مشق 8

-1 ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) درج ذیل میں سے کون سا بیان اکثر استقرائی استدلال سے متعلق ہوتا ہے؟

(a) بار بار کیے گئے تجربات پر مبنی (b) اگر اور صرف اگر کے بیانات

(c) بیان کو ایک مسئلے کے ذریعے ثابت کیا گیا ہو

(d) عمومی اصولوں پر مبنی

(ii) درج ذیل میں سے کون سا جملہ استخراجی استدلال کی وضاحت کرتا ہے؟

(a) محدود مشاہدات سے عمومی نتائج (b) بار بار کیے گئے تجربات پر مبنی

(c) معلومات کی اکائیوں پر مبنی جو درست ہوں (d) معروف حقائق سے نتیجہ اخذ کرنا

(iii) درج ذیل میں سے کون سا بیان درست ہے؟

(a) صحیح اعداد کا سیٹ متناہی ہوتا ہے۔

(b) کسی بھی چوکور کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ $180°$ ہوتا ہے۔

(c) $\frac{22}{7} \notin Q'$ (d) تمام مساوی الاضلاع مثلثیں ہوتی ہیں۔

(iv) "چولہا جل رہا ہے" کے بیان کی نفی کے لیے درج ذیل میں سے کون سا بیان بہترین ہے؟

(a) چولہا نہیں جل رہا (b) چولہا مدھم ہے

(c) چولہا ہلکی آنچ پر بدل جاتا ہے (d) یہ جل رہا ہے اور نہیں جل رہا ہے

(v) دونوں بیانات p اور q کا کنجکشن اس وقت درست ہوتا ہے جب:

(a) q اور p دونوں غلط ہوں (b) q اور p دونوں درست ہوں

www.ilmkidunya.com

(c) صرف q درست ہو (d) صرف p درست ہو

(vi) ایک مشروط کو صرف اس صورت میں غلط سمجھا جاتا ہے جب:

(a) مفروضہ درست ہو اور نتیجہ غلط ہو (b) نتیجہ درست ہو اور مفروضہ غلط ہو

(c) صرف مفروضہ درست ہو (d) صرف نتیجہ غلط ہو

(vii) $q \rightarrow p$ کا ضد مثبت برابر ہے:

(a) $q \rightarrow \sim p$ (b) $\sim q \rightarrow p$

(c) $\sim p \rightarrow \sim q$ (d) $\sim q \rightarrow \sim p$

(viii) بیان "2 سے بڑا ہر صحیح عدد دو مفرد اعداد کا مجموعہ ہے" یہ ہے:

(a) مسئلہ (b) قیاس (c) اصول متعارفہ (d) اصول موضوعہ

(ix) بیان "کسی بھی دو نقاط سے ایک خط کھینچا جا سکتا ہے" یہ ہے:

(a) مسئلہ (b) قیاس (c) اصول متعارفہ (d) منطق

(x) بیان "ایک مثلث کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے" یہ ہے:

(a) اُلٹ (b) مسئلہ (c) اصول متعارفہ (d) مشروط

جوابات

i	a	ii	d	iii	c	iv	a	v	b
vi	a	vii	c	viii	b	ix	c	x	b

2- درج ذیل مشروط کے اُلٹ، معکوس اور ضد مثبت لکھیے۔

(i) $\sim p \rightarrow q$ (ii) $q \rightarrow p$

(iii) $\sim p \rightarrow \sim q$ (iv) $\sim q \rightarrow \sim p$

(i) $\sim p \rightarrow q$

حل: اُلٹ: $q \rightarrow \sim p$

معکوس: $p \rightarrow \sim q$

www.ilmkidunya.com

ضد مثبت: $\sim p \rightarrow q$

(ii) $q \rightarrow p$

حل: اُلٹ: $q \rightarrow p$

معکوس: $\sim p \rightarrow \sim q$

ضد مثبت: $\sim q \rightarrow \sim p$

(iii) $\sim p \rightarrow \sim q$

حل: اُلٹ: $\sim q \rightarrow \sim p$

معکوس: $p \rightarrow q$

ضد مثبت: $q \rightarrow p$

(iv) $\sim q \rightarrow \sim p$

حل: اُلٹ: $\sim p \rightarrow \sim q$

معکوس: $q \rightarrow p$

ضد مثبت: $p \rightarrow q$

3- درج ذیل کا صدق جدول لکھیں۔

(i) $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

(ii) $\sim (\sim q \vee \sim p)$

(iii) $\sim (p \vee q) \vee (\sim q)$

(i) $\sim (p \vee q) \vee (\sim q)$

حل:

www.ilmkidunya.com

p	q	$\sim p$	$p \vee$	$\sim p \vee q$	$\sim(p \vee q) \vee (\sim q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T

(ii) $\sim(\sim q \vee -p)$

حل:

p	q	$\sim p$	$\sim p$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim Q \vee q \sim P)$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F

(iii) $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

حل:

p	q	$(p \vee q)$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

4- ایک ریاضیاتی بیان اور اس کے ثبوت میں فرق واضح کریں۔ دو مثالیں دیجیے۔

حل: ریاضیاتی بیان ایک ایسا اظہار ہے جو درست یا غلط ہو سکتا ہے لیکن دونوں، جبکہ ریاضیاتی ثبوت ایک منطقی دلیل ہے جو ظاہر کرتی ہے ریاضی کے بیان کی حقیقت۔

مثالیں:

(i) قائمۃ الزاویہ مثلث کے مسئلہ فیثاغورث۔

www.ilmkidunya.com

$$(\text{وتر})^2 = (\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2 \quad (\text{درست})$$

(ii) $10 + 5 = 20$ (غلط)

5- ایک مسئلہ اور اصول متعارفہ میں کیا فرق ہے؟ ہر ایک مثالیں دیجیے۔

حل: محور: ایک اصول متعارفہ ایک ریاضیاتی بیان ہے جسے ہم بغیر کسی ثبوت یا دلیل کے درست مانتے ہیں۔

مثال:

(i) خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع $a + b = b + a$

(ii) خاصیت تلازم بلحاظ ضرب

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

مسئلہ: مسئلہ ایک ریاضیاتی بیان ہے جسے پہلے سے معلوم حقائق کی بنیاد پر سچ ثابت کیا گیا ہو۔

مثالیں: مسئلہ فیثا غورث

$$(\text{وتر})^2 = (\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2$$

(جیومیٹرک اور الجبری طریقوں کا استعمال کرتے ہوئے ثابت)

6- ریاضیاتی ثبوتوں میں منطقی استدلال کی اہمیت کیا ہے؟ اپنی بات کو واضح کرنے کے لیے ایک مثال دیجیے۔

حل: منطقی استدلال ریاضیاتی ثبوتوں کی بنیاد ہے۔ کیونکہ یہ اس بات کو یقینی بناتا ہے کہ محور کے دیے گئے مفروضے سے اخذ کیے گئے ہیں۔ یہ ابہام اور سبجیکٹیوٹی کے نتائج کو عالمی طور پر قبول اور تصدیق کی جاسکتی ہے۔

www.ilmkidunya.com

مثال:

x ایک طاق عدد ثابت کرنے کے لیے کوئی بھی طاق عدد لیتے ہیں۔

فرض کریں کہ x ایک طاق عدد ہے

$$x = 2k + 1 \text{ جہاں } k \in z$$

اب، $x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$$\begin{aligned} m &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2m + 1, m \\ &= 2k^2 + 2k \in z \end{aligned}$$

پس، $x^2 = 2m + 1$ جہاں $m \in z$

پس، اس لیے طاق عدد کی تعریف کی رو سے x^2 ایک طاق عدد ہے۔

7- یہ بتائیں کہ آیا دیے گئے بیان ایک اصول متعارفہ، قیاس یا مسئلہ ہیں اور اپنی دلیل کی وضاحت کریں۔

(i) کوئی سے دو نقاط میں سے صرف ایک خط گزرتا ہے۔

(ii) ہر جفت عدد 2 سے بڑے دو مفرد اعداد کے مجموعے کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔

(iii) مثلث کے زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔

حل: (i) اس کو اصول متعارفہ کہتے ہیں۔

(ii) اس کو قیاس کہتے ہیں۔

وضاحت:

2 سے بڑا جفت عدد لینے سے $4, 6, 8, 10, 12, \ldots$

www.ilmkidunya.com

$4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7, 12 = 5 + 7$

(iii) یہ مسئلہ ہے۔

وضاحت:

بیان جیومیٹری کی مصروف حقیقت ہے جسے ریاضیاتی طور پر ثابت کیا گیا ہے۔ لہٰذا یہ ایک جیومیٹریکل مسئلہ ہے۔

8- درج ذیل الجبری جملوں کے لیے سادہ استخراجی ثبوتوں کو وضع کریں اور ثابت کریں کہ بائیں طرف برابر ہے دائیں طرف کے:

(i) ثابت کریں کہ $(x-4)^2 + 9 = x^2 - 8x + 25$

حل: $L.H.S = (x-4)^2 + 9$

$= (x)^2 + (4)^2 - 2(x)(4) + 9$

$= x^2 + 16 - 8x + 9$

$= x^2 - 8x + 25$

$= R.H.S$

(ii) ثابت کریں کہ $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$

حل: $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$

$L.H.S = (x+1k)^2 - (x-1)^2$

$= (x)^2 + (1)^2 + 2(x)(1) - [(x)^2 + (1)^2 - 2(x)(1)]$

$= x^2 + 1 + 2x - x^2 - 1 + 2x$

$= 4x$

$= R.H.S$

(iii) ثابت کریں کہ $(x+5)^2 - (x-5)^2 = 20x$

حل: $(x+5)^2 - (x-5)^2 = 20x$

www.ilmkidunya.com

$$L.H.S = (x+5)^2 - (x-5)^2$$

$$= (x)^2 + (5)^2 + 2(x)(5) - [(x)^2 + (5)^2 - 2(x)(5)]$$

$$= x^2 + 25 + 10x - [x^2 + 25 - 10x]$$

$$= x^2 + 25 + 10x - x^2 - 25 + 10x$$

$$= 20x$$

$$= R.H.S$$

9- ہر مرحلے کی وضاحت کرتے ہوئے درج ذیل کو ثابت کریں۔

(i) $\frac{4+16}{4} = 1 + 4x$

حل: $L.H.S = \frac{4+16x}{4}$

$= \frac{1}{4} \times (4 + 16x)$ $\because \frac{a}{b} = \frac{1}{b} \times a$

$= \frac{1}{4} \times (4 \times 1 + 4 \times 4x)$

$\because$ (ضربی ذاتی عنصر)

$= \frac{1}{4} \times 4(1 + 4x)$

$\because$ خاصیتِ تقسیمی

$= \left(\frac{1}{4} \times 4\right) \cdot (1 + 4x)$

$\because$ خاصیتِ تلازم

$= 1 \cdot (1 + 4x)$

$\because$ (ضربی معکوس)

$= 1 + 4x$

$\because$ (ضربی ذاتی عنصر)

$= R.H.S$

پس ثابت ہوا، $L.H.S = R.H.S$

www.ilmkidunya.com

(ii) $\frac{6x^2+18x}{3x^2-27} = \frac{2x}{x-3}$

حل: $L.H.S = \frac{6x^2+18x}{3x^2-27}$

$= \frac{6x \times x + 6x \times 3}{3 \times x^2 - 3 \times 9}$ ∴ (تجزی سے)

$= \frac{6x(x+3)}{3(x^2-9)}$ ∴ (خاصیتِ تقسیمی)

$= \frac{\cancel{3} \times 2x(x+3)}{\cancel{3}[(x)^2-(3)^2]}$

$6x$ کے اجزائے ضربی

$= \frac{1 \times 2x(x+3)}{(x+3)(x-3)}$ ∴ (ضربی خاصیت)

$= \frac{2x(x+3)}{(x+3)(x-3)}$

∴ (ضربی ذاتی عنصر)

$= 1 \times \frac{2x}{(x-3)}$ $\frac{a}{a} = 1$

∴ (خاصیتِ تقسیمی)

$= \frac{2x}{x-3}$

∴ (ضربی ذاتی عنصر)

$= R.H.S$

پس ثابت ہوا $L.H.S = R.H.S$

(iii) $\frac{x^2+7x+10}{x^2-3x-10} = \frac{x+5}{x-5}$

حل: $L.H.S = \frac{x^2+7x+10}{x^2-3x-10}$

$= \frac{x^2+5x+2x+10}{x^2-5x+2x-10}$ ∴ درمیانی رقم توڑنے سے

www.ilmkidunya.com

$= \frac{x(x+5)+2(x+5)}{x(x-5)+2(x-5)}$ ∴ خاصیت تقسیمی

$= \frac{(x+5)(x+2)}{(x-5)(x+2)}$ دوبارہ سے خاصیت تقسیم

$= \frac{(x+5)}{(x-5)} \times 1$ چیک $\frac{a}{a} = 1$

$= \frac{x+5}{x-5}$ ضربی ذاتی عنصر

$= \text{R.H.S}$

پس ثابت ہوا, $\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

-10 فرض کریں کہ x ایک صحیح عدد ہے۔ اگر x ایک طاق عدد ہو تو $9x + 4$ ایک طاق عدد ہو گا۔

حل: فرض کریں $x = 2k + 1 \ , 9x + 4 \ldots$ (i)

طاق عدد ہے۔ x

$x = 2k + 1$ in eq (i) درج کرنے سے

$9(2k + 1) + 4$

$= 18k + 9 + 4$

$= 18k + 13$

$= 18k + 12 + 1$

$= 2(9k + 6) + 1$

$m = 9k + 6$ فرض کریں

$= 2m + 1$ طاق عدد ہے

-11 فرض کریں کہ x ایک صحیح عدد ہے۔ اگر x ایک طاق عدد ہو تو $7x + 5$ ایک جفت عدد ہو گا۔

حل: $7x + 5 \ldots$ (i)

فرض کریں $x = 2k + 1$ x طاق عدد ہے

www.ilmkidunya.com

$x = 2k + 1$ in eq (i) درج کرنے سے

$$7(2k + 1) + 5$$
$$= 14k + 7 + 5$$
$$= 14k + 12$$
$$= 2(7k + 6)$$

فرض کریں $m = 7k + 6$

$= 2m$ (جفت عدد ہے)

-12 درج ذیل بیانات کو ثابت کریں۔

(i) اگر x ایک طاق صحیح عدد ہو تو ثابت کریں کہ $x^2 - 4x + 6$ ایک طاق عدد ہے۔

حل: $x^2 - 4x + 6$ . . . (i)

فرض کریں $x = 2k + 1$ x طاق عدد ہے

$x = 2k$ in eq (i) درج کرنے سے

$$(2k + 1)^2 - 4(2k + 1) + 6$$
$$= (2k)^2 + (1)^2 + 2(2k)(1) - 8k - 4 + 6$$
$$= 4k^2 + 1 + 4k - 8k + 2$$
$$= 4k^2 - 4k + 3$$
$$= 4k^2 - 4k + 2 + 1$$
$$= 4k^2 - 4k + 2 + 1$$

فرض کریں $m = 4k^2 - 45 + 2$

$= m + 1$ طاق عدد ہے

www.ilmkidunya.com

(ii) اگر x ایک جفت صحیح عدد ہو تو ثابت کریں کہ $x^2 - 2x + 4$ ایک جفت عدد ہے۔

حل: $x^2 + 2x + 4$ ... (i)

فرض کریں $x = 2k$ x جفت عدد ہے

$x = 2k$ in eq (i) درج کرنے سے

$(2k)^2 + 2(2k) + 4$

$= 4k^2 + 4k + 4$

$= 2(2k^2 + 2k + 2)$

فرض کریں $m = 2k^2 + 2k + 2$

$= 2m$ جفت عدد ہے

13- ثابت کریں کہ کوئی سے بھی دو غیر خالی سیٹوں A اور B کے لیے، $(A \cap B)' = A' \cup B'$

حل: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

فرض کریں $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

L.H.S $= (A \cap B)'$

$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A \cap B = \{\}$

$(A \cap B)' = U - (A \cap B)$

$= \{1, 2, 3, - - -, 10\{-\{\}$

$(A \cap B)' = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

R.H.S $= A' \cup B'$

$A' = U - A$

$= \{1, 2, 3, \ldots, 10\} - \{2, 4, 6\ 8, 10\}$

www.ilmkidunya.com

$$A' = \{1, 2, 5, 7, 9\}$$

$$B' = U - B$$

$$= \{1, 3, \ldots, 10\} - \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B' = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$A' \cup B' = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, , 4, 6, 8, 10\}$$

$$= \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$$

پس ثابت ہوا، $(A \cap B)' = A' \cup B'$

-14 اگر x اور y مثبت حقیقی اعداد ہوں اور $x^2 < y^2$ ہو تو $x < y$

حل: $x^2 < y^2$ (i) . . .

پس $x, y, > 0$

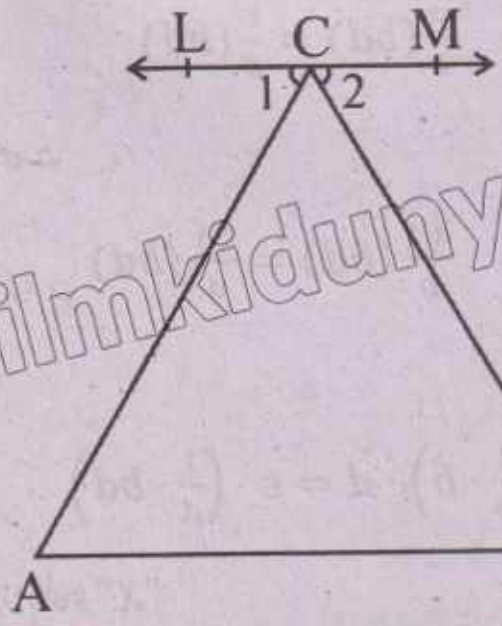
طرفین کا جذر لینے سے

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{y^2}$$

$$\Rightarrow \quad x < y$$

-15 ثابت کریں کہ مثلث کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

حل: معلوم ΔABC



www.ilmkidunya.com

ثابت کرنا: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

بناوٹ: $\overline{AB}$ کے متوازی C کے ذریعے خط $\overline{LM}$ ، زاویے 1 اور 2 ظاہر کیا گیا۔

بیانات	دلائل
$m\angle A = m\angle 1$ ___ (i)	مبادلہ زاویے
$m\angle B = m\angle 2$ ___ (ii)	
$m\angle 1 + m\angle BCA$	مبادہ زاویے
$+m\angle 2 = 180°$	
$m\angle A + m\angle C$	
$+m\angle B = 180°$	خطِ مستقیم کے زاویے (i) اور (ii) کی رو سے

پس ثابت ہوا کہ مثلث کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہے۔

16- اگر a، b اور c غیر صفر حقیقی اعداد ہوں تو ثابت کریں کہ:

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

حل: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}(bd) = \frac{c}{d}(bd)$

برابری کی ضربی خاصیت

$\Rightarrow \quad \frac{a \cdot 1}{b}(bd) = \frac{c \cdot 1}{d}(bd)$

ضربی ذاتی عنصر

$$a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) \cdot d = c \cdot \left(\frac{1}{d} \cdot bd\right)$$

ضرب خاصیتِ تلازم بلحاظ "X"

www.ilmkidunya.com

$$a \cdot 1 \cdot d = c\left(\frac{1}{d} \cdot d.b\right)$$

ضربی معکوس

$$a \cdot d = c \cdot (1 \cdot b)$$

$$ad = c \cdot b$$

ضرب ذاتی عنصر

$$ad = bc$$

ضرب کی خاصیتِ مبادلہ

(ii) $\frac{a}{v} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

حل: $\text{L.H.S} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$

$$= a \cdot \frac{1}{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d}$$

کسروں کا حاصلِ ضربی اصول

$$= (a \cdot c) \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\right)$$

خاصیتِ تلازم بلحاظ ضرب "X"

$$= ac \cdot \frac{1}{bd}$$

کسروں کا حاصلِ ضربی اصول

$$= \frac{ac}{bd} = \text{R.H.S}$$

پس ثابت ہوا $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{ac}{bd}$

(iii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

حل: $\text{L.H.S} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

www.ilmkidunya.com

$$= a \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{b}$$

کسروں کا حاصلِ ضرب

$$= (a + c)\frac{1}{b}$$

بائیں خاصیتِ تقسیمی

$$= \frac{a+c}{b} = \text{R.H.S}$$

پس ثابت ہوا، $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

www.ilmkidunya.com
www.ilmkidunya.com
www.ilmkidunya.com