2}, 4 \leq x \leq 12, x$ جبکہ x ایک جفت عدد ہو تو $f(x)$ کی ڈومین کیا ہے؟

(a) $\{2,3,4,5,6\}$ (b) $\{4,6,8,10\}$ (c) $\{6,8,10\}$ (d) $\{4,6,8,10,12\}$

(ix) اگر $y = 3x$ میں $x = 2$ رکھیں تو $y = ?$

(a) 2 (b) -3 (c) 6 (d) 0

-2 خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) مستوی سطح جس میں ایک دوسرے کے عمود انقطہ O پر متقاطع خطوط XOX', YOY' __________ کہلاتی ہے۔

(ii) Y۔محور سے عمودا فاصلہ ________ کہلاتا ہے۔

(iii) X۔محور سے عمودا فاصلہ ________ کہلاتا ہے۔

(iv) عددوں کا جوڑا $(2,3)$ ________ کہلاتا ہے۔

(v) افقی خط XOX' ________ کہلاتا ہے۔

(vi) عمودا خط YOY' ________ کہلاتا ہے۔

(vii) نقطہ $(-1,-2)$ کے اظہار کے لئے ہم مبداء O سے X۔محور پر بائیں جانب 1 یونٹ اور 2 یونٹ ________

(viii) مبداء کے محددات ________ ہوتے ہیں۔

(ix) خط کی مساوات جس میں y پایا جاتا ہو ________ کہلاتی ہے۔

(x) مساوات $2x + y = 6$ کے گراف میں X۔محور کا نقطہ قاطع ________ ہے۔

-3 مندرجہ ذیل نقاط کو گراف پیپر پر ظاہر کیجئے۔

(i) $A(5,2)$, $B(-6,-3)$ اور $C(3,5)$

(ii) $A(0,-5)$, $B(3,-2)$, $C(3,0)$ اور $D(6,7)$

(iii) $A(8,4)$, $B(-6,3)$, $C(-5,-3)$ اور $D(10,-6)$

-4 مندرجہ ذیل کا گراف بنائیے۔

(i) $y = 3x + 2$

(ii) $y = 2x + 1$

(iii) $y = x + 1$

(iv) $y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$

(v) $y = 3x + 4$

-5 نقاط $A(2,0)$, $B(7,0)$ اور $C(1,8)$ کا گراف بنائیے۔

-6 اگر $f(x) = \frac{x}{2}, 4 \leq x \leq 12$ ہو تو $f(x)$ کی ڈومین اور رینج لکھیے۔

خلاصہ

- سیٹوں کی برابری کی تعریف کی رو سے کسی بھی دو عناصر 'a' اور 'b' کے لئے $\{a,b\} = \{b,a\}$

- اعداد کے جوڑے $(3,2), (3,1), (2,4), (2,3), (2,2), (2,1)$ وغیرہ وغیرہ مترتب جوڑوں کی مثالیں ہیں۔

- ہم ایک خطی گراف کو دی گئی مقدار میں روپوں کو پونڈوں میں پونڈوں کو روپوں میں تبدیل کرنے کے لئے استعمال کرسکتے ہیں۔

یونٹ

10

بنیادی شماریات
BASIC STATISTICS

- تعددی تقسیم
- مجموعی تعدد
- مرکزی رجحان کی پیمائش
- انتشار کی پیمائش

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- کہ گروہی/جماعتی تعددی جدول کیسے تیار کیے جاتے ہیں۔
- کہ برابر اور نابرابر جماعتی وقفہ کے ساتھ ہسٹوگرام کیسے تیار ہوتے ہیں۔
- کہ تعددی کثیر الاضلاع کیسے بنتی ہے۔
- کہ مجموعی تعدد والی جدول کیسے بنتا ہے۔
- کہ مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کیسے بنتی ہے۔
- کہ گروہی اور غیر گروہی مواد کیسے حاصل ہوتا ہے۔
  - کہ تعریف کے مطابق حسابی اوسط فرضی اوسط سے انحراف کا استعمال کیسے ہوتا ہے۔
  - کہ وسطانیہ، اعادہ، حسابی اوسط اور ہم آہنگ اوسط کیسے حل کرتے ہیں۔
- کہ حسابی وسط کی خصوصیات کیا ہیں۔
- کہ اوزانی اوسط، وسط اور متحرک اوسط کیسے نکالے جاتے ہیں۔
- کہ وسطانیہ، چوتھائیوں اور اعادہ کا بذریعہ گراف تخمینہ کیسے لگاتے ہیں۔
- کہ وسعت، تغیریت اور معیاری انحراف کی پیمائش کیسے کرتے ہیں۔

10.1 تعددی پھیلاؤ FREQUENCY DISTRIBUTION

تعدد Frequency

جتنی مرتبہ دیے گئے مواد میں کوئی قدر پائی جاتی ہے۔ وہی اس کا تعدد یا فریکوینسی کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر %10 سے %20 نمبر حاصل کرنیوالے طلباء '3' ہوں تو 3 اس گروہ کا تعدد کہلاتا ہے۔ اگر 5 طلباء %20 تا %30 نمبر حاصل کرنیوالے ہوں تو اس گروہ کا تعدد 5 ہوگا۔

تعددی جدول Frequency Table

ایسا جدول جس میں ہر سکور / قدر کا تعدد دیا گیا ہو تعددی جدول کہلاتا ہے۔

10.1.1 گروہی تعددی جدول Grouped Frequency Table

مقامی محکمہ صحت 5 سال کی عمر کے اپنے علاقے کے بچوں کے قد کے متعلق معلومات حاصل کرنا چاہتا ہے۔ اپنے پہلے دورے میں ٹیم 90 بچوں کے قدوں کا ریکارڈ سینٹی میٹر میں دیے گئے جدول کے مطابق حاصل کرتی ہے۔

99	107	102	98	115	95	106	110	108	105
118	102	114	108	94	104	113	102	105	95
105	110	109	101	106	108	107	107	101	109
108	105	116	109	114	110	97	110	113	116
112	101	92	105	104	115	111	103	110	99
93	104	103	113	107	94	102	117	116	104
99	114	106	114	98	109	107	104	106	107
109	113	112	100	109	113	118	104	94	114
107	96	108	103	112	106	115	111	115	101

اس جدول میں بچوں کے قد کسی ترتیب کے بغیر لکھے گئے ہیں یعنی جیسے جیسے جو بچہ میڈیکل چیکنگ کے لیے آتا گیا اس کا قد ریکارڈ کر لیا گیا۔ ہمیں واضح نتائج کی خاطر اس ڈیٹا کو خاص ترتیب میں لکھنا ہے۔ ہم قدوں کو کچھ اس طرح گروہوں میں لکھتے ہیں۔

:100 سینٹی میٹر تا 104 سینٹی میٹر   :95 سینٹی میٹر تا 99 سینٹی میٹر   :90 سینٹی میٹر تا 94 سینٹی میٹر

115 سینٹی میٹر تا 119 سینٹی میٹر   :110 سینٹی میٹر تا 114 سینٹی میٹر   :105 سینٹی میٹر تا 109 سینٹی میٹر

قدوں کو ان کی عددی قیمت کے مطابق ترتیب دیا گیا ہے۔ ہر ایک گروہ میں قدوں کی تعداد گن کر درج ذیل جدول میں لکھا گیا ہے۔

قد سینٹی میٹر میں	موازنہ	تعداد
90 – 94	𝍸	5
95 – 99	𝍸 IIII	9
100 – 104	𝍸 𝍸 𝍸 II	17
105 – 109	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III	28
110 – 114	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	21
115 – 119	𝍸 𝍸	10
		کل میزان: 90

10.1.2 کالمی نقشہ Histogram

جب ہم کالمی نقشہ اس طرح بناتے ہیں کہ ہر کالم کا رقبہ اس گروہ کے تعدد کے راست متناسب ہو تو ایسے نقشہ کو کالمی نقشہ (Histogram) کہتے ہیں۔

مساوی جماعتی وقفوں کے لیے کالمی نقشہ Histogram with equal class intervals

درج ذیل مثالوں پر غور کیجئے۔

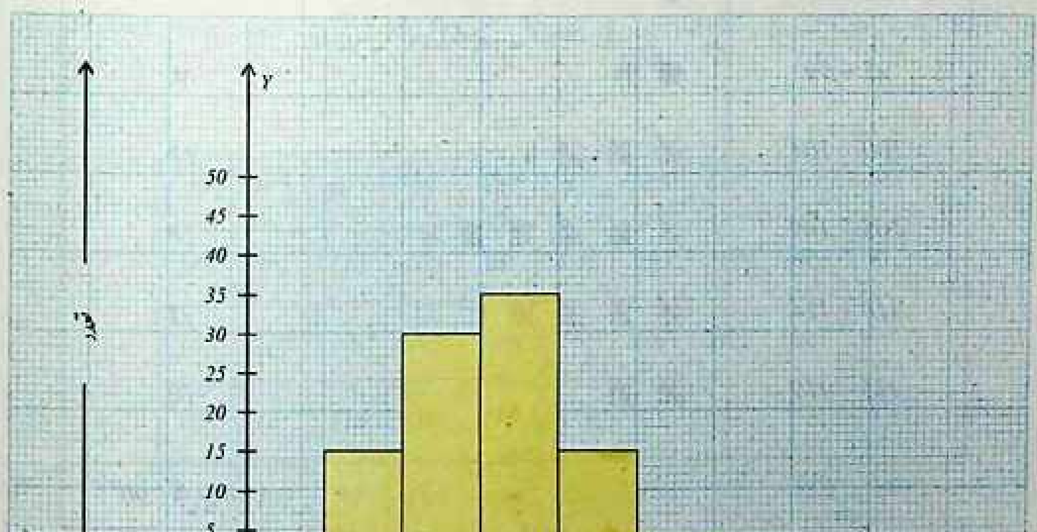
مثال:- مندرجہ ذیل مساوی جماعتی وقفوں کی جدول کا کالمی نقشہ تیار کیجئے۔

اوزان (کلوگرام میں)	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 99	100 – 109
تعداد	15	30	35	15	3	2
					کل تعداد:	100

حل:- مندرجہ ذیل کالمی نقشہ تعددی جدول کی وضاحت کرتا ہے۔

(i) اوزان (کلوگرام میں) X۔محور پر مبداء 'O' کی دائیں جانب۔ جبکہ تعدد X۔محور کے اوپر Y۔محور کے ساتھ لیا گیا ہے۔

(ii) X۔محور پر ایک بڑا مربع $=10$ کلوگرام وزن۔ جبکہ Y۔محور پر ایک بڑا مربع $=10$ تعدد۔



ہر کالم کا رقبہ اس جماعت کے تعدد کے راست متناسب ہے۔

شکل ایک مساوی کالمی نقشہ ہے۔ ہر جماعت کا جماعتی وقفہ یکساں ہے لہٰذا ہر کالم کی چوڑائی یکساں ہے۔ لہٰذا ہر کالم کا رقبہ اس جماعت کے ارکان کی تعداد کے متناسب ہے۔

غیرمساوی جماعتی وقفوں کے لیے کالمی نقشہ Histogram with unequal class intervals

مثال:-

درج ذیل تعددی جدول میں 100 آدمیوں کی ماہانہ تنخواہ کا جائزہ پیش کیا گیا۔

تنخواہ روپوں میں	0 – 1999	2000 – 3999	4000 – 5999	6000 – 9999	10000 – 19999
تعدد	20	36	25	14	5

حل:- جماعتی وقفے مساوی نہیں ہیں۔

پہلی تین جماعتوں میں وقفہ 2000 روپے کا ہے۔

چوتھی جماعت کا وقفہ 4000 روپے کا ہے جو کہ پہلی تین کے وقفے کا دوگنا ہے۔

پانچویں جماعت کا وقفہ 10,000 روپے ہے۔ جو کہ پہلی تین کے وقفے سے پانچ گنا ہے۔

اس گروہی تقسیم کو ہسٹوگرام پر ظاہر کرنے کے لیے ہم پہلے تین کالموں کی چوڑائی یکساں رکھتے ہیں۔

چوتھے کالم کی چوڑائی پہلے تین کالموں کی نسبت دوگنا رکھتے ہیں۔

پانچویں کالم کی چوڑائی پہلے تین کالموں کی نسبت پانچ گنا رکھتے ہیں۔

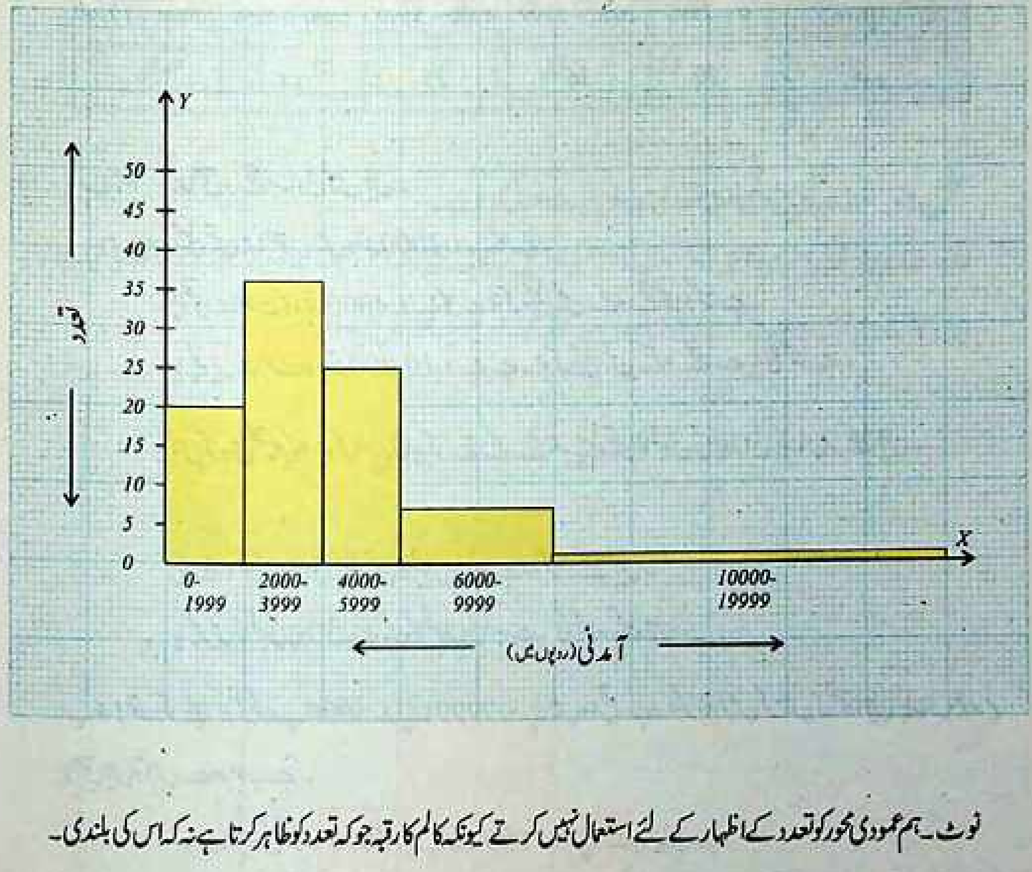
اب 14 تعدد کو لیجیے جو کہ گروپ 6000 روپے تا 9999 روپے میں واقع ہے۔ اگر ہم فرض کرلیں کہ تنخواہیں یکساں طور پر بڑھتی ہیں تو اس سے مراد یہ ہے کہ

سات افراد کی تنخواہ 6000 روپے سے 7999 روپے کے درمیان ہے۔

اور مزید سات افراد کی تنخواہ 8000 روپے سے 9999 روپے کے درمیان ہے۔

لہٰذا چوتھا کالم باقی تمام کالموں کے بالمقابل 7 یونٹس اونچا ہے۔ کیونکہ اس کالم کی چوڑائی دوسرے گروپ کے مقابلے میں دوگنا ہے۔ اس کا رقبہ اس کے تعدد کے متناسب بنتا ہے۔

اگر ہم یہ بھی تصور کریں کہ پانچویں گروپ میں آمدنی کو گروپ میں یکساں طور پر پھیلایا گیا ہے تب تو ہر ذیلی گروپ میں صرف ایک آدمی 2000 روپے والے وقفہ میں آتا ہے۔ اس لیے پانچواں کالم تمام گروپ سے ایک یونٹ اونچا بنتا ہے۔ پانچویں کالم کا رقبہ اس کے تعدد کے متناسب ہوگا۔



نوٹ۔ ہم عمودی محور کو تعدد کے اظہار کے لئے استعمال نہیں کرتے کیونکہ کالم کا رقبہ جو کہ تعدد کو ظاہر کرتا ہے نہ کہ اس کی بلندی۔

10.1.3 تعددی کثیر الاضلاع Frequency Polygon

تعددی کثیر الاضلاع بہت سارے اضلاع سے مل کر بننے والی بند شکل ہوتی ہے جسے بنانے کے لیے ہر گروہ کے کلاس مارک (کلاس/گروپ کا وسطی نقطہ) تعدد کے بالمقابل رکھ کر گراف پیپر پر نقاط لگائے جاتے ہیں۔ پھر ان نقاط کو سیدھی لائنوں سے ملا دیا جاتا ہے۔ تعددی کثیر الاضلاع ہسٹوگرام کی مستطیلوں کے اوپر کے اضلاع کے وسطی نقاط کو بھی ملانے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال:- تعددی جدول میں موادوزن گھٹاؤ پروگرام میں 40 شرکاء کا وزن دیا گیا ہے۔

دیے گئے ڈیٹا کو استعمال کر کے ظاہر کیجئے۔

(i) ہسٹوگرام (ii) تعددی کثیر الاضلاع سے ظاہر کریں۔

تعدد	جماعتی وقفے
2	60 —— 70
5	70 —— 80
9	80 —— 90
12	90 —— 100
7	100 —— 110
3	110 —— 120
2	120 —— 130
میزان: 40	

حل:-

(i) گراف پیپر پر محور بنایئے (x-محور، y-محور)

(ii) گراف کا عنوان لکھیے۔

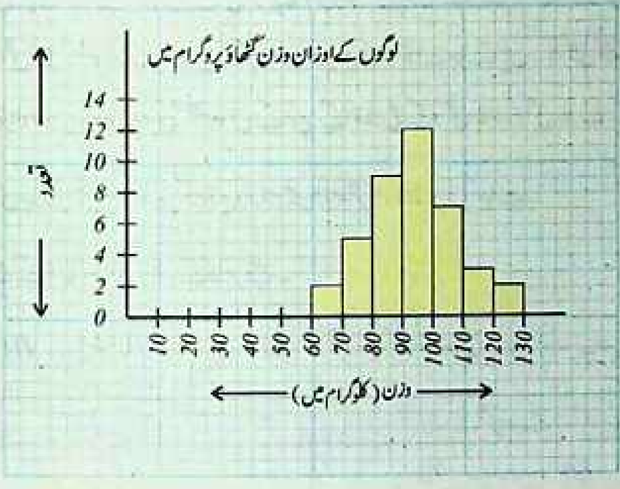
(iii) افقی x-محور پر وزن (کلوگرام) میں اور عمودی y-محور پر تعدد لکھیے

(iv) افقی اور عمودی محوروں کے لیے سکیل مقرر کیجئے۔

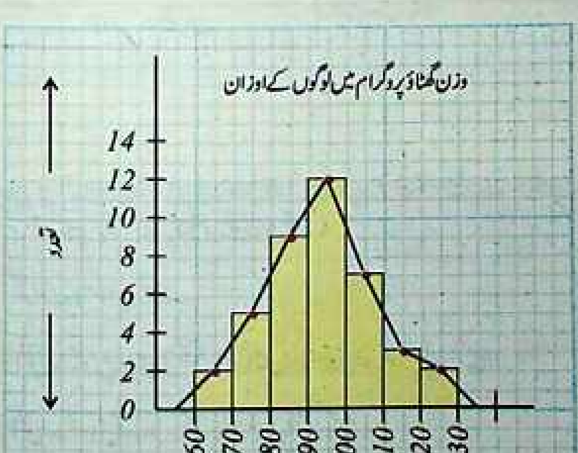
(v) x-محور پر گراف کے آغاز سے پہلے اور اختتام کے بعد کم از کم جماعتی وقفے سے آدھی لمبائی چھوڑ دیجئے۔

(vi) 2 افراد کی بلندی تک بلند پہلا کالم پہلے جماعتی وقفہ کو ظاہر کرتا ہوا بنایئے۔

جز (iii) کو ایک جماعتی وقفہ کے لیے دہرائیے۔



(ii) مندرجہ بالا ہسٹوگرام A کی تمام مستطیلوں کے اوپر والے اضلاع کے وسطی نقاط کی نشاندہی کیجیے۔ ان وسطی نقاط کو سیدھے خطوط سے اس طرح ملا کر پہلے کالم سے پہلے والے کالم کے وسطی نقطہ اور کالم کے وسطی نقطہ کو x-محور پر جا ملائیں اور یوں ایک بند کثیر الاضلاع حاصل ہوتی ہے۔



مشق 10.1

1- ایک جونیئر سکول کے 50 طلباء نے سکول کمپیوٹر کلب میں شمولیت اختیار کی۔ ان کی عمروں کا بنایا گیا ریکارڈ درج ذیل ہے۔

10	8	9	10	7	8	8	11	10	9
7	8	9	9	10	11	11	10	9	8
8	7	9	7	10	7	10	8	9	11
10	11	8	10	9	8	9	7	11	10
9	10	10	11	10	11	7	11	10	9

تعددی جدول بنایئے جو کہ ہر عمر کے عدد کو ظاہر کرے۔ اس معلومات کو کالم چارٹ سے ظاہر کیجیے۔

2- مقامی مچھلی اور چپس کی دوکان پر ایک ہفتہ کی شام 56 گاہک آئے۔ انہوں نے دی گئی رقوم خرچ کیں۔

270	110	45	96	250	490	325	45
382	136	125	450	420	380	150	250
85	250	320	525	218	210	216	120
155	430	250	40	510	150	510	245
320	120	316	150	260	45	180	310
273	280	85	280	318	45	210	282
462	316	218	316	325	45	560	315

گروپوں 0–99 روپے، 100–199 روپے، 200–299 روپے، 300–399 روپے، 400–499 روپے، 500–599 روپے کو استعمال کرتے ہوئے تعددی جدول تیار کیجیے اور مواد کو کالم / بار چارٹ میں ظاہر کیجیے۔

3- ایک میلے میں فروخت کیے گئے 30 پاپ کارن کے بیگوں کے اوزان گرام میں دیے گئے ہیں۔

69	83	75	65	68	68	73	70	80	79
70	76	63	86	69	65	66	74	86	68
70	60	67	74	65	65	67	88	81	63

بار چارٹ بنا کر مواد کو ظاہر کیجیے۔

10.2 مجموعی تعدد CUMULATIVE FREQUENCY

مجموعی تعدد (Cumulative Frequency) کسی بھی قدر سے پہلی قدروں کے تعددات کے مجموعے کو ظاہر کرتا ہے۔ اس کی وضاحت درج ذیل مثال سے ہوتی ہے۔

مثال 1:-

نویں جماعت کے تمام طلباء نے ریاضی کا امتحان دیا۔ یہاں ان کے فیصد نمبر دیے گئے ہیں جو کہ 10 جماعتی وقفوں میں منقسم ہیں۔ ان کے مجموعی تعددات معلوم کریں۔

فیصد نمبر	تعدد
1 – 10	3
11 – 20	6
21 – 30	11
31 – 40	13
41 – 50	18
51 – 60	24
61 – 70	14
71 – 80	6
81 – 90	3
91 – 100	2
	میزان تعدد : 100

(i) کتنے طلباء نے 10% یا اس کے کم نمبر حاصل کیے؟
(ii) کتنے طلباء نے 20% یا اس کے کم نمبر حاصل کیے؟
(iii) کتنے طلباء نے 30% یا اس کے کم نمبر حاصل کیے؟
(iv) کتنے طلباء نے 40% یا اس کے کم نمبر حاصل کیے؟
(v) کتنے طلباء نے 50% یا اس کے کم نمبر حاصل کیے؟
(vi) کتنے طلباء نے 60% یا اس کے کم نمبر حاصل کیے؟
(vii) کتنے طلباء نے 70% یا اس کے کم نمبر حاصل کیے؟
(viii) کتنے طلباء نے 80% یا اس کے کم نمبر حاصل کیے؟
(ix) کتنے طلباء نے 90% یا اس کے کم نمبر حاصل کیے؟
(x) کتنے طلباء نے 100% یا اس کے کم نمبر حاصل کیے؟

حل:-

درج ذیل جدول اجتماعی تعددات کو ظاہر کرتا ہے۔

مجموعی تعدد		فیصد نمبر
3	3	10% یا کم
3 + 6 = 9	9	20% یا کم
9 + 11 = 20	20	30% یا کم
20 + 13 = 33	33	40% یا کم
33 + 18 = 51	51	50% یا کم
51 + 24 = 75	75	60% یا کم
75 + 14 = 89	89	70% یا کم
89 + 6 = 95	95	80% یا کم
95 + 3 = 98	98	90% یا کم
98 + 2 = 100	100	100% یا کم

مثال 2:- سائنس کے ٹیسٹ میں حاصل کردہ نمبروں کا جدول دیا گیا ہے۔ مجموعی تعدد مکمل کیجیے۔

مجموعی تعدد	نمبرز	تعدد	نمبر
	10 یا کم	5	1 – 10
	20 یا کم	6	11 – 20
	30 یا کم	8	21 – 30
	40 یا کم	16	31 – 40
	50 یا کم	23	41 – 50
	60 یا کم	18	51 – 60
	70 یا کم	12	61 – 70
	80 یا کم	10	71 – 80
	90 یا کم	2	81 – 90
	100 یا کم	0	91 – 100

حل :-

مجموعی تعدد	حاصل کردہ نمبر	تعدد	نمبروں کا وقفہ
5	10 یا کم	5	1 – 10
11	20 یا کم	6	11 – 20
19	30 یا کم	8	21 – 30
35	40 یا کم	16	31 – 40
58	50 یا کم	23	41 – 50
76	60 یا کم	18	51 – 60
88	70 یا کم	12	61 – 70
98	80 یا کم	10	71 – 80
100	90 یا کم	2	81 – 90
100	100 یا کم	0	91 – 100

10.2.2 مجموعی تعدد والی کثیر الاضلاع Cumulative Frequency Polygon

جب مجموعی تعدد کو آخری نقاط کے متعلقہ جماعتی وقفوں کے خلاف پلاٹ کیا جاتا ہے اور انہیں آپس میں ملایا جاتا ہے تو نتیجہ میں حاصل ہونے والے گراف کو مجموعی تعدد والا گراف یا (Ogive) کہتے ہیں۔

پس اوگو کو ہم مجموعی تعدد سے حاصل کردہ خطی گراف کہہ سکتے ہیں۔

مثال :-

جدول میں دیا گیا مواد مچھلیاں پکڑنے والے 28 شرکاء کی پکڑی گئی مچھلیوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

اس مواد کے لیے مجموعی تعدد والی کثیر الاضلاع یعنی (ogive) تیار کیجیے۔

تعدد	پکڑی گئی مچھلیوں کا جماعتی وقفہ
3	0 —— 5
5	5 —— 10
6	10 —— 15
8	15 —— 20
4	20 —— 25
2	25 —— 30
میزان: 28	

حل:-

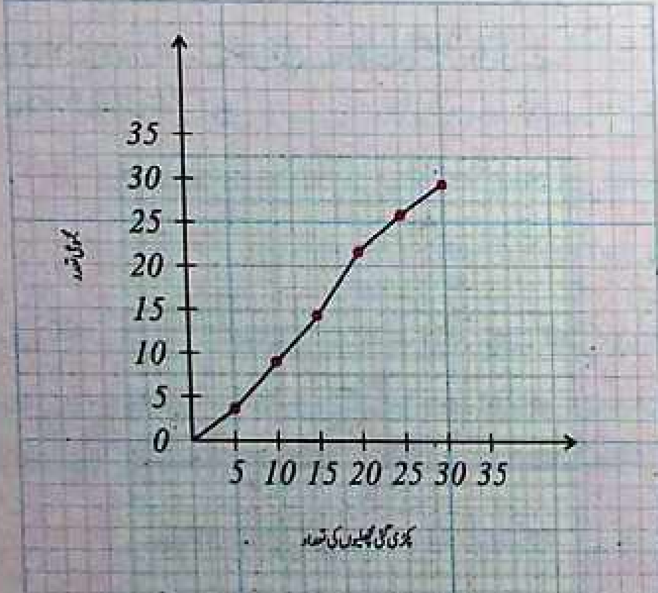
مجموعی تعددات معلوم کیجئے۔ گراف پیپر پر دونوں محور کھینچیں۔ افقی محور پر مچھلیوں کی تعداد اور عمودی محور پر مجموعی تعددات ظاہر کیجئے۔

پکڑی گئی مچھلیوں کا جماعتی وقفہ	تعدد	مجموعی تعدد
0 —— 5	3	3
5 —— 10	5	$3 + 5 = 8$
10 —— 15	6	$8 + 6 = 14$
15 —— 20	8	$14 + 8 = 22$
20 —— 25	4	$22 + 4 = 26$
25 —— 30	2	$26 + 2 = 28$
میزان	$\sum f = 28$	

ہر مجموعی تعدد کے آخری نقاط کو اپنے متعلقہ جماعتی وقفہ کے انتہائی قیمت کے سامنے گراف پر ظاہر کیجئے۔

ابتدائی جماعتی وقفہ کے لئے اوگو (ogive) کی پہلی مجموعی تعدد کی قیمت صفر ہوگی لہٰذا اوگو کا پہلا نقطہ (0,0) ہوگا۔

اگلا نقطہ (5,3) جس کے بعد (10,8) وغیرہ وغیرہ۔ ان نقاط کو سیدھے قطعہ خط سے ملائیے۔



مشق 10.2

-1 درج ذیل میں سے ہر ایک کے لیے تعددی جدول کو ظاہر کرنے کے لیے کالمی نقشہ بنایئے۔

(i) درج ذیل جدول میں سکول فنکشن میں حصہ لینے والے 100 لوگوں کی عمریں دی گئی ہیں۔

عمر (سالوں میں)	0-19	20-39	40-59	60-79	80-89
تعدد	43	24	17	10	6

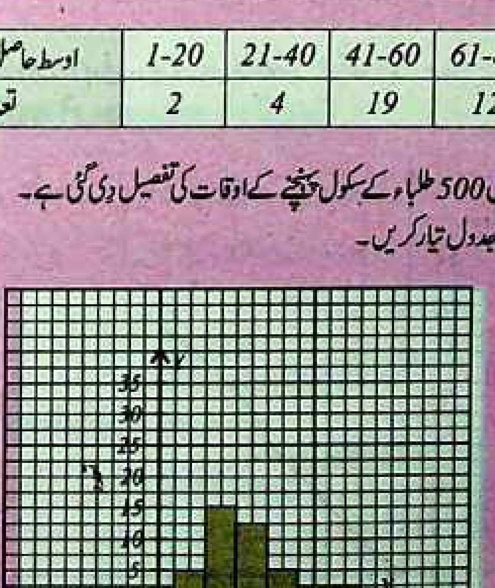
(ii) درج ذیل جدول میں 16 سالہ 100 لڑکوں کی ہفتہ وار آمدن دی گئی ہیں۔

ہفتہ وار آمدن	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
تعدد	45	10	11	21	10	3

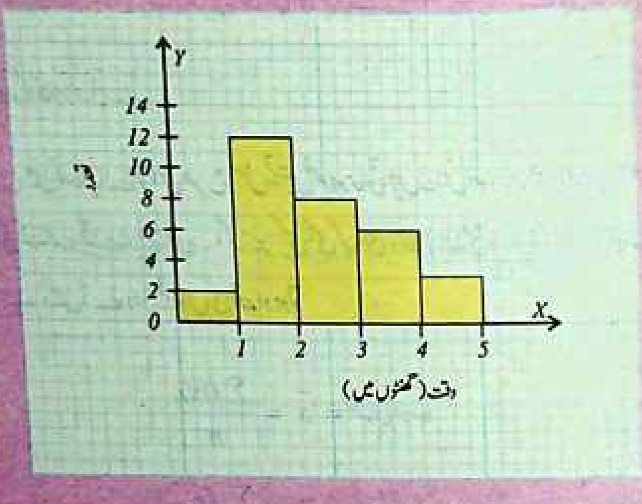
(iii) درج ذیل جدول میں 40 بچوں کے اوسط نمبروں کی تفصیل جو کہ انہوں نے سال کے آخر میں حاصل کیے درج ہے۔

اوسط حاصل کردہ نمبر	1-20	21-40	41-60	61-80	81-100
تعدد	2	4	19	12	3

-2 درج ذیل کالمی نقشہ میں 500 طلباء کے سکول پہنچنے کے اوقات کی تفصیل دی گئی ہے۔
اس سے اس کا تعددی جدول تیار کریں۔



3- دیا گیا کالمی نقشہ 30 طلباء کے اس وقت (گھنٹوں میں) کی بنیاد پر بنایا گیا ہے جوانہوں نے ایک خاص ہفتہ کو ٹیلی ویژن دیکھتے ہوئے گزارا۔ اس کالمی نقشہ سے تعددی جدول بنائیے۔



10.3 مرکزی رجحان کی پیمائش MEASURES OF CENTRAL TENDENCY

مرکزی رجحان کی پیمائش (Measures of Central Tendency) دراصل کسی دیے گئے مواد کی درمیانی (مرکزی) قیمت کا پتہ چلاتا ہے۔ جس کی تین قسمیں زیادہ اہم ہوتی ہیں۔

(i) حسابی اوسط: جوکہ مواد کی وسطی قیمت ہوتی ہے۔

(ii) وسطانیہ: جوکہ مواد کی قیمتوں کو ترتیب سے لکھنے پر درمیانی قیمت ہوتی ہے۔

(iii) عادہ: وہ قیمت جس کی مواد میں سب سے زیادہ تکرار ہو۔

10.3.1 کسی گروہی / غیر گروہی مواد سے حسابی اوسط، وسطانیہ، عادہ، ضربی اوسط اور ہم آہنگ اوسط معلوم کرنا

To find Arithmetic Mean or Mean, Median, Mode, Geometric Mean, Harmonic Mean from Grouped/Ungrouped Data

حسابی اوسط تعریف کی رو سے Arithmetic Mean by definition

کسی غیر گروہی مواد کو حسابی اوسط کی تمام قیمتوں کو جمع کر کے ان قیمتوں کی تعداد پر تقسیم کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

$$\text{حسابی اوسط} = \frac{\text{تمام قیمتوں کا مجموعہ}}{\text{قیمتوں کی تعداد}}$$

علامتی طور پر اسے $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ لکھتے ہیں۔

جبکہ "Σ" مجموعہ کو ظاہر کرتی ہے۔

جب مواد کو گروہوں میں لکھا جائے تو اس طرح اصل قیمتیں ضم ہو جاتی ہیں۔ اس صورت میں ہم کسی خاص گروہ کی درمیانی / وسطی قیمت کو اس گروہ کی نمائندہ قیمت لیتے ہیں۔ اگر 'x' کسی بھی گروہی وسط (جماعتی وسط) کو ظاہر کرتی ہے جبکہ f اس کا تعدد ہو اور $(n=\sum f)$ تمام مشاہدہ میں آنے والی قیمتوں کی تعداد ہو تو

$$\text{حسابی اوسط} = \bar{x} = \frac{\sum (fx)}{n}$$

یا

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

مثال 1:-

آٹھ آدمیوں کی انفرادی آمدنی 3000 روپے، 4000 روپے، 3500 روپے، 3800 روپے، 4500 روپے، 4200 روپے، 3600 روپے اور 5400 روپے ہے۔ ان کا حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

حل:-

$$x_1 = 3000, \quad x_2 = 4000, \quad x_3 = 3500, \quad x_4 = 4500,$$
$$x_5 = 3800, \quad x_6 = 4200, \quad x_7 = 3600, \quad x_8 = 5400,$$

$$\text{حسابی اوسط} = \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8}$$

$$= \frac{3000 + 4000 + 3500 + 4500 + 3800 + 4200 + 3600 + 5400}{8}$$

$$= \frac{32000}{8}$$

$$\bar{x} = 4000 \text{ روپے}$$

مثال 2:-

مندرجہ ذیل جدول میں 50 طلباء کے سالانہ امتحان میں حاصل کردہ نمبروں کی تفصیل دی گئی ہے۔اس کا حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

نمبر	20 – 24	25 – 29	30 – 34	35 – 39	40 – 44	45 – 49	50 – 54
تعدد	1	4	8	11	15	9	2

حل:-

نمبر	(f) تعدد	(x) جماعتی نمائندہ قیمت	fx
20 – 24	1	22	22
25 – 29	4	27	108
30 – 34	8	32	256
35 – 39	11	37	407
40 – 44	15	42	630
45 – 49	9	47	423
50 – 54	2	52	104

$$\bar{x} = \frac{\sum(fx)}{n} = \frac{22+108+256+407+630+423+104}{50}$$
$$= \frac{1950}{50}$$
$$= 39$$

فرضی اوسط سے انحراف کے استعمال سے حسابی اوسط معلوم کرنا

Arithmetic Mean using Deviation from Assumed Means

حسابی اوسط کے لیے فارمولا $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ کا استعمال اسی صورت میں آسان ہوتا ہے جب x اور f کی قیمتیں بہت بڑی نہ ہوں۔اگر x اور f کی قیمتیں بہت زیادہ ہوں تو ہم فرضی اوسط لیکر بہت سارے وقت کی بچت کرسکتے ہیں۔اگر 'A' ایک فرضی اوسط ہو (جو کہ کوئی بھی قیمت ہوسکتی ہے) اور D_i ، X_i قیمت کا فرضی اوسط 'A' سے انحراف ظاہر کرے۔

یعنی کہ $X_i = D_i + A,$ تب $D_i = X_i - A$

ہم لکھ سکتے ہیں کہ
$$\overline{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{k} D_i}{n}$$

(غیر گروہی مواد)
$$= A + \frac{\sum_{i=1}^{k} D}{n}$$

اور
$$\overline{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i D_i}{\Sigma f_i}$$

یا

(گروہی مواد)
$$= A + \frac{\Sigma f D}{\Sigma f}$$

مثال 1:- کلیہ $\overline{X} = A + \frac{\Sigma D}{n}$ کی مدد سے دی گئی قیمتوں کا حسابی اوسط معلوم کیجئے۔

184, 191, 172, 168, 187, 189, 196, 186, 193, 195.

حل:- فرضی اوسط $A = 180$ سے ہمیں انحراف حاصل ہوتے ہیں۔

$$D = 184-180,\ 191-180,\ 172-180,\ 168-180,\ 187-180,\ 189-180,\ 196-180,\ 189-180,\ 193-180,\ 195-180$$

$$= 4,\ 11,\ -8,\ -12,\ 7;\ 9,\ 16,\ 9,\ 13,\ 15$$

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma D}{n} = 180 + \frac{4+11-8-12+7+9+16+9+13+15}{10}$$

$$= 180 + \frac{64}{10}$$

$$= 180 + 6.4$$

$$= 186.4$$

مثال 2:-

جدول میں دیے گئے 120 طلباء کے اوزان کی تفصیل کا کلیہ $\overline{X} = A + \frac{\Sigma f D}{\Sigma f}$ کے تحت اوسط وزن معلوم کیجیے۔

وزن (پونڈ)	جماعتی وسط (X)	تعدد (f)	$D = X - 144.5$	fD
110 – 119	114.5	1	– 30	– 30
120 – 129	124.5	4	– 20	– 80
130 – 139	134.5	17	– 10	– 170
140 – 149	144.5 ←A	28	0	0
150 – 159	154.5	25	10	250
160 – 169	164.5	18	20	360
170 – 179	174.5	13	30	390
180 – 189	184.5	6	40	240
190 – 199	194.5	5	50	250
200 – 209	204.5	2	60	120
210 – 219	214.5	1	70	70
		$n = \Sigma f = 120$	$\Sigma f D = 1680 - 280 = 1400$	

حل:-

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma f D}{\Sigma f}$$

$$= 144.5 + \frac{1400}{120}$$

$$= 144.5 + 11.67$$

$= 156.17$ پونڈ

وسطانیہ (غیر گروہی مواد) Median (ungrouped data)

وسطانیہ کسی مواد کو عددی ترتیب میں لکھے جانے کے بعد اس کی وسطی قیمت ہوتی ہے اگر قیمتوں کی تعداد n ہو تو ترتیب وار لکھے گئے مواد کے $\frac{n+1}{2}$ کی جگہ والی قیمت وسطانیہ کہلاتی ہے جبکہ n طاق ہو۔ اور اگر n جفت ہو تو دو درمیان والی جگہوں کی قیمتوں کا اوسط وسطانیہ کہلاتی ہے۔

- اگر قیمتوں کی تعداد طاق ہو تو درمیانی قیمت وسطانیہ کہلاتی ہے۔
- اگر قیمتوں کی تعداد جفت ہو تو دو درمیانی قیمتوں کے حسابی اوسط کو وسطانیہ کہتے ہیں۔

مثال:- مواد کے سیٹ 5,4,5,4,3,4,2,6 کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

حل:-

مواد کو ترتیب سے لکھنے سے	2 3 4 4 4 5 5 6
$\frac{n+1}{2}$ کے اصول کے مطابق وسطانیہ کا تعین کیجیے۔ یہ 4.5 ہے یعنی چوتھے عدد اور پانچویں عدد کا حسابی اوسط۔	2 3 4 4 4 5 5 6

$$\text{وسطانیہ} = \frac{4+4}{2}$$

$$= \frac{8}{2}$$

$$= 4$$

پس وسطانیہ 4 ہے۔

وسطانیہ (گروہی مواد) Median (grouped data)

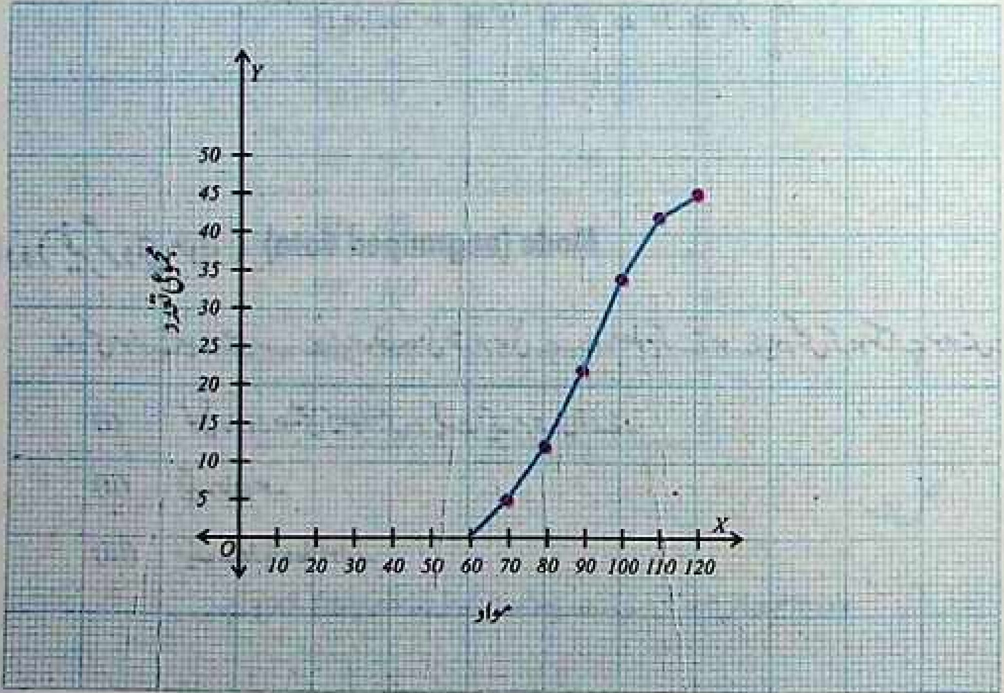
وسطانیہ مواد کا (ogive) کھینچ کر حاصل کیا جاتا ہے اور 50 فیصد مواد کے بعد والی قیمت بطور وسطانیہ لی جاتی ہے۔

مثال:- دیے گئے مواد کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

جماعتی وقفہ	تعدد (f)	مجموعی تعدد (Cf)
60 – 70	5	5
70 – 80	7	12
80 – 90	10	22
90 – 100	12	34
100 – 110	8	42
110 – 120	3	45
میزان	45	

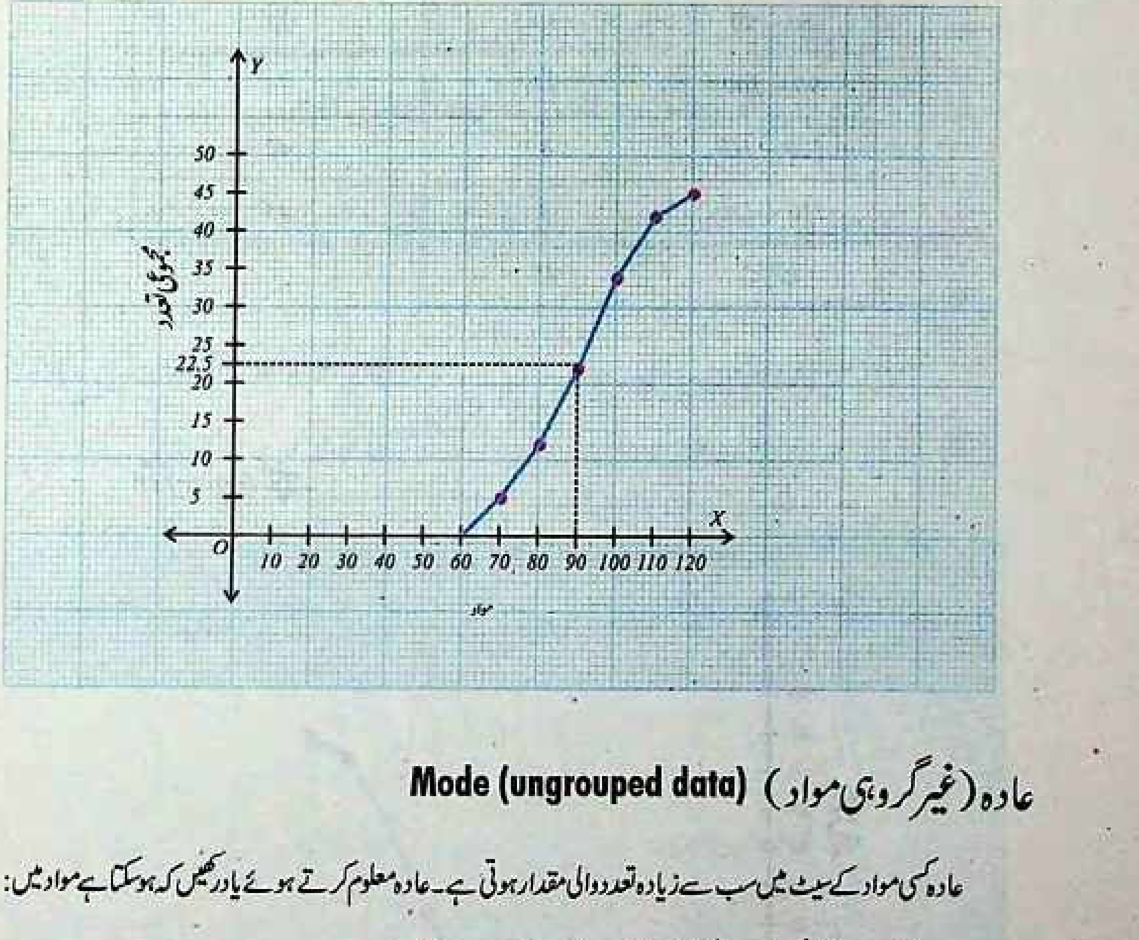
حل:-

اوگو (ogive) کھینچیے۔



تعددی محور پر وسطی نقطہ لیجیے جو کہ 22.5 ہے اس کو نمایاں کیجیے۔

اس نقطہ سے اوگیو (ogive) تک افقی لائن اور پھر وہاں سے عموداً افقی خط پر لائن کھینچیے۔ X۔محور پر دیے گئے مواد کا وسطانیہ جو تقریباً 90 ہے کو نوٹ کیجیے۔



عادہ (غیر گروہی مواد) Mode (ungrouped data)

عادہ کسی مواد کے سیٹ میں سب سے زیادہ تعدد والی مقدار ہوتی ہے۔ عادہ معلوم کرتے ہوئے یاد رکھیں کہ ہوسکتا ہے مواد میں:

(i) کوئی عادہ نہ ہو یعنی کہ مواد میں ہر قیمت ایک مرتبہ ہی آئے۔

(ii) ایک عادہ ہو۔

(iii) ایک سے زیادہ عادہ ہوں۔

مثال:۔ مواد کے سیٹ 6,2,4,3,4,5,4,5 کا عادہ معلوم کیجئے۔

حل:۔

ہم مواد کے سیٹ کا بغور جائزہ لیتے ہیں اور معلوم کرتے ہیں کہ کونسی قیمت سب سے زیادہ مرتبہ آئی ہے۔

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \end{array}$$

چونکہ عدد 4 کی تکرار زیادہ یعنی تین مرتبہ ہے پس عادہ 4 ہے۔

عادہ (گروہی مواد) Mode (grouped data)

گروہی مواد میں ہم عادہ صحیح طریقہ سے تو معلوم نہیں کرسکتے کیونکہ اصل قیمتیں جماعتی وقفوں (Class Intervals) میں ضم ہوجاتی ہے۔ تاہم ایسے جماعتی وقفہ کا تعین کرتے ہیں۔ جس کا تعدد سب سے زیادہ ہوتا ہے۔ اسے عادہ جماعت (Model Class) کہتے ہیں۔

مثال:۔ درج ذیل جدول میں عادہ جماعت کا تعین کیجئے۔

تعدد	جماعتی وقفہ
5	60 – 70
7	70 – 80
10	80 – 90
12	90 – 100
8	100 – 110
3	110 – 120
45	میزان

حل:۔

عادہ جماعت اس مواد میں سب سے زیادہ تعدد 12 والی جماعت (100-90) ہے۔

ضربی اوسط (غیر گروہی مواد) Geometric Mean (ungrouped data)

ضربی اوسط 'G'، n قیمتوں والے سیٹ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ کے لیے ان n قیمتوں کے حاصل ضرب کے nویں جذر کے برابر ہوتا ہے۔

$$G = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 \cdots, x_n} \quad \text{یا}$$

$$= (x_1 . x_2 . x_3 \cdots, x_n)^{\frac{1}{n}}$$

مثال:-

2، 4 اور 8 کا ضربی اوسط معلوم کیجیے۔

حل:-

$$G = \sqrt[3]{2 \times 4 \times 8} \qquad = \sqrt[3]{64}$$

$$= [(4)^3]^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4$$

ضربی اوسط (گروہی مواد) Geometric Mean (grouped data)

فرض کریں کہ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ان جماعتی وقفوں کی نمائندہ قیمتیں ہیں جن کے تعدد بالترتیب $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ہیں۔

(جبکہ $n = \Sigma f = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$) چونکہ x_1 مواد میں f_1 مرتبہ رونما ہوتا ہے۔

اسی طرح x_2، f_2 مرتبہ پایا جاتا وغیرہ وغیرہ بالآخر x_k، f_k مرتبہ پایا جاتا ہے۔

$$\underbrace{x_1 . x_1 \ldots . x_1}_{f_1 \, times} \qquad \underbrace{x_2 . x_2 \ldots . x_2}_{f_2 \, times} \quad \ldots \quad \underbrace{x_k . x_k \ldots . x_k}_{f_k \, times}$$

ان سب کا حاصل ضرب ہوگا۔ $x_1^{f_1} . x_2^{f_2} \ldots x_k^{f_k}$ اس طرح ضربی اوسط یہ ہوا۔

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} . x_2^{f_2} \ldots x_k^{f_k}}$$

$$= \left(x_1^{f_1} . x_2^{f_2} \ldots x_k^{f_k}\right)^{1/n}$$

بعض اوقات یہ اوزانی ضربی اوسط کہلاتی ہے۔ جبکہ f_k ، ... ، f_2 ، f_1 متعلقہ اوزان کہلاتے ہیں۔

مثال :- درج ذیل تعددی مواد کا ضربی اوسط معلوم کیجئے۔

x	1	2	3	4
f	2	3	4	1

حل :-

یہاں $\Sigma f = 2+3+4+1 = 10$

$$G = \left(x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \ldots x_k^{f_k}\right)^{1/n}$$

$$= \left((1)^2 \cdot (2)^3 \cdot (3)^4 \cdot (4)^1\right)^{1/10}$$

$$= \left(1\times 8\times 81\times 4\right)^{1/10}$$

$$= (2592)^{1/10} = 2.1946$$

ہارمونک اوسط (غیر گروہی مواد) Harmonic Mean (ungrouped data)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ قیمتوں والے گروہ کا ہارمونک اوسط (Harmonic Mean) ان قیمتوں کے ضربی معکوسوں کے حسابی اوسط کا ضربی معکوس (reciprocal) ہوتا ہے۔

$$\text{ہارمونک اوسط} = H = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)} = \frac{n}{\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)}$$

مثال :-

2، 4 اور 8 کا ہارمونک اوسط معلوم کیجئے۔

حل :-

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{3}{\frac{4+2+1}{8}} = \frac{3}{\frac{7}{8}} = \frac{3\times 8}{7} = \frac{24}{7} = 3.43$$

ہارمونک اوسط (گروہی مواد) The Harmonic Mean (grouped data)

فرض کیا $x_1, x_2, \ldots, x_k$ گروہوں کی نمائندہ قیمتیں جبکہ ان گروہوں کا تعدد بالترتیب $f_1, f_2, \cdots, f_k$ ہیں۔
جبکہ $(f_1 + f_2 + \cdots + f_k = \sum f_i = n)$

ان گروہی نمائندہ قیمتوں کے ضربی معکوس $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_k}$ ہیں۔ چونکہ ان قیمتوں کے تعدد بالترتیب $f_1, f_2, \cdots f_k$ ہیں۔

لہٰذا $\frac{1}{x_1}$ قیمتوں کا مجموعہ $f_1\left(\frac{1}{x_1}\right)$ یا $\frac{f_1}{x_1}$

اسی طرح بالترتیب تمام قیمتوں کے مجموعے $\frac{f_2}{x_2}, \frac{f_3}{x_3}, \ldots\ldots \frac{f_k}{x_k}$ ہوں گے۔

لہٰذا $\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \cdots + \frac{f_k}{x_k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{x_i} = \sum \frac{f_k}{x_k} = \sum f(\frac{1}{x})$

ہارمونک اوسط کی تعریف کی رو سے

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i(\frac{1}{x_i})} = \frac{\sum f}{\sum f(\frac{1}{x})} = \frac{n}{\sum f(\frac{1}{x})}$$

بعض اوقات اسے اوزانی ہارمونک اوسط کہتے ہیں جن کے اوزان بالترتیب $f_1, f_2, \cdots f_k$ ہیں۔

10.3.2 حسابی اوسط کی خصوصیات Properties of Arithmetic Mean

حسابی اوسط کی خصوصیات درج ذیل ہیں۔

(i) کسی مواد کی قیمتوں کے حسابی اوسط سے ان قیمتوں کے فرق کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

$$\sum (x_i - \overline{X}) = 0 \quad \text{یا} \quad \sum f_i \, (x_i - \overline{X}) = 0$$

(ii) اگر n_1 قیمتوں کا حسابی اوسط $\overline{x_1}$، n_2 قیمتوں کا حسابی اوسط $\overline{x_2}$ اور اسی طرح n_k قیمتوں کا حسابی اوسط $\overline{x_k}$ ہو تو ان تمام قیمتوں کا حسابی اوسط:

$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{X_1} + n_2\overline{X_2} + \cdots + n_k\overline{X_k}}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \overline{X_i}}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

(iii) کسی مواد کی قیمتوں کے کسی قیمت 'a' سے فرق کے مربعوں کا مجموعہ سب سے کم ہوگا اگر $a = \overline{X}$ علامتی طور پر $\sum (x_i - a)^2$ کی قیمت سب سے کم ہوگی اگر $a = \overline{X}$

10.3.3 اوزانی اوسط اور متغیر اوسط Weighted Mean and Moving Average

اگر کسی مواد میں $x_1, x_2, \cdots, x_k$ قیمتوں کے اوزان بالترتیب $w_1, w_2, \cdots, w_k$ ہوں تو اوزانی حسابی اوسط $\overline{x_w}$ کو یوں بیان کیا جاتا ہے۔

$$\overline{X_w} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_kx_k}{w_1 + w_2 + \cdots + w_k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i}$$

متحرک اوسط Moving Average

کسی مشاہدہ میں آنے والی ہو متواتر قیمتوں کے سلسلے کو استعمال کرتے ہوئے اوسط نکالنا متحرک اوسط کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر ہمیں 3 سالہ متحرک اوسط نکالنا ہو تو ہم اس سیریز کی پہلی تین قیمتیں لیتے ہیں۔ ان کا اوسط لے کر ہم ان قیمتوں کی وسطی قیمت کے سامنے لکھ لیتے ہیں۔ پھر ہم ان تینوں قیمتوں میں سے پہلے چھوڑ کر چوتھی قیمت شامل کرتے ہیں اور ان تینوں کی اوسط لے کر ان کی وسطی قیمت کے سامنے لکھتے ہیں۔ اس کی الجبری شکل یہ ہے۔

$$a_1 = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$a_2 = \frac{1}{3}(y_2 + y_3 + y_4) \quad \text{وغیرہ وغیرہ}$$

ربعی قاطع Quartiles

ہم جانتے ہیں کسی مواد کو ترتیب میں لکھنے کے بعد اس کا وسطانیہ (*Median*) اس مواد کی وسطی قیمت ہوتا ہے (جو کہ مجموعی تعدد طاق ہونے کی صورت میں درمیانی قیمت اور جفت کی صورت میں اس کی دو وسطی قیمتوں کا اوسط ہوتا ہے) یہ وسطانیہ اس مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اسی طرح مواد کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرنے والی قیمتوں کو ربعی قاطع کہتے ہیں۔ اس طرح تین قیمتیں جو مترتب مواد کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں ربعی قاطع کہلاتی ہیں انہیں Q_1, Q_2 اور Q_3 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

پہلے ربعی قاطع کو زیریں ربعی قاطع (*Lower Quartile*) جبکہ تیسرے ربعی قاطع کو بالائی ربعی قاطع (*Upper Quartile*) کہتے ہیں۔

$$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right) \text{کے مقام پر آنے والی قیمت}$$

$$Q_2 = 2\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ یا } \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{کے مقام پر آنے والی قیمت}$$

$$Q_3 = \frac{3(n+1)}{4} \text{کے مقام پر آنے والی قیمت}$$

مثال:-

درج ذیل مواد میں 20 طلباء کے شماریات کے ٹیسٹ میں حاصل کردہ نمبروں کے تمام ربعی قاطع معلوم کیجئے۔

53 74 82 42 39 20 81 68 58 28
67 54 93 70 30 55 36 37 29 61

حل:-

n=20، طلباء کے نمبروں کو ترتیب صعودی میں لکھنے سے:

20 28 29 30 36 37 39 42 53 54
55 58 61 67 68 70 74 81 82 93

$Q_1 =$ نیچے سے $\left(\frac{n+1}{4}\right)$ ویں یا $\left(\frac{20+1}{4}\right)$ ویں یعنی 5.25 ویں نمبر پر آنے والی قیمت

چونکہ 5 ویں نمبر پر آنے والی قیمت 36 اور 6 ویں نمبر پر آنے والی قیمت 37 ہے۔ لہٰذا پہلا ربعی قاطع نمبر 5 اور نمبر 6 کی قیمتوں کے درمیان پانچویں قیمت سے آگے 0.25 کے فاصلے پر ہوگا۔ پس

$$Q_1 = 36.25$$

Q_2 (وسطانیہ) $=$ نیچے سے $2\left(\frac{n+1}{4}\right)$ یا $\frac{2(20+1)}{4}$ یا $\frac{21}{2}$ یا 10.5th ویں قیمت ہوگا۔

10 ویں نمبر پر آنے والی قیمت 54 ہے جو کہ 11 ویں کے 0.5 فاصلے پر ہوگا یعنی کہ 55 ہے۔ لہٰذا دوسرا ربعی قاطع 10 ویں اور 11 ویں کے درمیان ہوگا۔ یعنی کہ 54.5 ہے۔

پس $$Q_2 = 54.5$$

$Q_3 =$ نیچے سے یا $\frac{3(n+1)}{4}$ یا $\frac{3(20+1)}{4}$ یا $\frac{3\times 21}{4}$ یا $\frac{63}{4}$ یا 15.75 قیمت ویں

15 ویں نمبر پر 68 جبکہ 16 ویں نمبر پر 70 ہے لہٰذا 68 سے آگے 70 تک کے فاصلے کا 0.75 حصہ طے کرنے پر تیسرا ربعی قاطع حاصل ہوگا۔

پس $$Q_3 = 68 + 0.75(70 - 68)$$

$$Q_3 = 69.5$$

مثال:-

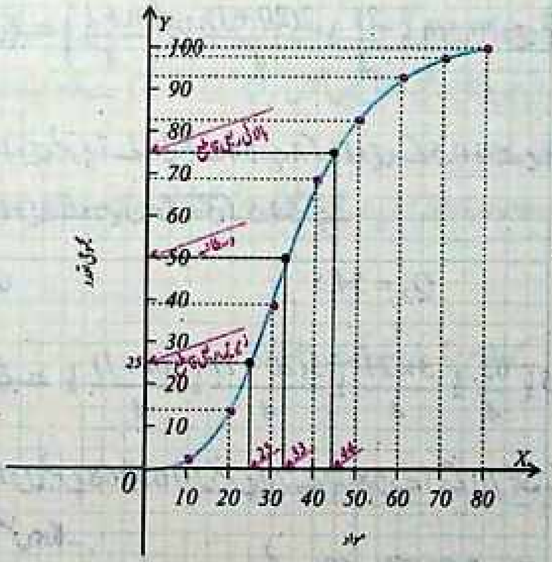
100 طلباء کے امتحان میں حاصل کردہ نمبر درج ذیل جدول میں دیے گئے ہیں۔

مجموعی تعدد	تعداد طلباء	حاصل کردہ نمبر
2	2	1 —— 10
14	12	11 —— 20
39	25	21 —— 30
68	29	31 —— 40
83	15	41 —— 50
93	10	51 —— 60
97	4	61 —— 70
100	3	71 —— 80

اوگو کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل ربعی قاطع کا تخمینہ لگایئے۔

(i) بالائی ربعی قاطع

(ii) زیریں ربعی قاطع



(i) مجموعی تعدد کا $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 100 = 75$

اوگو سے ہمیں 75 ویں تعدد کے متناظرہ مواد کی قیمت 44 حاصل ہوتی ہے۔ لہٰذا بالائی ربعی قاطع = 44

(ii) مجموعی تعدد کا $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 100 = 25$

اوگو میں ہمیں 25 تعدد کے متناظرہ مواد کی قیمت 25 حاصل ہوتی ہے۔
لہٰذا زیریں ربعی قاطع = 25

(iii) مجموعی تعدد کا $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100 = 50$

اوگو میں 50 تعدد کے سامنے مواد کی قیمت 33 حاصل ہوتی ہے۔
لہٰذا وسطانیہ = 33

X-محور پر 2 چھوٹے مربع = 10 اکائی
Y-محور پر 2 چھوٹے مربع = 10 اکائی

10.3.4 ترسیم کی مدد سے وسطانیہ، ربعی قاطع اور عادہ کا تخمینہ لگانا

Estimate Median, Quartile and Mode Graphically.

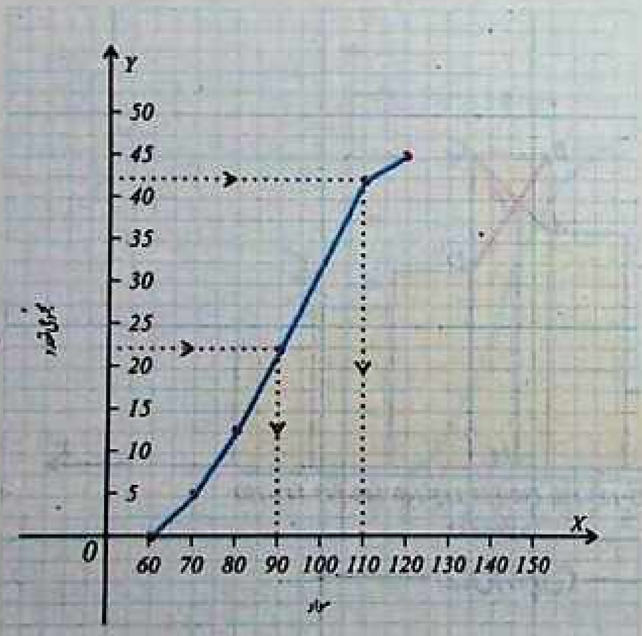
Graphic Location of Median

وسطانیہ کا ترسیمی تعین

وسطانیہ کی تخمینی قیمت کا تعین اوگو (Ogive) سے بھی کیا جاسکتا ہے۔ (جوکہ مجموعی تعدد والی کثیر الاضلاع ہوتی ہے) وسطانیہ اوگو میں $\frac{n}{2}$ کے مقابل X کی قیمت ہوتی ہے۔ پس وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے ہم Y۔محور پر $\frac{n}{2}$ کی قیمت لے کر اس مقام پر Y۔محور پر عمود اٹھا کر اوگیو کو کاٹتا ہوا کھینچتے ہیں۔ پھر اس نقطہ سے X۔محور پر عمود گراتے ہیں اس مقام پر جو قیمت x کی نکلتی ہے وہ وسطانیہ کہلاتی ہے۔

جماعتی وقفے	تعدد	مجموعی تعدد
60 —— 70	5	5
70 —— 80	7	12
80 —— 90	10	22
90 —— 100	12	34
100 —— 110	8	42
110 —— 120	3	45
	45	——

جدول میں دیئے گئے مواد کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔



(i) اوگو (ogive) تیار کیجئے۔

(ii) Y۔محور پر مجموعی تعدد کا نصف معلوم کریں۔ جوکہ 22.5 ہے اسے لیبل کیجئے۔

(iii) اس مقام سے X۔محور کے متوازی افقی خط اوگو (ogive) تک کھینچئے اور پھر وہاں سے X۔محور پر عمود گرایئے اور پھر وہاں سے X۔محور پر عمود گرایئے

(iv) یہاں سے وسطانیہ کی قیمت جوکہ تقریباً 90 ہے حاصل کیجئے۔

مثال:-

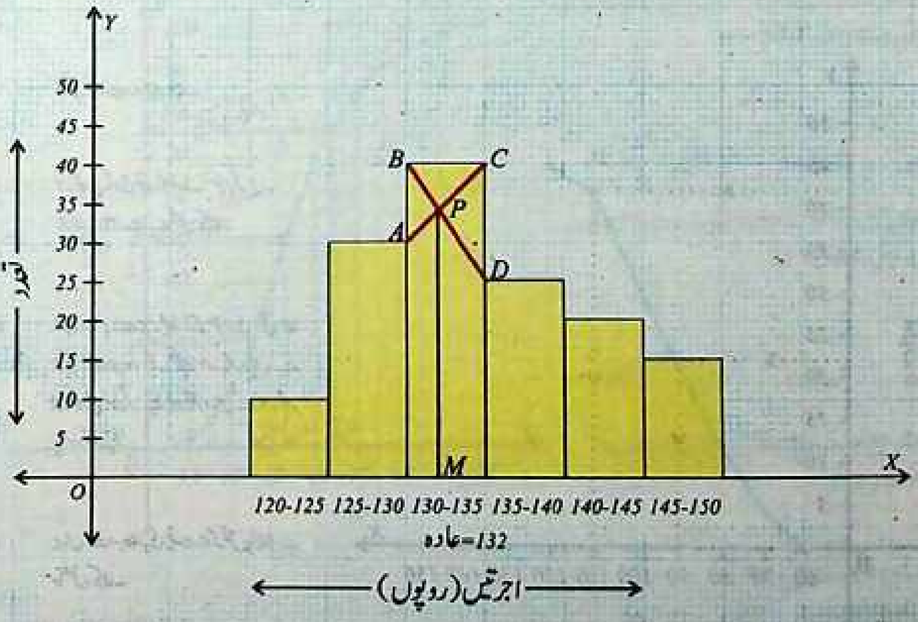
دیئے گئے مواد سے ترسیمی طریقے سے عادہ (Mode) معلوم کیجئے۔

اجرتیں (روپوں)	120 – 125	125 – 130	130 – 135	135 – 140	140 – 145	145 – 150
f / تعدد	10	30	40	25	20	15

حل:-

اجرتیں (روپوں) میں X۔محور پر لی گئیں جبکہ تعدد Y۔محور پر لیے گئے ہیں۔ایک بڑا مربع X۔محور پر 5 اکائیوں اور Y۔محور پر 10 اکائیوں کو ظاہر کرتا ہے۔ہم زیادہ تعدد والے کالموں کے سب سے بلند سروں کو ملاتے ہیں۔کناروں کو ملانے والے قطعات AC اور BD ایک دوسرے کو نقطہ P پر کاٹتے ہیں۔P سے ہم X۔محور پر عمود گراتے ہیں جو کہ اسے M پر ملتا ہے۔یہاں پر M کی قیمت 132 بنتی ہے۔

پس　　عادہ (Mode)=132



ربعی قاطع ترسیم کے ذریعے معلوم کرنا Graphic Location of Quartiles

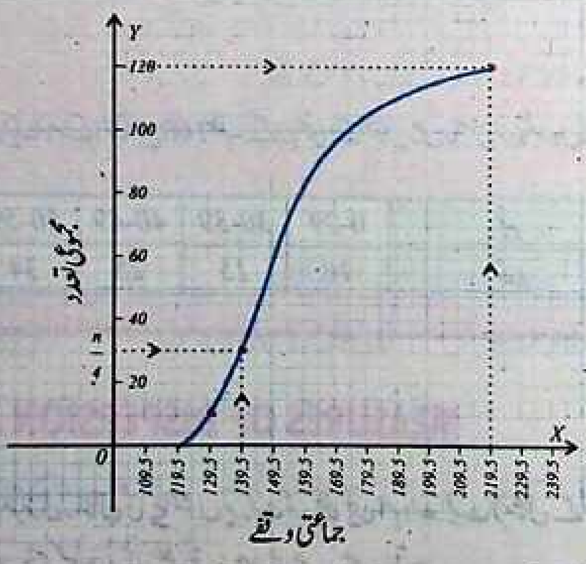
مثال:- درج ذیل جدول ریاضی کے سالانہ امتحان میں گریڈ کی تعداد کی تفصیل کو ظاہر کرتا ہے۔ ترسیم کی ذریعے پہلے ربعی قاطع کی نشاندہی کیجئے۔

گریڈ	90-99	80-89	70-79	60-69	50-59	40-49	30-39
طلباء کی تعداد	9	32	43	21	11	3	1

حل:-

ترسیمی نشاندہی کے لیے طلباء کی تفصیل کو ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

گریڈ	طلباء کی تعداد (f)	جماعتی وقفے	مجموعی تعدد
30-39	1	29.5 – 39.5	1
40-49	3	39.5 – 49.5	4
50-59	11	49.5 – 59.5	15
60-69	21	59.5 – 69.5	36
70-79	43	69.5 – 79.5	79
80-89	32	79.5 – 89.5	111
90-99	9	89.5 – 99.5	120



مشق 10.3

1- درج ذیل مواد کی تعددی کثیر الاضلاع بنائیے۔

(i) کسی امتحان میں 30 طلباء کی تفصیل جدول میں دی گئی ہے۔

نمبر	0-39	40-49	50-79	80-99
تعدد	8	8	10	4

(ii) 40 طلباء کی رکاوٹی دوڑ کے وقت (سیکنڈوں میں) کی تفصیل جدول میں دی گئی ہے۔

وقت (سیکنڈ)	1-40	41-50	51-60	61-70
تعدد	8	15	7	10

(iii) کسی فش اینڈ چپس شاپ میں چپس کے 30 پیکٹوں کے اوزان کی تفصیل جدول میں درج ہے۔

اوزان (گرام)	1-50	51-60	61-70	71-80
تعدد	4	8	14	4

(iv) دیے گئے جدول میں ایک ٹرم کے اختتام پر 100 طلباء کے ریاضی کے امتحان میں حاصل کردہ نمبروں کی تفصیل درج ہے۔

نمبر	0-29	30-39	40-49	50-59	60-99
تعدد	10	15	25	34	16

10.4 انتشاری پیمائش MEASURES OF DISPERSION

اس سے پچھلے حصے میں ہم مرکزی رجحان کی پیمائشوں پر بحث کر چکے ہیں ہم واحد قیمت (مثال کے طور پر اوسط، وسطانیہ اور عادہ) معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں جو کہ کسی مواد کی وسطی قیمت نکالنے میں مددگار ہوتی ہیں۔

اس مقصد کے لئے ہم درج ذیل تفصیل کو لیتے ہیں۔

1.	63, 63, 63, 63, 63, 63, 63, 63	$\overline{X} = 63$
2.	62, 62, 62, 63, 63, 64, 64, 64	$\overline{X} = 63$
3.	48, 49, 57, 63, 69, 68, 74, 78	$\overline{X} = 63$
4.	40, 41, 47, 52, 62, 87, 88, 94	$\overline{X} = 63$

درج بالا تفصیل کی اوسط یکساں یعنی 63 ہے، لیکن یہ تفصیل اپنی انتشار میں بہت مختلف ہیں یعنی کہ اپنی اوسط قیمت سے پھیلاؤ میں۔

چونکہ قیمتوں کے انتشار میں بہت فرق ہے۔ اس کے باوجود یہ ایک ہی اوسط یعنی 63 سے بیان ہوتی ہیں۔ تاہم ہمیں ایک پیمانے کی ضرورت ہے جو اس بات کا تعین کر سکے کہ مواد کتنا پھیلا ہوا ہے۔

اس مقصد کے لیے استعمال کی جانے والی پیمائشوں کو انتشاری پیمائش کہتے ہیں۔

سعت Range

انتشار کی سادہ ترین پیمائش سعت ہے۔ سعت مواد کی سب سے بڑی قیمت کا سب سے چھوٹی قیمت سے فرق ہوتی ہے۔ اگر سب سے چھوٹی قیمت X_o ہو اور سب سے بڑی قیمت X_m ہو تو سعت R کو یوں ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$R = X_m - X_o$$

مثلاً قیمتوں کے سیٹ 6,8,13,11,18,27,23 کے لیے

$$R = 27 - 6 = 21$$

مثال:-

درج ذیل مواد کی سعت معلوم کیجئے۔

(i) 2,9,3,6,12,8 (ii) 6,8,10,14,13,12 (iii) 10,18,9,6,22

حل:-

(i) سب سے چھوٹی قیمت = 2, سب سے بڑی قیمت = 12, سعت = 12 − 2 = 10

(ii) سعت = 14 − 6 = 8

(iii) سعت = 22 − 6 = 16

تغیریت Variance

تغریت معیاری انحراف کا مربع کہلاتی ہے۔ یعنی مواد کی اوسط سے انحراف کے مربعوں کی اوسط کے برابر ہے۔

$$\text{تغریت} = \frac{\sum (x-\overline{X})^2}{n} \quad \text{(غیر گروہی مواد)}$$

$$\text{تغریت} = \frac{\sum f(x_i-\overline{X})^2}{\sum f} \quad \text{(گروہی مواد)}$$

معیاری انحراف Standard Deviation

یہ دیئے گئے مواد کے اوسط فرق کے مربعوں کی اوسط کا مثبت جذر ہوتی ہے۔

n قیمتوں $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ کے معیاری فرق کو S سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{X})^2}{n}} \quad \text{(غیر گروہی مواد)}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum f(x-\overline{X})^2}{\sum f}} \quad \text{(گروہی مواد)}$$

جبکہ　$n = f_1 + f_2 + \cdots + f_k = \sum f$

مثال 1:- مواد $1,2,3,4,6,8,11$ کے لیے معیاری فرق اور تغریت معلوم کیجئے۔

حل:-

$$\overline{X} = \frac{1+2+3+4+6+8+11}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{X})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-5)^2+(2-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2+(11-5)^2}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{16+9+4+1+1+9+36}{7}} = \sqrt{\frac{76}{7}}$$

$$= \sqrt{10.86}$$

$$S = 3.295$$

$$\text{معیاری فرق} = S - 3\ 2955$$

$$\text{تغیریت} = \frac{\Sigma(x-\overline{X})^2}{n} = \frac{76}{7}$$

$$= 10.86$$

مثال 2:- انگریزی کے کسی امتحان میں 50 طلباء کے حاصل کردہ نمبروں کی تعددی تفصیل کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔ نیز اس کی تغیریت بھی معلوم کیجئے۔

نمبر	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49	50–54
تعدد	1	4	8	11	15	9	2

حل:-

نمبر	تعدد (f)	جماعتی نمائندہ قیمت	fx	$x-\overline{X}$	$(x-\overline{X})^2$	$f(x-\overline{X})^2$
20–24	1	22	22	− 17	289	289
25–29	4	27	108	− 12	144	576
30–34	8	32	256	− 7	49	392
35–39	11	37	407	− 2	4	44
40–44	15	42	630	3	9	135
45–49	9	47	423	8	64	576
50–54	2	52	104	13	169	338
	$n=\Sigma f=50$		$\Sigma fx=1950$			2350

$$\overline{X} = \frac{\Sigma f x}{\Sigma f} = \frac{1950}{50} = 39 \text{ نمبر}$$

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma f(x-\overline{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{2350}{50}} = \sqrt{47}$$

پس

$$\text{معیاری فرق} = S = 6.85 \text{ نمبر}$$

اور

$$= \frac{\Sigma f(x-\overline{X})^2}{n} = \frac{2350}{50}$$

$$= 47 \text{ مربع نمبر}$$

مشق 10.4

-1 دیے گئے سوا د کا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع (یعنی اوگو) بنائیے۔

(i) جدول میں 10 سالہ عمر کے 60 بچوں کے اوزان (کلوگرام میں) کی تفصیل دی گئی ہے۔

وزن (کلوگرام)	31-36	37-39	40-42	43-45	46-54
تعدد	8	10	18	12	12

(ii) جدول میں 50 طلباء جن کی عمریں 5 سال ہیں کا رات کے کھانا کھانے کے اوقات (منٹوں) میں تفصیل دی گئی ہے۔

وقت (منٹوں میں)	4-5	6-7	8-9	10-11	12-15	16-19	20-29
تعدد	5	4	10	9	6	6	10

(iii) جدول میں 08:30 تا 09:30 کے دوران صبح کے اوقات میں مختلف عمر کے لوگوں کی بس سٹاپ پر بس میں سوار ہونے کی تفصیل درج ہے۔

عمر (سالوں میں)	0-9	10-19	20-29	30-39	40-69
تعدد	10	20	30	20	15

(iv)

جماعتیں	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
تعدد	10	15	20	30	15

(v) جدول میں 100 لوگوں کے اوزان کی تعددی تفصیل درج ہے۔

اوزان (کلوگرام میں)	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	100-109
تعدد	15	30	35	15	3	2

جائزہ مشق 10

صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

-1

(i) جب کوئی کالمی نقشہ اس طرح سے تیار کیا جائے کہ ہر کالم کا رقبہ اس میں موجود گروہ کے تعدد کے متناسب ہو تو یہ کہلاتا ہے۔

(a) منحنی (b) اوگو (c) کالمی نقشہ (d) بار چارٹ

(ii) کسی مواد کا شماریاتی اختصار جو وسط (مرکز) کی پیائش کرتا ہے، کہلاتا ہے۔

(a) اوسط (b) عادہ (c) وسطانیہ (d) سب کے سب

(iii) اگر کسی مواد کی قیمتوں کو جمع کر کے مجموعہ کو ان کی کل تعداد پر تقسیم کیا جائے تو یہ کہلاتا ہے۔

(a) اوسط (b) عادہ (c) وسطانیہ (d) اوزانی اوسط

(iv) کسی مترتب مواد میں وسطی عددی قیمت کہلاتی ہے۔

(a) عادہ (b) وسطانیہ (c) اوسط (d) ضربی اوسط

(v) وہ قیمت جو کسی مواد میں سب سے زیادہ مرتبہ آئے، کہلاتی ہے۔

(a) عادہ (b) اوسط (c) وسطانیہ (d) ضربی اوسط

(vi) $\overline{X} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$ کہلاتا ہے۔

(a) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ کا اوسط (b) حسابی اوسط

(c) ضربی اوسط (d) اوزانی اوسط

(vii) $H = \dfrac{n}{\sum\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ کہلاتا ہے۔

(a) ہارمونک اوسط (b) عادہ (c) اوسط (d) حسابی وسط

(viii) $\overline{X}_w = \dfrac{\sum wx}{\sum w}$ کہلاتا ہے۔

(a) حسابی اوسط (b) اوزانی اوسط

(c) ضربی اوسط (d) اوسط

(ix) $\sum(x_i - \overline{X}) = 0$ کو خاصیت کہا جاتا ہے۔

(a) حسابی وسط (b) ضربی اوسط

(c) ہارمونک اوسط (d) عادہ

-2 خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) کوئی کالمی نقشہ اس طرح سے تعمیر کیا جائے کے ہر کالم کا رقبہ اس میں موجود گروہ کے تعدد کے متناسب ہو تو وہ ______ کہلاتا ہے۔

(ii) شماریاتی انحصار جو کہ کسی مواد کی درمیانی (وسطی) قیمت کی نمائندہ ہو ______ کہلاتا ہے۔

(iii) اگر کسی مواد کی تمام عددی قیمتوں کو جمع کر کے ان کی تعداد پر تقسیم کیا جائے تو یہ ______ کہلاتا ہے۔

(iv) عددی قیمت کے لحاظ سے کسی مترتب مواد کی وسطی قیمت ______ کہلاتی ہے۔

(v) وہ عددی قیمت جو کسی مواد میں سب سے زیادہ مرتبہ آئے ______ کہلاتی ہے۔

(vi) $\overline{X} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$ ______ کہلاتا ہے

(vii) n قیمتوں والے سیٹ کے حاصل ضرب کا nth جذر ______ کہلاتا ہے۔

(viii) $H = \dfrac{n}{\sum\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ ______ کہلاتا ہے۔

(ix) $\overline{X}_w = \dfrac{\sum wx}{\sum w}$ ______ کہلاتا ہے۔

(x) $\sum(x_i - \overline{X}) = 0$ ______ کی ایک خاصیت ہے۔

-3 $2,3,6,8,11$ کا معیاری انحراف معلوم کریں۔

-4 غیر گروہی مواد جس میں $\sum(x-\overline{x})^2 = 1444, n = 15$ ہو تو اس غیر گروہی مواد کا معیاری انحراف اور تغیریت معلوم کیجیے۔

-5 مواد $3,5,6,8,8,9,10$ کا (i) اوسط (ii) وسطانیہ (iii) عادہ معلوم کیجیے۔

-6 درج ذیل قیمتوں کے سیٹ
$4,6,7,4,8,9,7,10$ کا اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کیجیے۔

خلاصہ

- کالمی نقشہ جس کے ہر کالم کا رقبہ اس میں موجود گروہ کی قیمتوں کی تعداد کے متناسب ہو اس مواد کا کالمی نقشہ کہلاتا ہے۔

- مجموعی تعدد، کسی بھی قدر سے پہلی قدروں کے تعددات کے مجموعہ کو کہتے ہیں۔

- جب مجموعی تعدد کو بالمقابل جماعتی وقفوں کی انتہائی قیمت کے بالمقابل رکھ کر گراف پیپر پر نقاط لگائے جائیں۔ پھر ان نقاط کو ملانے سے حاصل شدہ گراف کو مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کہتے ہیں۔

- شماریاتی اختصار کسی مواد کی وسطی (مرکز) کا تعین کرتا ہے۔

- کسی مواد کا اوسط حاصل کرنے کے لئے اس کی تمام قیمتوں کو جمع کر کے اس کی تعداد پر تقسیم کیا جاتا ہے۔

- کسی مواد کی عددی ترتیب میں درمیانی قیمت وسطانیہ کہلاتی ہے۔

- عادہ کسی مواد میں سب سے زیادہ بار آنے والی قیمت ہوتی ہے۔

- کسی غیر گروہی مواد کا حسابی اوسط اس کی تمام عددی قیمتوں کو جمع کر کے ان کی کل تعداد سے تقسیم کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

- وسطانیہ کسی مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے جبکہ چھ اور قیمتیں مواد کے سیٹ کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں جو کہ پہلا، دوسرا اور تیسرا ربعی قاطع کہلاتے ہیں۔

- n مثبت قیمتوں $x_1, x_2, \ldots, x_n$ کا ضربی اوسط "G" ان کے حاصل ضرب کا n واں مثبت جذر ہوتا ہے۔

- n قیمتوں $x_1, x_2, ..., x_n$ کا ہارمونک اوسط "H" ان قیمتوں کے ضربی معکوس قیمتوں کے حسابی اوسط کا ضربی معکوس قیمت ہوتا ہے۔

- تغیریت، معیاری انحراف کا مربع ہوتی ہے۔ یعنی کہ حسابی اوسط سے مواد کی قیمتوں کے فرق کے مربعوں کے اوسط کے برابر ہوتی ہے۔

- انتشار کی سادہ ترین پیمائش سعت (Range) ہے۔ سعت کسی مواد کی سب سے بڑی قیمت کا سب سے چھوٹی قیمت سے فرق ہوتی ہے۔

- معیاری فرق تمام قیمتوں کے حسابی اوسط کے مواد کی قیمتوں کے فرق کے مربعوں کی اوسط کا مثبت جذر ہوتا ہے۔ n قیمتوں $x_1, x_2, ..., x_n$ کا معیاری انحراف 'S' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

- اگر مواد میں $x_1, x_2, ..., x_k$ قیمتوں کے اوزران (Weight) بالترتیب $w_1, w_2, ..., w_k$ ہوں تو اوزانی حسابی اوسط جو کہ $\overline{x_w}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\overline{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i}$$

مشق 1.1

1- (i) $\frac{19}{20}$ (ii) $\frac{13}{20}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) $\frac{1}{4}$ (v) $\frac{14}{25}$ (vi) $\frac{12}{25}$ (vii) $\frac{2}{25}$ (viii) $\frac{67}{200}$
(ix) $\frac{3}{8}$ (x) $\frac{7}{8}$ (xi) $\frac{21}{400}$ (xii) $\frac{17}{40}$

2- (i) 75% (ii) 60% (iii) 16% (iv) 65% (v) 124% (vi) 52.5% (vii) 38.3%
(viii) 266.66% (ix) 160% (x) 87.5% (xi) 62.5% (xii) 37.5%

3- (i) 0.47 (ii) 0.58 (iii) 0.92 (iv) 0.08 (v) 0.12 (vi) 1.20
(vii) 1.80 (viii) 1.45 (ix) 0.055 (x) 0.0533 (xi) 0.486 (xii) 0.583

4- (i) 50% (ii) 90% (iii) 125% (iv) 139% (v) 172% (vi) 22%
(vii) 264% (viii) 341% (ix) 84.5% (x) 178% (xi) 158% (xii) 6.5%

5- (ii) 80% (iii) $\frac{2}{5}$, 0.4 (iv) $\frac{31}{50}$, 62% (v) $\frac{11}{25}$, 0.44

مشق 1.2

1- 55% 2- 18% 3- 12% 4- (i) پاکستانی = 208, چائنیز = 68, ایرانی = 48, سعودی = 76 (ii) 19%
5- ریاضی 6- 27.78% 7- 500 طے 8- روپے 7500 9- 20%

مشق 1.3

1- (i) 4 : 1 (ii) 4 : 1 (iii) 1 : 4 (iv) 1 : 1 (v) 5 : 4 (vi) 6 : 11

2- (i) 10 : 9 (ii) 16 : 15 (iii) 25 : 21 (iv) 13 : 6 (v) 4 : 1
(vi) 1 : 50 (vii) 3 : 4 (viii) 3 : 7 (ix) 6 : 5

3- (i) 14 : 9 (ii) 3 : 25 (iii) 9 : 28

4- (i) 15 : 23 (ii) 23 : 17 (iii) 23 : 12 (iv) 12 : 17 (v) 4 : 5 (vi) 17 : 15

مشق 1.4

1- 1 : 1 2- 16 : 15 3- 3 : 4 4- (i) 1 : 3 (ii) 1 : 3 (iii) 1 : 9 5- 2 : 1
6- (i) 3 : 4 (ii) 2 : 3 (iii) 1 : 2 7- 3 : 7 8- (i) 8 : 7 (ii) 7 : 1 (iii) 8 : 1
9- (i) 3 : 4 (ii) 9 : 16 10- (i) 2 : 1 (ii) 1 : 3

جوابات

مشق 1.5

1- 20　　2- 9 سوٹ　　3- 5 لڑکے　　4- 75 کلومیٹر فی گھنٹہ

5- 8 دن　　6- 120 بائیسکل　　7- 864 بچے　　8- 720 سوٹ

9- 2240 روپے　　10- 18200 روپے　　11- 110 گائیں　　12- 2700 بوتلیں

جائزہ مشق 1

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) b　(ii) b　(iii) a　(iv) d　(v) c　(vi) b　(vii) d　(viii) a　(ix) a　(x) b

2- خالی جگہ پُر کیجیے۔

(i) 450　(ii) $\frac{3}{20}$　(iii) 28 %　(iv) 67%　(v) 29 %　(vi) اشیاء کی قیمت

(vii) کاٹی گئی قیمت　(viii) طرفین　(ix) وسطین　(x) 10 : 9

3- 30 %　　4- 7000 روپے　　5- (i) 2:1　(ii) 22:5　(iii) 11:3

6- 2 : 3　　7- 16 دن　　8- 9720 روپے

مشق 2.1

1- 27750 روپے　　2- 7500 روپے　　3- 15,000 روپے　　4- 36,250 روپے　　5- 60,000 روپے

6- 17500 روپے　　7- بیوہ 93750 روپے ; بیٹا 262500 روپے ; بیٹی 131250 روپے

8- بیوہ 50,000 روپے ; بیٹی 87500 روپے　　9- 3,75,000 روپے

10- بیوہ 2,50,000 روپے ; بیٹا 8,75,000 روپے

11- بیوہ 60,000 روپے ; بیٹا 84,000 روپے , بیٹی 42000 روپے　　12- 100,000

جائزہ مشق 2

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) a　(ii) c　(iii) a　(iv) a　(v) c　(vi) b　(vii) a　(viii) c　(ix) a　(x) a

2- خالی جگہ پُر کیجیے۔

(i) 2.5 %　(ii) 10 %　(iii) 5 %　(iv) 5000 روپے　(v) 10,000 روپے

(vi) $\frac{1}{8}$　(vii) $\frac{1}{4}$　(viii) $\frac{1}{2}$　(ix) 2:1　(x) $\frac{2}{3}$

3- 37500 روپے　　4- 24500 روپے　　5- بیوہ 5,62,500 روپے　بیٹے 19,68,750 روپے

6- بیوہ کا حصہ 6,00,000 روپے　ہر بیٹے کا حصہ 8,40,000 روپے　ہر بیٹی کا حصہ 4,20,000 روپے

جوابات

مشق 3.1

1- (i) 1045 روپے (ii) 1463 روپے (iii) 10560 روپے (iv) 119700 روپے (v) 494.40 روپے (vi) 729.60 روپے

2- 2,73,000 روپے 3- (i) 640 روپے (ii) 925 روپے (iii) 1560 روپے (iv) 3000 روپے (v) 75 روپے

4- $12\frac{1}{2}\%$ 5- 25 % 6- 1260 روپے 7- 213 روپے 8- 1215 روپے

مشق 3.2

1- (i) 684.32 روپے (ii) 2622 روپے (iii) 364.089 روپے 2- (i) 560 روپے (ii) 975 روپے (iii) 2500 روپے

3- 5 % 4- 7.5 % 5- 400 روپے 6- 920 روپے 7- 11730.60 روپے 8- 20 %

مشق 3.3

1- 60,000; 40,000; 1,00,000

2- علی کا حصہ 22,500 روپے؛ دانیال کا حصہ 33,750 روپے؛ عبداللہ کا حصہ 56,250 روپے

3- 180; 240; 300

4- پہلے حصے دار کا منافع 1,00,000 روپے؛ دوسرا حصے دار کا منافع 1,50,000 روپے؛ تیسرا حصے دار کا منافع 3,50,000 روپے
پہلے حصے دار کی رقم 600,000 روپے؛ دوسرے حصے دار کی رقم 900,000 روپے؛ تیسرے حصے دار کی رقم 2100,000 روپے

5- 39200 6- A کے 70 روپے، ذکی رقم 154 روپے

جائزہ مشق 3

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگایئے۔

(i) c (ii) b (iii) b (iv) b (v) a

2- خالی جگہ پُر کیجیے۔

(i) قیمت خرید (ii) قیمت فروخت (iii) نفع (iv) $\frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}}\times 100$ (v) 100 − رعایت %

3- 5.5 % 4- 16.6 % 5- 9000; 15000; 9000 6- (i) 60000 (ii) 36000

مشق 4.1

1- 161.406 پونڈ 2- 1,11,724.5 روپے 3- 15 روپے نفع

4- (i) 12615 روپے (ii) 12517.42 روپے (iii) 97.58 روپے 5- (i) 4.6296 روپے (ii) 0.2067 ریال فی کلوگرام

6- 15772 روپے 7- نقصان 1099.58 روپے 8- نفع 4759 روپے 9- (i) خریدنے کا خرچ TT=10055.20 (ii) 1857.37 روپے

مشق 4.2

1- 1100 2- 132 3- 10 سال 4- 4.25% سالانہ 5- 1019.50 6- $7\frac{1}{2}\%$ سالانہ

7- (a) 6720, 18720 (b) 4 سال, 720 (c) 300, 408 (d) 4%, 4200 (e) 3600, 5% (f) 7%, 1989
(g) 6%, 540 (h) 1200, $1\frac{1}{2}$ سال 8- 16 9- 6180 10- 20,000

11- (i) 94.50 روپے (ii) 257.72 روپے (iii) 1244.03 روپے (iv) 149.84 روپے (v) 2422.94 روپے

12- 5829.57 روپے 13- 903.13 روپے 14- 9001.35 روپے

مشق 4.3

1- 1520.50 روپے   2- 88.50 روپے   3- 65000 روپے   4- 7084 روپے   5- 3600 روپے

6- 35000 روپے   7- 157.49 روپے   8- 3040 روپے   9- 6480 روپے

مشق 4.4

1-

پالیسی کی رقم	سالانہ پریمیم	ششماہی پریمیم	سہ ماہی پریمیم	ماہانہ پریمیم
(i) 50,000	2250 + 125	1235	641.50	213.75
(ii) 100,000	4500 + 200	2444	1269.00	423.00
(iii) 150,000	6750 + 200	3614	1876.50	625.30
(iv) 200,000	9000 + 200	4784	2484.00	828.00

2- (50,000 + 1,20,000 + 4500) روپے = 1,74,500 روپے   3- (150000 + 135000 + 121500 + 0) روپے = 406500 روپے

4- 700,000 روپے, 159050 روپے   5- 4,32,250 روپے   6- (36,125 + 32512.50) روپے = 68,637.50 روپے

7- (26,250 + 23,625 + 21,262.50 + 19136.25) = 90273.75 روپے   نفع 9726.25 روپے

8- 800,000 روپے تقریباً, 23400 روپے , صفر

مشق 4.5

1- (a) i. 90 روپے ii. 25%   (b) i. 150 روپے ii. $16\frac{2}{3}$%   (c) i. 3000 روپے ii. 12%   2- (i) 21 روپے (ii) 288 روپے

3- (a) i. 236 روپے ii. 18%   (b) i. 51750 روپے ii. 15%   (c) i. 1960 روپے ii. 22.5%

4- (a) i. 63 روپے ii. 7%   (b) i. 200 روپے ii. 15%   (c) i. 75 روپے ii. $16\frac{2}{3}$%

5- (i) 3716.80 روپے (ii) 516.80 روپے (iii) 16.15%

جائزہ مشق 4

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) a   (ii) b   (iii) a   (iv) c   (v) a   (vi) a   (vii) a   (viii) c   (ix) a

2- خالی جگہ پُر کیجیے۔

(i) بینک   (ii) بچت کھاتہ   (iii) ATM   (iv) نفع   (v) شرح

(vi) مدت   (vii) اضافی رقم   (viii) پریمیم   (ix) بیمہ کرنے والا   (x) بیمہ دار

3- 515,850 روپے   4- 700,000 روپے , 159,050 روپے   5- اضافی رقم 2,750 روپے اصل رقم 27,250 روپے

مشق 5.1

1- 28000 روپے   2- 6400 روپے, 46400 روپے   3- 18,00,000 روپے, 28,00,000 روپے

4- 2,40,000 روپے, 3,20,000 روپے   5- 11250 روپے, 13950 روپے   6- 16350 روپے   7- 21375 روپے   8- 6875 روپے

مشق 5.2

1- (i) 5124.29 روپے (ii) 9168.056 روپے (iii) 3622.84 روپے (iv) 950.12 روپے (v) 14771.5 روپے (vi) 9848.75 روپے

2- (i) 1155.39 روپے (ii) 718.09 روپے (iii) 1540 روپے (iv) 1021.41 روپے

3- (i) 3153.50 روپے (ii) 3808 روپے (iii) 4462.50 روپے (iv) 16060.50 روپے
(v) 2856 روپے (vi) 1874.25 روپے

مشق 5.3

1- 48 کے 1920 روپے 2- 4800 روپے 3- 17640 روپے 4- 26500 روپے 5- 41,500 روپے

6- (i) 1975 روپے (ii) 2725 روپے (iii) 2875 روپے 7- 10,800 روپے

جائزہ مشق 5

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) a (ii) b (iii) a (iv) b (v) a (vi) a (vii) c

2- خالی جگہ پُر کیجیے۔

(i) ٹیکس (ii) بلاواسطہ ٹیکس (iii) بالواسطہ ٹیکس (iv) سیلز ٹیکس (v) ایکسائز ڈیوٹی
(vi) جائیدادی ٹیکس (vii) انکم ٹیکس (viii) 90,000 روپے (ix) 1200 روپے (x) 4,50,000

3- 19200 روپے 4- 24750 روپے 5- 15867.37 روپے

6- (i) 987.057 روپے (ii) 710 روپے (iii) 1329 روپے (iv) 1024 روپے 7- 70500 روپے

مشق 6.1

1- (i) $\sqrt{3}$ ریڈیکل؛ ریڈی کینڈ 3 (ii) $\sqrt{a}$ ریڈیکل؛ ریڈی کینڈ a (iii) $\sqrt{11}$ ریڈیکل؛ ریڈی کینڈ 11
(iv) $\sqrt{6}$ ریڈیکل؛ ریڈی کینڈ 6 (v) $\sqrt{5}$ ریڈیکل؛ ریڈی کینڈ 5 (vi) $\sqrt{13}$ ریڈیکل؛ ریڈی کینڈ 13

2- (i) $a^{3/2}$ (ii) $a^{3/5}$ (iii) $a^{-k/p}$ (iv) $a^{-k/b}$

3- (i) $\sqrt{25};5$ (ii) $\sqrt[3]{64};4$ (iii) $\sqrt[4]{81};3$ (iv) $\sqrt[3]{27};3$ (v) $\sqrt[3]{(27)^2};9$ (vi) $\sqrt[3]{8};\frac{1}{2}$
(vii) $\sqrt[3]{(1000)^2};100$ (viii) $\sqrt{64};8$

4- (i) a^{8} (ii) a^{5} (iii) $3a^{3}$ (iv) $2a^{3}$ (v) x^{8} (vi) $3x^{5}$ (vii) $5x^{3}y^{5}$
(viii) $(8+y)^{7/2}$ (ix) $2x^{1/2}y^{3/2}$ (x) $\frac{x^{5/4}y^{3/2}}{z^{1/2}}$ (xi) $\frac{2x^{1/3}}{(x+y)^{1/3}}$ (xii) $\frac{y^{n/p}}{a^{m/p}}$

5- (i) $\sqrt{21}$ (ii) $\sqrt[3]{512}$ (iii) $\sqrt[5]{2187}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt[18]{2}}$ (v) $\sqrt[3]{59}$ (vi) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ (vii) $\sqrt[12]{a^{11}}$
(viii) $\sqrt[4]{x^{24/7}y}$ (ix) $y\sqrt{x^{9}}$ (x) $\sqrt[6]{x}$ (xi) $\sqrt[4]{x^{4}y^{5}}$ (xii) $\sqrt[24]{a^{37}b^{26}}$ (xiii) $x^{29/60}y^{11/10}$

جوابات

مشق 6.2

1-

جزو نمبر	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
اساس	x	x	$4y$	$x-2$	x	x
قوت نما	3	9	3	3	5	2

2- a^6b^9 3- $\frac{x^{4/3}}{y}$ 4- $\frac{1}{y^{2a+3b}}$ 5- $\frac{1}{2x^{1/2}y^{1/2}}$ 6- $\frac{4}{9a^2x^2}$ 7- $16ac^4$

8- $\frac{3}{ba^{1/2}}$ 9- $\frac{a^{11/2}c^{3/2}}{b^3}$ 10- b^3 11- $\frac{x^{11}y^6}{16}$ 12- ab^{13} 13- a^4b^3c

14- $\frac{4b}{9ac^9}$ 15- $2^{16}\times 3^8$ 16- $2^{14}\times 3^7$ 17- $\frac{1}{2a^4b^6}$ 18- 2187

19- $\frac{3^7}{2^6}$ 20- $\frac{2^3}{3^6}$ 21- $\frac{125}{2187}$ 22- $a^{7/6}b^{11/12}$ 23- $a^{5/6}b^{3/2}$ 24- $a^3b^2c^{3/2}$

25- $a^{1/2}b^{23/72}$ 26- $a^{11/12}$

27- (i) $4^{4/5}$ (ii) $2^{1/2}$ (iii) $x^{23/20}$ (iv) $10x^{8/15}$ (v) $2y^{3/7}$ (vi) $5x^2$

28- (i) $ab^{3/2}$ (ii) $x^{4/5}y^{5/9}$ (iii) $6a^{8/5}b^{17/15}$ (iv) $2x^{19/28}y^{2/5}$ (v) $x^{19/6}y^{5/6}z^{5/6}$

29- (i) $3^{1/6}$ (ii) $x^{11/45}$ (iii) $\frac{1}{2}x^{3/20}$ (iv) $\frac{5}{4}y^{7/20}$ (v) $x^{5/3}y^{7/5}$ (vi) $a^{7/45}b^{4/15}$

(vii) $2x^{2/15}y^{3/4}$ (viii) $\frac{1}{4}a^{11/20}b^{7/20}$

مشق 6.3

1- 5.1×10^{-2} 2- 8.899×10^{1} 3- 4.24×10^{-1} 4- 2.566324×10^{6}

5- 7.5×10^{-7} 6- 8600 7- 0.00001345 8- 0.0000000051

9- 0.0000000525 10- 0.0006365 11- 4.8×10^{3} 12- 1.044×10^{6}

13- 3.126×10^{4} 14- $4.5\times 10^{3}\,m$ 15- 6.4×10^{6}

مشق 6.4

1- (i) 3 (ii) 3 (iii) 0 (iv) $\bar{1}$ (v) $\bar{2}$ (vi) $\bar{4}$

2- (i) 1.7170 (ii) 0.7996 (iii) $\bar{1}.7873$ (iv) $\bar{3}.7559$ (v) $\bar{5}.4771$

3- (i) 0.8044 (ii) $\bar{1}.8044$ (iii) $\bar{3}.8044$ 4- (i) 0.01090 (ii) 1.444 (iii) 26530

مشق 6.5

1- (i) 2 (ii) 2 (iii) $\frac{5}{2}$ 2- (i) 1 (ii) 3 (iii) 4 (iv) 2 (v) 3

3- (i) $\log\left(\frac{1.3472\times 22.79}{5}\right)$ (ii) $\log\left(\frac{22.13\times 0.354\times 7}{3}\right)$ (iii) $\log\left(\frac{57.86\times 4.385}{2.391\times 3.072}\right)$

4- (i) 1.923 (ii) 19.19 (iii) 0.9945

8- (i) 0.3291 (ii) 19.19 (iii) 14.15 (iv) 0.3466 (v) 160.4 (vi) 48.01

(vii) 1964 (viii) 2.082 9- 27.71 10- 67.39 11- 0.1224

جائزہ مشق 6

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) b (ii) a (iii) b (iv) c (v) a (vi) b (vii) a (viii) b (ix) d (x) a

-2 خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) جذری (ii) مجذور (iii) قوت نما (iv) اساس (v) کامن لوگارتھم
(vi) خاصہ (vii) مینٹیسا

3- (i) $x^{3/2}y^{-5/6}$ (ii) $a^{7/8}b^{7/12}$ 4- (i) $x^{1/3}y^{19/24}$ (ii) $\frac{1}{40}$ 6- (i) 0.2983 (ii) 5.158 (iii) 0.2465

مشق 7.1

1- (i) 4,5,6 (ii) −1,8,−27 (iii) 8,11,14 (iv) $-\frac{2}{7},-\frac{1}{3},\frac{4}{11}$ (v) $1,\frac{1}{9},\frac{1}{25}$ (vi) 4,5,

(vii) $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27}$ (viii) −2,1,4 (ix) 1,3,12

2- (i) 51 (ii) 20160 (iii) $\frac{1}{243}$ (iv) 15 (v) $\frac{5}{11}$ (vi) 17

3- (i) 34,42,51,61 (ii) 63,127,254,511 (iii) 112,288,704,1664

(iv) 25,27,30,33 (v) 20,24,28,32 (vi) 12,14,16,18

مشق 7.2

1- (i) 243 (ii) -58 (iii) -82 (iv) 74 (v) -74

2- (i) 16 (ii) 132 (iii) 4 (iv) 65 (v) 79 (vi) 193 3- 12 4- 39

5- 42 6- 20 7- $12-11x$ 8- $3n+24$ 9- $\left(\frac{3}{3n+1}\right)^2$ 10- $-2,1,4,7,10,13,\ldots\ldots$

مشق 7.3

1- (i) 2 (ii) $x+3$ (iii) $2\sqrt{7}$ (iv) x^2+1 2- 0,9 3- 13,15,17

4- $\frac{9\sqrt{2}}{4},\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{19\sqrt{2}}{4}$ 5- $\frac{38}{7},\frac{41}{7},\frac{44}{7},\frac{47}{7},\frac{50}{7},\frac{53}{7}$ 6- $\frac{17}{2},9,\frac{19}{2},10,\frac{21}{2},11,\frac{23}{2}$

7- 15 8- 70 9- 1,17

مشق 7.4

1- 8192 2- 118098 3- 48 4- 324 5- (i) 3 (ii) 5 (iii) 10

6- 576 7- 18225 9- $\left(\frac{\pm 2}{3}\right)^n$ 10- 2,6,18 یا 18,6,2

11- $\frac{1}{x^{23}}$ 12- x^{2p-1}

مشق 7.5

1- (i) $\pm 3\sqrt{5}$ (ii) ± 6 (iii) $\pm 2\sqrt{2}$ 2- (i) 2,4 (ii) 9,27 3- (i) 2,4,8 (ii) 2,8,16

4- 6,12,24,48 5- 2,8; 8,2 6- 2,18 8- 80,40,20,10

9- 162,54,18 10- $\frac{1}{2},2,8,32$ 11- $-28,14,-7,\frac{7}{2},\frac{-7}{4},\frac{7}{8}$ 12- $\frac{16}{27},\frac{8}{9},\frac{4}{3},2,3$

جائزہ مشق 7

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) b (ii) b (iii) a (iv) a (v) c (vi) b (vii) a (viii) c (ix) a (x) b

-2 خالی جگہ پُر کیجیے۔

(i) a_n (ii) 15 (iii) n واں رکن (vi) 10 (v) $\frac{a+b}{2}$

(vi) مشترک نسبت (vii) ar^{n-1} (viii) $\pm\sqrt{ab}$ (ix) 4 (x) $3n + 24$

3- $a_n + 2n = 1,\ 37$ **4-** $a_n = \left(\frac{3}{2n+3}\right)^3$ **5-** 32 **6-** $(3)^{11}$ **7-** 1,2,4,8

8- 2,6,18, یا 18,6,2

مشق 8.1

1. (i) {1,4,6,7,8,9} (ii) {3,4,5,6,7,8,9} (iii) {4,7} (iv) {4}

(v) {1,3,4,5,6,7,8,9} (vi) {4}

8. (i) A (ii) A (iii) A (iv) Φ (v) Φ (vi) $A' \cup B'$

(vii) $A' \cap B'$ (viii) A (ix) Φ (x) $\varnothing$

مشق 8.2

1. {(3,1), (3,3), (5,1) (5,3), (6,1), (6,3)} , {(1,3), (1,5) (1,6), (3,3), (3,5), (3,6)}

Dom $A \times B$ = {3,5,6} Range $A \times B$ = {1,3}

Dom $B \times A$ = {1,3} Range $B \times A$ = {3,5,6}

2. {(−2, 2), (−2,1),} {(−2,4) (1,−2)} Dom − {=2} Dom − {−2,= 1}

Range − {=2,1} Range − {4,= 2}

3. (i) 2^9 (ii) 2^{12} **4.** {(2,2), (3,3), (3,2)}

جائزہ مشق 8

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) b (ii) b (iii) a (iv) b (v) a (vi) a (vii) b (viii) b (ix) c (x) d

-2 خالی جگہ پُر کیجیے۔

(i) $A' \cap B'$ (ii) $A' \cup B'$ (iii) $(A \cup B) \cup C$ (iv) $(A \cap B) \cap C$

(v) یونین کا قانون مبادلہ (vi) تقاطع کا قانون مبادلہ

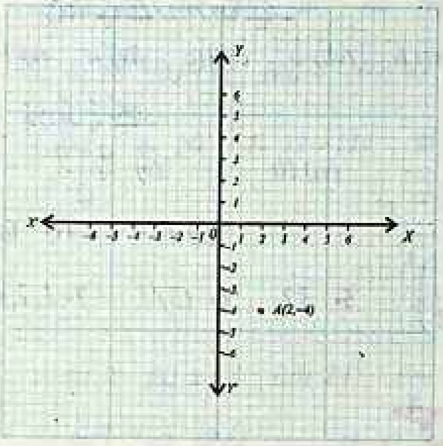
(vii) خالی ہو (viii) {1,3,5} (ix) {2,4,6} (x) سیٹ B

6- (i) 2^{16} (ii) 2^6 **7-** Dom (R) = {2,4} Range (R) = {2,5}

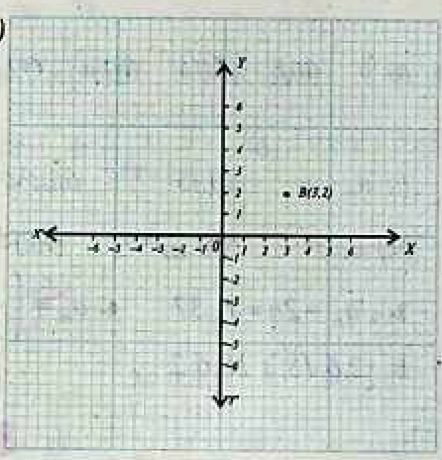
مشق 9.1

1-

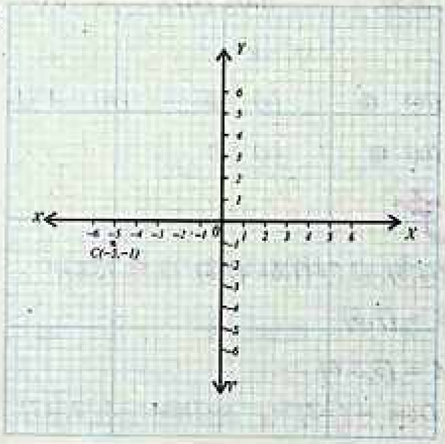
(i)



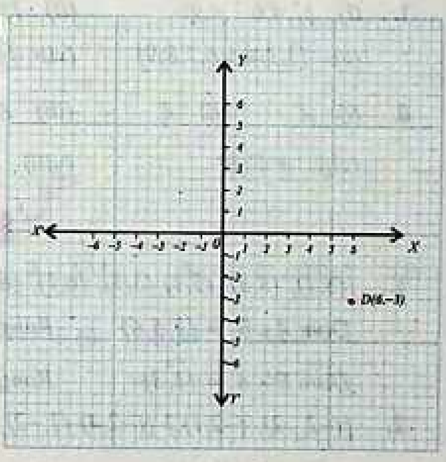
(ii)



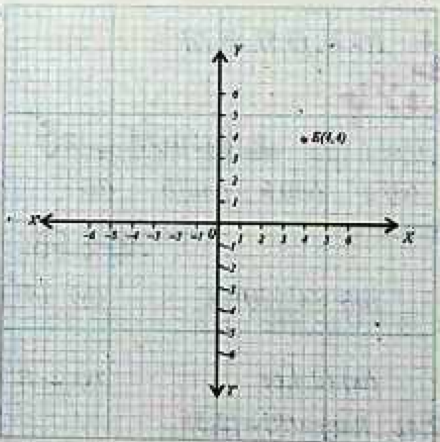
(iii)



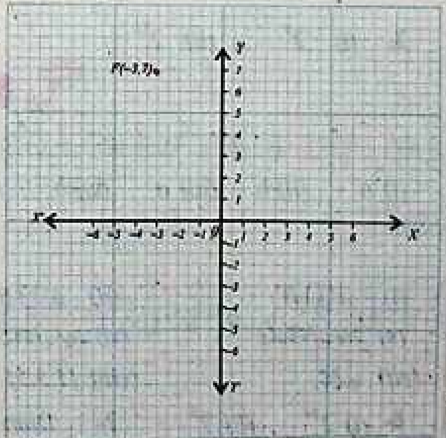
(iv)



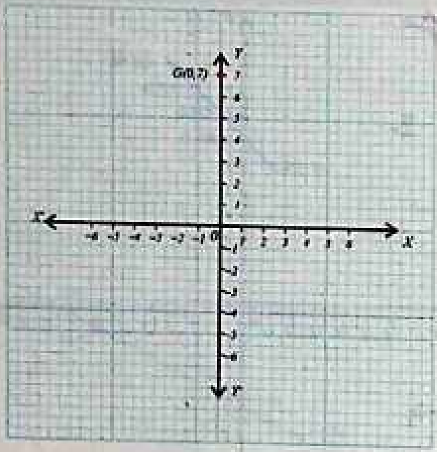
(v)



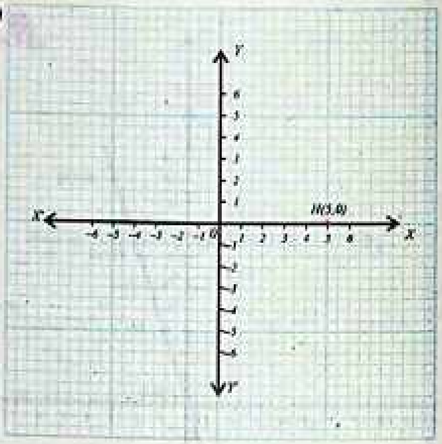
(vi)



(vii)

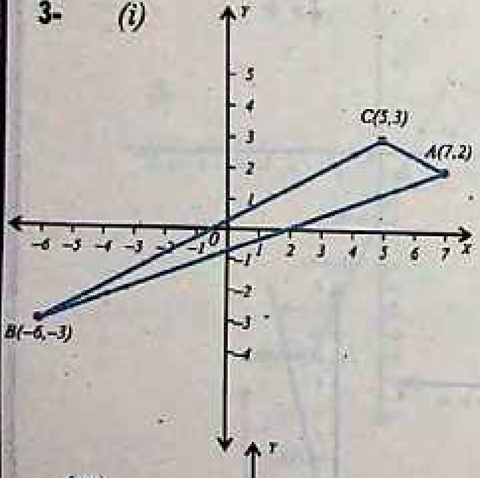


(viii)

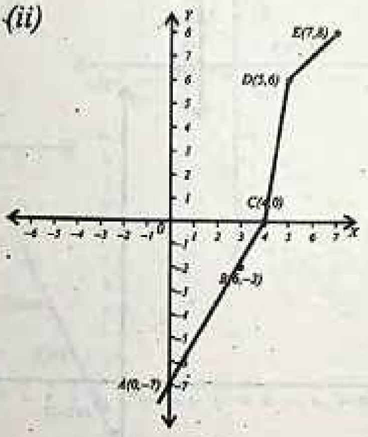


2- (i) (0,0) (ii) (−5,0) (iii) (3,0) (iv) (0,4) (v) (0,−6)

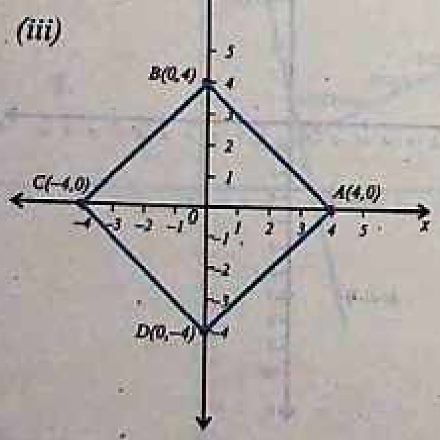
3- (i)



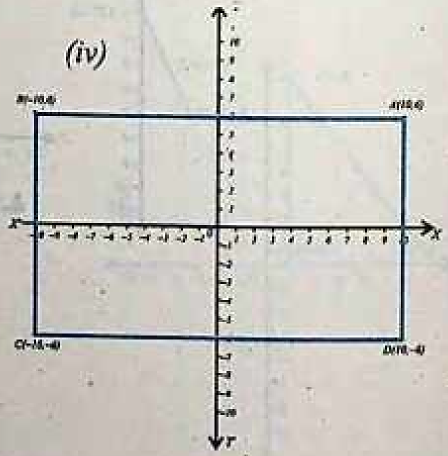
(ii)



(iii)



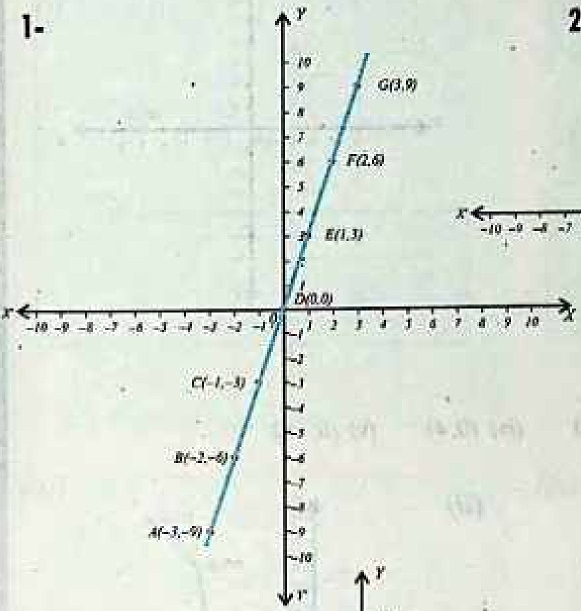
(iv)



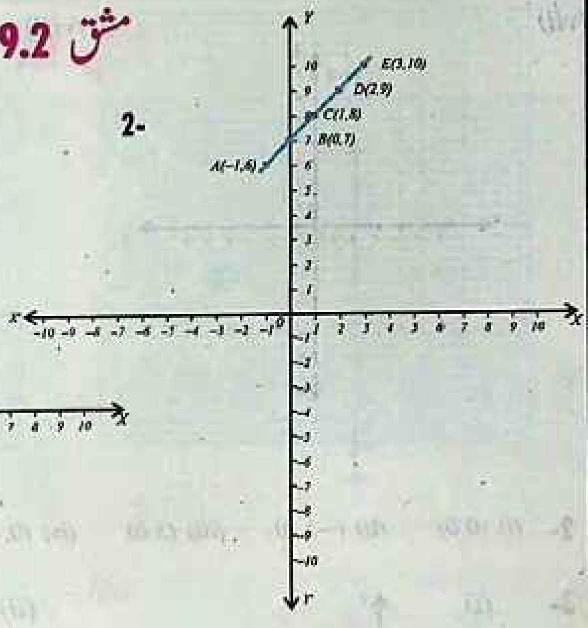
جوابات

مشق 9.2

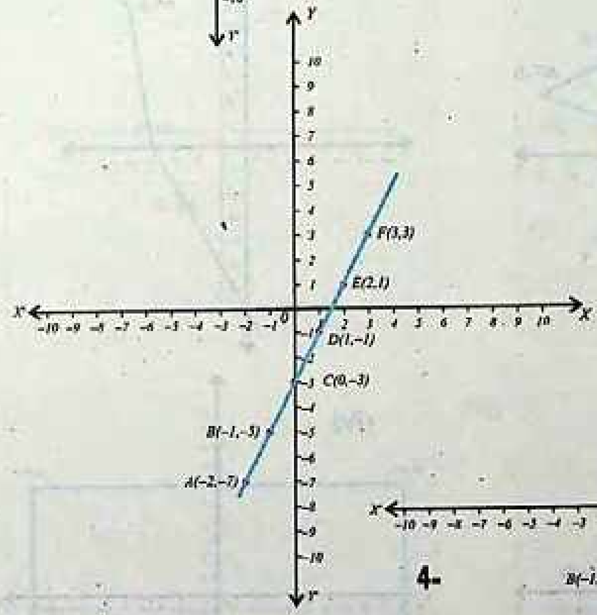
1-



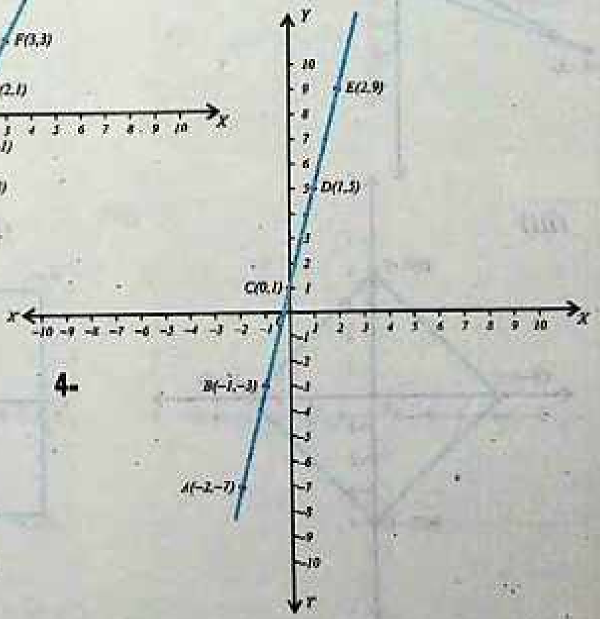
2-



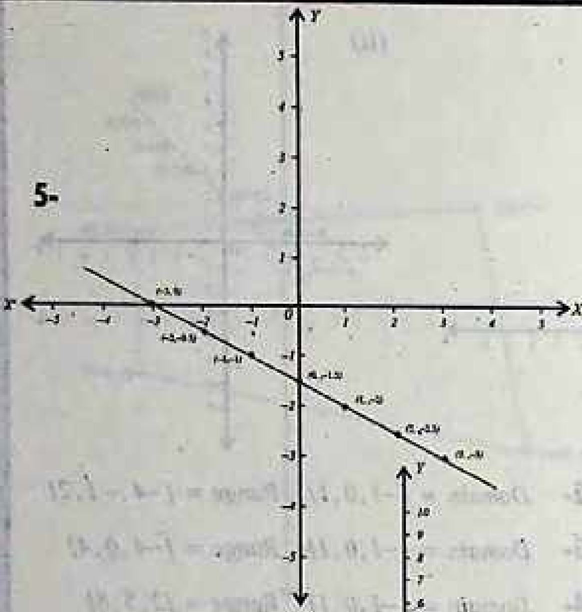
3-



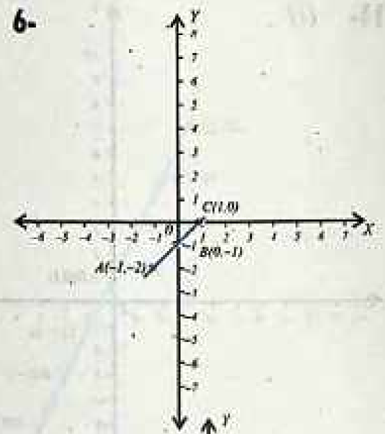
4-



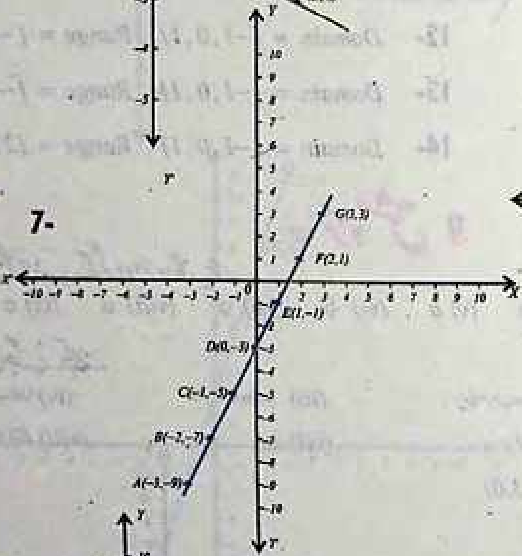
5-



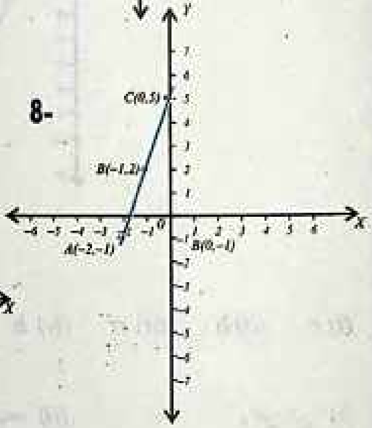
6-


C(1,0)
B(0,-1)
A(-1,-2)

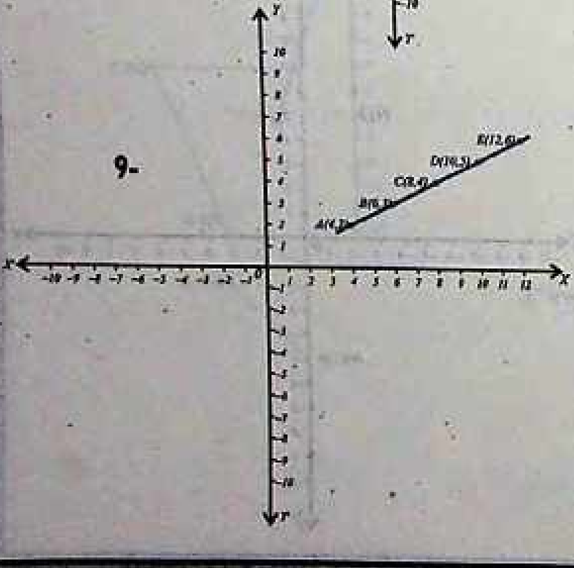
7-


G(3,3)
F(2,1)
E(1,-1)
D(0,-3)
C(-1,-5)
B(-2,-7)
A(-3,-9)

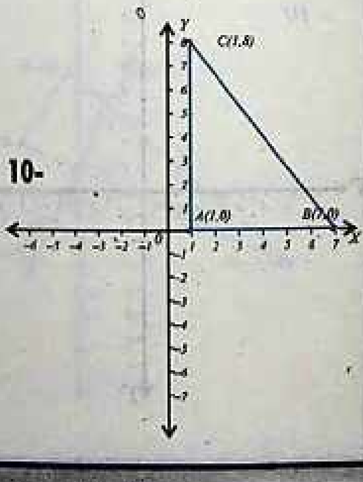
8-


C(0,5)
B(-1,2)
A(-2,-1)
B(0,-1)

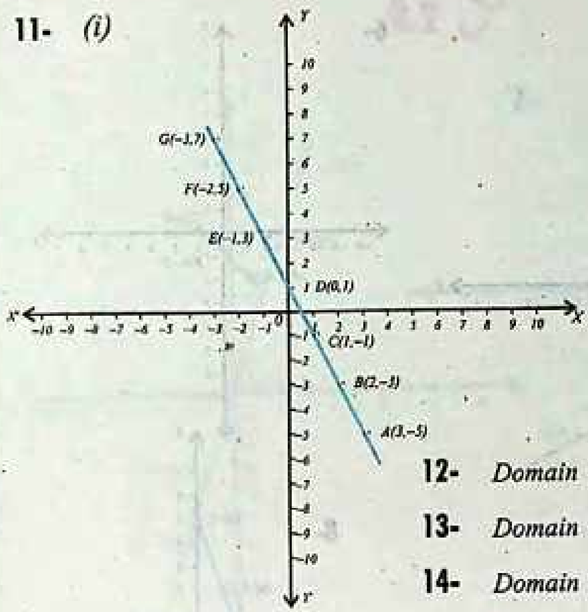
9-


E(12,6)
D(10,5)
C(8,4)
A(4,2)

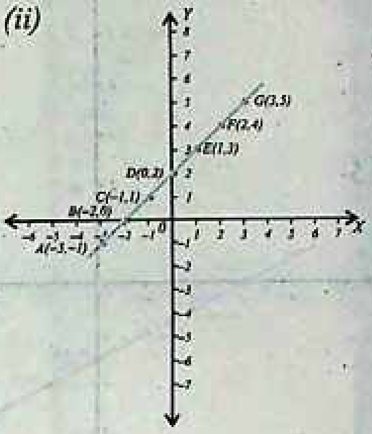
10-


C(1,8)
A(1,0)

11- (i)



(ii)



12- Domain = $\{-1, 0, 1\}$, Range = $\{-4, -1, 2\}$

13- Domain = $\{-1, 0, 1\}$, Range = $\{-4, 0, 4\}$

14- Domain = $\{-1, 0, 1\}$, Range = $\{2, 5, 8\}$

جائزہ مشق 9

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) c (ii) b (iii) a (iv) b (v) a (vi) b (vii) a (viii) a (ix) c

-2 خالی جگہ پُر کیجئے۔

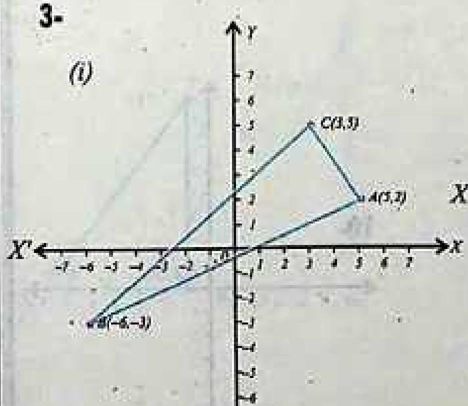
(i) کارتیسی مستوی (ii) پہلا مرتب عدد (iii) دوسرا مرتب عدد (iv) مرتب جوڑا

(v) x-محور (vi) y-محور (vii) a پر (viii) (0,0)

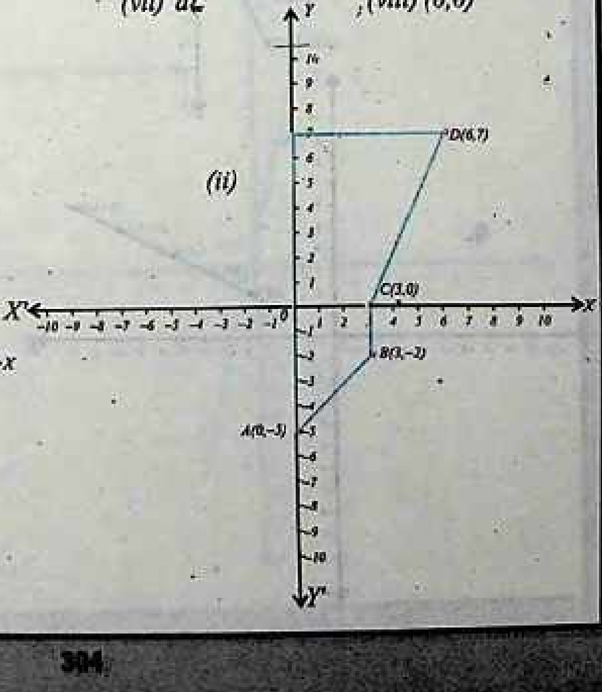
(vi) $y = c$ (x) (3,0)

3-

(i)

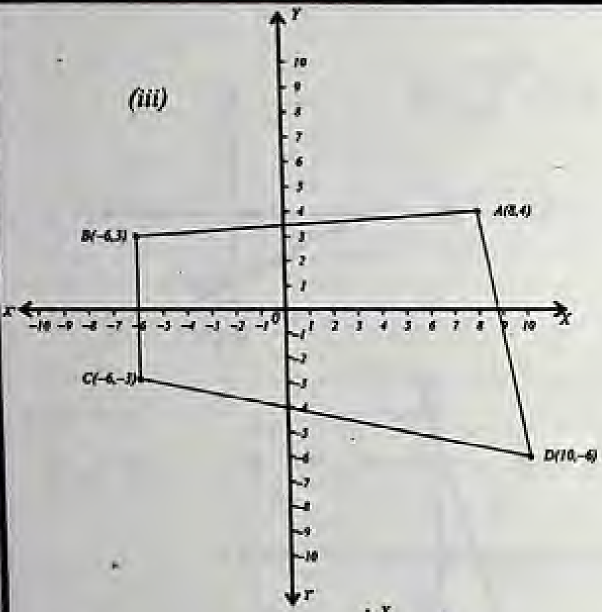


(ii)



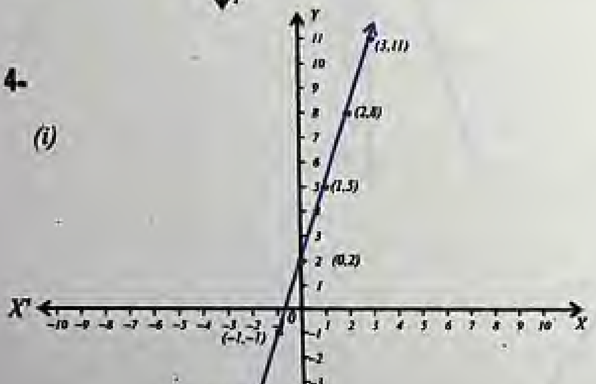
جوابات

(iii)

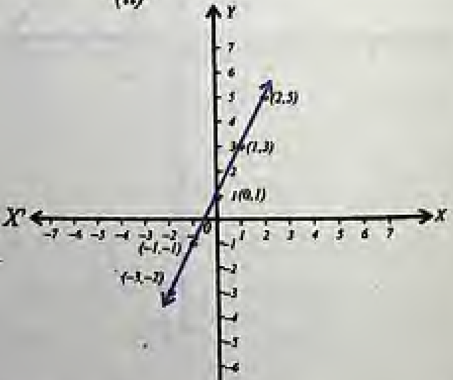


4-

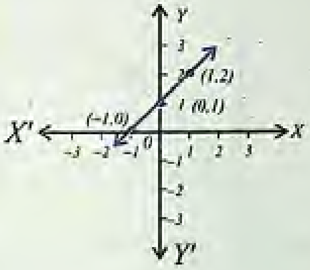
(i)



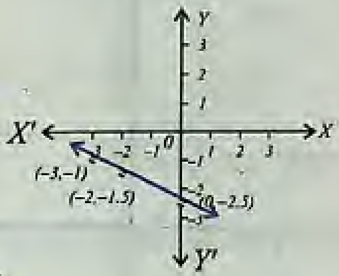
(ii)



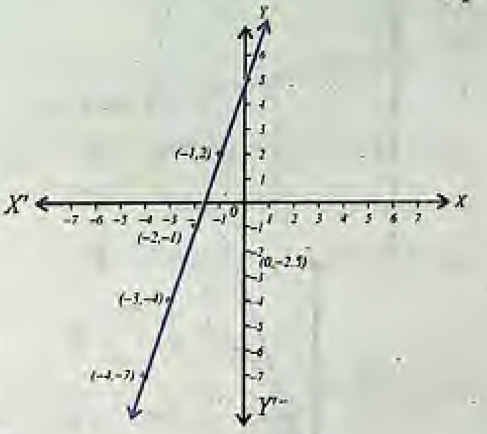
(iii)



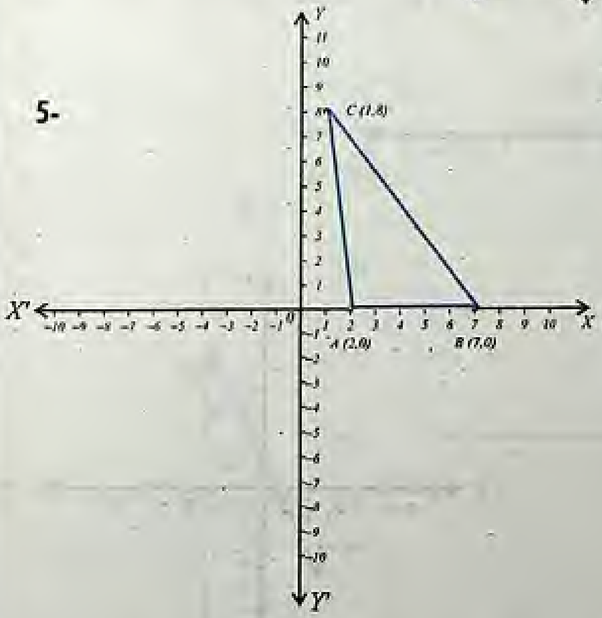
(iv)



(v)



5-



6- Dom $f(x) = \{4, 6, 8, 10, 12\}$, Range $f(x) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

جائزہ مشق 10

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) c (ii) d (iii) a (iv) b (v) a (vi) a (vii) a (viii) b (ix) a

2- خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) کالمی نقشہ (ii) مرکزی رجحان کی پیمائش (iii) اوسط (iv) وسطانیہ

(v) اعادہ (vi) $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ کی اوسط قیمت

(vii) ضربی اوسط (viii) ہارمونک اوسط (ix) اوزانی اوسط (x) جمعی اوسط

3- 3.286 **4-** 9.811; 96.255 **5-** 7; 8; 8 **6-** 6.875 **7-** 4,7

فرہنگ

باب نمبر 1: فی صد، نسبت اور تناسب

فیصد: فیصد سے مراد "ہر سو میں سے"

نسبت: کسی ایک مقدار کی دو عددی قیمتوں میں موازنہ

پہلا نسبتی عدد: نسبت a:b میں a کو پہلا نسبتی عدد کہتے ہیں۔

دوسرا نسبتی عدد: نسبت a:b میں b کو دوسرا نسبتی عدد کہتے ہیں۔

تناسب: دو نسبتوں کی برابری کو تناسب کہتے ہیں۔

طرفین اور وسطین: تناسب a:b::c:d میں a اور d کو طرفین اور b اور c کو وسطین کہتے ہیں۔

تناسب راست: دو مقداروں کے درمیان ایسا تعلق کہ اگر ایک مقدار کی قیمت میں اضافہ یا کمی کرنے سے دوسری مقدار کی قیمت میں اُسی نسبت سے اضافہ یا کمی ہو، تناسب راست کہلاتا ہے۔

تناسب معکوس: دو مقداروں کے درمیان ایسا تعلق کہ اگر ایک مقدار کی عددی قیمت میں اضافہ یا کمی کے نتیجہ میں دوسری مقدار کی عددی قیمت میں اس کے برعکس اُسی نسبت میں کمی یا اضافہ ہو۔

تناسب مرکب: دو یا دو سے زیادہ تناسبوں کے درمیان تعلق کو تناسب مرکب کہتے ہیں۔

باب نمبر 2: زکوٰۃ، عشر اور وراثت

زکوٰۃ: صاحب نصاب مسلمان شریعت کے مطابق سال میں ایک بار اپنی دولت میں سے مقررہ شرح کے مطابق رقم الگ کر کے براہِ راست غرباء اور ضرورت مندوں میں تقسیم کرتے ہیں یا اسلامی مملکت کے ذریعے ادا کرتے ہیں۔ اس ادائیگی کو زکوٰۃ کہتے ہیں۔

صاحب نصاب مسلمان: جس مسلمان مرد یا عورت کے پاس 7.5 تولے سونا یا 52.5 تولے چاندی یا ان میں سے کسی ایک کی قیمت کے برابر کرنسی پورا سال رہے۔ وہ صاحب نصاب کہلاتا ہے۔ اور زکوٰۃ ادا کرنا اُس پر فرض ہے۔

ظاہری دولت: اس میں زرعی ساز و سامان، اونٹ، بھیڑ بکریاں، معدنیات اور کاروباری آلات شامل ہیں۔

غیر ظاہری دولت: اس میں سونا، چاندی، نقدی اور قابل انتقال اثاثہ جات شامل ہیں۔

شرح زکوٰۃ: اشیاء اور نقدی کی کل مالیت کا 2.5 فیصد زکوٰۃ ادا کی جاتی ہے۔

عشر: زرعی زمین کی پیداوار کا وہ حصہ جو غرباء اور ضرورت مندوں میں تقسیم کیا جاتا ہے عشر کہلاتا ہے۔ قدرتی ذرائع آبپاشی سے حاصل ہونے والی پیداوار کا 10% اور مصنوعی ذرائع سے پیداوار کا 5% عشر ادا کیا جاتا ہے۔

وراثت: کسی فوت ہونے والے شخص کا پیچھے چھوڑا ہوا ترکہ جو کہ شریعت کے مطابق اُس کے ورثاء میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ وراثت کہلاتا ہے۔

باب نمبر 3: کاروباری حساب

قیمت خرید: جس قیمت پر کوئی چیز خریدی جاتی ہے اُسے قیمت خرید کہتے ہیں۔ اسے "CP" سے ظاہر کرتے ہیں۔

قیمت فروخت: جس قیمت پر کوئی چیز فروخت کی جاتی ہے قیمت فروخت کہلاتی ہیں۔ اسے "SP" سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

منافع: اگر کسی چیز کی قیمت فروخت اُس کی قیمت خرید سے زیادہ ہو تو اِن دونوں کے فرق کو منافع کہتے ہیں۔ اسے "P" سے ظاہر کرتے ہیں۔

نقصان: اگر کسی چیز کی قیمت فروخت اُس کی قیمت خرید سے کم ہو تو اُن دونوں کے فرق کو نقصان کہتے ہیں۔ اسے "L" سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

چھوٹ یا رعایت: بعض اوقات دوکاندار قیمت فروخت پر خاص شرح فیصد کے حساب سے کمی کا اعلان کرتے ہیں۔
اسے چھوٹ یا رعایت کہتے ہیں۔

مرقوم قیمت: وہ قیمت جو کہ دوکاندار اشیاء کے اوپر لکھتا ہے۔ اسے لکھی ہوئی قیمت یا مرقوم قیمت کہتے ہیں۔

باب نمبر 4: مالیاتی حساب / مالیاتی ریاضیات

کرنٹ اکاؤنٹ: ایک چلتا ہو کھاتہ جو کہ اپنی انتقال پزیری کی وجہ سے مسلسل رواں رہتا ہے۔

سیونگ کاؤنٹ: اس کا مقصد کم ذرائع آمدن کے افراد میں فضول خرچی کو روکنا اور بچتوں کی حوصلہ افزائی کرنا ہوتا ہے۔ ہر چھ ماہ بعد بینک کھاتہ داروں کو جمع شدہ رقم کے ماہانہ حسابات کے مطابق معمولی منافع ادا کرتا ہے۔

نفع ونقصان شراکتی اکاؤنٹ (PLS): یہ اکاؤنٹ چھوٹی رقوم کے ساتھ کھولا جاتا ہے۔ ادائیگی کے طریقہ کار کے مطابق ششماہی یا سالانہ مدت کے حساب سے بنک کے کمائے گئے نفع یا نقصان میں شراکت کا اکاؤنٹ ہے۔

غیر ملکی کرنسی اکاؤنٹ: بنک میں ایسا اکاؤنٹ جس میں غیر ملکی کرنسی رکھی جاتی ہے۔ مثلاً ڈالر، پونڈ اور یورو وغیرہ۔

باہمی اعتماد کے ذرائع: اس سے مراد کوئی عہد نامہ، تبادلہ کا بل یا کوئی مشروط چیک ہوسکتا ہے۔ جس پر ادائیگی الگ سے حکم کے بعد ہوگی یا کہ چیک رکھنے والے شخص کو ادائیگی کر دی جائے گی۔

بیمہ دار: وہ شخص یا وہ چیز جس کا بیمہ ہو چکا ہو اُسے بیمہ دار کہتے ہیں۔

بیمہ ساز: وہ کمپنی یا ادارہ جو افراد یا اشیاء کا بیمہ کرتا ہے۔ بیمہ کمپنی یا بیمہ ساز ادارہ کہلاتا ہے۔

بیمہ پالیسی: وہ معاہدہ جو کہ بیمہ دار اور بیمہ کمپنی کے درمیان طے پاتا ہے۔ اُسے بیمہ پالیسی کہتے ہیں۔

پریمیم: مقررہ مدت کے بعد بیمہ دار جو رقم بیمہ کمپنی کو قسط کے طور پر جمع کرواتا ہے اُسے پریمیم کہتے ہیں۔

تکمیل بیمہ: بیمہ پالیسی میں طے شدہ مدت مکمل ہونے کو تکمیل بیمہ کہتے ہیں۔

بونس: وہ رقم جو کہ بیمہ کمپنی، تکمیل بیمہ پر بیمہ دار کو ادا کرتی ہے۔ بونس کہلاتی ہے۔ اس میں بیمہ دار کا اصل زر اور منافع دونوں شامل ہوتے ہیں۔

چیک: ایک مخصوص بینکر کی طرف سے تبدیلی کے لیے ایسا بل جس پر درج رقم کے علاوہ مطالبہ نہیں کیا جاسکتا۔

پے آرڈر: چیک کی طرح کا ایک بل ہوتا ہے جو کہ بنک اپنے گاہک کی درخواست پر جاری کرتا ہے۔

بینک ڈرافٹ: رقم کی ادائیگی کا ایک حکم نامہ جو کہ کسی بنک کی ایک شاخ کی طرف سے دوسری شاخ کی طرف ہوتا ہے جو کہ مطالبہ پر دوسری شاخ ادا کرتی ہے۔

آن لائن بینکنگ: یہ کمپیوٹر کا ایسا مرکزی نظام ہے۔ جس کے ذریعہ وصولی اور ادائیگی کو مرکز سے براہ راست کنٹرول کیا جاتا ہے۔

A.T.M کارڈ: یہ کسی فرد کو جاری کیا جانے والا ایسا کارڈ ہے۔ جو کہ ایک کمپیوٹرائزڈ خودکار مشین کو متحرک کرتا ہے۔ جو کہ گاہک سے خود بخود لین دین کرتی ہے۔

کریڈٹ کارڈ: اس کارڈ کے ذریعے کارڈ رکھنے والے شخص کو مخصوص رقم کی حد تک قرض کی اجازت دی جاتی ہے۔ جس کے ذریعے وہ شخص خریداری کرسکتا ہے یا رقم وصول کرسکتا ہے۔

A.T.M: (Autometed Teler Machine) بینک میں نصب ایسی خودکار مشین جو کہ کھاتہ داروں کو رقم ادا کرتی ہے۔

منافع: وہ رقم جو کہ ایک بینک اپنے گاہکوں کی رقم پر اضافی طور پر ادا کرتا ہے۔

اصل زر: منافع کے بغیر وہ اصل رقم جو کہ بینک کو دی جاتی ہے۔ یا بینک سے لی جاتی ہے۔ اصل زر کہلاتی ہے۔

شرح منافع: اصل زر پر سالانہ فیصد شرح منافع کو شرح منافع کہتے ہیں۔

مدت: اس سے مراد قرض لینے یا دینے کی مقررہ مدت ہے۔

کل رقم: اصل زر میں منافع جمع کرنے پر کل رقم حاصل ہوتی ہے۔

اضافی رقم: کسی اصل زر پر جو منافع کمایا جاتا ہے اُسے اضافی رقم کہتے ہیں۔

لیزنگ: یہ ایک کرایہ داری کا معاہدہ ہوتا ہے۔ جس کے ذریعے ایک مالک اپنے اثاثہ جات کو مخصوص مدت کے لیے کرایہ کی ادائیگی کے بدلے استعمال کرنے کا حق دیتا ہے۔

نقد ادائیگی: جب کسی گاہک سے مطالبہ کیا جاتا ہے کہ وہ درخواست فارم کے ساتھ ہی بینک میں رقم جمع کروا دے تو ایسی ادائیگی کو نقد ادائیگی کہتے ہیں۔

باب نمبر 5: صارف کا حساب

ٹیکس: کسی شخص کی آمدنی، کاروباری منافع جات یا اشیاء کی قیمت خرید میں اضافی رقم یا خدمات پر، جو رقم کسی ملک کے افراد مملکت کو ادا کرتے ہیں اُسے ٹیکس کہتے ہیں۔

براہ راست ٹیکس: یہ وہ ٹیکس ہیں جو کہ کسی شخص کی آمدنی، منافع جات یا پراپرٹی پر انکم ٹیکس یا پراپرٹی ٹیکس کی صورت میں ادا کیے جاتے ہیں۔

بالواسطہ ٹیکس: ایکسائز ڈیوٹی، ذرائع آمدورفت، جنرل سیلز ٹیکس (G.T.S) اور ویلیو ایڈڈ ٹیکس بالواسطہ ٹیکس کہلاتے ہیں۔

سیلز ٹیکس: جب ہم کوئی چیز خریدتے ہیں تو ہمیں اُس کی اصل قیمت کے ساتھ ساتھ کچھ اضافی رقم ٹیکس کے طور پر ادا کرنا پڑتی ہے۔ یہ ٹیکس چیز کی قیمت فروخت پر خاص شرح فیصد کے حساب سے ادا کیا جاتا ہے۔ پاکستان میں اشیاء اور خدمات پر 17% سیلز ٹیکس وصول کیا جاتا ہے۔

محصول ڈیوٹی: یہ ٹیکس اشیاء کی تیاری کے بعد خریدار کو خریداری کے وقت ادا کرنا ہوتا ہے۔

پراپرٹی ٹیکس: زمین، گھر یا عمارت کے مالک سے سالانہ آمدنی کا 16% ٹیکس وصول کیا جاتا ہے۔ اسے پراپرٹی ٹیکس کہتے ہیں۔

انکم ٹیکس: ہر سال یکم جولائی سے اگلے سال 30 جون کے دوران کسی شخص کی قابل ٹیکس آمدنی پر ٹیکس کو انکم ٹیکس کہتے ہیں۔

باب نمبر 6: قوت نما اور لوگرتھم

ناطق اعداد: $\frac{p}{q}$ شکل کے اعداد (جبکہ $q \neq 0, p, q \in I$) کو ناطق اعداد کہتے ہیں۔

غیر ناطق اعداد: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi .....$ اور π جیسے اعداد کو غیر ناطق اعداد کہتے ہیں۔

جذر: اگر $\sqrt[n]{a}$ ایک غیر ناطق عدد ہو جہاں a ایک ناطق عدد ہو اور n ایک مثبت صحیح عدد ہو تو $\sqrt[n]{a}$، a کا n واں جذر کہلاتا ہے۔

مجذور: جذر $\sqrt[n]{a}$ کے لیے a کو مجذور کہتے ہیں۔

اساس اور قوت نما: کسی بھی حقیقی عدد a اور قدرتی عدد n کے لیے ہم لکھتے ہیں۔ $a^n = a \times a \times a \times .... \times a$
یہاں a اساس کہلاتا ہے اور n قوت نما کہلاتا ہے۔

خالص جذر: ایسا غیر ناطق عدد جس کا ناطق جز ضربی ایک ہو مثلاً $\sqrt{5}, \sqrt[n]{10}$ وغیرہ۔

ناخالص جذر: ایسا جذر یا غیر ناطق عدد جس کا ناطق جز ضربی ایک کے علاوہ کوئی عدد ہو مثلاً $\sqrt{5}, \sqrt[n]{10}$ وغیرہ۔

عام لوگرتھم: اساس 10 والے لوگرتھم کو عام لوگرتھم کہتے ہیں۔

خاصہ اور مینٹسا: کسی عدد کا لوگرتھم دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ صحیح عددی حصہ خاصہ کہلاتا ہے۔ جبکہ کسری حصہ مینٹسا کہلاتا ہے۔

باب نمبر 7: اعداد کے جمعی اور ضربی سلسلے

اعدادکا سلسلہ: اعداد کا سلسلہ ایک ایسا تفاعل ہوتا ہے جس کی ڈومین قدرتی اعداد ہوتے ہیں۔

اعداد کا جمعی سلسلہ: اعداد کا ایسا سلسلہ جس کا ہر رکن معلوم کرنے کے لیے پچھلے رکن میں ایک یکساں اور مخصوص عدد جمع کیا جاتا ہے۔ اس عدد کو مشترک فرق کہتے ہیں۔

جمعی اوسط: ایک عدد 'A' دو اعداد a اور b کا جمعی اوسط کہلاتا ہے اگر a, A, b تینوں مل کر جمعی سلسلہ بنائیں۔

اعداد کا ضربی سلسلہ: اعداد کا ایسا سلسلہ جس میں ہر رکن معلوم کرنے کے لیے پچھلے رکن سے کسی مخصوص عدد سے ضرب دینا ہوتی ہے۔ اس عدد کو مشترک نسبت کہتے ہیں۔

ضربی اوسط: دو اعداد a اور b کا ضربی وسط G ہوگا اگر a, G, b ایک ضربی سلسلہ میں ہوں۔

باب نمبر 8: سیٹ اور تفاعل

سیٹ: واضح متعارف اشیاء کے اجتماع یا اکٹھ کے سیٹ کو کہتے ہیں۔

$N = \{1, 2, 3, ...\}$

$M = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$I = \{...... -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

$Q = \{p/q\ , q \neq 0, p, q \in I\}$

غیر ناطق اعداد کا سیٹ $Q' = A$

حقیقی اعداد کا سیٹ $R = Q \cup Q'$

کائناتی سیٹ: کسی سوال میں زیرِ غور تمام سیٹوں کے فوق سیٹ کو اس سوال میں کائناتی سیٹ کہتے ہیں۔ اسے U سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح سوال میں زیرِ غور تمام سیٹ، U کے تحتی سیٹ ہوں گے۔

کمپلیمنٹری سیٹ: فرض کریں کہ سیٹ A کسی کائناتی سیٹ U کا تحتی سیٹ ہے۔ تو A کا کمپلیمنٹری سیٹ یا سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ سیٹ U کے تمام ایسے ارکان کا سیٹ ہوتا ہے جن کا تعلق سیٹ A سے نہیں ہوتا۔

ثنائی ربط: فرض کریں کہ A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں تو $A \times B$ کا ہر تحتی سیٹ A سے B میں ثنائی ربط کہلاتا ہے۔

تفاعل: دو سیٹوں A اور B کے درمیان f ایک ایسا ثنائی ربط ہے۔ کہ

$Dom\ f = (i)$

(ii) f میں موجود مترتب جوڑوں میں پہلے رکن کا تکرار نہ ہو رہا ہو۔ تو f, A سے B میں تفاعل کہلاتا ہے۔

باب نمبر 9: خطی گراف

مستوی: کلاس روم کی دیواریں، بلیک یا وائٹ بورڈ، ڈیسک کی بالائی سطح اور میز کی بالائی سطح سب مستوی کی مثالیں ہیں۔

کارتیسی مستوی: دو عدد خطوط اور جو کہ ایک دوسرے پر عموداً واقع ہوتے ہیں اور نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ ان خطوط سے بننے والی مستوی کو کارتیسی مستوی کہتے ہیں۔

Y۔محور: گراف پیپر پر کسی نقطہ کا x۔محور سے عمودی فاصلہ اس نقطہ کا y۔محدد کہلاتا ہے۔

ہسٹوگرام: اگر دیے ہوئے مواد کا عمودی سلاخی نقشہ اس طرح بنایا جائے کہ ہر عمودی سلاخ کا رقبہ اُس گروپ کے تعدد کے راست متناسب ہو۔ ایسے سلاخی نقشہ کو ہسٹوگرام کہتے ہیں۔

مجموعی تعدد: کسی جماعت یا گروہ کا مجموعی تعدد، اس جماعت کے تعدد اور اس سے پہلے تمام جماعتوں کے تعدد کا مجموعہ ہوتا ہے۔

مجموعی تعدد کی کثیر الاضلاع: (Ogive) جب مجموعی تعددات کو متعلقہ جماعتی وقفہ کے انتہائی نقطے کے بالمقابل رکھ کر گراف پیپر پر نقاط لگائے جائیں پھر ان نقاط کو آپس میں ملایا جائے۔ اس طرح حاصل ہونے والا گراف مجموعی تعدد کی کثیر الاضلاع (Ogive) کہلاتا ہے۔

مرکزی رجحان کی پیمائش: یہ شماریاتی مواد کی مختصر ترین شکل ہوتی ہے۔ جو کہ سارے مواد کا درمیان یا مرکز ہوتا ہے۔

اوسط: دیے ہوئے مواد کا اوسط حل کرنے کے لیے اس کی تمام مدات کو جمع کیا جاتا ہے۔ اور مجموعہ کو مدات کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

وسطانیہ: دیے ہوئے مواد کو قیمتوں کے لحاظ سے ترتیب سے لکھ کر درمیانی قیمت کو الگ کیا جاتا ہے۔ اسے وسطانیہ کہتے ہیں۔

اعادہ: مواد میں جو عدد سب سے زیادہ مرتبہ سامنے آتی ہے اُسے اعادہ کہتے ہیں۔

حسابی اوسط اگر دیا ہوا مواد $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ تو اس مواد کو حسابی اوسط سے ظاہر کرتے ہیں اور اس طرح حل کرتے ہیں $\bar{x} = \dfrac{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n}{n}$

حسابی اوسط کی خصوصیات: (i) کسی مواد کی قیمتوں کے حسابی اور انحراف کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ علامتی طور پر $\Sigma(x_i - \bar{x}) = 0$

(ii) $x = \dfrac{\Sigma n\bar{x}}{\Sigma n}$

(iii) $\Sigma(x_i - a)^2$ کی قیمت سب سے کم اس صورت میں ہوگی اگر $a = \bar{x}$

علامات

علامات	اظہار	مطالب	اظہار
<	چھوٹا ہے	∵	کیونکہ / جیسا کہ
>	بڑا ہے	∴	چنانچہ / اس لیے متوازی ہے
≤	چھوٹا ہے یا برابر ہے	:	نسبت
≥	بڑا ہے یا برابر ہے	::	تناسب
=	برابر ہے	∞	متناسب ہے
≠	برابر نہیں ہے	|	تقسیم کا نشان
≮	چھوٹا نہیں ہے	Σ	مجموعہ
≯	بڑا نہیں ہے	$\overline{AB}$	قطعہ خط AB
∈	رکن ہے	$\overrightarrow{AB}$	شعاع AB
∀	سب کے لیے	$\overleftrightarrow{AB}$	خط AB
√	جذر المربع	∠	زاویہ
$\|x\|$	x کی مطلق قیمت	△	مثلث
⇒	اس سے مراد ہے کہ	~	متشابہ ہے
⇔	اگر اور صرف اگر خط AB	≅	متماثل ہے
∧	اور	≈	تقریباً برابر ہے
∪	یونین	∥	متوازی ہے
∨	یا	$\widehat{AB}$	قوس AB
∩	قاطع	↔	مطابقت
∉	رکن نہیں ہے	U	یونیورسل سیٹ

آ

آن لائن بینکنگ 70
آپریشنل کرایہ داری 100
آن ٹو تفاعل 214

ا

اے۔ٹی۔ایم (ATM) 71
اساس قوت نما اور قیمت 141
اینٹی لوگارتھم کا تصور 156
ایکسائز ڈیوٹی 117
انکم ٹیکس 118
ان ٹو اور (1-1) تفاعل 214
ان ٹو تفاعل 212
اساس 'e' کے ساتھ لوگارتھم 153
اوزانی اور متحرک اوسط 276

ب

بینک ڈرافٹ 69
براہ راست ٹیکس 116
بالواسطہ ٹیکس 116
بیمہ 87
بیمہ زندگی 88
بچت اکاؤنٹ (PLS) 67
بجلی 121

پ

پہلا نسبتی عدد اور دوسرا نسبتی عدد 10
پاکستانی کرنسی اور دوسرے کرنسی 244
پے آرڈر 69
پراپرٹی ٹیکس 118

ت

تبادلہ کا عمل 69
تناسب مرکب 22
تعددی کثیر الاضلاع 256
تعددی جدول 250
تفاعل 211
تخفیف کے بعد آمدنی 128
تناسب معکوس 18
تبادلہ کے عمل کی پارٹیاں 69
تناسب 17
تناسب (راست و معکوس) 18
تبادلہ کے گراف کا مطالعہ 241
تغیر 285

ٹ

ٹیکس 116
ٹیکسز 116
ٹیلیفون بل 123

ث

ثنائی ربط 210

ج

جمعی اور عددی سلسلہ 179
جدول سے گراف بنانا 235
جذری اور قوت نمائی اشکال 135
جذری اور قوت نمائی اشکال 135
جذر اور مجذور 134
جفت اعداد کا سیٹ 197

چ

چیک 69
چھوٹ یا رعایت 54
چیک کی پارٹیاں 69

ح

حسابی اوسط 183
حقیقی اعداد کے مترتب جوڑے 222
حسابی اوسط کی خصوصیات 276
حاصل ضرب کی قوت کا قانون 146

خ

خاصہ اور مینٹیسا 154
خطی گراف کا کنورشن گراف 237

ڈ

ڈی مارگن کے قوانین 207
ڈیبٹ کارڈ / AT.M کارڈ 70

ذ

ذاتی آمدنی 125

ر

رہن کا طریق کار ترسیمی مقام 127

ز

زکوٰۃ عربی زبان میں دو مفہوم رکھتی ہے 30

زکوٰۃ کی شرح 31

س

سیٹ کا کمپلیمنٹ 200

سنٹی گریڈ اور فارن ہائیٹ درجہ حرارت 243

سیٹوں کا تقاطع 199

سیٹوں پر عوامل 197

سیٹوں کے تقاطع کی خصوصیات 203

سیٹوں کے یونین کی خصوصیات 202

سیلز ٹیکس 116

سیونگ اکاؤنٹ 66

سائنسی ترقیم 149

سیٹ 196

سیٹوں کا یونین اور تقاطع 204

سیٹوں کا یونین 197

ش

شراکت داروں کے درمیان منافع کی تقسیم 59

ص

صحیح اعداد کا سیٹ 197

ض

ضربی اوسط 273

ضربی سلسلہ اعداد 186

ط

طرفین اور وسطین 17

طاق اعداد کا سیٹ 197

ع

عام لوگارتھم 154

عادہ 271

عملدرآمدی اخراجات 101

عددی سلسلہ 176

عشر 32

غ

غیر محدود سلسلہ اعداد 177

غیر ملکی کرنسی اکاؤنٹ 68

ف

فی صد اور کسر کی باہم تبدیلی 2

فی صد اور کسر اعشاریہ کی باہمی تبدیلی 4

فی صد 2

فی صد بحیثیت کسر 2

ق

قانون تلازم 203

قانون مبادلہ 202

قیمت خرید 42

قوت در قوت کا قانون 146

قوت نما کے قوانین اور ان کا استعمال 141

قوت نما کے قوانین 141

قوت نما کی تفریق کا قانون 142

قانونی ورثا میں وراثت کے حصوں کی نسبت 33

قدرتی اعداد کا سیٹ 196

ک

کاروباری شراکت 59

کارتیسی مستوی اور خطی ترسیم 222

کمرشل بینکنگ 66

کسر کی فیصد میں تبدیلی 3

کریڈٹ کارڈ (ویزا اور ماسٹر کارڈ) 70

کرنٹ اکاؤنٹ 66

کرنسیوں کا تبادلہ 71

کسی مزدور کی ذاتی آمدنی 2

کارتیسی مستوی 223

کائناتی سیٹ 199

کنورشن گراف 237

گ

گراف بنانے کے لیے مناسب سکیل کا انتخاب 228
گراف کے ذریعے ڈومین اور رینج 235
گیس بل 122
گراف $y = c$ 230
گراف $y = mx$ 232
گراف $x = a$ 230
گراف $y = mx + c$ 233
گاڑیوں کی مالیاتی کرایہ داری 101
گاڑیوں کا بیمہ 101
گراف کا مطالعہ کرنا اور ایک مقدار کی قیمت
سے منسلک دوسری مقدار کی قیمت 238
گاڑی جائیداد کا بیمہ 92

ل

لوگارتھم کا استعمال 163
لوگارتھم معلوم کرنا 155
لوگارتھم کے قوانین 162
لوگارتھم 153
لکھی ہوئی قیمت (اشیاء پر) 54
لین دین کے ذرائع 88

م

مجموعی تعدد 259
مجموعی تعدد کی کثیرالاضلاع 261
مالیاتی کرایہ داری 100
محدود سلسلہ اعداد 177
مقررہ مدتی اکاؤنٹ 67
مینٹسا معلوم کرنا 155
مبدا O اور محددات کی پہچان اور کارتیسی مستوی میں محور 224
مرتب جوڑے کو گراف پر لگانا 224
x۔محدد اور y۔محدد کو پہچاننا 224
مرکزی رجحان کی پیمائش 264
متحرک اوسط 277
مرتب جوڑے 222
مرتب جوڑوں کا گراف بنانا 227
منافع (S.P > C.P) 42
ماہانہ قسطوں میں واپس ادائیگی 101
منفرد اعداد کا سیٹ 197
معیاری انحراف 285
مکمل اعداد کا سیٹ 196

ن

نقد ادائیگی 101
نقاط کے ملانے سے ہندسی شکل 225
نقصان 48
نصاب 30
نفع اور نقصان 42
نفع (Interest) 76
نسبت 9
نسبت کی کوئی اکائی نہیں ہوتی 10
نسبت میں جب حد کم یا زیادہ کیا جاتا ہے 11
ناطق اعداد کا سیٹ 197

و

وین اشکال کے ذریعے یونین اور تقاطع کے قوانین تلازم 206
وین اشکال کے ذریعے یونین اور تقاطع کے قوانین مبادل 205
وسطانیہ، ربعی تقاطع اور عادہ کا گراف تخمینہ 280
وراثت 33
وسطانیہ 269
ون۔ون اور آن ٹو تفاعل 216
وین اشکال 204

ہ

ہارمونک اوسط 274
ہارمونک اوسط (گروہی مواد کے لیے) 275
ہسٹوگرام مساوی جماعتی وقفوں کے لیے 254

ی / ے

یک درجی مساوات پر پورا اترنے
والے مرتب جوڑوں کا جدول 226
یوٹیلٹی بلز 121

LOGARITHMS

لوگارتھم

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						4	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	15	19	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	7	10	13	16	20	23	26	30
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	16	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	5	8	11	14	17	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	16	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3785	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

LOGARITHMS

لوگارتھم

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8738	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9603	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ANTI LOGARITHMS

اینٹی لوگارتھم

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1027	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	0	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1235	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

ANTI LOGARITHMS

اینٹی لوگارتھم

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

مصنّفین کا تعارف

ڈاکٹر محمد اسلم ملک نے بہاؤالدین ذکریا یونیورسٹی ملتان سے 1989ء میں پیور میتھمیٹکس (Puremathematic) میں ایم ایس سی کی ڈگری حاصل کی۔ پھر 1993ء میں آپ نے پنجاب یونیورسٹی لاہور سے ایم ایڈ (M.Ed) کیا۔ بعدازاں 1995ء میں پنجاب یونیورسٹی سے ہی ایم فل (M.Phil) کی ڈگری حاصل کی۔ 1999ء میں آپ نے لیکچرر کی حیثیت سے پوسٹ گریجوایٹ کالج ساہیوال میں ملازمت اختیار کر لی اور بعدازاں 2002ء میں آپ کی تقرری بحیثیت اسسٹنٹ پروفیسر گورنمنٹ کالج لاہور میں کی گئی۔ 2004ء میں پنجاب یونیورسٹی نے آپ کو پی ایچ ڈی (Ph.D) ریاضیات کی ڈگری کے اعزاز سے نوازا۔ اس کے بعد ہائیر ایجوکیشن کمیشن پاکستان نے آپ کو برمنگھم یونیورسٹی برطانیہ میں اعلیٰ تعلیم جاری رکھنے پر پوسٹ ڈاکٹریٹ فیلوشپ کا اعزاز دیا۔ موصوف اس وقت پنجاب یونیورسٹی لاہور میں بحیثیت ایسوسی ایٹ پروفیسر آف میتھمیٹکس خدمات انجام دے رہے ہیں۔

محترم جناب مقصود رضا احمد جو کہ ریاضی کے ایسوسی ایٹ پروفیسر ہیں۔ انہوں نے ایم ایس سی ریاضی کی ڈگری پنجاب یونیورسٹی لاہور سے حاصل کی۔ آپ کو گورنمنٹ کالج لاہور میں پہلی پوزیشن حاصل کرنے پر رول آف آنر کا ایوارڈ دیا گیا۔ 1979ء میں آپ نے یونیورسٹی آف بلوچستان کوئٹہ کے شعبہ ریاضی میں بحیثیت لیکچرر ملازمت اختیار کی۔ آپ تقریباً ایک سال ایم ایس سی کی کلاسز کو پڑھاتے رہے۔ پنجاب پبلک سروس کمیشن کی طرف سے سلیکشن ہونے پر 1980ء میں آپ کالج کیڈر میں مقرر ہوئے۔ 1982ء میں آپ کو بلغاریہ کے لیے پوسٹ گریجوایٹ سکالرشپ دیا گیا۔ 1990ء میں آپ کو "کامن ویلتھ سکالرشپ فار پوسٹ گریجوایٹ سٹڈیز" کے لیے نامزد کیا گیا۔ 1994ء میں آپ کو یونیورسٹی آف انجینئرنگ اینڈ ٹیکنالوجی لاہور کی طرف سے ایم فل کی ڈگری دی گئی۔ تصنیف و تالیف کے شعبہ میں بھی آپ کی خدمات قابل قدر ہیں۔ پرائمری، مڈل، سیکنڈری اور انٹرمیڈیٹ کے لیول کی 20 سے زیادہ کتابیں آپ لکھ چکے ہیں۔ آپ اس وقت گورنمنٹ شالیمار ڈگری کالج باغبانپورہ میں تدریسی خدمات انجام دے رہے ہیں۔