یونٹ 07

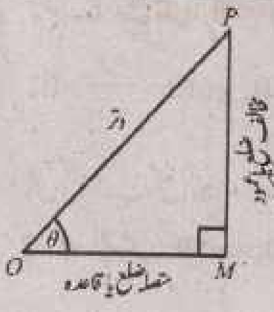
تکونیات

حاصلاتِ تعلم

اس یونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- سائن (sine) اور کوسائن (cosine) تفاعلوں کو °90 اور °180 کے درمیان والے زاویوں تک وسعت دے سکیں۔
- کسی بھی مثلث کے لیے سائن کا قانون، کوسائن کا قانون اور رقبہ کے کلیوں کا استعمال کرتے ہوئے سوالات مسائل حل کر سکیں۔
- سہ رخی میں سادہ تکونیاتی مسائل حل کر سکیں۔
- تکونیات کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل (جیسے ویڈیو گیمز، فلائٹ انجینیئرنگ، نیویگیشن اور صوتی لہریں) پر لاگو کر سکیں۔
- سہ ہندسی بیرنگ کی تشریح اور استعمال کر سکیں۔
- بیرنگ سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔
- بیرنگ کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل پر لاگو کر سکیں۔

7.1 تکونیاتی نسبتیں یا تفاعل (Trigonometric Ratios or Functions)



ایک قائمۃ الزاویہ مثلث POM کے زاویہ θ پر غور کریں، جس کا قائمہ زاویہ M پر ہے۔ جہاں $\overline{OM}$ کو متصلہ ضلع، $\overline{PM}$ کو مخالف ضلع، $\overline{PM}$ کو مخالف ضلع اور PO کو وتر کہا جاتا ہے پھر،

(i) sineθ (sin θ) $= \dfrac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$ (ii) cosine θ(cos θ) $= \dfrac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$

(iii) cosecantθ (cosec θ) $= \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$

(iv) secantθ (sec θ) $\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$ (v) tangentθ (tanθ) $= \dfrac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$

(vi) cotangent θ(cot θ) $= \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$

اوپر دی گئی چھ تکونیاتی نسبتوں کو تکونیاتی تفاعل بھی کہا جاتا ہے۔

نوٹ:
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

یاد رکھیے!
sin θ کا مطلب sin اور θ کی ضرب نہیں ہے۔ sin θ کو زاویہ θ کا سائن پڑھا جاتا ہے۔

مخصوص زاویوں کے لیے تکونیاتی قدریں (Trigonometric Values for Special Angles)

°0, 30, °45, °60، °90 اور °180 کے لیے تکونیاتی قدریں درج ذیل جدول میں دی گئی ہیں:

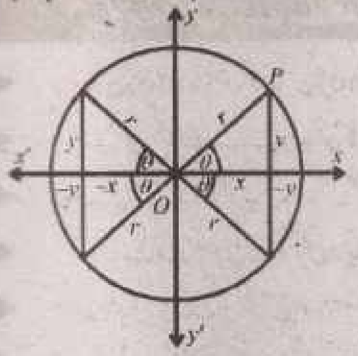
180°	90°	60°	45°	30°	0°	نسبتیں θ زاویہ
0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	sin θ

www.ilmkidunya.com

-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos\theta$
0	غیر تعریف شدہ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\tan\theta$

تکونیاتی تفاعلوں کی علامات (Signs of Trigonometric Function)

علامتیں اس ربع پر منحصر ہوتی ہیں جس میں زاویہ کا اختتامی سرا واقع ہوتا ہے۔ ہم ایک دائرہ پر غور کرتے ہیں جس کا رداس r ہے اور مرکز نقطہ O پر ہے۔



پہلے ربع میں: $x > 0, y > 0$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} > 0,\ \cos\theta = \frac{x}{r} > 0,\ \tan\theta = \frac{y}{x} > 0.$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} > 0,\ \sec\theta = \frac{r}{x} > 0,\ \cot\theta = \frac{x}{y} > 0$$

پس، پہلے ربع میں تمام تکونیاتی تفاعل مثبت ہوتے ہیں۔

دوسرے ربع میں: $x < 0, y > 0$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} > 0,\ \cos\theta = \frac{-x}{r} < 0,\ \tan\theta = \frac{y}{-x} < 0,\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} > 0,\ \sec\theta\ \frac{-x}{y} < 0\ \cot\theta = \frac{-x}{y} < 0$$

پس، دوسرے ربع میں sin اور cosec تفاعل مثبت ہوتے ہیں اور باقی تمام تکونیاتی تفاعل منفی ہوتے ہیں۔

تیسرے ربع میں: $x < 0, y < 0$

$$\sin\theta = \frac{-y}{r} < 0,\ \cos\theta = \frac{-x}{r} < 0,\ \tan\theta = \frac{-y}{-x} > 0,\ \operatorname{cosec}\theta\ \frac{r}{-y} < 0,\ \sec\theta = \frac{r}{-x} < 0,\ \cot\theta = \frac{-x}{-y} > 0$$

پس، تیسرے ربع tan اور cot تفاعل مثبت ہوتے ہیں اور باقی تمام تکونیاتی تفاعل منفی ہوتے ہیں۔

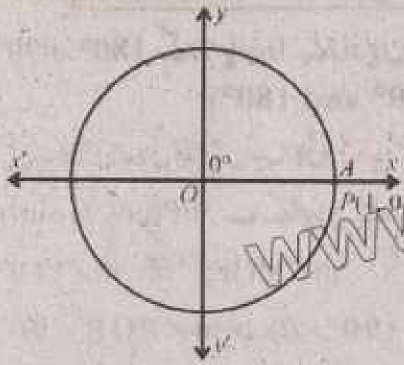
چوتھے ربع میں: $x > 0, y < 0$

$$\sin\theta = \frac{-y}{r} < 0,\ \cos\theta = \frac{x}{r} > 0,\ \tan\theta = \frac{-y}{x} < 0,\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{-y} < 0,\ \cot\theta = \frac{x}{-y} < 0,\ \sec\theta = \frac{r}{x} > 0$$

پس چوتھے ربع میں cos اور sec تفاعل مثبت ہوتے ہیں اور باقی تمام تکونیاتی تفاعل منفی ہوتے ہیں۔

0, 90° اور 180° کی تکونیاتی نسبتیں

(Trigonometric Ratio of 0°, 90° and 180°)



i- 0° کی تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios of 0°)

فرض کیا ایک اکائی دائرہ جس کا مرکز O ہے اور اس پر نقطہ P(x,y) اس طرح لیں کہ 0° = m∠AOP ہو۔ چونکہ P(x,y) x- محور پر واقع ہے۔

اس لیے $x = 1, y = 0, r = 1$

$$\sin 0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \operatorname{cosec} 0° = \frac{1}{\sin 0°} = \frac{1}{0} =$$ غیر تعریف شدہ

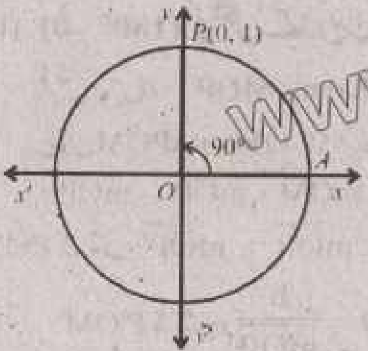
$$\cos 0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad , \sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \cot 0° = \frac{1}{\tan 0°} = \frac{1}{0}$$ غیر تعریف شدہ

ii- 90° کی تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios of 90°)

فرض کیا ایک اکائی دائرہ جس کا مرکز O ہے اور اس پر P(x,y) اس طرح لیں کہ 90° = m∠AOP ہو۔ چونکہ P(x,y) y- محور پر واقع ہے

اس لیے $x = 1, y = 0, r = 1$



$$\sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad , \operatorname{cosec} 90° = \frac{1}{\sin 90°} = \frac{1}{1} = 1$$

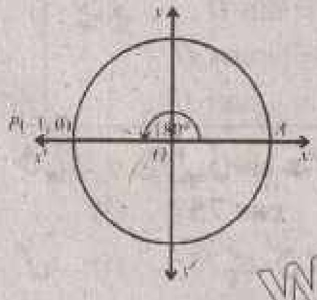
$$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \sec 90° = \frac{1}{\cos 90°} = \frac{1}{0} =$$ غیر تعریف شدہ

$$\tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} =$$ غیر تعریف شدہ $$, \cot 90° = \frac{0}{1} = 0$$

iii- 180° کی تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios of 180°)

فرض کیا ایک اکائی دائرہ جس کا مرکز O ہے اور اس پر P(x,y) اس طرح لیں کہ $m\angle AOP = 180°$ ہو۔ چونکہ P(x,y) x'- محور پر واقع ہے۔

اس لیے $m\angle AOP = 180°$



$$\sin 180° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0, \operatorname{cosec} 180° = \frac{1}{\sin 180°} = \frac{1}{0}$$ غیر تعریف شدہ

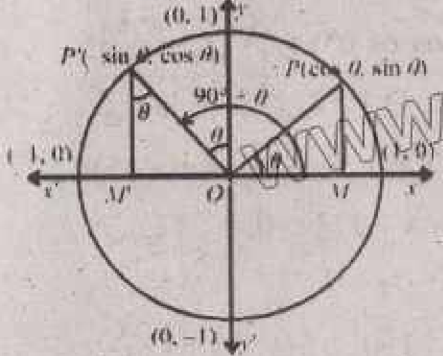
$$\cos 180° = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1, \sec 180° = \frac{1}{\cos 180°} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\tan 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \quad , \cot 180° = \frac{1}{\tan 180°} = \frac{-1}{0} =$$ غیر تعریف شدہ

www.ilmkidunya.com

90° اور 180° کے درمیان والے زاویوں کے لیے سائن اور کوسائن تفاعلوں کو وسعت دینا

(Extending sine and cosine Functions to Angles Between 90° and 180°)



فرض کیا کارتیسی محدداتی نظام میں ایک اکائی دائرہ لیا جس کا مرکز O(0,0) اور رداس 1 ہے۔

$P(\cos\theta, \sin\theta)$ دائرے کے محیط پر پہلے ربع میں کوئی بھی نقطہ ہے، جہاں

$m\angle MOP = \theta = m\angle YOP'$

$m\angle POP' = 90°$ اور $m\angle MOP' = (90° + \theta)$ اس لیے $m\angle OP'M' = $

$m\angle YOP'$ (متبادلہ زاویے) لہٰذا، زاویہ $(90° + \theta)$ زاویہ θ کو 90° کے ذریعے مخالف گھڑی وار سمت گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔

P' کے محددات $(-\sin\theta, \cos\theta)$ ہوں گے یعنی P' کا نیا x-محدد، P کے y-محدد کی منفی قدر بن جاتا ہے اور P' کا نیا y-محدد، P کا x-محدد بن جاتا ہے۔ جیسے کہ ہم جانتے ہیں کہ اکائی دائرہ میں کسی بھی زاویہ کے کوسائن (cosine) اور سائن (sine) کو بالترتیب x-محدد اور y-محدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ لہٰذا،

نوٹ:
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cos(90° + \theta) =$ کا x-محدد $(90° + \theta) = -\sin\theta$

چنانچہ، $\sin(90° + \theta) =$ کا y-محدد $(90° + \theta) = \cos\theta$

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$, $\operatorname{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta$

$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$, $\sec(90° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\tan(90° + \theta) = -\cot\theta$, $\cot(90° + \theta) = -\tan\theta$

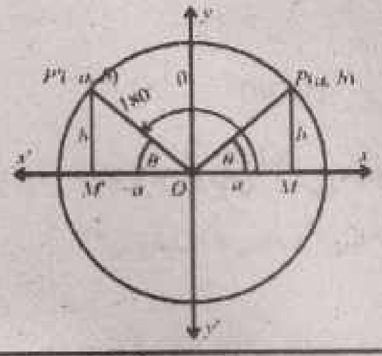
(b) (180° − θ) کی شکل کے زاویوں کی تکونیاتی نسبتیں

فرض کریں $m\angle MOP = \theta$ اور $m\angle MOP' = (180° - \theta)$ ہیں۔

یہاں ΔPOM اور $\Delta P'OM'$ ایک دوسرے کے متماثل ہیں، اس طرح کہ:

$m\overline{OP} = m\overline{OP'}$ ، $mOM = mOM'$ اور $mP'M' = PM$

ΔPOM میں، $m\overline{OP} = m\overline{OP'}$ ، $m\overline{OM} = m\overline{OM'}$ اور $m\overline{PM} = m\overline{P'M'}$



$\Delta P'OM'$ میں، $\sin\theta = \dfrac{b}{m\overline{OP}}$ اور $\cos\theta = \dfrac{a}{m\overline{OP}}$

$\sin(180° - \theta) = \dfrac{P' \text{ کا y-محدد}}{m\overline{OP'}} = \dfrac{b}{m\overline{OP'}} = \sin\theta$ ، $\Delta P'OM'$ میں

$\cos(180° - \theta) = \dfrac{P' \text{ کا x-محدد}}{m\overline{OP'}} = \dfrac{-a}{m\overline{OP}} = -\cos\theta$

$\operatorname{cosec}(180° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$
$\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$
$\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$

چنانچہ

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$
$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$
$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

مثال 1: درج ذیل کی علامات معلوم کیجیے:

(i) cos 75° (ii) cot 250°

حل: (i) 75° پہلے ربع میں واقع ہے جہاں cos مثبت ہوتا ہے۔

(ii) 250° تیسرے ربع میں واقع ہے جہاں cot مثبت۔

www.ilmkidunya.com

مثال 2: کیلکولیٹر کا استعمال کیے بغیر، درج ذیل تکونیاتی تفاعلوں کی درست قدریں معلوم کیجیے:

(i) $\sin 120°$ (ii) $\cot 150°$

حل: (i) $\sin 120°$

$120°$ دوسرے ربع میں واقع ہے، جہاں sin مثبت ہوتا ہے۔

$\therefore \sin(180° - \theta) = \sin\theta$ $\quad\therefore \sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ii) $\cot 150°$

$150°$ دوسرے ربع میں واقع ہے، جہاں cot منفی ہوتا ہے۔

$\therefore \cot(180° - \theta) = -\cot\theta$ $\quad\therefore \cot 150° = \cot(180° - 30°) = -\cot 30°$

$$= -\sqrt{3}$$

حل مشق 7.1

1- درج ذیل کی علامات معلوم کیجیے:

(i) $\sin 55°$

حل: $\sin 55°$ پہلے ربع میں واقع ہے جہاں پر sin مثبت ہوتا ہے۔

(ii) $\cos 145°$

حل: $\cos 145°$ دوسرے ربع میں واقع ہے جہاں cos منفی ہوتا ہے۔

(iii) $\tan 111°$

حل: $\tan 111°$ دوسرے ربع میں واقع ہے جہاں پر tan منفی ہوتا ہے۔

(iv) $\sec 179°$

حل: $\sec 179°$ تیسرے ربع میں واقع ہے جہاں پر sec منفی ہوتا ہے۔

(v) $\operatorname{cosec} 88°$

حل: $\operatorname{cosec} 88°$ پہلے ربع میں واقع ہے جہاں پر cosec مثبت ہوتا ہے۔

(vi) $\sin 14°$

حل: $\sin 14°$ پہلے ربع میں واقع ہے جہاں پر sin مثبت ہوتا ہے۔

2- خالی جگہیں پُر کیجیے۔

(i) $\tan(180° - \theta) = ...\tan\theta$

حل: $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

(ii) $\sin(180° - \theta) = ...\sin\theta$

حل: $\sin(180° - \theta) = +\sin\theta$

(iii) $\tan(90° + \theta) = ...\cot\theta$

حل: $\tan(90° + \theta) = -\cot\theta$

(iv) $\cos(90° + \theta) = ...\sin\theta$

حل: $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

(v) $\operatorname{cosec}(180° - \theta) = ...\operatorname{cosec}\theta$

حل: $\operatorname{cosec}(180° - \theta) = +\operatorname{cosec}\theta$

(vi) $\sec(90° - \theta) = ...\operatorname{cosec}\theta$

حل: $\sec(90° - \theta) = +\operatorname{cosec}\theta$

www.ilmkidunya.com

-3 کیلکولیٹر کا استعمال کیے بغیر درج ذیل تکونیاتی تفاعلوں کی درست قدر معلوم کیجیے:

(i) $\sin 150^\circ$

حل: $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = +\sin 30 = \frac{1}{2} \quad \therefore \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

(ii) $\tan 150^\circ$

حل: $\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

(iii) $\sec 150^\circ$

حل: $\sec 150^\circ = \sec(180^\circ - 30^\circ) = -\sec 30^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \therefore \sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$

(iv) $\operatorname{cosec} 120^\circ$

حل: $\operatorname{cosec} 120^\circ = \operatorname{cosec}(180^\circ - 60^\circ) = +\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \therefore \operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

(v) $\cos 120^\circ$

حل: $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \quad \therefore \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

(vi) $\cot 120^\circ$

حل: $\cot 120^\circ = \cot(180^\circ - 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta$

(vii) $\sin 135^\circ$

حل: $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = +\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

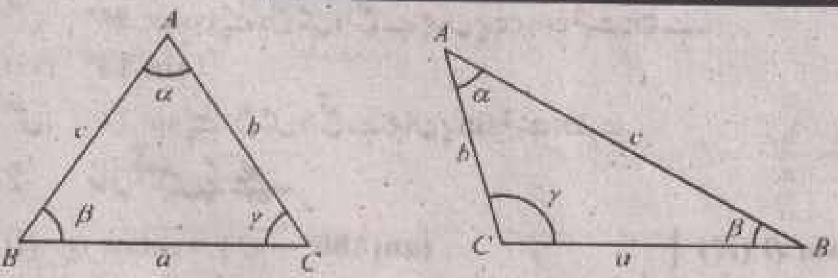
(viii) $\sec 135^\circ$

حل: $\sec 135^\circ = \sec(180^\circ - 45^\circ) = -\sec 45^\circ = -\sqrt{2} \quad \therefore \sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$

(ix) $\cot 135^\circ$

حل: $\cot 135^\circ = \cot(180^\circ - 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1 \quad \therefore \cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta$

7.2 غیر قائمۃ الزاویہ مثلثیں (Oblique Triangles)



غیر قائمۃ الزاویہ مثلث ایسی مثلث ہوتی ہے جس میں کوئی بھی قائمہ زاویہ نہ ہو۔ نہ یا تو حادہ زاویہ مثلث (تمام زاویے 90° سے کم) یا منفرجہ زاویہ مثلث (ایک زاویہ 90° سے بڑا) ہوسکتی ہے۔ درج ذیل مثلثیں غیر قائمۃ الزاویہ مثلثیں ہیں:

سائن کا قانون (The Law of sines)

اگر a، b اور c کسی مثلث کے اضلاع اور α، β اور γ بالترتیب ان اضلاع کے مخالف زاویے ہوں تو سائن کا قانون درج ذیل ہے:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

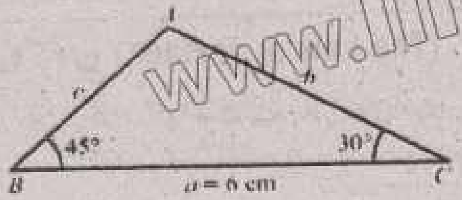
سائن کا قانون مثلث کے زاویوں اضلاع کے درمیان ایک تعلق ہے۔ مثلث کو حل کرتے وقت، سائن کا قانون ایک ایسی مثلث کو حل کرنے

www.ilmkidunya.com

کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے جب دو زاویے اور ایک ضلع جو کسی ایک زاویہ کے مخالف ہو، دیے گئے ہوں۔

مثال 3: ایک مثلث ABC میں، β = 45°، γ = 30° اور a = 6cm ہوں تو b اور c معلوم کیجیے۔

حل: جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\alpha \quad 180° \quad \beta \quad \gamma$$

$$= 180° \quad 45° \quad 30° \quad 105°$$

اب سائن کے قانون کے مطابق

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a}{\sin 150°} = \frac{b}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin 30°}$$

$$[\sin 105° \quad \sin(180° \quad 75°) \quad \sin 75°]$$

$$\frac{a}{\sin 75°} = \frac{b}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin 30°}$$

اب $\frac{a}{\sin 75°} = \frac{b}{\sin 45°}$

$$b = \frac{a \sin 45°}{\sin 75°} = \frac{6 \times (0.71)}{0.97} = \frac{4.26}{0.97} 4.4cm$$

اب $\frac{a}{\sin 75°} = \frac{c}{\sin 30°}$

$$c = \frac{a \times \sin 30°}{\sin 75°} = \frac{6 \times (0.5)}{0.97} = \frac{3.0}{0.97} = 3.1cm$$

خود آزمائی

ΔABC کو حل کیجیے جس میں α = 77°، β = 66°، a = 2cm

حل:

$$\alpha = 77°, \beta = 66°, a = 2am$$

ہم جانتے ہیں

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\gamma = 180° - \alpha \quad \beta$$

$$= 180° - 77° \quad 66°$$

$$= 37°$$

سائن کے قانون سے

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{2}{\sin 77°} = \frac{b}{\sin 66°}$$

$$\sin 66° \times \frac{2}{\sin 77°} = b$$

$$\frac{0.9135 \times 2}{0.9744} = b$$

$$1.87 = b$$

$$b = 1.87cm$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{2}{\sin 77°} = \frac{c}{\sin 37°}$$

$$\frac{\sin 37° \times 2}{\sin 77°} = c$$

$$\frac{0.6018 \times 2}{0.9744} = c$$

$$1.24 = c$$

$$c = 1.24cm$$

لہٰذا $\gamma = 37°, b = 1.87cm, c = 1.24cm$

www.ilmkidunya.com

چیلنج! جب کسی مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ یا تینوں اضلاع دیے گئے ہوں تو کیا ہم سائن کا قانون استعمال کر سکتے ہیں؟

جواب: جی نہیں اگر ہمارے پاس دو اضلاع a اور b ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ بھی ہو تو ہمارے پاس ان کے سامنے والے اضلاع کے متعلقہ زاویے α اور β نہیں ہوتے جس سے جوڑا نہیں بنتا اگر ہمارے پاس تینوں اضلاع a، b اور c ہوں تو ہمارے پاس شروع کرنے کے لیے زاویہ نہیں ہوگا۔

کوسائن کا قانون (The Law of cosines)

اگر a، b اور c کسی مثلث کے اضلاع ہوں اور α، β اور γ بالترتیب ان اضلاع کے مخالف زاویے ہوں تو کوسائن کا قانون درج ذیل ہے:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \text{ یا } \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ یا } \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \text{ یا } \cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

مثال 4: ΔABC میں $a = 3, b = 5, b = 5, c = 7$ ہوں تو α, β اور γ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل: $a = 3, b = 5, c = 7$، کوسائن کا قانون استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{5^2+7^2-3^2}{2\times5\times7} = \frac{25+49-9}{70} = \frac{13}{14}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{13}{14}\right) = 21.8^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{3^2+7^2-5^2}{2\times3\times7} = \frac{9+49-25}{42} = \frac{11}{14}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{14}\right) = 38.2^\circ$$

جیسا کہ

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 21.8^\circ \text{ of } 38.2^\circ = 120^\circ$$

مثلث کا رقبہ (Area of a Triangle)

(a) جب کسی مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو تو

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

مثال 5: مثلث ABC کا رقبہ معلوم کیجیے جس میں $a = 4.2, b = 3.2$ اور $\gamma = 70^\circ$ ہو۔

حل: $a = 4.2, b = 3.2, \gamma = 70^\circ$

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}(4.2)(3.2)\sin 70^\circ$$

$$= \frac{1}{2}(4.2)(3.2)(0.94) = 6.31 \text{ مربع یونٹس}$$

(b) جب مثلث کے تینوں اضلاع دیے گئے ہوں تو

$$s = \frac{a+b+c}{2} \text{ ، } \Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

www.ilmkidunya.com

مثال 6: ΔABC کا رقبہ معلوم کیجیے جس میں $a = 4cm$, $b = 3cm$ اور $c = 5cm$ ہے۔

حل: $a = 4cm, b = 3cm, c = 5cm$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+3+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$s - a = 6 - 4 = 2$$
$$s - b = 6 - 3 = 3$$
$$s - c = 6 - 5 = 1$$

ΔABC of کا رقبہ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{6(2)(3)(1)} = \sqrt{36}$$

$$= 6cm^2$$

خود آزمائی

ΔABC کا رقبہ معلوم کیجیے جس میں

(i) $a = 8cm, b = 9cm, c = 10cm$ (ii) $a = 6.1\ cm, b = 2.3\ cm, g = 80°$

حل:

(i) $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{8+9+10}{2} = \frac{27}{2} = 13.5cm$

ΔABC کا رقبہ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{13.5(13.5-8)(13.5-9)(13.5-10)}$$

$$= \sqrt{13.5(5.5)(4.5)(3.5)}$$

$$\sqrt{1169.4375} = 34.20cm^2$$

(ii) $a = 6.1cm, b = 2.3cm, \gamma = 80°$

ΔABC کا رقبہ $= \frac{1}{2} ab \sin\gamma$

$$= \frac{1}{2} \times (6.1)(2.3) \sin(80°)$$

$$= (7.015)(0.984)$$

$$= 6.91cm^2$$

(c) جب مثلث کے دو زاویے اور ایک ضلع دیا گیا ہو تو

ΔABC کا رقبہ $= \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma}$

مثال 7: مثلث ABC کا رقبہ معلوم کیجیے جس میں $\alpha = 35°$، $\beta = 65°$ اور $a = 2cm$ ہے۔

حل: جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$35° + 65° + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 180° - 100° = 80° = 80°$$

www.ilmkidunya.com

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$$

$$= \frac{(2)^2 \sin 65^\circ \sin 80^\circ}{2\sin\alpha}$$

$$= \frac{4(0.91)(0.98)}{2\sin 35^\circ} = 3.13m^2$$

خود آزمائی ΔABC کا رقبہ معلوم کیجیے جس میں $\beta = 50^\circ$, $\gamma = 40^\circ$, c = 10cm

حل:

$\beta = 50^\circ$, $\gamma = 40^\circ$, c = 10cm

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$

$= 180 - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \frac{c^2 \sin(\alpha)\sin(\beta)}{2\sin(\gamma)}$$

$$= \frac{10^2 \sin(90^\circ)\sin(50^\circ)}{2\sin(40^\circ)}$$

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \frac{100\times1\times0.766^\circ}{2\sin(40)}$$

$$= \frac{76.60}{1.2856} = 59.58cm^2$$

www.ilmkidunya.com

حل مشق 7.2

-1 مثلث ABC کو حل کیجیے، جس میں

(i) $a = 6.1$ cm, b = 8.4 cm, $\alpha = 42^\circ$

حل:

$a = 6.1$ cm, b = 8.4 cm, $\alpha = 42^\circ$

سائن کا قانون

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{6.1}{\sin 42^\circ} = \frac{8.4}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta = \frac{8.4\times\sin 42^\circ}{6.1}$$

$\sin\beta = 0.92$

$\beta = \sin^{-1} 0.92$

$\beta = 67.1^\circ$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$

$= 180 - 42^\circ - 67.1^\circ = 70.9^\circ$

سائن کا قانون

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\sin\gamma \times \frac{b}{\sin\beta} = c$$

$$\frac{\sin 70.9^\circ \times 8.4}{\sin 67.1^\circ} = c$$

$$\frac{0.94\times8.4}{0.92} = c$$

$8.6 = c$

لہٰذا، c = 8.6 cm, $\beta = 67.1^\circ$, $\gamma = 70.9^\circ$

(ii) $a = 12.2$ **cm ,** $c = 15.8$ **cm,** $\gamma = 50$

حل: $a = 12.2\text{ cm},\ c = 15.8\text{ cm},\ \gamma = 50$

سائن کا قانون

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{12.2}{\sin\alpha} = \frac{15.8}{\sin 50}$$

$$\sin 50^\circ \times \frac{12.2}{15.8} = \sin\alpha$$

$$\frac{0.76 \times 12.2}{15.8} = \sin\alpha$$

$$0.59 = \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = 0.59$$

$$\alpha = \sin^{-1}(0.59)$$

$$\alpha = 36.3^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta = 180 - \alpha - \gamma$$

$$\beta = 180 - 36.3^\circ - 50^\circ$$

$$\beta = 93.7^\circ$$

سائن کا قانون

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{b}{\sin 93.7} = \frac{15.8}{\sin 50}$$

$$b = \frac{15.8}{\sin 50^\circ} \times \sin 93.8^\circ$$

$$b = \frac{15.8}{0.76} \times 0.998$$

$$b = 20.6\text{ cm}$$

لہٰذا، $b = 20.6\text{ cm},\ \alpha = 36.3^\circ,\ \beta = 93.7^\circ$

(iii) $b = 5.2$ **cm,** $c = 5$**cm** $\gamma = 48^\circ$

حل: $b = 5.2\text{ cm},\ c = 5\text{cm},\ \gamma = 48^\circ$

سائن کا قانون

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{5.2}{\sin\beta} = \frac{5}{\sin 48^\circ}$$

$$\frac{\sin 48^\circ \times 5.2}{5} = \sin\beta$$

$$\sin\beta = \frac{\sin 48^\circ \times 5.2}{5}$$

$$\sin\beta = \frac{0.74 \times 5.2}{5}$$

$$\sin\beta = 0.77$$

$$\beta = \sin^{-1} 0.77$$

$$\beta = 50.6^\circ$$

جیسا کہ ہم جانتے ہیں

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$$

$$= 180^\circ - 50.4^\circ - 48^\circ$$

$$= 81.4^\circ$$

سائن کا قانون

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a}{\sin 81.4} = \frac{5}{\sin 48}$$

$$a = \frac{5}{\sin 48} \times \sin 81.4$$

$$a = \frac{5}{0.74} \times 0.99$$

$$a = 6.7\text{ cm}$$

لہٰذا، $a = 6.7\text{ cm},\ \alpha = 81.4^\circ,\ \beta = 50.6^\circ$

(iv) $b = 4.8$ **cm,** $a = 4$ **cm ,** $\beta = 71^\circ$

حل: $b = 4.8\text{ cm},\ a = 4\text{ cm},\ \beta = 71^\circ$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{4.8}{\sin 71^\circ}$$

$$\frac{\sin 71^\circ \times 4}{4.8} = \sin\alpha$$

$$\frac{0.95 \times 4}{4.8} = \sin\alpha$$

$$0.79 = \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = 0.79$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0.79$$

$$\alpha = 52^\circ$$

www.ilmkidunya.com

ہم جانتے ہیں کہ

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$

$= 180^\circ - 52^\circ - 71^\circ$

$= 57^\circ$

سائن کے قانون سے

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{4.8}{\sin 71^\circ} = \frac{c}{\sin 57^\circ}$

$\sin 57^\circ \times \frac{4.8}{\sin 71} = c$

$\frac{0.8 \times 4.8}{0.9} = c$

$4.3 = c$

لہٰذا $c = 4.3$ cm , $\alpha = 52^\circ$, $\gamma = 57^\circ$

(v) $\beta = 70^\circ$, b = 8cm , $\alpha = 100$

حل: $\beta = 70^\circ$, b = 8cm , $\alpha = 100$

سائن کے قانون سے

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$\frac{a}{\sin 100^\circ} = \frac{8}{\sin 70^\circ}$

$a = \frac{8}{\sin 70^\circ} \times \sin 100^\circ$

$a = \frac{8}{0.94} \times 0.99$

$a = 8.4$ cm

ہم جانتے ہیں کہ

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$

$\gamma = 180^\circ - 100^\circ - 70^\circ$

$\gamma = 10^\circ$

سائن کے قانون سے

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{8}{\sin 70^\circ} = \frac{c}{\sin 10^\circ}$

$\sin 10^\circ \times \frac{8}{\sin 70^\circ} = c$

$0.17 \times \frac{8}{0.94} = c$

$1.5 = c$

$c = 1.5$ cm

لہٰذا $a = 8.4$ cm, $c = 1.5$ cm, $\gamma = 10^\circ$

(vi) $a = 6$cm, $\alpha = 55^\circ$, $\gamma = 60^\circ$

حل: $a = 6$cm, $\alpha = 55^\circ$, $\gamma = 60^\circ$

ہم جانتے ہیں کہ

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\beta = 180^\circ \alpha + \gamma$

$\beta = 180^\circ \quad 55 \quad 60$

$\beta = 65^\circ$

سائن کے قانون سے

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$\frac{6}{\sin 55^\circ} = \frac{6}{\sin 65^\circ}$

$\sin 65^\circ \times \frac{6}{\sin 55^\circ} = b$

$0.91 \times \frac{6}{0.82} = b$

$6 = b$

$b = 6$ cm

سائن کے قانون سے

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{6.h}{\sin 65} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$

$\sin 60^\circ \times \frac{6.h}{\sin 65} = c$

$\frac{0.87 \times 6.8}{0.91} = c$

$6.3 = c$

$c = 6.3$ cm

لہٰذا $c = 6.4$ cm, $b = 6.7$ cm, $\beta = 65^\circ$

www.ilmkidunya.com

(vii) c = 7 cm, β = 34°, γ = 64°

حل: c = 7 cm, β = 34°, γ = 64°

ہم جانتے ہیں کہ

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$$
$$\alpha = 180 - 34 - 64$$
$$\alpha = 82^\circ$$

سائن کے قانون سے

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\frac{b}{\sin 34^\circ} = \frac{7}{\sin 64^\circ}$$
$$b = \frac{7}{\sin 64^\circ} \times \sin 34^\circ$$
$$b = \frac{7}{0.89} \times 0.56$$
$$b = 4.4 \text{ cm}$$

سائن کے قانون سے

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{\sin 82^\circ} = \frac{4.4}{\sin 34^\circ}$$
$$a = \frac{4.4}{\sin 34^\circ} \times \sin 82^\circ$$
$$a = \frac{4.4}{0.56} \times 0.99$$
$$a = 7.7 \text{ cm}$$

لہٰذا a = 7.7 cm, b = 4.4 cm, α = 82°

(viii) b = 12 cm, α = 92°, β = 77°

حل: b = 12 cm, α = 92°, β = 77°

ہم جانتے ہیں کہ

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$\gamma = 180^\circ - 92^\circ - 77$$
$$= 11^\circ$$

سائن کے قانون سے

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{\sin 92^\circ} = \frac{12}{\sin 77^\circ}$$
$$a = \frac{12}{\sin 77^\circ} \times \sin 92^\circ$$
$$a = \frac{12}{0.97} \times 0.999$$
$$a = 12.3 \text{ cm}$$

سائن کے قانون سے

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\frac{12}{\sin 77^\circ} = \frac{c}{\sin 11^\circ}$$
$$\frac{\sin 11^\circ \times 12}{\sin 77^\circ} = c$$
$$\frac{0.19 \times 12}{0.97} = c$$
$$2.4 = c$$
$$c = 2.4 \text{ cm}$$

لہٰذا a = 12.3 cm, c = 2.4 cm, γ = 11°

2. مثلث ABC کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(i) a = 7 cm, b = 8cm, γ = 38°

حل: a = 7 cm, b = 8cm, γ = 38°

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$
$$= \frac{1}{2}(7)(8)(\sin 38^\circ)$$
$$= 28(0.6157)$$
$$= 17.24 \text{ cm}^2$$

(ii) a = 11cm, c = 14 cm, β = 51°

حل: a = 11cm, c = 14 cm, β = 51°

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$
$$= \frac{1}{2}(11)(14)(\sin 51^\circ)$$
$$= 77(0.7771)$$
$$= 59.84 \text{ cm}^2$$

(iii) b = 3m, c = 9 cm, α = 78°

حل: b = 3m, c = 9 cm, α = 78°

www.ilmkidunya.com

ΔABC کارقبہ $= \frac{1}{2} bc \sin\alpha$

$= \frac{1}{2}(3)(9)(\sin 78^\circ)$

$= 13.5\,(0.9781)$

$= 13.20\ cm^2$

(iv) $a = 10$ cm, $\alpha = 62^\circ$, $\beta = 69^\circ$

حل: $a = 10$ cm, $\alpha = 62^\circ$, $\beta = 69^\circ$

ہم جانتے ہیں کہ

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\gamma = 180 - \alpha - \beta$

$= 180 - 62^\circ - 69^\circ = 49^\circ$

ΔABC رقبہ $= \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$

$= \dfrac{(10)^2(\sin 69^\circ)(\sin 49)}{2\sin 62^\circ}$

$= \dfrac{100(0.9336)(0.7547)}{2(0.8829)}$

$= \dfrac{70.4588}{1.7658} = 39.90\ cm^2$

(v) $c = 4$cm, $\beta = 36^\circ$, $\gamma = 80^\circ$

حل: $c = 4$cm, $\beta = 36^\circ$, $\gamma = 80^\circ$

ہم جانتے ہیں کہ

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$

$= 180^\circ - 36 - 80 = 64^\circ$

ΔABC رقبہ $= \dfrac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma}$

$= \dfrac{(4)^2(\sin 64^\circ)(\sin 36^\circ)}{2(\sin 80^\circ)}$

$= \dfrac{(16)(0.8988)(0.5878)}{2(0.9848)}$

$= \dfrac{8.4530}{1.9696} = 4.29\ cm^2$

(vi) $c = 6.6$ cm, $\alpha = 23^\circ$, $\gamma = 89^\circ$

حل: $c = 6.6$ cm, $\alpha = 23^\circ$, $\gamma = 89^\circ$

ہم جانتے ہیں کہ

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$

$= 180^\circ - 23^\circ - 89^\circ = 68^\circ$

ΔABC رقبہ $= \dfrac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma}$

$= \dfrac{(6.6)^2(\sin 23^\circ)(\sin 68^\circ)}{2(\sin 89^\circ)}$

$= \dfrac{43.56(0.3907)(0.9272)}{2(0.9998)}$

$= \dfrac{15.7799}{1.9996} = 7.89\ cm^2$

(vii) $a = 5.3$ cm, $b = 4.7$ cm, $c = 8.2$ cm

حل: $a = 5.3$ cm, $b = 4.7$ cm, $c = 8.2$ cm

$a = 5.3$, $b = 4.7$, $c = 8.2$

$S = \dfrac{a+b+c}{2}$

$= \dfrac{5.3+4.7+8.2}{2}$

$= \dfrac{18.2}{2} = 9.1$

ΔABC رقبہ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{9.1(9.1-5.3)(9.1-4.7)(9.1-8.2)}$

$= \sqrt{9.1(3.8)(4.4)(0.9)}$

$= \sqrt{136.93}$

$a = 6.12$ cm, $b = 8.34$ cm, $c = 7.12$ cm (viii)

حل: $a = 6.12$ cm, $b = 8.34$ cm, $c = 7.12$ cm

$s = \dfrac{a+b+c}{2}$

$s = \dfrac{6.12+8.34+7.12}{2} = \dfrac{21.58}{2} = 10.79 = 11.70\ cm^2$

www.ilmkidunya.com

$$\triangle ABC \text{ رقبہ } = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

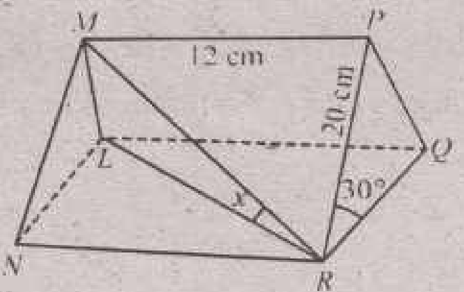
$$= \sqrt{10.79(10.79-6.12)(10.79-8.34)(10.79-7.12)}$$

$$= \sqrt{10.79(4.67)(2.45)(3.67)}$$

$$= \sqrt{453.53} = 21.29cm^2$$

7.3 سہ رُخی میں سادہ تکونیاتی مسائل حل کرنا (Solve Simple Trigonometric Problems in Three Dimensions)

مثال 8: دی گئی شکل ایک منشور کو ظاہر کرتی ہے۔ مثلث PQR منشور کا کراس سیکشن ہے، جہاں وہ زاویہ معلوم کیجیے جو خط MR مستوی RQLM کے ساتھ بناتا ہے۔



$m\overline{PR} = 20cm,\quad m\overline{MP} = 12cm.$

$m\angle PRQ = 30°,\quad m\angle PQR = 90°$

حل: قائمۃ الزاویہ مثلث PQR میں

$$\frac{m\overline{PQ}}{20} = \sin 30°$$

$$m\overline{PQ} = 20 \times \frac{1}{2}$$

$$= 10 cm$$

قائمۃ الزاویہ مثلث MPR میں

$$m\overline{MR} = \sqrt{(m\overline{PR})^2 + (m\overline{MP})^2} = \sqrt{(20)^2 + (12)^2} = \sqrt{400+144} = \sqrt{544}$$

$$= 23.3238 \text{ cm}$$

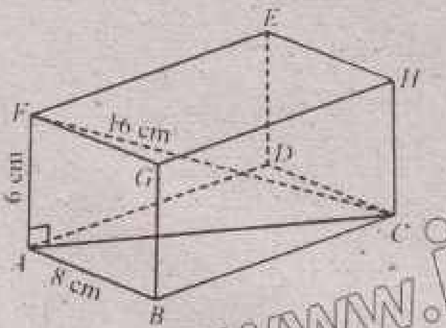
قائمۃ الزاویہ مثلث MLR میں

$$\sin x = \frac{\text{opp.}}{\text{hyp.}} = \frac{10}{23.3238} = 0.4287$$

$$\therefore\ x = \sin^{-1}(0.4287)$$

$$= 25.4°$$

مثال 9: شکل ایک مکعب نما ABCDEFGH کو ظاہر کرتی ہے جس میں $m\overline{AB} = 8cm$, $m\overline{AF} = 6cm$, $m\overline{FC} = 16cm$ ہوں تو $\overline{BC}$ کی لمبائی معلوم کیجیے۔



حل: قائمۃ الزاویہ مثلث AFC میں

$$m\overline{AC} = \sqrt{(m\overline{FC})^2 - (m\overline{AF})^2} = \sqrt{(16)^2 - (6)^2}$$

$$= \sqrt{256-36} = \sqrt{220} = 14.83cm$$

قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں

$$m\overline{BC} = \sqrt{(14.83)^2 - (8)^2} = \sqrt{220-64}$$

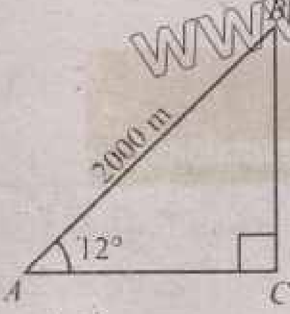
$$= \sqrt{156} = 12.5cm$$

www.ilmkidunya.com

7.4 حقیقی زندگی میں تکونیات کا تصور (Concept of Trigonometry in Real Life)

مثال 10: ایک ہوائی جہاز 12° کے زاویہ صعود پر پرواز شروع کرتا ہے اور اس راستے پر 2000 میٹر کا سفر طے کرتا ہے۔ یہ فاصلہ طے کرنے کے بعد ہوائی جہاز کتنی بلندی پر ہے؟

حل: مثلث ABC میں



$$\sin 12^\circ = \frac{m\overline{BC}}{2000}$$

$$(0.2079)2000 = m\overline{BC}$$

$$m\overline{BC} = 415.8\text{ m}$$

جہاز زمین سے تقریباً 415.8 m میٹر بلندی پر ہے۔

مثال 11: ایک ساؤنڈ لیب میں، دو مائیکروفون $c = 3m$ کے فاصلے پر رکھے گئے ہیں۔ ایک آواز کے سورس سے ایک مائیکروفون $a = 2m$ اور دوسرے سے $b = 2.5m$ کے فاصلے پر ہے۔ ان آواز کے راستوں a اور b کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے۔

حل: یہاں $a = 2m,\ b = 2.5\text{ m},\ c = 3\text{ m}$

کوسائن کا قانون پیش کرتے ہوئے

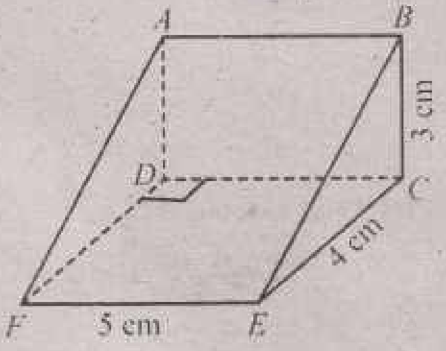
$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{2^2+(2.5)^2-3^2}{2\times2\times2.5} = \frac{4+6.25-9}{10} = 0.125$$

$$\gamma = \cos^{-1}(0.125)$$
$$= 82.8^\circ$$

حل مشق 7.3

1- مثلثی منشور میں، معلوم کیجیے۔

(i) $\overline{CF}$ کی لمبائی (ii) $\overline{BF}$ کی لمبائی (iii) زاویہ BFC، میں جواب ایک درجہ اعشاریہ تک درست ہو۔



حل: (i) $\overline{BC} = 3\text{cm}, \overline{CE} = 4\text{cm}, \overline{FE} = 5\text{cm}$

قائمۃ الزاویہ مثلث CEF میں

$$\overline{CF} = \sqrt{(\overline{CE})^2+(\overline{FE})^2}$$
$$= \sqrt{(4)^2+(5)^2} = \sqrt{16+25}$$
$$= \sqrt{41} = 6.4\text{cm}$$

(ii) قائمۃ الزاویہ مثلث BFC میں

$$\overline{BF} = \sqrt{(\overline{BC})^2+(\overline{CF})^2}$$
$$= \sqrt{(3)^2+(\sqrt{41})^2} = \sqrt{9+41}$$
$$= \sqrt{50} = 7.1\text{ cm}$$

www.ilmkidunya.com

(iii) قائمۃ الزاویہ مثلث BCF میں

$$\tan\theta = \frac{\text{مخالف}}{\text{قائدہ}}$$

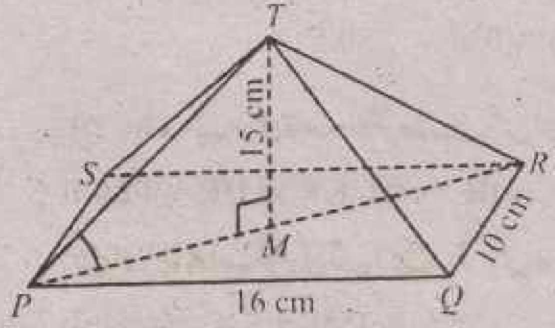
$$\tan\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{CF}}$$

$$\tan\angle BFC = \frac{3}{\sqrt{41}}$$

$$\angle BFC = \tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{41}}\right)$$

$$\angle BFC = \tan^{-1}\left(\frac{3}{6.403}\right)$$

$$= 25.1^\circ$$



2- شکل ایک مثلثی مخروط کو ظاہر کرتی ہے جس کا افقی مستطیلی قاعدہ PQRS ہے، جس میں $m\overline{QR} = 10cm$ اور $m\overline{PQ} = 16$ cm ہے۔ M خط PR کا درمیانی نقطہ ہے۔ راس T سے عمودی طور پر M کے اوپر ہے اور $m\overline{MT} = 15$ cm ۔ خط TP اور قاعدہ PQRS کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے۔ اپنا جواب ایک درجہ اعشاریہ تک درست دیں۔

حل: مستطیلی قاعدہ PQRS

$\overline{PQ} = 16$ cm

$\overline{QR} = 10$ cm

عمودی اونچائی $\overline{MT} = 15$ cm

PR وتر کا وسطی نقطہ M ہے۔

قائمۃ الزاویہ مثلث PQR میں

$$\overline{PR} = \sqrt{(\overline{PQ})^2 + (\overline{QR})^2}$$

$$= \sqrt{(16)^2 + (10)^2}$$

$$= \sqrt{256 + 100}$$

$$PR = \sqrt{356} = 18.868 \text{ cm}$$

$\overline{PR}$ کا وسطی نقطہ M ہے۔

$$\overline{PM} = \frac{\overline{PR}}{2} = \frac{18.868}{2} = 9.434 \text{ cm}$$

قائمۃ الزاویہ مثلث TMP میں

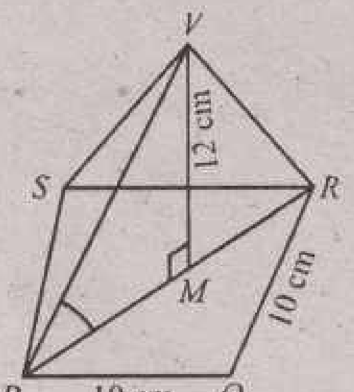
$$\tan\theta = \frac{\text{مخالف}}{\text{قائدہ}}$$

$$\tan\theta = \frac{\overline{TM}}{\overline{PM}}$$

$$\tan\angle TMP = \frac{15}{9.434}$$

$$\angle TMP = \tan^{-1}(1.590)$$

$$= 57.8^\circ$$



3- شکل مخروط کو ظاہر کرتی ہے جس کا قاعدہ PQRS، 10 سینٹی میٹر ضلع کا ایک افقی مربع ہے۔ راس V، قاعدہ کے وسطی نقطہ M سے عمودی طور پر اوپر ہے اور $m\overline{VM} = 12cm$ ہے۔ زاویہ VPM معلوم کیجیے۔

حل: قائمۃ الزاویہ مثلث PQR میں

$$\overline{PR} = \sqrt{(\overline{PQ})^2 + (\overline{QR})^2}$$

$$= \sqrt{(10)^2 + (10)^2}$$

$$= \sqrt{100 + 100}$$

www.ilmkidunya.com

$= \sqrt{200}$

$= \sqrt{4 \times 50}$

$= 2\sqrt{50}$

$\overline{PM}$، $\overline{PR}$ کا نصف ہے۔

$$\overline{PM} = \frac{\overline{PR}}{2} = \frac{2\sqrt{50}}{2} = \sqrt{50}\text{ cm}$$

VMP قائمۃ الزاویہ مثلث میں ہم Tan کی نسبت استعمال کریں۔

$$\tan\theta = \frac{\text{مخالف}}{\text{قاعدہ}}$$

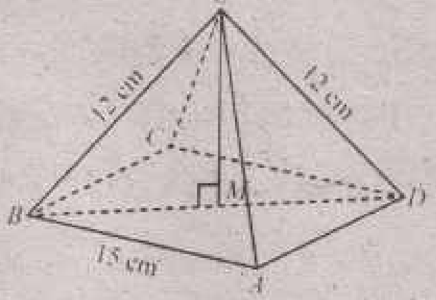
$$\tan\angle VPM = \frac{\overline{VM}}{\overline{PM}}$$

$$\tan\angle VPM = \frac{12}{\sqrt{50}}$$

$$\angle VPM = \tan^{-1}\left(\frac{12}{7.071}\right)$$

$$\angle VPM = 59.5^\circ$$

4- ABCDE ایک مربعی قاعدہ والا مخروط ہے۔ جس میں اور $\overline{AB} = 15cm$ اور $m\overline{AE} = m\overline{BE} = m\overline{CE} = m\overline{DE} = 12cm$ زاویہ **DEB** معلوم کیجیے اور اپنا جواب ڈگری میں دیجیے۔ (مکمل عدد)



حل: DEB مساوی الساقین مثلث میں

$$m\overline{EB} = m\overline{ED} = 12cm$$

$\overline{BD}$ معلوم کرتے ہیں۔

$$m\overline{AB} = 15cm$$

$$m\overline{BD} = \sqrt{(\overline{BA})^2 + (\overline{AD})^2}$$

$$= \sqrt{(15)^2 + (15)^2}$$

$$= \sqrt{225 + 225}$$

$$= \sqrt{450} = 21.21\text{ cm}$$

کوسائن کا قانون استعمال کریں

$$(\overline{BD})^2 = (\overline{BE})^2 + (\overline{DE})^2 - 2(\overline{BE})(\overline{DE})\cos(\angle BED)$$

$$450 = (12)^2 + (12)^2 - 2(12)(12)\cos(\angle BED)$$

$$450 = 144 + 144 - 288\cos(\angle BED)$$

$$288\cos\angle BED = 288 - 450$$

$$288\cos\angle BED = -162$$

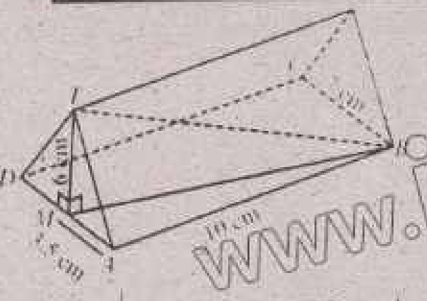
$$\cos\angle BED = \frac{-162}{288}$$

$$\cos\angle BED = -0.5625$$

$$\angle BED = \cos^{-1}(-0.5625)$$

$$\angle BED = 124^\circ$$

-5 دی گئی شکل ایک مثلثی مخروط کو ایک افقی مستطیلی قاعدہ ABCD کے ساتھ ظاہر کرتی ہے۔ $m\overline{BC} = 7cm$, $m\overline{AB} = 10cm$ ہے۔ نقطہ M, AD کا وسطی نقطہ ہے راس T, M سے عمودی طور پر M کے اوپر ہے اور $m\overline{MT} = 6cm$ ہے۔ $\overline{TB}$ اور قاعدہ کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے۔



حل: $\overline{AD}$ کا وسطی نقطہ M ہے۔

$m\overline{MA} = 3.5\text{ cm}, \; m\overline{AB} = 10\text{ cm}$

BMA قائمۃ الزاویہ مثلث میں

$$m\overline{MB} = \sqrt{(\overline{MA})^2 + (\overline{AB})^2}$$

$$= \sqrt{(3.5)^2 + (10)^2}$$

$$= \sqrt{12.25 + 100}$$

$$= \sqrt{112.25} = 10.59\text{ cm}$$

TMB قائمۃ الزاویہ مثلث میں

$$\tan\theta = \frac{\overline{TM}}{\overline{MB}}$$

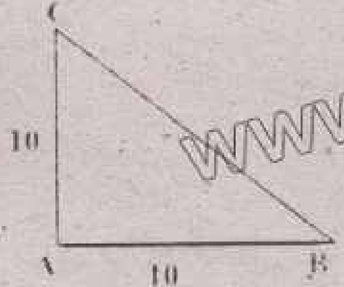
$$\tan\angle TBM = \frac{6}{10.59}$$

$$\angle TBM = \tan^{-1}\left(\frac{6}{10.59}\right)$$

$$\angle TBM = 29.5^\circ$$

-6 ایک آئسومیٹرک گیم میں کیمرہ زمین سے 45° کے زاویہ پر رکھا گیا ہے۔ اگر کھلاڑی سامنے سے 10 یونٹ اور اوپر 10 یونٹ پر ہو تو دیکھنے کے خط کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا



سامنے سے فاصلہ $\overline{AB} = 10$ یونٹس

اونچائی $\overline{AC} = 10$ یونٹس

دیکھنے کے خط کا فاصلہ $\overline{BC} = ?$ (وتر)

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$m\overline{BC} = \sqrt{(m\overline{AB})^2 + (m\overline{AC})^2}$$

$$= \sqrt{(10)^2 + (10)^2}$$

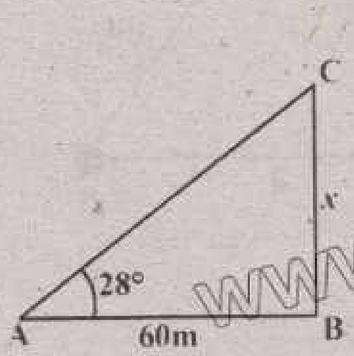
$$= \sqrt{100 + 100}$$

$$= \sqrt{200}$$

$= 14.14$ یونٹس

-7 ایک سرویئر ایک ٹاور کی چوٹی کو 28° کے زاویہ صعود پر دیکھتا ہے وہ قاعدہ سے 60 میٹر کے فاصلہ پر کھڑا ہے، ٹاور کی اونچائی معلوم کیجیے۔

حل:



ٹاور کی اونچائی $= x$ m

قاعدہ سے فاصلہ $= 60$ m

زاویہ صعود $= 28^\circ$

$$\tan\theta = \frac{\text{مخالف}}{\text{قاعدہ}}$$

$$\tan 28^\circ = \frac{x}{60}$$

$$60 \times \tan 28^\circ = x$$

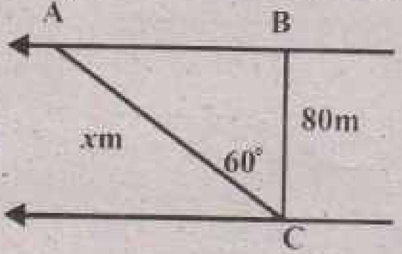
$$60 \times 0.5317 = x$$

$$31.9 = x$$

$$x = 31.9\text{m}$$

ٹاور کی اونچائی $= 31.9\text{m}$

8- ایک کشتی 80 میٹر چوڑے دریا کو روانی سے 60° کے زاویہ پر عبور کرتی ہے۔ کشتی حقیقت میں کتنا فاصلہ طے کرتی ہے؟



حل:

دریا کی چوڑائی $= 80$ m

لہر کا زاویہ $= 60^\circ$

فرض کیا کشتی سے طے کردہ فاصلہ $= x$ m (وتر)

$$\cos\theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{80}{x}$$

$$0.5 = \frac{80}{x}$$

$$x = \frac{80}{0.5} = 160 \text{ m}$$

لہٰذا کشتی کا اصل میں طے کردہ فاصلہ $= 160$

9- ایک سامع دو سپیکروں سے آنے والی آواز سنتا ہے۔ ایک سپیکر بالکل سامنے 6 میٹر کے فاصلے پر ہے اور دوسرا 30° کے زاویہ پر 6 میٹر کے فاصلے پر ہے۔ سپیکرز کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل: یہ ایک مثلث بناتی ہے جس کے مربعد اضلاع 6m, 6m اور زاویہ کی پیمائش 30° ہے۔

فرض کیا سپیکر A اور B کے درمیان کا فاصلہ $= d$

کوسائن کے قانون کا استعمال

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos 30^\circ$$

$$d^2 = (6)^2 + (6)^2 - 2\,(6)(6)\,(0.866)$$

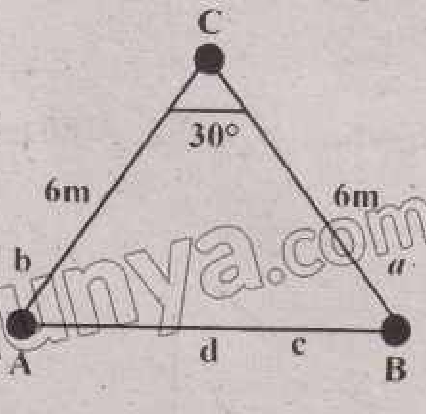
$$d^2 = 36 + 36 - 72\,(0.866)$$

$$d^2 = 72 - 62.35$$

$$d^2 = 9.65$$

$$\sqrt{d^2} = \sqrt{9.65}$$

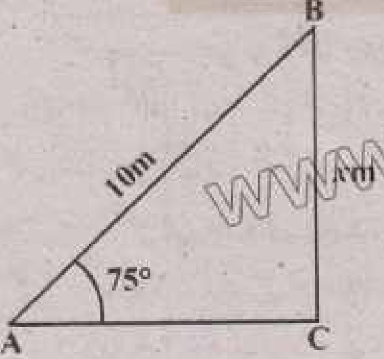
$$d = 3.1 \text{ m}$$



لہٰذا سپیکروں کے درمیان کا فاصلہ $= 3.1$ m

www.ilmkidunya.com

10- 10 میٹر کی سیڑھی ایک دیوار کے ساتھ لگائی گئی ہے۔ جو زمین کے ساتھ 75° کا زاویہ بناتی ہے۔ وہ دیوار پر کتنی اونچائی تک پہنچتی ہے؟



حل: xm فرض کیا سیڑھی کی دیوار سے اونچائی

قائمۃ الزاویہ مثلث سائن کی نسبت استعمال کرتے ہوئے

$$\sin\theta = \frac{\text{مخالف}}{\text{وتر}}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{x}{10}$$

$$0.966 = x$$

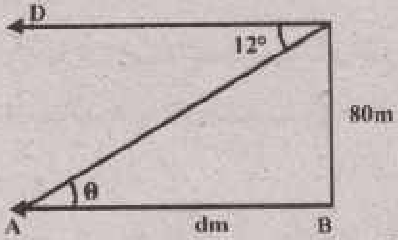
$$(0.966)(10) = x$$

$$9.66 = x$$

$$x = 9.66\ \text{m}$$

سیڑھی دیوار پر پہنچنے والی اونچائی 9.66m ہے۔

11- ایک لائٹ ہاؤس سطح سمندر سے 80 میٹر اونچی چٹان پر واقع ہے۔ ایک بحری جہاز 12° کے زاویہ نزول پر دیکھا جاتا ہے جہاز چٹان کی بنیاد سے کتنا دور ہے۔



حل: 80 m لائٹ ہاؤس کی سمندر سے بلندی

زاویہ نزول 12°

زاویہ سعودی = زاویہ نزول

12° = نزولی سعودی

فرض کیا جہاز اور چوٹی کے قائدہ کا فاصلہ

تکونیاتی نسبتوں سے tan کا استعمال

$$\tan\theta = \frac{\text{مخالف}}{\text{وتر}}$$

$$\tan(12)^\circ = \frac{80}{d}$$

$$0.21256 = \frac{80}{d}$$

$$d = \frac{80}{0.21256}$$

$$d = 376.4\ \text{m}$$

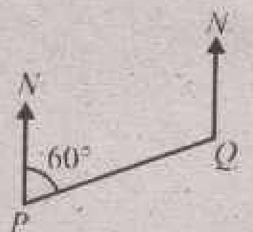
جہاز کا چٹان کی بنیاد سے فاصلہ = 376.4 m

کیا آپ جانتے ہیں؟

سمتی نقاط پر چار بنیادی نقاط ہوتے ہیں: شمال، جنوب مشرق اور مغرب۔ عام سمتی کمپاس پر چار ثانوی سمتیں ہیں: شمال مشرق (NE)، جنوب مشرق (SE)، جنوب مغرب (SW) اور شمال مغرب (NW)۔

7.5 سہ ہندسی بیرنگ اور اس کا اطلاق (Three Figure Bearing and Its Applications)

بیرنگ ایک زاویہ ہے جو شمالی سمت سے شروع ہوتے ہوئے گھڑی وار سمت میں ڈگریوں میں ماپا جاتا ہے۔ اسے ہمیشہ سہ ہندسی زاویہ کے طور پر 000° اور 360° کے درمیان لکھا جاتا ہے۔ یہ نیویگیشن، جو اباذی سفر اور نقشہ پڑھنے میں درست سمت بتانے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔
مثال کے طور پر، مشرق کی طرف اڑانے والے ہوائی جہاز کا بیرنگ 090° ہے۔



مثال 12: شکل میں، Q کا P سے بیرنگ 060° ہے۔ P کا Q سے بیرنگ معلوم کیجیے۔

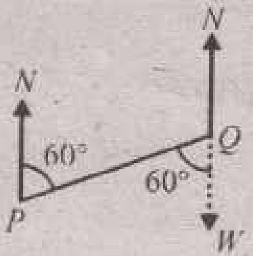
حل: خط NQ کو بڑھائیں تو 180° NQW زاویہ حاصل ہوتا ہے۔

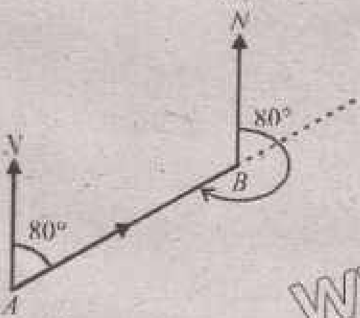
چونکہ متبادلہ زاویے برابر ہوتے ہیں اس لیے

$$m\angle PQW = 060^\circ$$

لہٰذا، P کا Q سے بیرنگ $= 180^\circ + 060^\circ$

$$= 240^\circ$$





مثال 13: عبداللہ ایک بحری جہاز میں نقطہ A سے نقطہ B تک 080° کے بیرنگ سے سفر کرتا ہے۔ نقطہ B سے نقطہ A پر واپس آنے کے لیے اسے کونسا بیرنگ لینا چاہیے؟

حل: دی گئی شکل سفر کو نقطہ A سے B تک ظاہر کرتی ہے۔
سفر کے خط کو بڑھائیں تو ہمیں B پر 80° کا زاویہ حاصل ہوتا ہے۔
A کا B سے بیرنگ $= 080^\circ + 180^\circ = 260^\circ$

مثال 14: ایک ہوائی جہاز ایک ہوائی اڈے سے روانہ ہوتا ہے اور 40 کلومیٹر مشرق کی طرف سے سفر طے کرتا ہے، جس کے بعد 50 کلومیٹر شمال کی طرف جاتا ہے۔ پھر پائلٹ ممکنہ مختصر راستہ اختیار کرتے ہوئے ہوائی اڈے پر واپس آتا ہے۔ مختصر ترین راستہ کا بیرنگ اور فاصلہ کیا ہے؟

حل: θ معلوم کرنے کے لیے

$$\tan\theta = \frac{40}{50} = 0.8$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.8)$$

$$= 38.66^\circ$$

بیرنگ $= 180^\circ + 38.66^\circ = 218.66^\circ$

فرض کیا x مختصر ترین راستہ ہے۔

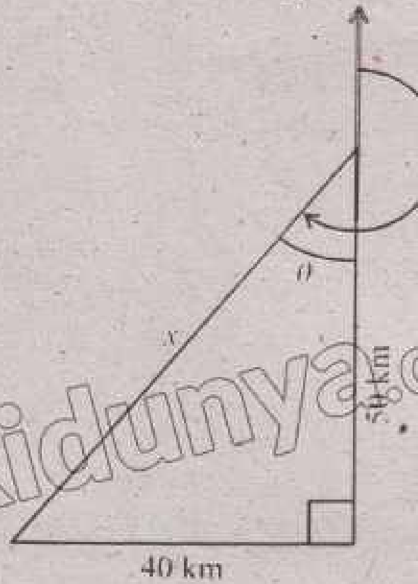
$$x^2 = 40^2 + 50^2$$

$$= 1600 + 2500$$

$$= 4100$$

$$x = \sqrt{4100}$$

$$= 64.03 \text{ km}$$



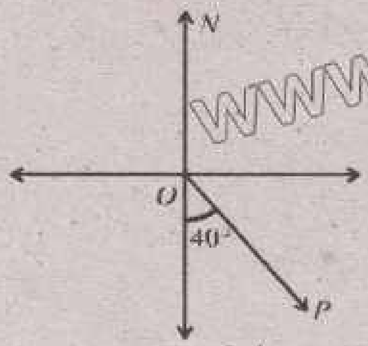
پائلٹ ہوائی اڈے پر واپس آنے کے لیے 218.66° کے بیرنگ پر پرواز کرتے ہوئے 64.03 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرے گا۔

www.ilmkidunya.com

حل مشق 7.4

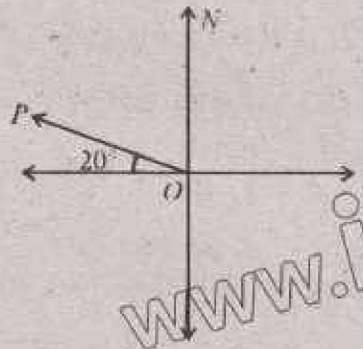
-1 درج ذیل میں سے ہر ایک میں نقطہ P کا بیرنگ معلوم کیجیے۔

(i)



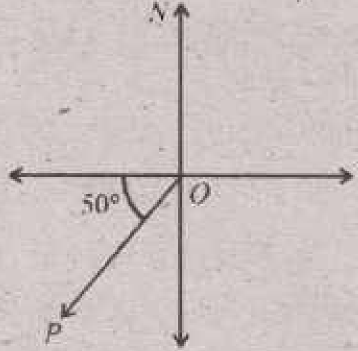
حل: شمال میں موجود جنوب تک کا زاویہ (ایک سیدھی لکیر) میں 180° ہے۔
چونکہ نقطہ P جنوبی لکیر سے گھڑی کی سوئیوں کے مخالف رخ پر 040° پر ہے،
لہٰذا ہم اس کو 180° سے تفریق کریں گے
لہٰذا نقطہ P کی بیرنگ 180° 140°

(ii)



حل: شمال مغرب نقطہ P کا ربع
020° پیمائش کا زاویہ مغربی خط سے
270 گھڑی وار سمت شمال سے مغربی خط کی طرف
270 چونکہ P نقطہ 020° اور گھڑی سمت ہے
مغربی خط 270° میں جمع کریں گے
لہٰذا، نقطہ P کی بیرنگ 270° + 020° 290°

(iii)



حل: جنوب مغرب نقطہ P کا ربع
050° مغربی لکیر سے دیے گئے زاویے کی پیمائش

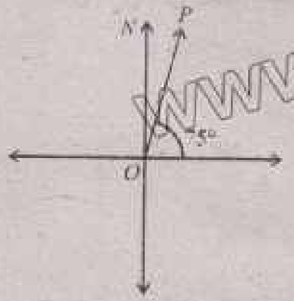
www.ilmkidunya.com

شمال سے گھڑی کی سوئیوں کے رخ پر مغربی خط تک کا فاصلہ $= 270$

چونکہ مغربی لکیر سے پیچھے ہے اس لیے ہم اسے $270°$ P میں تفریق کریں گے

لہٰذا نقطہ P کی بیرنگ $270° - 050° = 220°$

(iv)



حل:

نقطہ P کا ربع $=$ جنوب مغرب

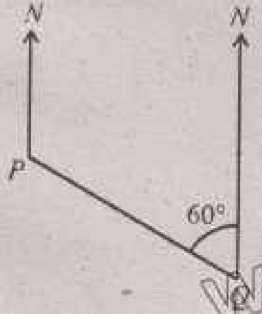
مغربی لکیر سے دیے گئے زاویے کی پیمائش $= 075°$

شمال سے گھڑی کی سوئیوں کے رخ پر مشرقی لکیر تک کا زاویہ $= 90°$

چونکہ مشرقی خط مجوزہ $075°$ پیچھے ہے اس لیے ہم اسے مغربی خط والے خط $90°$ سے تفریق کریں گے۔

لہٰذا نقطہ P کی بیرنگ $= 090° - 075° = 015°$

-2 شکل دو بحری جہازوں P اور Q کی پوزیشن ظاہر کرتی ہے۔



(i) جہاز P کا جہاز Q سے بیرنگ کیا ہے؟

شمال سے بائیں جانب بننے والا زاویہ $= 060°$

پورے دائرے کا بننے والا زاویہ $= 360°$

چونکہ گھڑی وار سمت ہے

جہاز P کا جہاز Q سے بیرنگ $= 360° - 060° = 300°$

(ii) جہاز Q کا جہاز P سے بیرنگ کیا ہے؟

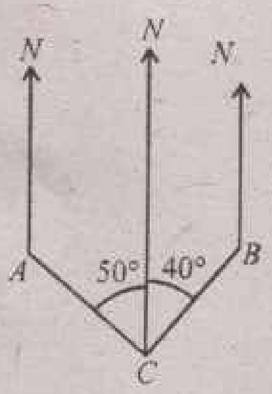
چونکہ یہ شمالی خط کے متوازی ہے $= 060°$

$m\angle P + m\angle Q = 180°$

$m\angle Q = 060°$

جہاز P کا جہاز Q سے بیرنگ $= 180° - 060° = 120°$

-3 شکل تین مقامات B، A اور C کو ظاہر کرتی ہے۔ درج ذیل کا بیرنگ معلوم کیجیے:



(i) A کا C سے

خط A کا C سے $50°$ گھڑی کی مخالف سمت شمال میں ہے۔

ایک پورے دائرہ کی پیمائش $= 360°$

A بیرنگ C سے $= 360° - 050° = 310°$

(ii) C کا A سے

حل: A اب ہمارا شروعاتی نقطہ ہے

A کی شمالی خط اور عمودی ہے C کی شمالی خط ہے

لہٰذا تمام زاویوں کا مجموعہ $180°$

بیرنگ B،C ہے $= 180° - 050° = 130°$

(iii) B کا C سے

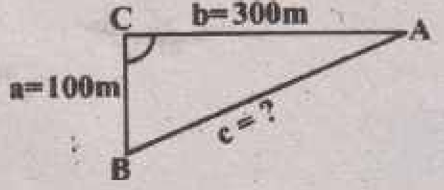
حل: B ہمارا شروعاتی نقطہ ہے۔
B کا شمالی خط اور C کا شمالی خط آپس میں عمودی ہیں تو لہذا
ان کے زاویے 180 میں جمع ہو کے
$180° + 040° = 220°$ = بیرنگ B،C ہے

(iv) C کا B سے

حل: اب ہمارا شروعاتی نقطہ ہے۔
C کا شمالی خط B کے شمالی سرے خط کی شروعات ہے
کوئی موازنہ مطلوب نہیں
$40°$ = بیرنگ

4- عبدالہادی 100 میٹر شمال کی طرف اور پھر 300 میٹر مشرق کی طرف چلتا ہے۔

(i) وہ اپنی ابتدائی پوزیشن سے کتنا دور ہے؟



حل: 100m فاصلہ شمال کی طرف اور پھر 300m مشرق کی طرف کا فاصلہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بناتا ہے۔
مسئلہ فیثاغورث سے

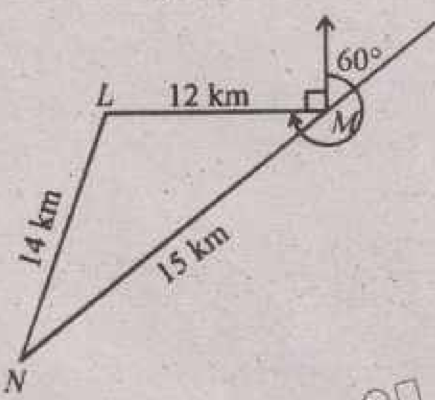
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$\text{فاصلہ} = \sqrt{(100)^2+(300)^2}$$
$$= \sqrt{10000+90000}$$
$$= \sqrt{100,000}$$
$$= 316.2 \text{ m}$$

(ii) اپنی ابتدائی پوزیشن پر واپس جانے کے لیے اسے کس بیرنگ پر چلنا چاہیے۔

حل: اپنی ابتدائی پوزیشن پر واپس جانے کے لیے اسے (شمال۔مشرق) عبدالہادی طرف واپس جانا ہوگا اپنی سابقہ پوزیشن ہے۔
پہلے ہم θ نکالیں گے

$$\tan(\theta) = \frac{300}{100}$$
$$\theta = \tan^{-1}(3)$$
$$\theta = 71.6°$$
$$\text{سابقہ پوزیشن} = 71.6°$$
$$\text{واپسی کی بیرنگ} = 71.6° + 180° = 251.6° \text{ یا } 252°$$

5- تین جہاز L، M، N شکل میں دکھائی گئی پوزیشن میں ہیں۔ جہاز M جہاز N کے شمال مشرق میں ہے۔ M سے L کا بیرنگ معلوم کیجیے۔



حل: شکل سے
LM ایک افقی خط ہے (مشرق=مغرب)
شمالی خط LM سے عمودی ہے
بیرنگ گھڑی وار سمت شمال سے پیمائش کی جاتی ہے لہذا یہ خط M سے خط LM کی طرف ہے
LM خط مغرب کی طرف ہے M سے، جس کا زاویہ 270°
270° = M سے L کی طرف کی بیرنگ

6- ایک بحری جہاز °120 کے بیرنگ پر 20 کلومیٹر کا سفر طے کرتا ہے۔ جہاز اپنی ابتدائی پوزیشن سے کتنی دور جنوب میں گیا ہے؟

حل:

جہاز کی بیرنگ $= 120°$

جنوب سے زاویہ $= 180° - 120°$

$= 060°$

جنوب کی طرف فاصلہ $= 20 (\cos 060°)$

$= 20 \times 0.5$

$= 10 \text{ km}$

7- فاطمہ 5.5 کلومیٹر جنوب کی طرف چلی اور پھر 1.3 کلومیٹر مغرب کی طرف مڑ گئی۔ اس کے ابتدائی نقطہ سے حوریہ کا بیرنگ معلوم کیجیے۔

حل:

جنوب کی طرف چلنا $= 5.5 \text{ km}$

مغرب کی طرف چلنا $= 1.3 \text{ km}$

ربع کی پوزیشن $= \text{III}$

اندرونی زاویہ (α)

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{مغرب مخالف}}{\text{جنوب قائمہ}}$$

$$= \frac{1.3}{5.5}$$

$a \tan(\alpha) = 0.236$

$\alpha = \tan^{-1}(0.236)$

$\alpha = 13.3$

سر ابتدائی نقطہ سے بیرنگ $= 180° + 13.3°$

$= 193.3°$

8- ایک ہوائی جہاز 150 کلومیٹر مشرق کی طرف پھر 100 کلومیٹر شمال مشرق (°045 مشرق سے) کی طرف پرواز کرتا ہے۔ کل ہٹاؤ معلوم کیجیے۔

حل: 100 km کے فاصلوں کو اس کے حصوں میں توڑنا

مشرق $= 100 (\cos 45°)$

$= 100 (0.7071) = 70.71 \text{ km}$

شمال $= 100 (\sin 45°)$

$= 100 (0.7071) = 70.71 \text{ km}$

کل فاصلہ مشرق کی طرف $= 150 + 70.71 = 220.71 \text{ km}$

کل فاصلہ شمال کی طرف $= 70.71 \text{ km}$

کل فاصلہ

نتیجہ $= \sqrt{(220.71)^2 + (70.7)^2}$

$= \sqrt{48712.9 + 4999.9} = \sqrt{53712.8}$

$= 231.76 \text{ km}$ یا 231.8 km

-9 ایک بحری جہاز °045 کے بیرنگ پر 100 کلومیٹر کا سفر طے کرتا ہے پھر راستہ بدلتا ہے اور °135 کے بیرنگ پر 120 کلومیٹر کا سفر طے کرتا ہے۔ ابتدائی نقطہ سے آخری پوزیشن کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل:

100 km کی بیرنگ = 045°

120 km کی بیرنگ = 135°

بیرنگ میں فرق $= 135° - 045° = 090°$

اس کا مطلب ہے فاصلہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بناتا ہے مسئلہ فیثاغورث کی رو سے۔

فاصلہ $= \sqrt{(100)^2 + (120)^2}$

$= \sqrt{10000+14400} = \sqrt{24400}$

$= 156.2$ km

حل اعادہ مشق 7

-1 درج ذیل سوالات کے دیے گئے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) cot 60° کی قیمت ہے:

(a) 0 (b) 1 (c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) تمام تکونیاتی نسبتیں مثبت ہوتی ہیں:

(a) پہلا ربع (b) دوسرا ربع (c) تیسرا ربع (d) چوتھا ربع

(iii) $\operatorname{cosec}\theta$ مثبت ہوتا ہے۔

(a) پہلے اور تیسرے ربع میں (b) دوسرے اور چوتھے ربع میں (c) پہلے اور دوسرے ربع میں (d) پہلے اور چوتھے ربع میں

(iv) $\sin(90° + \theta) =$

(a) $\sin\theta$ (b) $-\sin\theta$ (c) $\cos\theta$ (d) $-\cos\theta$

(v) $\tan(180 - \theta) =$

(a) $\tan\theta$ (b) $\cot\theta$ (c) $-\cot\theta$ (d) $-\tan\theta$

(vi) سائن کا قانون ہے:

(a) $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (b) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\gamma}$

(c) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (d) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\gamma}$

(vii) کوسائن کا قانون ہے:

(a) $\cos\alpha = \frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$ (b) $\cos\beta = \frac{c^2+b^2-a^2}{2ab}$

(c) $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ (d) $\cos\gamma = \frac{ca^2+b^2-c^2}{2ab}$

(viii) ΔABC کا رقبہ برابر ہے:

(a) $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$ (b) $\frac{1}{2}bc\sin\beta$ (c) $\frac{1}{2}\sin\gamma$ (d) $\frac{1}{2}ac\sin\beta$

www.ilmkidunya.com

(ix) درجہ کو ________ سے ماپا جاتا ہے۔

(a) مشرق (b) مغرب (c) شمال (d) جنوب

(x) درجہ کو ________ سے لکھا جاتا ہے۔

(a) 1 ہندسہ (b) 2 ہندسے (c) 3 ہندسے (d) 4 ہندسے

جوابات

(i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) پہلا ربع (iii) پہلے اور دوسرے ربع میں (iv) $\cos\theta$ (v) $-\tan\theta$

(vi) $\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin}$ (vii) $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ (viii) $\frac{1}{2}ac\sin\beta$ (ix) شمال

(x) 3 ہندسے

-2 ΔABC کا رقبہ معلوم کیجیے، جس میں:

(i) $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 8$ cm

حل:
$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{4+6+8}{2}=\frac{18}{2}=9$$

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ}, =\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\sqrt{9(9-4)(9-6)(9-8)}$$
$$=\sqrt{9(5)(3)(1)}=\sqrt{135}$$
$$=11.62\text{ cm}^2$$

(ii) $b = 2.1$ cm, $c = 5$ cm, $\gamma = 45°$

حل:
$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ}=\frac{1}{2}\,b\,c\sin$$
$$=\frac{1}{2}\times 5\times 2.1\times\sin 45°$$
$$=5.25\times(0.7071)$$
$$=3.71\text{ cm}^2$$

(iii) $c = 3.1$ cm, $\gamma = 44°$, $a = 36°$

حل: ہم جانتے ہیں
$$\alpha+\beta+\gamma=180°$$
$$\beta=180°-\alpha-\gamma$$
$$=180°-36°-44°$$
$$=100°$$

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ}=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\gamma)}$$
$$=\frac{(3.1)^2\times\sin(36°)\times\sin(100°)}{2\sin(44°)}$$
$$=\frac{9.61\times 0.5878\times 0.9844}{2(0.6947)}$$
$$=\frac{5.5606}{1.3894}=4.01\text{ cm}$$

-3 ΔABC کا رقبہ معلوم کیجیے، جس میں:

(i) $a = 5.4$ cm, $b = 3.4$ cm, $\alpha = 49°$

حل: $a = 5.4$ cm, $b = 3.4$ cm, $\alpha = 49°$

سائن کا قانون استعمال کرنے سے

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{5.4}{\sin 49°}=\frac{3.4}{\sin\beta}$$
$$\sin\beta=\frac{3.4}{5.4}\times\sin 49°$$

www.ilmkidunya.com

$\sin\beta = 0.629 \times 0.7547$

$\sin\beta = 0.475$

$\beta = \sin^{-1}(0.475)$

$= 28.37°$

ہم جانتے ہیں کہ

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta$

$\gamma = 180° - 49° - 28.37°$

$\gamma = 102.63°$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{5.4}{\sin 49°} = \frac{c}{\sin 102.63°}$$

$$\sin 102.63° \times \frac{5.4}{07547} = c$$

$$0.9758 \times \frac{5.4}{07547} = c$$

$c = 6.98\text{ cm}$

لہٰذا $c = 6.98\text{ cm},\ \beta = 28.37°,\ \gamma = 102.63°$

(ii) $\alpha = 32°, \gamma = 48°, c = 81\text{ cm}$

حل: $\alpha = 32°, \gamma = 48°, c = 81\text{ cm}$

ہم جانتے ہیں کہ

$\alpha + \beta + \gamma = 180$

$\beta = 180° - \alpha - \gamma$

$= 180° - 32° - 48° = 100°$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{b}{\sin 100°} = \frac{81}{\sin 48°}$$

$$b = \frac{81}{\sin 48°} \times \sin 100°$$

$$b = \frac{81}{0.743} \times 0.985$$

$b = 107.3\text{cm}$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a}{\sin 32°} = \frac{81}{\sin 48°}$$

$$a = \frac{81}{\sin 48} \times \sin 32$$

$$a = \frac{81}{0.743} \times 0.5299$$

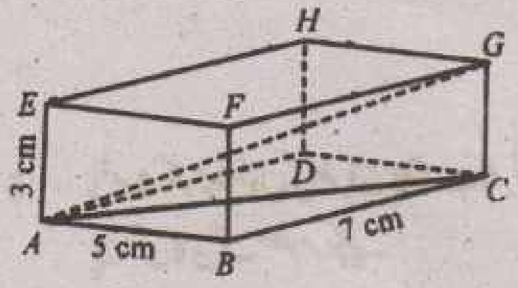
$a = 57.8\text{cm}$

لہٰذا $\beta = 100°, a = 57.8\text{ cm}, b = 107.3\text{cm}$

-4 شکل ایک مکعب نما ABCDEFGH کو ظاہر کرتی ہے۔

$m\overline{AB} = 5\text{cm},\ m\overline{BC} = 7\text{ cm},\ m\overline{AE} = 3\text{cm}$

(i) $\overline{AG}$ کی لمبائی معلوم کیجیے۔ اپنے جواب کو 3 ہندسوں تک درست دیجیے۔



حل: AG وتر کی جگہ ہے

$$AG = \sqrt{(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 + (\overline{AE})^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + 7^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{83} = 9.11\text{cm}$$

www.ilmkidunya.com

(ii) $\overline{AG}$ اور مستوی ABCD کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے۔ جواب کو 1 درجہ اعشاریہ تک درست دیں۔

حل: AC، $\overline{AG}$ قائدہ کا مسقط ہے

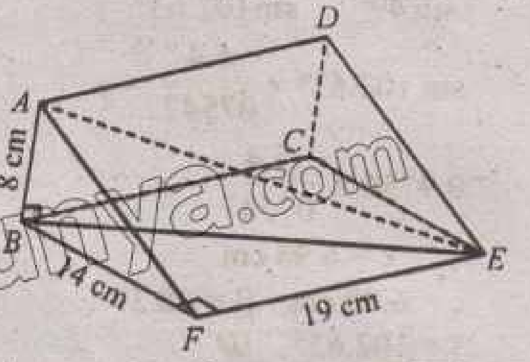
$$AC = \sqrt{5^2 + 7^2}$$
$$= \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$
$$= 8.60 \text{ cm}$$
$$\tan Q = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$
$$= \frac{3}{8.60}$$
$$\tan Q = 0.348$$
$$Q = \tan^{-1}(0.348)$$
$$Q = 19.2°$$

5- شکل مثلثی مخروط ABCDEF کو ظاہر کرتی ہے۔

$$m\overline{AB} = 8 \text{ cm}, m\overline{BF} = 14 \text{ cm}, m\overline{EF} = 19 \text{ cm}.$$

(i) A اور F کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل: ABF قائمۃ الزاویہ کو دیکھتے ہوئے



$$AF = \sqrt{(\overline{AB})^2 + (\overline{BF})^2}$$
$$= \sqrt{8^2 + 14^2}$$
$$= \sqrt{64+196}$$
$$= \sqrt{260}$$
$$= 16.1 \text{ cm}$$

(ii) $\overline{AF}$ اور مستوی BCEF کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ AB، BCEF کے قائدہ کے عمودی ہے تو بننے والا زاویہ ∠AFB ہے۔

$$\tan \angle AFB = \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}$$
$$\tan \angle AFB = \frac{8}{14}$$
$$\tan \angle AFB = 0.5714$$
$$\angle AFB = \tan^{-1}(0.5714)$$
$$\angle AFB = 29.7°$$

6- ہاشم 4 کلومیٹر شمال کی طرف چلتا ہے پھر مڑتا ہے اور 3 کلومیٹر مشرق کی طرف چلتا ہے۔ اس کے ابتدائی نقطہ سے آخری پوزیشن کا بیرنگ معلوم کیجیے۔

حل:

شمال کی طرف چلنا = 4km

مشرق کی طرف چلنا = 3km

یہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث جہاں پر شمال زاویہ (θ) ہے۔

$$\tan(\theta) = \frac{\text{مخالف}}{\text{قائدہ (شمال)}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{3}{4}$$
$$(\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$(\theta) = 036.9°$$

بیرنگ کو ہم تین ہندسی شکل میں لکھتے ہیں۔ = 036.9°

www.ilmkidunya.com

-7 ایک پائلٹ °045 کے بیرنگ پر 200 کلو میٹر پرواز کرتا ہے، پھر مڑتا ہے اور °135 کے بیرنگ پر 150 کلو میٹر پرواز کرتا ہے۔ طیارہ اپنی ابتدائی پوزیشن سے کتنا دور ہے؟

حل:

کی اڑان کی بیرنگ $200 \text{ km} = 045°$

کی اڑان کی بیرنگ $150 \text{ km} = 135°$

بیرنگ کے درمیان کا فرق $= 135° - 045° = 090°$

اس کا مطلب ہے یہ دونوں صفر ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

لہٰذا فاصلہ $= \sqrt{200^2 + 150^2}$

$= \sqrt{40000 + 22500}$

$= \sqrt{62500}$

$= 250 \text{ km}$

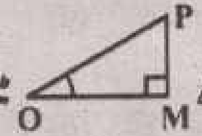
معروضی طرز سوالات

اضافی کثیر الانتخابی سوالات

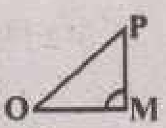
محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے کثیر الانتخابی سوالات

7.1 تکونیاتی نسبتیں یا تفاعل

درست جواب کا انتخاب کریں۔

-1 ΔOPM  میں کونسا ضلع وتر ہے۔

(a) θ (b) $\overline{OM}$ (c) $\overline{OP}$ (d) $\overline{MP}$

-2  میں $\overline{PM}$ θ کے مخالف ضلع ہے۔ cosθ کیسے معلوم کریں گے۔

(a) $\frac{\overline{OM}}{\overline{OP}}$ (b) $\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}}$ (c) $\frac{\overline{OP}}{OM}$ (d) $\frac{OP}{PM}$

-3 $\sin\theta =$ ______

(a) $\tan\theta$ (b) $\frac{1}{\cot\theta}$ (c) $\frac{1}{\text{cosec}\theta}$ (d) $\frac{1}{\cos\theta}$

-4 Cot =θ ______

(a) $\frac{1}{\sin\theta}$ (b) $\frac{1}{\cos\theta}$ (c) $\sin x \frac{1}{\text{cosec}\theta}$ (d) $\frac{1}{\tan\theta}$

-5 tan =θ ______

(a) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (b) $\frac{\text{cas}\theta}{\sin\theta}$ (c) $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$ (d) $\frac{1}{\cos\theta}$

www.ilmkidunya.com

6- $\frac{1}{\cos\theta}$ = ______

(a) $\cot\theta$ (b) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (c) $\sec\theta$ (d) $\frac{1}{\tan\theta}$

7- $\frac{\text{متصلہ ضلع}}{\text{مخالف ضلع}}$ = ______

(a) $\cot\theta$ (b) $\tan\theta$ (c) $\frac{1}{\cot\theta}$ (d) $\frac{1}{\sin\theta}$

7.1.1 مخصوص زاویوں کے لیے تکونیاتی قدریں

8- $\tan 45°$ کی قیمت ہوگی۔

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

9- $\sin 180°$ کی قیمت ہے:

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 0 (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{2}$

10- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ کس کی قیمت ہے:

(a) $\sin 60°$ (b) $\cot 60°$ (c) $\cos 45°$ (d) $\tan 180°$

11- کس کی قیمت غیر تعریف شدہ ہے:

(a) $\tan 45°$ (b) $\tan 90°$ (c) $\tan 60°$ (d) $\tan 180°$

12- 0ان میں کس کی قیمت ہے:

(a) $\cos 45°$ (b) $\sin 30°$ (c) $\tan 90°$ (d) $\tan 180°$

7.1.2 تکونیاتی تفاعلوں کی علامت

13- دوسرے ربع میں ہوتا ہے:

(a) $\sin\theta < 0$ اور $\cot\theta > 0$ (b) $\sin\theta > 0$ اور $\cos\theta < 0$

(c) $\tan\theta > 0$ اور $\cot\theta < 0$ (d) $\tan\theta < 0$ اور $\cos\theta < 0$

14- تیسرے ربع میں ہوتا ہے:

(a) $\cot\theta < 0$ (b) $\sec\theta > 0$ (c) $\tan\theta < 0$ (d) $\sin\theta < 0$

15- چوتھے ربع میں ہوتا ہے۔

(a) $\sin\theta > 0$ (b) $\tan\theta < 0$ (c) $\cot\theta > 0$ (d) $\sec\theta < 0$

16- کس ربع میں صرف $\tan\theta$ اور $\cot\theta$ مثبت ہوتے ہیں۔

(a) I (b) II (c) III (d) IV

17- کس ربع میں $\cos\theta$ منفی ہوتا ہے۔

(a) I اور II (b) II اور III (c) I اور IV (d) III اور IV

www.ilmkidunya.com

7.1.3 0°، 90° اور 180° کی تکونیاتی نسبتیں

-18 tan 0° کی قیمت ہوتی ہے۔

(a) 1 (b) –1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

-19 cosec 90° کی قیمت ہے:

(a) 1 (b) –1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

-20 sec 180° کی قیمت ہے:

(a) 1 (b) 0 (c) $\sqrt{3}$ (d) –1

-21 cot 180° کی قیمت ہے:

(a) 1 (b) –1 (c) غیر تعریف شدہ (d) –2

-22 sin 0° کی قیمت ہے:

(a) 0 (b) –1 (c) غیر تعریف شدہ (d) –2

7.1.4 90° اور 180° کے درمیان والے زاویوں کے لیے سائن اور کوسائن کو وسعت دیں

-23 sec (90° + θ) کے متعلق کون سا بیان درست ہے:

(a) – sin θ (b) – cosec θ (c) cos θ (d) cot θ

-24 tan (90° + θ) کے بارے میں درست ہے:

(a) – cot θ (b) cot θ (c) cos θ (d) cot θ

-25 sin (180° – θ) کے بارے میں درست ہے:

(a) –cos θ (b) cos θ (c) – tan θ (d) – sin θ

-26 sec (180° – θ) کے بارے میں درست ہے:

(a) sec θ (b) –sec θ (c) cot θ (d) sin θ

-27 :cosec (180° – θ) = ________

(a) sec θ (b) se θ (c) ten θ (d) –tan θ

7.2.1 سائن کا قانون

-28 سائن کا قانون ایک ایسی مثلث کو حل کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ جب معلوم ہو:

(a) صرف تین اضلاع (b) دو زاویے اور ضلع (c) رقبہ اور ایک ضلع (d) دو اضلاع اور ایک زاویہ

-29 :sin105° = ________

(a) sin 75° (b) cos 50° (c) sin 95° (d) –2

-30 :sin105° = ________

(a) cos 105° (b) cos 90° (c) cos 15° (d) tan 105°

-31 درج ذیل سے کونسا سائن کے قانون کے مترادف ہے:

(a) $a \sin \alpha = b \sin \beta$ (b) $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

(c) $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ (d) $a^2 b^2 + c^2 - 2bc \cos \beta$

www.ilmkidunya.com

32- درج ذیل میں سے کونسا سائن کے قانون کے بارے میں درست نہیں ہے:

(a) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ (b) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (c) $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (d) $\frac{a}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\alpha}$

33- کونسا سائن کے قانون کے مطابق درست ہے:

(a) $a \sin\beta = bc$ (b) $a \sin\alpha = b$ (c) $b \sin\gamma = c \sin\beta$ (d) $c \sin\alpha = b \sin\gamma$

7.2.2 کوسائن کا قانون

34- ذیل میں سے کونسا کوسائن کے قانون کے لیے درست ہے:

(a) $\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ (b) $\cos\beta = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ca}$

(c) $\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ (d) $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

35- ذیل میں سے کون سا کوسائن کے قانون کے مطابق درست ہے:

(a) $\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}$ (b) $\cos\beta = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2ca}$

(c) $\cos\gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (d) $\cos\beta = \gamma\frac{b^2 - b^2 + c^2}{2ab}$

36- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$:

(a) سائن کا قانون (b) کوسائن کا قانون (c) ٹینجنٹ کا قانون (d) کوٹینجنٹ کا قانون

37- ذیل میں سے کون سا کوسائن کے قانون کے مطابق درست نہیں ہے:

(a) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ (b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

(c) $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ (d) $\cos\beta = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2ca}$

38- اگر $\alpha = 70°$ ، $\gamma = 40°$ ہو تب $\gamma =$ ___ :

(a) 80° (b) 70° (c) 60° (d) 90°

7.2.3 مثلث کا رقبہ

39- مثلث کے رقبہ کا کون سا کلیہ درست ہے۔ جب کسی مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو:

(a) $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (b) $\frac{1}{2}bc\sin\beta$ (c) $\frac{1}{2}ac\sin\alpha$ (d) $\frac{1}{2}ac\sin\gamma$

40- مثلث کے رقبہ کا کونسا کلیہ درست ہے۔

(a) $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (b) $\frac{1}{2}ac\sin\beta$ (c) $\frac{1}{2}ac\sin\alpha$ (d) $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$

41- اگر a، b اور c مثلث کے تین اضلاع ہوں تو رقبہ معلوم کرنے کے لیے S ہوتا ہے:

(a) $\frac{a+b-c}{2}$ (b) $\frac{a+b+c}{2}$ (c) $2S = a - b + c$ (d) $\frac{a-b-c}{2}$

www.ilmkidunya.com

42- مثلث ABC کا رقبہ ہے:

(a) $\sqrt{s(s-b)(s-a)(s+a)}$ (b) $\sqrt{s(s+a)(s+b)(s+c)}$

(c) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (d) $\sqrt{(a-b)(a-c)(a+b)}$

43- مثلث کے رقبہ کے لیے کون سا درست ہے۔

(a) $\dfrac{b^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\beta}$ (b) $\dfrac{b^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\beta}$ (c) $\dfrac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}$ (d) $\dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$

44- کونسا کلیہ مثلث کے رقبہ کا نہیں ہے:

(a) $\dfrac{b^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\beta}$ (b) $\dfrac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$ (c) $\dfrac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}$ (d) $\dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$

7.5 سہ ہندسی بیرنگ اور اس کے اطلاق

45- بیرنگ ہمیشہ کس سمت میں ماپی جاتی ہے:

(a) گھڑی کی مخالف سمت (b) قریبی پول کی طرف (c) گھڑی وار سمت (d) حالت پر منحصر ہے

46- ان میں سے کون سی ثانوی سمت تصور کی جاتی ہے:

(a) شمال (b) جنوب (c) مغرب (d) جنوب مغرب

47- ان میں سے کون سی بنیادی سمت خیال کی جاتی ہے:

(a) مشرق (b) شمال مشرق (c) جنوب مشرق (d) شمال مغرب

48- سہ ہندسی بیرنگ کی بڑی سے بڑی مقدار جو لی جاتی ہے وہ ہے:

(a) 090° (b) 180° (c) 270° (d) 360°

49- اگر کوئی نقطہ y نقطہ x سے 200° کی بیرنگ پر ہو تو آپ y سے x کی بیرنگ کیسے ماپیں گے۔

(a) 200°+180° (b) 200°−180° (c) 360°+180° (d) 360°+200°

جوابات

1- $\overline{OP}$ 2- $\dfrac{\overline{OM}}{\overline{OP}}$ 3- $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ 4- $\dfrac{1}{\tan\theta}$ 5- $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

6- $\sec\theta$ 7- $\cot\theta$ 8- 1 9- 0 10- $\sin 60^\circ$

11- $\tan 90^\circ$ 12- $\tan 180^\circ$ 13- $\sin\theta > 0$ اور $\cos t\theta < 0$ 14- $\sin\theta < 0$

15- $\tan\theta < 0$ 16- III 17- II اور III 18- 0 19- 1

20- -1 21- غیر تعریف شدہ 22- -1 23- $-\operatorname{cosec}\theta$ 24- $-\cot\theta$

25- $\sin\theta$ 26- $-\sec\theta$ 27- $\sec\theta$ 28- دو زاویے اور ضلع 29- $\sin 75^\circ$

30- $\cos 15^\circ$ 31- $\dfrac{\sin\alpha}{a}=\dfrac{\sin\beta}{b}=\dfrac{\sin\gamma}{c}$ 32- $\dfrac{a}{\sin\beta}=\dfrac{b}{\sin\alpha}$ 33- $b\sin\gamma=c\sin\beta$

34- $\cos\beta=\dfrac{c^2-a^2+b^2}{2ca}$ 35- $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a}{2bc}$ 36- کوسائن کا قانون

www.ilmkidunya.com

-40 $\frac{1}{2}ac\sin\alpha$	-39 $\frac{1}{2}ac\sin\alpha$	-38 70°	-37 $\cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$
-44 $\frac{b^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\beta}$	-43 $\frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}$	-42 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	-41 $S=\frac{a+b+c}{2}$
-49 200°−180°	-48 360°	-47 مشرق -46 جنوب مغرب	-45 گھڑی وار سمت

اضافی مختصر سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے مختصر جوابی سوالات

7.1 تکونیاتی نسبتیں یا تفاعل

مختصر جواب دیں۔

-1 زاویہ θ کے لیے تین بنیادی تکونیاتی نسبتیں لکھیں:

جواب: $\sin\theta = \frac{\text{مخالف ضلع}}{\text{وتر}}$

$\cos\theta = \frac{\text{متصلہ ضلع}}{\text{وتر}}$

$\tan\theta = \frac{\text{مخالف ضلع}}{\text{متصلہ ضلع}}$

-2 کس تکونیاتی تفاعل میں تینوں بنیادی تکونیاتی نسبتیں استعمال ہوتی ہیں۔

جواب: تینوں بنیادی تکونیاتی نسبتیں ذیل کے تفاعل میں استعمال ہوتی ہیں۔

$\tan\theta \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

-3 تمام تکونیاتی نسبتیں لکھیں:

جواب: $\cos\theta=\frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$, $\sin\theta=\frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$

$\sec\theta=\frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$, $\cos\theta=\frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$

$\cot\theta=\frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$, $\tan\theta=\frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$

7.1.1 مخصوص زاویوں کے لیے تکونیاتی قدریں

-4 sin30° اور 10560 کی قدر کیا ہوتی ہے۔

جواب: sin 30° کی قدر $\frac{1}{2}$ اور cos 60° کی قدر بھی $\frac{1}{2}$ ہی ہے۔

-5 sin 90°، cos 0° اور tan 45° کی قدروں کو جمع کریں:

حل: $\sin 90° + \cos 0° + \tan 45°$

$= 1+1+1 = 3$

-6 cos 30° کی قدر کو sin 180° کی قدر سے تفریق کریں:

حل: $\sin 180° - \cos 30°$

$= 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

-7 حاصل ضرب معلوم کریں

(sim 45°)(cos 30°)(tan 45°)

حل: $\sin 45° \times \cos 30° \times \tan 45°$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

www.ilmkidunya.com

7.1.2 تکونیاتی تفاعلوں کی علامات

-8 $\sin\theta > 0$ اور $\cos\theta < 0$ کس ربع میں ہیں۔

حل: $\sin\theta > 0$ اور $\cos\theta < 0$ دوسرے مربع میں ہے۔ دوسرے ربع میں صرف $\sin\theta$ مثبت ہوتا ہے۔

-9 اگر $\tan\theta > 0$ اور $\sin\theta < 0$ ہے تو θ کہاں واقع ہے۔

حل: $\tan\theta > 0$ کا مطلب ہے $\tan\theta$ ہے اور $\sin\theta < 0$ کا مطلب ہے اور $\sin\theta$ منفی ہے۔ اس لیے یہ III ربع میں واقع ہے۔

-10 $\sin 315°$ کی علامت کا تعین کریں۔

حل: $\sin 315°$ چوتھے ربع میں واقع ہے۔ جہاں صرف cosin مثبت ہے پس $\sin 315°$ کی علامت منفی ہے۔

-11 $\sin 210°$ کی علامت کیا ہے۔

حل: $\sin 210°$ کی علامت منفی ہے۔ کیونکہ $210°$ تیسرے ربع میں واقع ہے۔ جہاں صرف $\tan\theta$ ہی مثبت ہوتا ہے۔

-12 $\cot 19°$ کی علامت کا تعین کریں۔

حل: $\cot 19°$ کی علامت مثبت ہے کیونکہ $19°$ پہلے ربع میں واقع ہے جہاں تمام تفاعل مثبت ہیں۔

7.1.3 0, 90 اور 180 کی تکونیاتی نسبتیں

-13 P(x,g) کے محددات معلوم کریں جبکہ ایک اکائی دائرے میں زاویہ $90°$ کا ہو۔

جواب: کیونکہ یہ مثبت y محور پر واقع ہے۔ پس $x=0$ اور $y=1$ ہیں۔

-14 $\tan 90°$ کو غیر تعریف شدہ کیوں کہا گیا ہے۔

جواب: کیونکہ $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $x=0$ اور 0 پر تقسیم غیر تعریف شدہ ہوتی ہے۔

-15 $\sin 90° + \cos 0°$ کی قدر معلوم کریں۔

حل:

$$\sin 90° + \cos 0°$$
$$= 1 + 1 = 2$$

-16 $\cos 90° \times \tan 180° - \operatorname{cosec} 90°$ کی قدر معلوم کریں۔

حل:

$$\cos 90° \times \tan 180° - \operatorname{cosec} 90°$$
$$= 0 \times 0 - 1 = 0 - 1$$
$$= -1$$

7.1.4 90° اور 180° کے درمیان والے زاویوں کے لیے سائن اور کوسائن تفاعلوں کو وسعت دینا۔

-17 کیلکولیٹر کے بغیر $\tan 120°$ کی قدر معلوم کریں:

حل: $\tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

-18 کیلکولیٹر کے بغیر $\operatorname{cosec} 135°$ کی قدر معلوم کریں:

حل: $\operatorname{cosec} 135° = \operatorname{cosec}(180° - 135°) = \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$

-19 کیلکولیٹر کے بغیر $\sec 120°$ کی قدر معلوم کریں۔

حل: $\sec 120° = \sec(90° + 30°) = -\operatorname{cosec} 30° = \sqrt{2}$

-20 کیلکولیٹر کے بغیر $\sec 150°$ کی قدر معلوم کریں۔

حل: $\cos 150° = \cos(90° + 60°) = -\sin 60° = - -\frac{\sqrt{3}}{2}$

www.ilmkidunya.com

www.ilmkidunya.com

-21 غیر قائمہ الزاویہ مثلث کی تعریف کریں۔

جواب: غیر قائمہ الزاویہ مثلث ایسی مثلث ہوتی ہے جس میں کوئی بھی زاویہ قائمہ نہ ہو۔

-22 سائن کے قانون کا کلیہ لکھیں۔

جواب: اگر a, b اور c مثلث کے اضلاع α, β اور γ مثلث کے تین زاویے ان کے اضلاع مخالف ہوں تب سائن کا قانون یہ ہے۔

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

-23 سائن کا قانون کب استعمال کیا جاتا ہے؟

جواب: سائن کا قانون مثلث کو حل کرنے کے لیے اس وقت استعمال کیا جا سکتا ہے۔ جب دو زاویے اور ان میں سے ایک کے مخالف ضلع کی مقدار دی ہوئی ہو۔

-24 اگر ایک مثلث میں ضلع $a = 10$، زاویہ $\alpha = 30°$ اور زاویہ $\beta = 45°$ ہو تو ضلع b کی مقدار معلوم کریں۔

حل: سائن کے قانون سے

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{10}{\sin30°}=\frac{b}{\sin45°}$$

$$\frac{10}{0.5}=\frac{b}{0.707}$$

$$0.707\times\frac{10}{0.5}=b$$

$$14.14=b$$

$$b=14.14$$

-25 اگر ایک مثلث میں $c = 3\ cm$ ، $\beta = 60°$ اور $\gamma = 30°$ ہو تو ضلع b کی مقدار معلوم کریں۔

حل: سائن کے قانون سے

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{b}{\sin60°}=\frac{3}{\sin30°}$$

$$\frac{b}{0.866}=\frac{3}{0.5}$$

$$b=\frac{3}{0.5}\times0.866$$

$$b=5.16\ cm$$

7.2.2 کوسائن کا قانون

26- آپ زاویہ α کے کوسائن کو حل کرنے کے لیے کوسائن کے قانون کو کس طرح ترتیب دیں گے؟

حل: ترتیب شدہ کلیہ یوں ہوگا۔

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

27- اگر $a = 4$, $b = 7$ اور $c = 9$ ہوں تو $\cos\beta$ کی قدر معلوم کریں۔

حل:
$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$= \frac{(9)^2 + (4)^2 - (7)^2}{2(9)(4)}$$

$$= \frac{81 + 16 - 49}{72}$$

$$= \frac{48}{72} = 0.67$$

28- ایک مثلث میں اگر $b = 7$ اور $c = 5$ ہو اور $\sin\alpha = 22°$ ہو تو a کی قدر معلوم کریں۔

حل: کوسائن کا قانون استعمال کرنے سے

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$a^2 = (7)^2 + (5)^2 - 2(7)(5)\cos 22°$$

$$a^2 = 49 + 25 - 70(0.93)$$

$$a^2 = 74 - 65.1$$

$$a^2 = 8.9$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{8.9}$$

$$a = 2.98 \cong 3$$

7.2.3 مثلث کا رقبہ

29- جب مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو تو تب مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ لکھیں۔

حل: جب مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو تب مثلث کا رقبہ درج ذیل کلیہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

30- مثلث ABC کا رقبہ معلوم کریں جس میں $a = 4cm$, $b = 3.5cm$ اور $\gamma = 60°$ ہو۔

حل:
$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 3.5 \times \sin 60°$$

www.ilmkidunya.com

$= 2\,(13.5) \times 0.866$
$= 7 \times 0.866$
$= 6.1\ cm^2$

-31 مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ لکھیں۔ جب مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہوں۔

حل: جب مثلث کے تین اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہوں تب مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ یوں ہوگا۔

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

-32 مثلث ABC کا رقبہ معلوم کریں جس میں $a = 6cm$، $b = 9cm$ اور $c = 11cm$ ہو۔

حل: معلوم: $a = 6\ cm,\ b = 9cm,\ c = 11\ cm$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s = \frac{6+9+11}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{13(13-6)(13-9)(13-11)} = \sqrt{728}$$

$$= 26.99\ cm^2$$

-33 مثلث ABC کا رقبہ معلوم کریں جبکہ $b = 6cm$ ، $\beta = 75°$ اور $\alpha = 65°$ ہو۔

حل:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 180° - \alpha - \beta$$
$$\gamma = 180° - 75° - 65° = 40°$$

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2\sin\beta}$$

$$= \frac{(6)^2(\sin 65°)(\sin 40°)}{2(\sin 75°)}$$

$$= \frac{36(0.91)(0.65)}{2(0.97)}$$

$$= \frac{21.294}{1.94} = 10.98\ cm^2$$

7.5 سہ ہندسی بیرنگ اور اس کے اطلاقات

-34 بیرنگ کی پیمائش کے دو بنیادی اصول کیا ہے؟

جواب: وہ دو اصول درج ذیل ہیں۔

-1 اس کی پیمائش ہمیشہ شمال (North) کی سمت سے شروع کرنی چاہیے۔

-2 اس کی پیمائش ہمیشہ گھڑی کی وار سمت میں ہونی چاہیے۔

-35 بیرنگ کو عددی طور پر ہمیشہ کیسے لکھا جانا چاہیے؟

جواب: اسے ہمیشہ تین ہندسوں والے زاویے کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

000° سے 360° کے درمیان

www.ilmkidunya.com

36- بنیادی سمتیں کیا ہیں؟

جواب: بنیادی سمتیں قطب نما پر موجود چار اہم نکات ہیں۔

شمال، جنوب، مشرق اور مغرب

37- ثانوی سمتیں کیا ہیں؟

جواب: ثانوی سمتیں قطب نما کے چار درمیانی نکات ہیں۔ NE (شمال، مشرق)، SE (جنوب مشرق)، SW (جنوب مغرب) اور NW (شمال مغرب)

38- ایک شکل میں مقام x سے y کا بیرنگ 045° ہے۔ مقام y سے x کا بیرنگ معلوم کریں؟

حل: چونکہ بیرنگ 180° سے کم ہے۔ اس لیے واپسی کی سمت معلوم کرنے کے لیے ہم اس میں 180° جمع کریں گے۔

بیرنگ $= 045° + 180° = 225°$

39- ایک ہائیکر مقام C سے مقام D تک 290° کے بیرنگ پر چلتا ہے مقام D سے C تک واپسی کے لیے ہائیکر کو کس بیرنگ پر چلنا چاہیے؟

حل: چونکہ بیرنگ 180° سے زیادہ ہے۔ اس لیے ہم 180° کو بیرنگ سے تفریق کر دیں گے

بیرنگ $= 290° - 180°$

$= 110°$

40- ایک کشتی گھاٹ سے روانہ ہوتی ہے اور مشرق کی جانب 30 کلومیٹر سفر کرتی ہے، جس کے بعد وہ شمال کی جانب 40 کلومیٹر کی جاتی ہے؟ گھاٹ تک واپسی کے مختصر ترین راستے کا فاصلہ اور بیرنگ کیا ہے۔

حل: مسئلہ فیثا غورث استعمال کرتے ہوئے۔

$$d = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50\text{km}$$

واپس آنے کے لیے کشتی کو جنوب اور مغرب کی طرف سفر کرنا ہوگا۔ جنوبی خط سے اندرونی زاویہ θ ہے۔

$$\tan\theta = \frac{30}{40}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right) = 36.9°$$

بیرنگ $= 180° + 36.9° = 216.9°$

www.ilmkidunya.com