

اس بوٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

مستوی میں مستطیلی محدوداتی نظام کو متعارف کرائیں۔

ویکٹرز کو سمتی قطعہ خط کے طور پر ظاہر کریں۔

ویکٹر کو دو غیر صفری اور غیر متوازی ہم مستوی ویکٹرز کی صورت میں ظاہر کریں۔

ویکٹر کو پوزیشن ویکٹر کی صورت میں ظاہر کریں۔

ویکٹر کے ذریعے ٹرانسلیشن کو ظاہر کریں۔

ویکٹر کی عددی قیمت معلوم کریں۔

ویکٹر کو اسکیلر سے ضرب دے کر اس کی پیمائش کریں۔

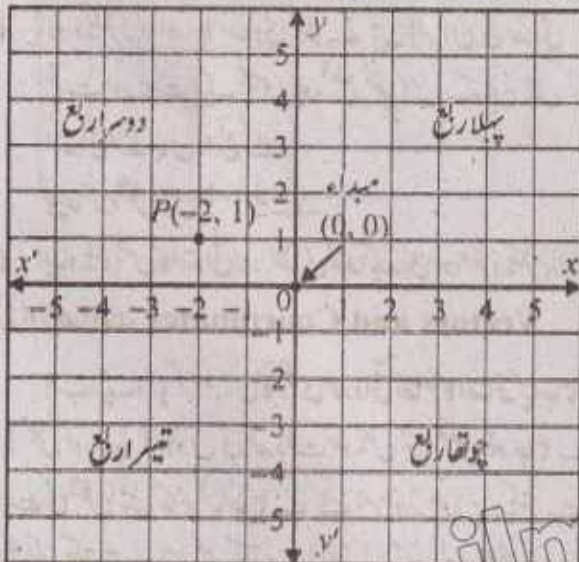
ویکٹر کو اسکیلر سے ضرب دے کر اس کی پیمائش کریں۔

ویکٹر کے استعمال سے جیومیٹرک مسائل کو حل کریں۔

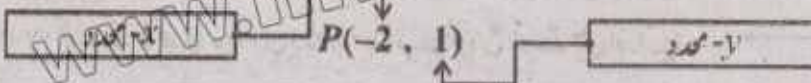
ویکٹرز کے تصورات کا اطلاق جیومیٹرک مسائل (جیسے کہ جیومیٹرک اشکال میں متوازی اور عمودی خطوط، ویکٹرز، پروجیکشنل موشن، کراس ونگز ایوی ایشن، فوجی استعمال اور رولر کوسٹر کے ڈیزائن) میں کریں۔

مستطیلی محدوداتی مستوی (Rectangular Coordinate Plane)

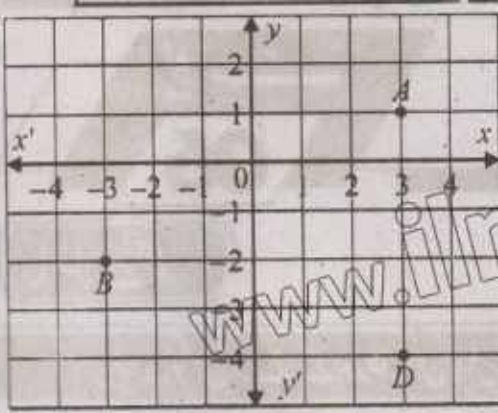
6.1



مستطیلی محدوداتی مستوی افقی عددی خط x - محور اور عمودی خط y - محور کے تقاطع سے بنتی ہے جہاں دونوں محور ملتے ہیں اس کو مبدا کہا جاتا ہے اور یہ محدوداتی مستوی کو چار حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔
محدوداتی مستوی میں موجود نقاط کو مترتب جوڑوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ پہلا رکن x - محور اور دوسرا رکن y - محور کو ظاہر کرتا ہے۔ دی گئی شکل میں نقطہ P کو مترتب جوڑے $(-2, 1)$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔



مثال 1: دی گئی شکل سے درج ذیل نقاط کے محددات لکھیے:



(i) A (ii) B (iii) C

حل:

(i) نقطہ A مبدا سے 3 اکائیاں دائیں جانب اور 1 اکائی اوپر ہے۔ لہذا A-محددات (3, 1) ہیں۔

اور B-محددات 1 ہے۔ A کے محددات (3, 1) ہیں۔

(ii) نقطہ B مبدا سے 3 اکائیاں بائیں جانب اور 1 اکائی نیچے ہے۔ لہذا B-محددات (-3, -1) ہیں۔

اور C-محددات 2 ہے۔ B کے محددات (-3, -2) ہیں۔

(iii) نقطہ D مبدا سے 3 اکائیاں دائیں جانب اور 4 اکائیاں نیچے ہے۔ لہذا D-محددات 3 اور -4 ہے۔ D کے محددات (3, -4) ہیں۔

سکیلرز اور ویکٹرز (Scalars and Vectors)

6.2

طبیعیات اور ریاضی میں استعمال ہونے والی دو قسم کی مقداریں ہوتی ہیں۔

سکیلر: سکیلر ایک ایسی مقدار ہوتی ہے جس میں صرف عددی قیمت ہوتی ہے لیکن سمت نہیں ہوتی۔ کیت، وقت، حجم اور قوت سکیلر مقداروں کی مثالیں ہیں۔
ویکٹر: ویکٹر ایک ایسی مقدار ہے جس میں عددی قیمت (Magnitude) اور سمت دونوں ہوتی ہیں۔ ہٹاؤ، ولاسٹی، اسراع، قوت اور مومینٹم ویکٹر مقداروں کی مثالیں ہیں۔

Representation of a Vector as Directed Line Segment

ایک ویکٹر کی ایک شکل (Tail) اور ایک ہیڈ (Head) ہوتا ہے۔ ساتھ دی گئی شکل پر غور کیجیے۔ ٹیل والا نقطہ A ابتدائی نقطہ کہلاتا ہے اور ہیڈ والا نقطہ B ویکٹر AB کا اختتامی نقطہ کہلاتا ہے۔ ویکٹر کا ابتدائی نقطہ ویکٹر کے مبدا کے طور پر بھی لیا جاتا ہے۔ ہم ویکٹر کو $\vec{a}$ یا $\vec{a}$ سے بھی ظاہر کر سکتے ہیں۔

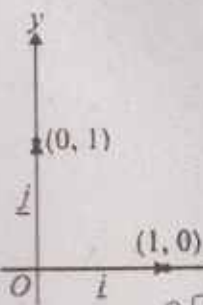


(i) ایسا ویکٹر جس کی لمبائی دوسرے ویکٹر کے برابر لیکن سمت مخالف ہو، منفی ویکٹر کہلاتا ہے۔ جیسا کہ شکل میں ہے۔

(ii) دو ویکٹرز $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ مساوی کہلاتے ہیں اگر ان کی عددی قیمت اور سمت ایک جیسی ہو، قطع نظر اس کے ان میں ابتدائی نقطہ کہاں واقع ہے۔ جیسا کہ شکل میں $\vec{a} = \vec{b}$ ہے۔

(iii) ایسا ویکٹر جس کا ابتدائی اور اختتامی نقطہ ایک ہی ہو، صفر ویکٹر کہلاتا ہے۔ صفر ویکٹر کی کوئی لمبائی نہیں ہوتی۔ صفر ویکٹر ہر ویکٹر کے متوازی ہوتا ہے۔

ویکٹرز اور محددات Vectors and Coordinates

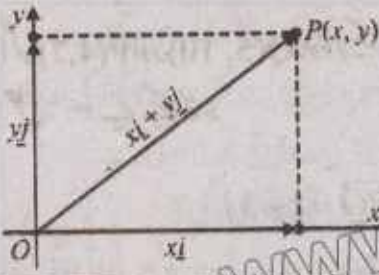


جب ایک ذریعہ گرام میں کارٹیسی محدداتی نظام کا اضافہ کیا جاتا ہے تو ہر ویکٹر کے ابتدائی اور اختتامی نقاط (ٹیل اور ہیڈ) دونوں کی محددات تقویض کرنا ممکن ہو جاتا ہے۔ اس طرح ان ویکٹرز کو ان کے محددات کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے جسے ہم مؤثر طور پر ویکٹر کے متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ اس عمل کو آسان بنانے کے لیے، ہم محوروں کے ساتھ دو خصوصی ویکٹرز متعارف کراتے ہیں: $\vec{i}$ محور کے $\vec{i}$ اور $\vec{j}$ محور کے ساتھ $\vec{j}$ ، یہ دونوں ویکٹرز مبدا سے شروع ہوتے ہیں اور اپنے

متعلقہ محوروں کی مثبت سمت کی طرف اشارہ کرتے ہیں۔

Position Vectors پوزیشن ویکٹر

فرض کریں $O(0, 0)$ ہے اور $P(x, y)$ مستوی میں کوئی نقطہ ہے تب ویکٹر $\vec{OP} = (x - 0)\underline{i} + (y - 0)\underline{j} = x\underline{i} + y\underline{j}$ نقطہ P کے مبداء O کے لحاظ سے پوزیشن ویکٹر کہلاتا ہے۔ x اور y بالترتیب افقی اور عمودی جزو ہیں۔



Magnitude of a Vector ویکٹر کی عددی قیمت

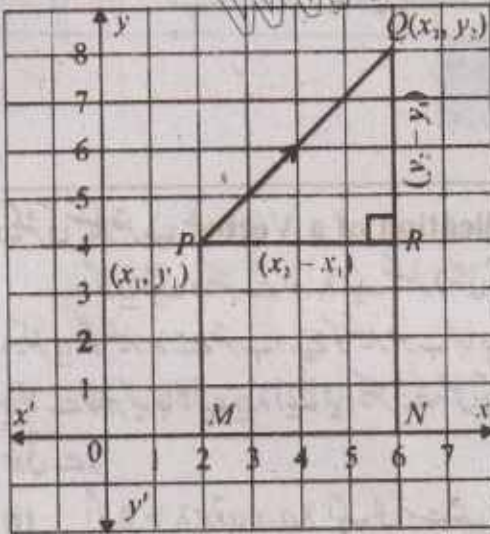
فرض کیا $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ دیے گئے نقاط ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ x -محور پر $\overline{PM}$ اور $\overline{QN}$ عمود کھینچیں۔

$$\overline{PR} \perp \overline{QN}$$

$$|\overline{PR}| = |x_2 - x_1| \quad \text{اب}$$

$$|\overline{QR}| = |y_2 - y_1|$$

PRQ ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔



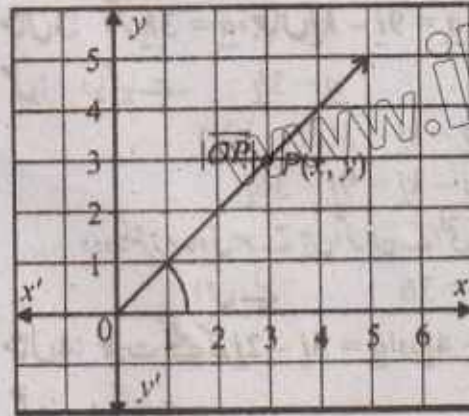
نوٹ: ویکٹر کی عددی قیمت کو اس کا نورم یا لمبائی بھی کہا جاتا ہے۔

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(\overline{PR})^2 + (\overline{QR})^2} \quad \text{اس لیے}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

اگر $P(x, y)$ مستوی میں کوئی بھی نقطہ ہو جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے، تو پوزیشن ویکٹر $\vec{OP} = x\underline{i} + y\underline{j}$ کی مبداء سے عددی قیمت ہوں گی۔



$$|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال 2: اگر $P(2, 4)$ اور $Q(-5, 3)$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

$$|\overline{PQ}| \quad \text{(i)} \quad \text{کو } x\underline{i} + y\underline{j} \text{ کی شکل میں (ii)}$$

$$(i) \quad \overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$$

$$= (-5 - 2)\underline{i} + (3 - 4)\underline{j} = -7\underline{i} - \underline{j}$$

$$(ii) \quad |\overline{PQ}| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

حل:

خود آزمائی!

اگر $P(4, 7)$ اور $Q(5, 10)$ ہوں تو ویکٹر $\overrightarrow{PQ}$ کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: دیے گئے نقاط

$$P(4, 7), Q(5, 10)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (5-4)\underline{i} + (10-7)\underline{j} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \underline{i} + 3\underline{j}$$

اب عددی قیمت

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{10} \text{ جواب}$$

ویکٹر کی سکالر ضرب Scalar Multiplication of a Vector

اگر $\underline{a}$ ایک ویکٹر ہے اور λ ایک سکالر (یعنی حقیقی عدد) ہے، تو نوٹ: دو ویکٹرز کو متوازی کہا جاتا ہے اگر وہ ایک دوسرے کے غیر صفر ویکٹر $\underline{a}$ کو سکالر λ سے ضرب دینے کو سکالر ضرب کہا جاتا ہے۔ اور اسے $\lambda \underline{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے $\lambda \underline{a}$ ایک نیا ویکٹر ہے جس کی عددی قیمت $|\lambda \underline{a}|$ ہوتی ہے۔

(i) اگر $\lambda > 0$ ہو تو $\lambda \underline{a}$ اور $\underline{a}$ ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔

(ii) اگر $\lambda < 0$ ہو تو $\lambda \underline{a}$ اور $\underline{a}$ مخالف سمت میں ہوتے ہیں۔

مثال 3: اگر $\underline{a} = 3\underline{h}$ جہاں $\underline{a} = 9\underline{i} - k\underline{j}$ اور $\underline{h} = 3\underline{i} - 12\underline{j}$ ہوں تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے۔ $\underline{a} = 3\underline{h}$

$$9\underline{i} - k\underline{j} = 3(3\underline{i} - 12\underline{j})$$

$$9\underline{i} - k\underline{j} = 9\underline{i} - 36\underline{j}$$

دو ویکٹرز مساوی ہوتے ہیں اگر ان کے افقی اور عمودی اجزاء مساوی ہوں۔

$$k = 36 \text{ اس لیے}$$

مثال 4: ثابت کیجیے کہ $\underline{a} = 5\underline{i} - 2\underline{j}$ اور $\underline{b} = -10\underline{i} + 4\underline{j}$ متوازی ہیں۔

حل: دیا گیا ہے۔

نوٹ:

(i) اگر $\underline{a} = \underline{b}$ ہو تو $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ کی ایک جیسی سمت ہوتی ہے اور

$$|\underline{a}| = |\underline{b}|$$

(ii) اگر $\underline{a}$ ایک صفری ویکٹر ہو تو $|\underline{a}| = 0$

$$\underline{a} = 5\underline{i} - 2\underline{j}$$

$$\underline{b} = -10\underline{i} + 4\underline{j}$$

$$\underline{b} = -2(5\underline{i} - 2\underline{j})$$

$$\underline{b} = -2\underline{a}$$

جو ثابت کرتا ہے کہ $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ متوازی ہیں۔

یونٹ ویکٹر Unit Vector

یونٹ ویکٹر وہ ہوتا ہے جس کی عددی قیمت 1 ہو۔ اگر $\underline{a}$ کوئی ویکٹر ہے تو اس کے یونٹ ویکٹر کو $\hat{a}$ (ہیٹ پڑھا جاتا ہے) سے ظاہر کیا

$$\hat{a} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$$

جاتا ہے۔ اور اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے:

مثال 5: $a = -5i + 2j$ کی سمت میں پونٹ ویکٹر معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے۔ $a = -5i + 2j$

$$|a| = \sqrt{(-5)^2 + (2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

$$\hat{a} = \frac{a}{|a|} = \frac{-5i + 2j}{\sqrt{29}}$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{29}}i + \frac{2}{\sqrt{29}}j$$

(i) پونٹ ویکٹر صفر ہو سکتا ہے؟ وضاحت کیجیے۔

جواب: جی نہیں ایک پونٹ ویکٹر صفر ویکٹر نہیں ہو سکتا پونٹ ویکٹر کی عددی قیمت 1 ہوتی ہے اور صفر ویکٹر کی عددی قیمت 0 ہوتی ہے۔

(ii) اگر a پونٹ ویکٹر ہو تو $|a|$ کی قیمت کیا ہوگی؟

جواب: اگر a ایک پونٹ ویکٹر ہے تو اس کی عددی قیمت 1 $|a|$ ہوگی۔

حل مشق 6.1

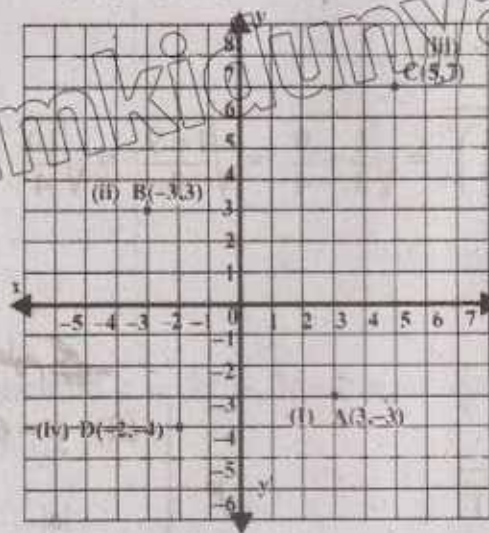
1- ریلج بتائیے جن میں دیا گیا ہر ایک نقطہ واقع ہے۔

(i) (4, 3) | (ii) (5, -4)

حل: ریلج I | حل: ریلج IV

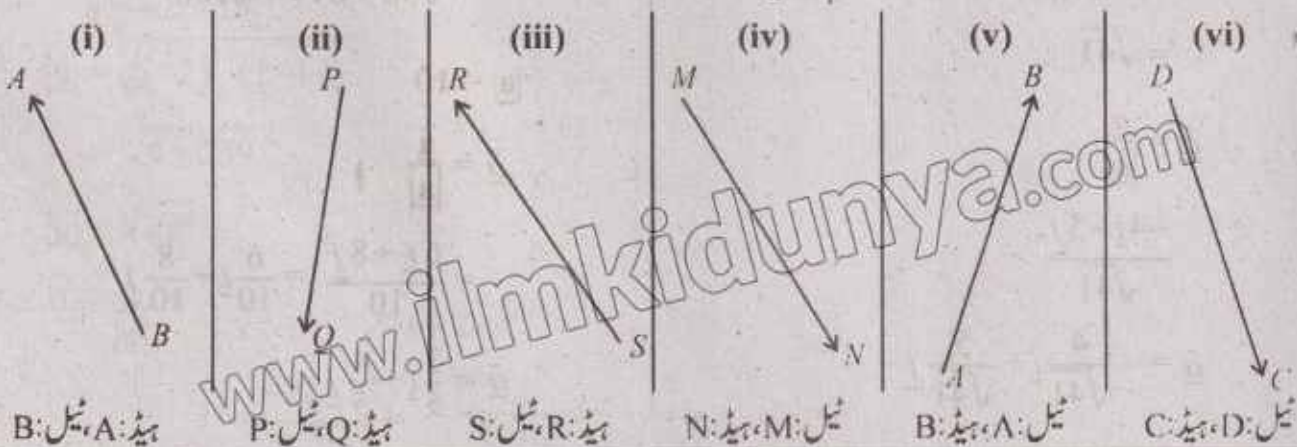
2- محدوداتی مستوی پر درج ذیل نقاط کو مرتب کیجیے۔

(i) A(3, -3) | (ii) B(-3, 3) | (iii) C(5, 7) | (iv) D(-2, -4)



حل:

3- درج ذیل ویکٹرز کی ٹیل اور ہیڈ کے نام بتائیے۔



-4 ویکٹر $\overrightarrow{AB}$ کو $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ کی شکل میں لکھیے۔

(i) $A(1, -7), B(-2, 4)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} \\ &= (-2 - 1)\mathbf{i} + [4 - (-7)]\mathbf{j} \\ \overrightarrow{AB} &= -3\mathbf{i} + 11\mathbf{j}\end{aligned}$$

(ii) $A(8, 9), B(12, 3)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} \\ &= (12 - 8)\mathbf{i} + (3 - 9)\mathbf{j} \\ \overrightarrow{AB} &= 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}\end{aligned}$$

-5 $\underline{a}$ کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\underline{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}|\underline{a}| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{9 + 4} \\ |\underline{a}| &= \sqrt{13}\end{aligned}$$

(ii) $\underline{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}|\underline{a}| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{16 + 9} \\ &= \sqrt{25} \Rightarrow |\underline{a}| = 5\end{aligned}$$

(iii) $\underline{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}|\underline{a}| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{1+9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} \\ |\underline{a}| &= \frac{\sqrt{10}}{2}\end{aligned}$$

-6 دیے گئے ویکٹر کی سمت میں یونٹ ویکٹر معلوم کیجیے۔

(i) $\underline{a} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}|\underline{a}| &= \sqrt{(-4)^2 + (5)^2} \\ &= \sqrt{16 + 25} \\ &= \sqrt{41}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \hat{a} &= \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \\ &= \frac{-4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}}{\sqrt{41}}\end{aligned}$$

$$\hat{a} = -\frac{4}{\sqrt{41}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{41}}\mathbf{j}$$

(ii) $\underline{a} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}|\underline{a}| &= \sqrt{6^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} \\ |\underline{a}| &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \hat{a} &= \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \\ &= \frac{6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}}{10} = \frac{6}{10}\mathbf{i} + \frac{8}{10}\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\hat{a} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$$

$$(iii) \underline{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j}$$

$$\begin{aligned} |\underline{a}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1+1}{6}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \hat{\underline{a}} &= \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\underline{i} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\underline{j} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\underline{i} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\underline{j} \\ \hat{\underline{a}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j} \end{aligned}$$

7- اگر $\underline{a} = 5\underline{i} - 7\underline{j}$ اور $\underline{b} = -\underline{i} - \underline{j}$ اور $\underline{c} = 2\underline{i} + 3\underline{j}$ ہوں تو $\underline{a} + \underline{b} - 3\underline{c}$ کے متوازی یونٹ ویکٹر معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} \underline{a} + \underline{b} - 3\underline{c} &= 5\underline{i} - 7\underline{j} + (-\underline{i} - \underline{j}) - 3(2\underline{i} + 3\underline{j}) \\ &= 5\underline{i} - 7\underline{j} - \underline{i} - \underline{j} - 6\underline{i} - 9\underline{j} \\ &= (5 - 1 - 6)\underline{i} - (7 + 1 + 9)\underline{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{a} + \underline{b} - 3\underline{c} &= -2\underline{i} - 17\underline{j} \quad \text{فرض کریں} \\ \underline{u} &= -2\underline{i} - 17\underline{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\underline{u}| &= \sqrt{(-2)^2 + (-17)^2} \\ &= \sqrt{4 + 289} \end{aligned}$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{293}$$

$$\hat{\underline{u}} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$$

$$\hat{\underline{u}} = \frac{-2\underline{i} - 17\underline{j}}{\sqrt{293}} = -\frac{2}{\sqrt{293}}\underline{i} - \frac{17}{\sqrt{293}}\underline{j}$$

$$(iv) \underline{a} = \frac{1}{2}\underline{i} - \frac{3}{4}\underline{j}$$

$$\begin{aligned} |\underline{a}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{4 \times 1 + 1 \times 9}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{4+9}{16}} = \sqrt{\frac{13}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \hat{\underline{a}} &= \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\underline{i} - \frac{3}{4}\underline{j}}{\frac{\sqrt{13}}{4}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{13}} \left(\frac{1}{2}\underline{i} - \frac{3}{4}\underline{j} \right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{13}} \times \frac{1}{2}\underline{i} - \frac{4}{\sqrt{13}} \times \frac{3}{4}\underline{j} \\ \hat{\underline{a}} &= \frac{2}{\sqrt{13}}\underline{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\underline{j} \end{aligned}$$

جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ متوازی ہیں جب $\lambda = -3$

(iii) $\underline{a} = 5\underline{i} - 4\underline{j}$, $\underline{b} = 6\underline{i} - 3\underline{j}$

حل: ہم دیکھتے ہیں کوئی بھی کونسٹنٹ λ نہیں جیسے کہ $\underline{b} = \lambda \underline{a}$ لہذا یہ غیر متوازی ہیں۔

(iv) $\underline{a} = 3\underline{i} - 7\underline{j}$, $\underline{b} = 6\underline{i} - 14\underline{j}$

حل: دیا گیا ہے

$$\underline{b} = 6\underline{i} - 14\underline{j}$$

$$= 2(3\underline{i} - 7\underline{j})$$

$$\Rightarrow \underline{b} = 2\underline{a}$$

جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ متوازی ہیں جب $\lambda = 2$

10- ایک ایسا ویکٹر معلوم کیجیے جو $3\underline{i} - 2\underline{j}$ سے تین گنا بڑا

ہو، لیکن اس کی سمت مخالف ہو۔

حل: مطلوبہ ویکٹر

$$= -3(3\underline{i} + 2\underline{j})$$

$$= -9\underline{i} + 6\underline{j}$$

11- دو ایسے ویکٹرز معلوم کیجیے جو $3\underline{i} - 5\underline{j}$ سے دو گنا

ہوں، ان میں سے ایک اس کی سمت میں ہی ہو اور

دوسرا اس کی مخالف سمت میں ہو۔

حل: ویکٹر ایک ہی سمت میں لیکن دو گنی عددی قیمت میں

$$2(3\underline{i} - 5\underline{j})$$

$$= 6\underline{i} - 10\underline{j}$$

ویکٹر مخالف سمت میں لیکن دو گنی عددی قیمت میں

$$-2(3\underline{i} - 5\underline{j})$$

$$= -6\underline{i} + 10\underline{j}$$

8- $\underline{a} = 3\underline{i} - \underline{j}$, $\underline{b} = -2\underline{i} + 4\underline{j}$ اور

ہوں $\underline{c} = \underline{i} + 2\underline{j}$ $3\underline{a} + 2\underline{c} - 4\underline{b}$ کے متوازی

پونٹ ویکٹر معلوم کیجیے۔

حل:

$$3\underline{a} + 2\underline{c} - 4\underline{b}$$

$$= 3(3\underline{i} - \underline{j}) + 2(\underline{i} + 2\underline{j}) - 4(-2\underline{i} + 4\underline{j})$$

$$= 9\underline{i} - 3\underline{j} + 2\underline{i} + 4\underline{j} + 8\underline{i} - 16\underline{j}$$

$$= (9 + 2 + 8)\underline{i} - (3 - 4 + 16)\underline{j}$$

$$= 19\underline{i} - 15\underline{j}$$

$$\underline{u} = 19\underline{i} - 15\underline{j}$$

$$\Rightarrow |\underline{u}| = \sqrt{(19)^2 + (-15)^2}$$

$$= \sqrt{361 + 225}$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{586}$$

$$\underline{\hat{u}} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$$

مطلوبہ پونٹ ویکٹر

$$= \frac{19\underline{i} - 15\underline{j}}{\sqrt{586}} = \frac{19}{\sqrt{586}}\underline{i} - \frac{15}{\sqrt{586}}\underline{j}$$

9- درج ذیل میں سے کون سے ویکٹرز متوازی ہیں؟

(i) $\underline{a} = 6\underline{i} + \underline{j}$, $\underline{b} = 12\underline{i} + 2\underline{j}$

حل: دیا گیا ہے

$$\underline{b} = 12\underline{i} + 2\underline{j}$$

$$\underline{b} = 2(6\underline{i} + \underline{j})$$

$$\underline{b} = 2\underline{a}$$

جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ متوازی ہیں جب $\lambda = 2$

(ii) $\underline{a} = -2\underline{i} + 3\underline{j}$, $\underline{b} = 6\underline{i} - 9\underline{j}$

حل: دیا گیا ہے

$$\underline{b} = 6\underline{i} - 9\underline{j}$$

$$= -3(-2\underline{i} + 3\underline{j})$$

$$\underline{b} = -3\underline{a}$$

ویکٹرز کی جمع (Addition of Vectors)

6.3

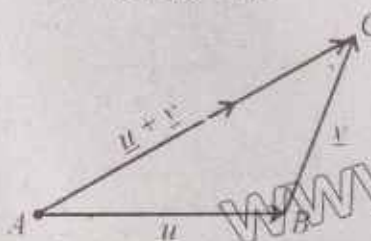
(i) جمع کا مثلثی قانون (Triangle Law of Addition)

ہیڈنومیل قانون

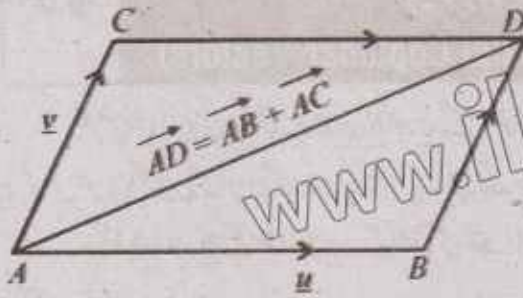
اگر دو ویکٹرز $\underline{u}$ اور $\underline{v}$ کو ایک مثلث کے دو ملحقہ اضلاع $\underline{AB}$ اور $\underline{BC}$ سے اس طرح ظاہر

کیا جائے کہ $\underline{u}$ اور $\underline{v}$ اختتامی نقطہ ویکٹر $\underline{u}$ کے ابتدا کی نقطہ سے مل جائے تو مثلث کا تیسرا ضلع $\underline{AC}$ ویکٹر $\underline{u} + \underline{v}$ کا حاصل جمع ویکٹر ہوتا ہے یعنی:

$$\underline{AB} + \underline{BC} = \underline{AC} \Rightarrow \underline{u} + \underline{v} = \underline{AC}$$



(Parallelogram Law of Addition) دو ویکٹرز کا فرق (ii)



اگر دو ویکٹرز $\underline{u}$ اور $\underline{v}$ کو ایک متوازی الاضلاع کے دو ملحقہ اضلاع AB اور AC سے ظاہر کیا جائے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے، تو متوازی الاضلاع کا وتر AD ویکٹرز AB اور AC کا حاصل جمع ویکٹر ہوتا ہے۔

$$\underline{AD} = \underline{AB} + \underline{AC}$$

$$\underline{AD} = \underline{u} + \underline{v}$$

مثال 6: اگر $\underline{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ اور $\underline{b} = 4\hat{i} - 6\hat{j}$ تو $\underline{a} + \underline{b}$ معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned}\underline{a} + \underline{b} &= (2\hat{i} + 3\hat{j}) + (4\hat{i} - 6\hat{j}) \\ &= (2 + 4)\hat{i} + (3 - 6)\hat{j} \\ &= 6\hat{i} - 3\hat{j}\end{aligned}$$

خود آزمائی!

اگر $\underline{a} = 10\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}$ اور $\underline{b} = \frac{3}{4}\hat{i} - \frac{7}{6}\hat{j}$ تو $\underline{a} + \underline{b}$ معلوم کیجیے۔

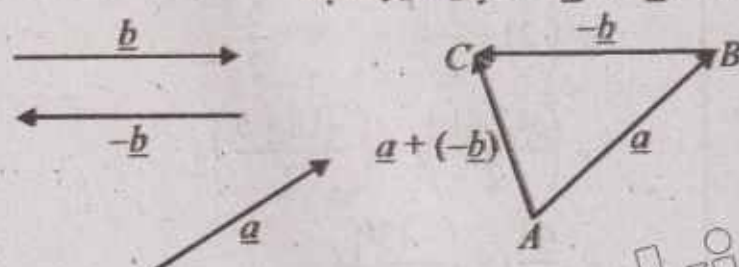
$$\underline{a} = 10\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}, \quad \underline{b} = \frac{3}{4}\hat{i} - \frac{7}{6}\hat{j}$$

$$\begin{aligned}\underline{a} + \underline{b} &= \left(10\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}\right) + \left(\frac{3}{4}\hat{i} - \frac{7}{6}\hat{j}\right) \\ &= \left(10 + \frac{3}{4}\right)\hat{i} - \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{6}\right)\hat{j} = \left(\frac{40 + 3}{4}\right)\hat{i} - \left(\frac{3 + 7}{6}\right)\hat{j} \\ &= \frac{43}{4}\hat{i} - \frac{10}{6}\hat{j}\end{aligned}$$

$$\underline{a} + \underline{b} = \frac{43}{4}\hat{i} - \frac{5}{3}\hat{j}$$

6.4 دو ویکٹرز کا فرق (Difference of Two Vectors)

دو ویکٹرز $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ کی تفریق کو $\underline{a} - \underline{b}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے $\underline{a} + (-\underline{b})$ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔



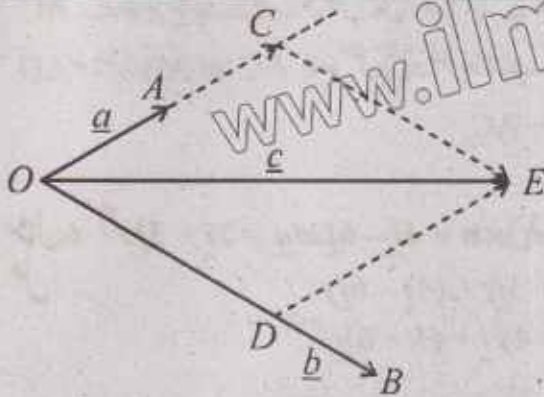
$$\underline{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}, \quad \underline{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$$

$$\begin{aligned}\underline{a} + (-\underline{b}) &= (x_1\hat{i} + y_1\hat{j}) + (-x_2\hat{i} - y_2\hat{j}) \\ &= (x_1 - x_2)\hat{i} + (y_1 - y_2)\hat{j}\end{aligned}$$

مثال 7: اگر $\underline{a} = 6\hat{i} + 13\hat{j}$ اور $\underline{b} = 4\hat{i} + 7\hat{j}$ تو $\underline{a} - \underline{b}$ معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned}\underline{a} - \underline{b} &= (6\hat{i} + 13\hat{j}) - (4\hat{i} + 7\hat{j}) \\ &= (6 - 4)\hat{i} + (13 - 7)\hat{j} = 2\hat{i} + 6\hat{j}\end{aligned}$$

ویکٹرزدو غیر صفری اور غیر متوازی ہم مستوی ویکٹرز کی شکل میں
(Vectors in Terms of Two Non-Zero and Non-Parallel Coplanar Vectors)



فرض کیا $\underline{c}$ کوئی ویکٹر ہے جو $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ کے مستوی میں واقع ہے۔ $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ کو اس طرح کھینچیں کہ ان کے ابتدائی نقاط ایک ہی جگہ پر ہوں۔

ویکٹر $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ کے متوازی $\underline{c}$ کے اختتامی نقطہ E سے گزرتے ہوئے خطوط

کھینچیں۔

اگر ضروری ہو تو $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ کو بڑھا کر متوازی الاضلاع ODEC مکمل

کیجیے۔

جہاں m سکالر ہے، $\overline{OC} = m\overline{OA} = m\underline{a}$ ،

جہاں n سکالر ہے، $\overline{OD} = n\overline{OB} = n\underline{b}$ ،

ویکٹر کی جمع کے متوازی الاضلاع قانون کے مطابق

$$\underline{c} = m\underline{a} + n\underline{b} \quad \text{یا} \quad \overline{OE} = \overline{OC} + \overline{OD}$$

یہاں m اور n ویکٹر $\underline{c}$ کے اجزاء ہیں۔

یاد رکھیے! دو یا دو سے زیادہ ویکٹر ہم مستوی ویکٹر کہلاتے ہیں اگر وہ ایک ہی مستوی میں واقع ہوں۔

مثال 8: اگر $\underline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ اور $\underline{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ ہوں تو $3\underline{a} + 4\underline{b}$ کے ویکٹرز کے اجزاء معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned} 3\underline{a} + 4\underline{b} &= 3(2\hat{i} - 3\hat{j}) + 4(3\hat{i} + 4\hat{j}) \\ &= 6\hat{i} - 9\hat{j} + 12\hat{i} + 16\hat{j} = 18\hat{i} + 7\hat{j} \\ &= 3\underline{a} + 4\underline{b} \text{ کے اجزاء } 18\hat{i} \text{ اور } 7\hat{j} \text{ ہیں۔} \end{aligned}$$

حل مشق 6.2

1- اگر $\underline{a} = 7\hat{i} - 3\hat{j}$ اور $\underline{b} = \hat{i} + 5\hat{j}$ ہوں تو درج ذیل ویکٹرز معلوم کیجیے۔

(i) $\underline{a} + \underline{b}$
 $= (7\hat{i} - 3\hat{j}) + (\hat{i} + 5\hat{j})$
 $= (7 + 1)\hat{i} + (-3 + 5)\hat{j}$
 $= 8\hat{i} + 2\hat{j}$

حل:

$$\begin{aligned} &= 21\hat{i} - 9\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{5}{2}\hat{j} \\ &= \left(21 + \frac{1}{2}\right)\hat{i} + \left(-9 + \frac{5}{2}\right)\hat{j} \end{aligned}$$

(ii) $\underline{a} + 3\underline{b}$
 $= (7\hat{i} - 3\hat{j}) + 3(\hat{i} + 5\hat{j})$
 $= 7\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{i} + 15\hat{j}$
 $= (7 + 3)\hat{i} + (-3 + 15)\hat{j}$
 $= 10\hat{i} + 12\hat{j}$

حل:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{42+1}{2}\right)\hat{i} + \left(\frac{-18+5}{2}\right)\hat{j} \\ &= \frac{43}{2}\hat{i} + \left(-\frac{13}{2}\right)\hat{j} \end{aligned}$$

(iii) $3\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b}$
 $= 3(7\hat{i} - 3\hat{j}) + \frac{1}{2}(\hat{i} + 5\hat{j})$

حل:

$$= \frac{43}{2}\hat{i} - \frac{13}{2}\hat{j}$$

(iv) $\underline{b} - \underline{a}$

$$= \underline{i} + 5\underline{j} - (7\underline{i} - 3\underline{j})$$

$$= \underline{i} + 5\underline{j} - 7\underline{i} + 3\underline{j}$$

$$= (1 - 7)\underline{i} + (5 + 3)\underline{j}$$

$$= -6\underline{i} + 8\underline{j}$$

(v) $4\underline{b} - 5\underline{a}$

$$= 4(\underline{i} + 5\underline{j}) - 5(7\underline{i} - 3\underline{j})$$

$$= 4\underline{i} + 20\underline{j} - 35\underline{i} + 15\underline{j}$$

$$= (4 - 35)\underline{i} + (20 + 15)\underline{j}$$

$$= -31\underline{i} + 35\underline{j} \text{ جواب}$$

(vi) $\frac{3}{2}\underline{a} - \underline{b}$

$$= \frac{3}{2}(7\underline{i} - 3\underline{j}) - (\underline{i} + 5\underline{j})$$

$$= \frac{21}{2}\underline{i} - \frac{9}{2}\underline{j} - \underline{i} - 5\underline{j}$$

$$= \left(\frac{21}{2} - 1\right)\underline{i} - \left(\frac{9}{2} + 5\right)\underline{j}$$

$$= \left(\frac{21 - 2}{2}\right)\underline{i} - \left(\frac{9 + 10}{2}\right)\underline{j}$$

$$= \frac{19}{2}\underline{i} - \frac{19}{2}\underline{j} \text{ جواب}$$

2- اگر $\underline{a} = 6\underline{i} - \underline{j}$, $\underline{b} = \underline{i} + 5\underline{j}$ اور $\underline{c} = 3\underline{i} + 5\underline{j}$ ہوں تو درج ذیل ویکٹرز کی مقدار میں معلوم کیجیے۔

(i) $\underline{b} - \underline{c}$

$$\underline{b} - \underline{c} = \underline{i} + 5\underline{j} - (3\underline{i} + 5\underline{j})$$

$$= \underline{i} + 5\underline{j} - 3\underline{i} - 5\underline{j}$$

$$= (1 - 3)\underline{i} + (5 - 5)\underline{j}$$

$$= -2\underline{i} + 0\underline{j}$$

$$|\underline{b} - \underline{c}| = |-2\underline{i} + 0\underline{j}|$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (0)^2}$$

$$|\underline{b} - \underline{c}| = \sqrt{4 + 0}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$|\underline{b} - \underline{c}| = 2$$

(ii) $\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}$

$$= 6\underline{i} - \underline{j} - 2(\underline{i} + 5\underline{j}) + (3\underline{i} + 5\underline{j})$$

$$= 6\underline{i} - \underline{j} - 2\underline{i} - 10\underline{j} + 3\underline{i} + 5\underline{j}$$

$$= (6 - 2 + 3)\underline{i} - (1 + 10 - 5)\underline{j}$$

$$= 7\underline{i} - 6\underline{j}$$

$$|\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}| = \sqrt{7^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{49 + 36}$$

$$|\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}| = \sqrt{85}$$

(iii) $\underline{c} - \underline{b} - \underline{a}$

$$= 3\underline{i} + 5\underline{j} - (\underline{i} + 5\underline{j}) - (6\underline{i} - \underline{j})$$

$$= 3\underline{i} + 5\underline{j} - \underline{i} - 5\underline{j} - 6\underline{i} + \underline{j}$$

$$= (3 - 1 - 6)\underline{i} + (5 - 5 + 1)\underline{j}$$

$$= -4\underline{i} + \underline{j}$$

$$|\underline{c} - \underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{16 + 1}$$

$$|\underline{c} - \underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{17}$$

3- درج ذیل مساواتوں میں x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $(x\hat{i} + y\hat{j}) + (2\hat{i} + 3\hat{j}) = 7\hat{i} + 6\hat{j}$

$(x+2)\hat{i} + (y+3)\hat{j} = 7\hat{i} + 6\hat{j}$

$x+2=7$

$x=7-2$

$x=5$

$y+3=6$

$y=6-3$

$y=3$

دونوں اطراف $\hat{i}$ اور $\hat{j}$ کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

حل:

(ii) $(x\hat{i} - 5\hat{j}) + (3\hat{i} + 5\hat{j}) = -8\hat{i} + y\hat{j}$

$(x+3)\hat{i} - (5-5)\hat{j} = -8\hat{i} + y\hat{j}$

$(x+3)\hat{i} - 0\hat{j} = -8\hat{i} + y\hat{j}$

$x+3=-8$

$x=-8-3$

$x=-11$

$0=y$

$y=0$

دونوں اطراف $\hat{i}$ اور $\hat{j}$ کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

حل:

(iii) $(y\hat{i} + 3\hat{j}) + (-5\hat{i} + 2x\hat{j}) = 9\hat{i} + 7\hat{j}$

$(y-5)\hat{i} + (3+2x)\hat{j} = 9\hat{i} + 7\hat{j}$

$y-5=9$

$y=9+5$

$y=14$

$3+2x=7$

$2x=7-3$

$2x=4$

$x=\frac{4}{2}$

$x=2$

دونوں اطراف $\hat{i}$ اور $\hat{j}$ کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

حل:

4- اگر $\hat{z} = \hat{i} + 3\hat{j}$, $\hat{c} = 2\hat{i} + \hat{j}$ اور $\hat{a} + 2\hat{b} = \hat{c}$ ہوں تو $|\hat{b}|$ معلوم کیجیے۔

$\hat{a} + 2\hat{b} = \hat{c}$

$\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$

$2\hat{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{i} - 3\hat{j}$

$= (2-1)\hat{i} + (1-3)\hat{j}$

$2\hat{b} = \hat{i} - 2\hat{j}$

$\hat{b} = \frac{1}{2}\hat{i} - \frac{2}{2}\hat{j}$

$\hat{b} = \frac{1}{2}\hat{i} - \hat{j}$

$|\hat{b}| = \left| \frac{1}{2}\hat{i} - \hat{j} \right|$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{1+4}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

$|\hat{b}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

حل:

5- اگر $a = -2i + 7j$ اور $b = 3i - 5j$ ہوں تو $a + 5b$ کے اے معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} a + 5b &= -2i + 7j + 5(3i - 5j) \\ &= -2i + 7j + 15i - 25j \\ &= (-2 + 15)i + (7 - 25)j \\ a + 5b &= 13i - 18j \end{aligned}$$

لہذا $a + 5b$ کے اے 13 اور 18 ہے۔

6- اگر $5i - 3j = m(i - 10j) + n(4i - 3j)$ ہو تو m اور n کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} 5i - 3j &= m(i - 10j) + n(4i - 3j) \\ 5i - 3j &= mi - 10mj + 4ni - 3nj \\ 5i - 3j &= (m + 4n)i - (10m + 3n)j \end{aligned}$$

دونوں اطراف i اور j کے عددی سرور کا موازنہ کرنے سے

$$\begin{aligned} m + 4n &= 5 \dots (i) & -(10m + 3n) &= -3 \\ & & 10m + 3n &= 3 \dots (ii) \end{aligned}$$

مساوات (i) سے $10m$ کی طرف ضرب دیں اور مساوات (ii) سے تفریق کریں۔

$$\begin{aligned} 10m + 3n &= 3 \\ +10m + 40n &= 50 \\ \hline -37n &= -47 \end{aligned}$$

$$n = \frac{47}{37}$$

مساوات (i) میں n کی قدر لگائیں۔

$$m + 4\left(\frac{47}{37}\right) = 5$$

$$\begin{aligned} m + \frac{188}{37} &= 5 \\ m &= 5 - \frac{188}{37} \\ m &= \frac{185 - 188}{37} \end{aligned}$$

$$m = \frac{-3}{37}$$

6.6 ویکٹر کی ٹرانسلیشن (Translation by a Vector)

ٹرانسلیشن ویکٹر وہ ویکٹر ہے جو کسی نقطہ، جسم یا نظام کی ایک جگہ سے دوسری جگہ حرکت کو بغیر کسی گردش یا ہکاڑ کے بیان کرتا ہے۔ ٹرانسلیشن کی گنتی شکل کو اصل شکل کا عکس کہا جاتا ہے۔ عکس اصل شکل کے متماثل ہوتا ہے۔

محدوباتی مستوی میں کسی شکل کو ٹرانسلیشن ویکٹر

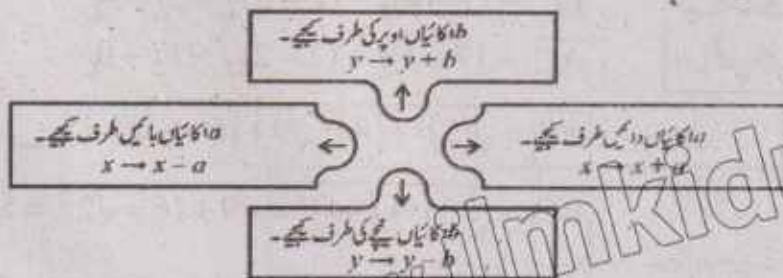
کے ذریعے منتقل کر کے لیے ہم اس کے محدودات کو

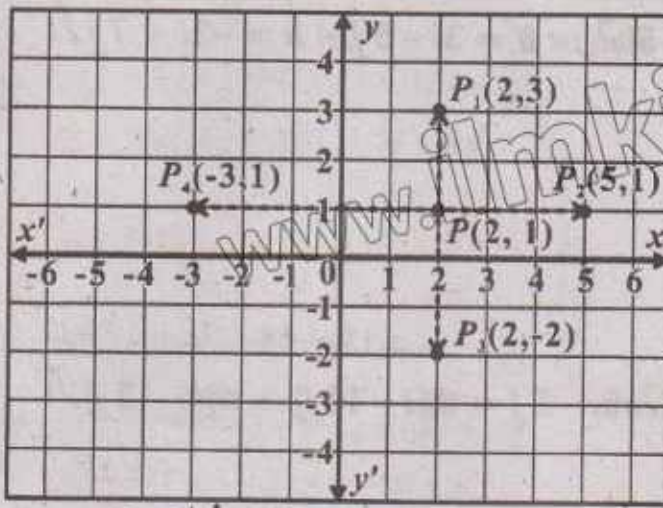
تبدیل کرتے ہیں۔ اگر $y = a_i + b_j$ ٹرانسلیشن

ویکٹر ہو، جہاں a اور b مستقل مقداریں ہیں، تو ہم

درج ذیل اصول استعمال کر سکتے ہیں:

آئیے نقطہ $P(2, 1)$ کو ٹرانسلیشن ویکٹر $3i, 2j$ اور $-5i$ کی مدد سے منتقل کرتے ہیں۔





$$P_1 = (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (0\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

$$= 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$P_2 = (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (3\mathbf{i} + 0\mathbf{j})$$

$$= 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$P_3 = (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (0\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$$

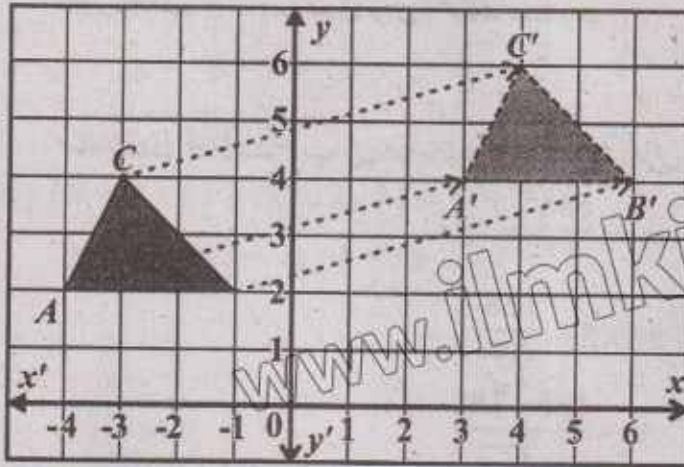
$$= 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

$$P_4 = (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (-5\mathbf{i} + 0\mathbf{j})$$

$$= -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

مثال 9: نقاط $A(-4, 2)$ ، $B(-1, 2)$ اور $C(-3, 4)$ کو مرکز م کر کے مثلث ABC بنائیے۔ کوٹراسیلیشن ویکٹرز $7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

کے ذریعے $\Delta A'B'C'$ حل:



$$\text{نیاراس } A' = (-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + (7\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

$$= 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = (3, 4)$$

$$\text{نیاراس } B' = (-1\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + (7\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

$$= 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = (6, 4)$$

$$\text{نیاراس } C' = (-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (7\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

$$= 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} = (4, 6)$$

ویکٹرز پر مشتمل جیومیٹرک مسائل کا حل اور اطلاق

6.7

(Solution and Application of Geometric Problems involving Vectors)

مثال 10: اگر $A(1, 2)$ ، $B(4, 6)$ اور $C(7, 2)$ مثلث کے راس ہوں تو تصدیق کیجیے کہ مثلث ABC ایک متساوی الساقین مثلث

ہے۔
حل:

$$\overline{AB} = (4 - 1)\mathbf{i} + (6 - 2)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

$$\overline{BC} = (7 - 4)\mathbf{i} + (2 - 6)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

$$\overline{AC} = (7 - 1)\mathbf{i} + (2 - 2)\mathbf{j} = 6\mathbf{i} - 0\mathbf{j}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{اب}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = 5$$

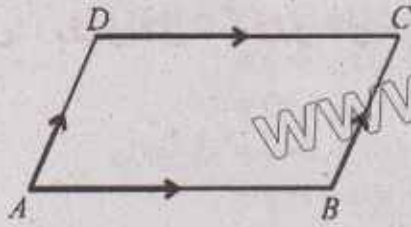
یہاں

پس ΔABC ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔

یاد رکھیے!

ایک مثلث جس کے دو اضلاع لمبائی میں برابر ہوں، متساوی الساقین مثلث کہلاتی ہے۔

مثال 11: دو ویکٹر کے طریقہ سے ثابت کیجیے کہ نقاط $A(1, 2)$ ، $B(4, 6)$ ، $C(7, 4)$ اور $D(4, 0)$ ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔



$$\vec{AB} = (4-1)\underline{i} + (6-2)\underline{j} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$$

حل:

$$\vec{DC} = (7-4)\underline{i} + (4-0)\underline{j} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$$

$$\vec{BC} = (7-4)\underline{i} + (4-6)\underline{j} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$$

$$\vec{AD} = (4-1)\underline{i} + (0-2)\underline{j} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$$

$$\therefore \vec{AB} \parallel \vec{DC} \text{ and } \vec{BC} \parallel \vec{AD}$$

پس ثابت ہوا دیے گئے نقاط ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

نوٹ:

حرکت کی مساواتیں وہ کلیے ہیں جو یکساں اسراع کے تحت اجسام کی حرکت کو بیان کرنے کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ یہ ابتدائی ولاسٹی (v_i) آخری ولاسٹی (v_f)، اسراع (a)، وقت (t) اور ہٹاؤ (s) کے درمیان تعلق کو معلوم کرنے میں ہماری مدد کرتے ہیں۔ یہ ایسے مسائل کے حل میں بہت مفید ہیں جن میں چلتی ہوئی کاریں، گری ہوئی چیزیں یا پھینکی گئی گیندیں شامل ہوں۔

$$\text{حرکت کی پہلی مساوات: } \underline{v}_f = \underline{v}_i + \underline{a}t$$

یہ ہمیں وقت (t) کے بعد حتمی ولاسٹی (v_f) بتاتی ہے جب کوئی جسم ابتدائی ولاسٹی (v_i) سے شروع ہوتی اور اسراع (a) سے حرکت کرتا ہے۔

$$\text{حرکت کی دوسری مساوات: } s = \underline{v}_i t + \frac{1}{2} \underline{a}t^2$$

یہ ہمیں وقت (t) میں جسم کا طے کردہ فاصلہ (s) بتاتی ہے۔

$$\text{حرکت کی تیسری مساوات: } \underline{v}_f^2 = \underline{v}_i^2 + 2\underline{a}s$$

یہ ابتدائی اور حتمی ولاسٹی، اسراع اور ہٹاؤ کے درمیان تعلق بتاتی ہے۔

مثال 12: ایک پروجیکٹائل کو ابتدائی ولاسٹی ویکٹر $12\underline{i} + 16\underline{j}$ کے ساتھ زمین سے فائر کیا گیا ہے۔ یہ افقی طور پر 24 میٹر دور ہدف سے کتنی دیر بعد گرائے گا؟

$$\text{حل: } \underline{v}_i = 12\underline{i} + 16\underline{j}$$

$$v_x = 12 \text{ افقی ولاسٹی}$$

$$v_y = 16 \text{ عمودی ولاسٹی}$$

چونکہ افقی ولاسٹی مستقل ہے، اس لیے

$$x = v_x t$$

$$t = \frac{x}{v_x} = \frac{24}{12} = 2s$$

نوٹ:

$$x = v_x t \text{ افقی حرکت کی مساوات}$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2}gt^2 \text{ عمودی حرکت کی مساوات}$$

مثال 13: ایک ٹینک مشرق کی سمت $v_1 = 30\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$ کی ولاشی سے حرکت کرتے ہوئے ایک ہدف $v_2 = 10\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ کی ولاشی سے گولہ قاذو کرتا ہے۔ نسبتی ولاشی اور اس کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔
حل: ہدف کی ولاشی - گولے کی ولاشی = نسبتی ولاشی

$$\mathbf{v}_{rel} = (30 - 10)\mathbf{i} + (40 - 0)\mathbf{j} \\ = 20\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}_{rel}| = \sqrt{20^2 + 40^2} = \sqrt{400 + 1600}$$

$$|\mathbf{v}_{rel}| = \sqrt{2000} = 44.72 \text{ m/s}$$

نوٹ: نسبتی ولاشی کسی چیز کی وہ ولاشی ہوتی ہے جو دوسری حرکت پذیر چیزوں کے مشاہدے سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ ہمیں بتاتی ہے کہ ایک چیز دوسری کے لحاظ سے کتنی تیزی سے اور کسی سمت میں حرکت کر رہی ہے۔

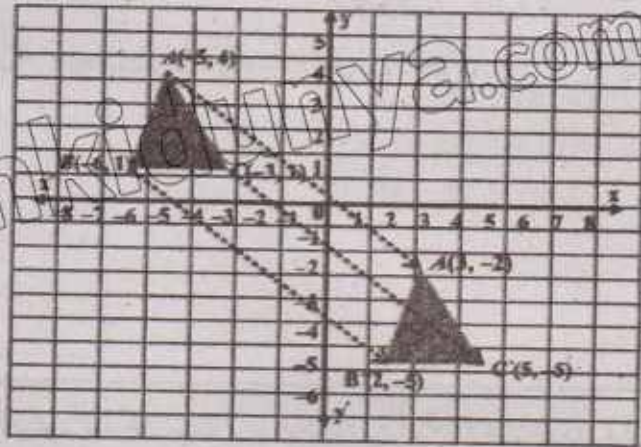
حل مشق 6.3

1- نقاط $A(-5, 4)$ ، $B(-6, 1)$ اور $C(-3, 1)$ کو مربع ABC بنائیے۔ کوارٹسلیٹن ویکٹرز $8\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ کے ذریعے $\Delta A'B'C'$ میں بھی منتقل کیجیے۔

$$\text{نیا اس } A' = (-5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (8\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) \\ = (-5 + 8)\mathbf{i} + (4 - 6)\mathbf{j} \\ = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = (3, -2)$$

$$\text{نیا اس } B' = (-6\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (8\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) \\ = (-6 + 8)\mathbf{i} + (1 - 6)\mathbf{j} \\ = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} = (2, -5)$$

$$\text{نیا اس } C' = (-3\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (8\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) \\ = (-3 + 8)\mathbf{i} + (1 - 6)\mathbf{j} \\ = 5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} = (5, -5)$$



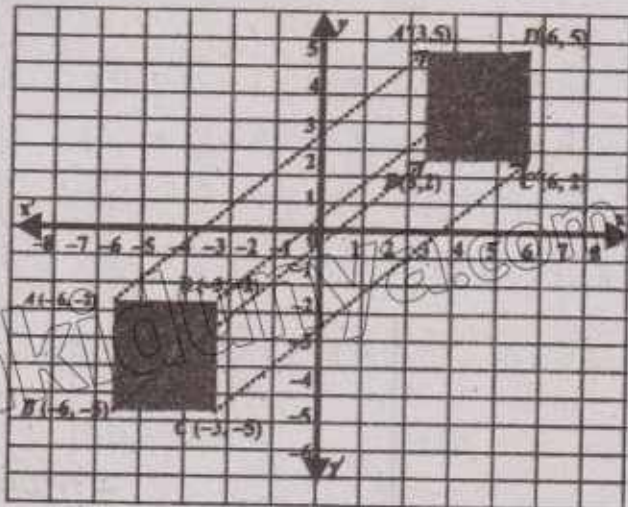
2- نقاط $A(-6, -2)$ ، $B(-6, -5)$ ، $C(-3, -5)$ اور $D(-3, -2)$ کو مربع $ABCD$ بنائیے۔ مربع $A'B'C'D'$ کے ویکٹرز $9\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ میں بھی منتقل کیجیے۔

$$\text{نیا اس } A' = (-6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + (9\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) \\ = (-6 + 9)\mathbf{i} + (-2 + 7)\mathbf{j} \\ = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} = (3, 5)$$

$$\text{نیا اس } B' = (-6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) + (9\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) \\ = (-6 + 9)\mathbf{i} + (-5 + 7)\mathbf{j} \\ = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = (3, 2)$$

$$\text{نیا اس } C' = (-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) + (9\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) \\ = (-3 + 9)\mathbf{i} + (-5 + 7)\mathbf{j} \\ = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = (6, 2)$$

$$\text{نیا اس } D' = (-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + (9\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) \\ = (-3 + 9)\mathbf{i} + (-2 + 7)\mathbf{j} \\ = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} = (6, 5)$$



3- نقطہ A(-6, 3)، B(-4, 0)، C(-2, 3) اور D(-4, 4) کو مرتب کر کے چنگ ABCD بنائیے۔ چنگ ABCD کو ٹرانسلیشن ویکٹر $6\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ کے ذریعے چنگ A'B'C'D' میں بھی منتقل کیجیے۔

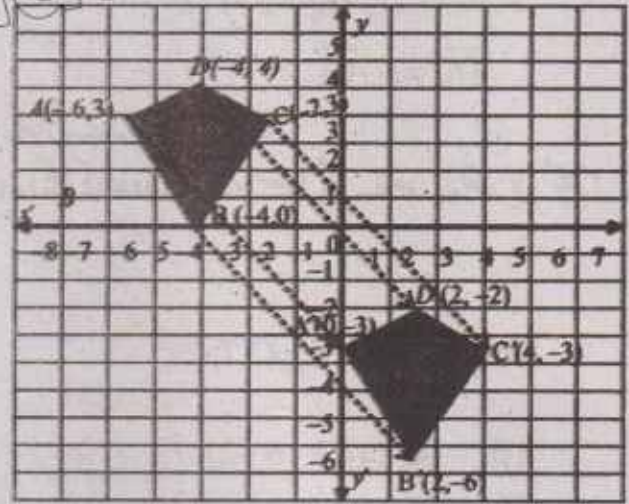
حل:

$$\begin{aligned} \text{نیا راس } A' &= (-6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + (6\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) \\ &= (-6 + 6)\mathbf{i} + (3 - 6)\mathbf{j} \\ &= 0\mathbf{i} - 3\mathbf{j} = (0, -3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{نیا راس } B' &= (-4\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) + (6\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) \\ &= (-4 + 6)\mathbf{i} + (0 - 6)\mathbf{j} \\ &= 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} = (2, -6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{نیا راس } C' &= (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + (6\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) \\ &= (-2 + 6)\mathbf{i} + (3 - 6)\mathbf{j} \\ &= 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} = (4, -3) \end{aligned}$$

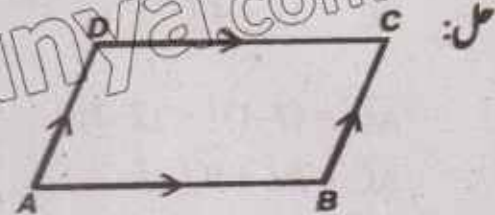
$$\begin{aligned} \text{نیا راس } D' &= (-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (6\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) \\ &= (-4 + 6)\mathbf{i} + (4 - 6)\mathbf{j} \\ &= 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = (2, -2) \end{aligned}$$



4- A، B اور D کے محددات بالترتیب (1, 2)، (6, 3) اور (2, 8) ہیں۔ اگر ABCD ایک متوازی الاضلاع ہو تو ویکٹر کے طریقہ سے C کے محددات معلوم کیجیے۔

دیئے گئے نقاط ہیں A(1, 2)، B(6, 3)، D(2, 8)

فرض کیا کہ C(x, y) متوازی الاضلاع ABCD کا چوتھا راس ہے۔



$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

$$(6-1)\mathbf{i} + (3-2)\mathbf{j} = (x-2)\mathbf{i} + (y-8)\mathbf{j}$$

$$5\mathbf{i} + \mathbf{j} = (x-2)\mathbf{i} + (y-8)\mathbf{j}$$

دونوں اطراف میں $\mathbf{i}$ اور $\mathbf{j}$ کے عددی سرول کا موازنہ کرنے سے

$$x-2=5, \quad y-8=1$$

$$x=5+2, \quad y=1+8$$

$$\boxed{x=7}, \quad \boxed{y=9}$$

C کے مطلوبہ محددات (7, 9) ہیں۔

5- متوازی الاضلاع ABCD میں، دو مخالف اضلاع ویکٹر $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ اور $\overline{DC} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ کو ظاہر کرتے ہیں۔ ویکٹر کا طریقہ سے ثابت کیجیے کہ مخالف اضلاع مقدار میں برابر اور متوازی ہیں۔

$$|\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2}, \quad |\overline{DC}| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{36+4}, \quad = \sqrt{36+4}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{40}, \quad |\overline{DC}| = \sqrt{40}$$

$$|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$$

جو یکساں ہے مخالف سمتیں عددی قیمت میں برابر ہیں۔

$$\overrightarrow{DC} = -6\hat{i} - 2\hat{j}$$

$$= -(6\hat{i} + 2\hat{j})$$

$$\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB}$$

جودیکھاتی ہے کہ $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{DC}$ ایک دوسرے کی سکالر ضرب ہیں جو دیکھاتی ہے کہ یہ متوازی ہیں۔

نقاط $A(1, 2)$ ، $B(4, 6)$ اور $C(7, 2)$ ایک مثلث بناتے ہیں۔ ویکٹر کی عددی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے تصدیق کیجیے کہ مثلث ABC ایک متساوی الساقین ہے۔

حل: دیے گئے نقاط ہیں

$$A(1, 2), B(4, 6), C(7, 2)$$

اب

$$\overrightarrow{AB} = (4-1)\hat{i} + (6-2)\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

اور

$$\overrightarrow{BC} = (7-4)\hat{i} + (2-6)\hat{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$

جبکہ

$$\overrightarrow{AC} = (7-1)\hat{i} + (2-2)\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AC} = 6\hat{i} + 0\hat{j}$$

اب ہم عددی قیمت معلوم کریں گے

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$$

چونکہ

لہذا نقاط A ، B اور C متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں۔

7. ویکٹر کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ $PQRS$ ایک متوازی الاضلاع ہے، جہاں نقاط P ، Q ، R اور S کے محددات بالترتیب $(1, 2)$ ، $(5, 2)$ ، $(7, 6)$ اور $(3, 6)$ ہیں۔

حل: دیے گئے نقاط ہیں

$$P(1, 2), Q(5, 2), R(7, 6), S(3, 6)$$

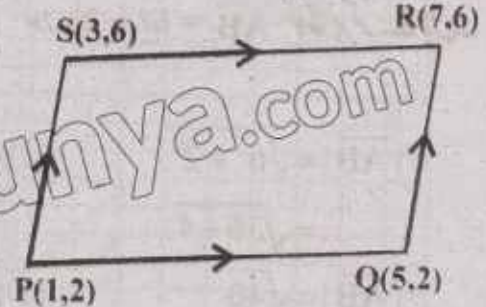
$$\overrightarrow{PQ} = (5-1)\hat{i} + (2-2)\hat{j} = 4\hat{i} + 0\hat{j}$$

$$\overrightarrow{SR} = (7-3)\hat{i} + (6-6)\hat{j} = 4\hat{i} + 0\hat{j}$$

$$\overrightarrow{PS} = (3-1)\hat{i} + (6-2)\hat{j} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\overrightarrow{QR} = (7-5)\hat{i} + (6-2)\hat{j} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{SR} \text{ اور } \overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{QR}$$



جو ظاہر کرتا ہے کہ دیے گئے نقاط متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

8- ویکٹر کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ مثلث XYZ ایک متساوی الساقین ہے، جہاں نقاط X، Y اور Z کے محداثیات

بالترتیب (0, 0)، (2, 0) اور (1, 3) ہیں۔

حل: دیے گئے نقاط ہیں

$$X(0,0), Y(2,0), Z(1,3)$$

$$\overrightarrow{XY} = (2-0)\underline{i} + (0-0)\underline{j} \quad \text{اب}$$

$$\overrightarrow{XY} = 2\underline{i} + 0\underline{j}$$

$$|\overrightarrow{XY}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4+0} = \sqrt{4}$$

$$|\overrightarrow{XY}| = 2$$

اور

$$\overrightarrow{YZ} = (1-2)\underline{i} + (3-0)\underline{j}$$

$$\overrightarrow{YZ} = -\underline{i} + 3\underline{j}$$

$$|\overrightarrow{YZ}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

جبکہ

$$|\overrightarrow{XZ}| = (1-0)\underline{i} + (3-0)\underline{j}$$

$$\overrightarrow{XZ} = \underline{i} + 3\underline{j}$$

$$|\overrightarrow{XZ}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\therefore |\overrightarrow{XZ}| = |\overrightarrow{YZ}|$$

پس XYZ ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔

9- ایک گیند کو ابتدائی ولاشی ویکٹر $\underline{v}_0 = 10\underline{i} + 20\underline{j}$ کے ساتھ پھینکا جاتا ہے افقی جزو -x سمت میں ہے اور افقی اسراع $\underline{g} = 0\underline{i} - 10\underline{j}$ ہے۔ سب سے زیادہ بلندی اور افقی حد معلوم کیجیے۔

حل:

$$\text{ابتدائی ولاشی} = \underline{v}_0 = 10\underline{i} + 20\underline{j}$$

$$\underline{v}_x = 10, \underline{v}_y = 20$$

اور

$$\underline{g} = 0\underline{i} - 10\underline{j}$$

$$\underline{g} = -10\underline{j}$$

$$(H) = \frac{v_y^2}{2g}$$

$$= \frac{(20)^2}{2(10)} = \frac{400}{20}$$

$$= 20 \text{ m}$$

(R) افقی حد

$$= \underline{v}_x \times T$$

$$= 10 \times \frac{2v_y}{g} \quad \therefore T = \frac{2v_y}{g}$$

$$= 10 \times \frac{2(20)}{10}$$

$$= 40 \text{ m}$$

10- ایک کار ولاشی ویکٹر $\underline{v} = 30\underline{i}$ کے ساتھ ایک لوپ میں داخل ہوتی ہے اور ولاشی $\underline{v}' = 30\underline{i}$ کے ساتھ باہر نکلتی ہے۔ بتائیے

حل:

$$\text{ابتدائی ولاشی} \quad \underline{v} = 30\underline{i}$$

$$\text{آخری ولاشی} \quad (\underline{v}') = 30\underline{i}$$

$$\Delta \underline{v} = \underline{v}' - \underline{v} = 30\underline{i} - 30\underline{i}$$

11- ایک ہوائی جہاز کی ہوائی رفتار $v_p = 20i$ اور کراس وینڈ $v_w = 50j$ ہے۔ ہوائی جہاز کی مجموعی ولاش اور اس کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

$$= (v_p) = 20i$$

$$(v_w) = 50j$$

$$v = 20i + 50j$$

$$= |v| = \sqrt{(20)^2 + (50)^2}$$

$$= \sqrt{400 + 2500}$$

$$= \sqrt{2900}$$

$$= 10\sqrt{29}$$

$$= 53.85 \text{ اکائیاں}$$

حل اعادہ مشق 6

درج ذیل سوالات کے دیے گئے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

- (i) محور x اور y محور مدداتی مستوی کو _____ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔
 (a) ایک (b) دو (c) تین (d) چار
- (ii) نقطہ $P(4, -4)$ ربع میں واقع ہے۔
 (a) پہلا (b) دوسرا (c) تیسرا (d) چوتھا
- (iii) ایک ویکٹر جس کی عددی قیمت 1 ہو، کہلاتا ہے:
 (a) مساوی ویکٹر (b) متوازی ویکٹر (c) یونٹ ویکٹر (d) صفرو ویکٹر
- (iv) $|3i + 4j|$ کی قیمت کیا ہے؟
 (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 7
- (v) اگر $a = \lambda b$ اور $a = \mu b$ ہیں:
 (a) مساوی (b) متوازی (c) عمودی (d) غیر متوازی
- (vi) اگر $\overline{OA} = a$ اور $\overline{OB} = b$ ہے:
 (a) $\frac{b-a}{a-b}$ (b) $\frac{a-b}{a+b}$ (c) $\frac{a+b}{a-b}$ (d) $\frac{b+a}{a-b}$
- (vii) ٹرانسلیشن ویکٹر ظاہر کرتا ہے:
 (a) ہٹاؤ (b) گردش (c) حرکت (d) بڑا کرنا
- (viii) دو ویکٹر کا حاصل جمع $a+b$ ہے:
 (a) ایک ہٹاؤ (b) ایک ویکٹر (c) ایک سکیلر (d) ایک لمبائی
- (ix) نقطہ $P(3, -2)$ کے لحاظ سے پوزیشن ویکٹر ہے:
 (a) $3i + 2j$ (b) $3i - 2j$ (c) $-3i - 2j$ (d) $2i - 3j$
- (x) نقطہ $P(3, 4)$ سے مبداء تک ویکٹر ہے:
 (a) $3i + 4j$ (b) $-3i + 4j$ (c) $-3i - 4j$ (d) $3i - 4j$

-v متوازی

-iv 5

-iii پونٹ ویکٹر

-ii چوتھا

-i چار

-x $-3i-4j$ -ix $3i-2j$

-viii ایک ویکٹر

-vii حرکت

-vi $\frac{b-a}{h}$ -2 $\overline{AB}$ کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔(i) $A(7,7), B(-12,0)$ (ii) $A(9,3), B(2,11)$

حل: دیے گئے نقاط

حل: دیے گئے نقاط

 $A(7,7), B(-12,0)$

$$\overline{AB} = (-12-7)\underline{i} + (0-7)\underline{j}$$

$$\overline{AB} = -19\underline{i} - 7\underline{j}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-19)^2 + (-7)^2} = \sqrt{361+49}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{410}$$

 $A(9,3), B(2,11)$

$$\overline{AB} = (2-9)\underline{i} + (11-3)\underline{j}$$

$$\overline{AB} = -7\underline{i} + 8\underline{j}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-7)^2 + (8)^2} = \sqrt{49+64}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{113}$$

-3 $\underline{a} = \frac{5}{3}\underline{i} + \frac{1}{3}\underline{j}$ کی سمت میں پونٹ ویکٹر معلوم کیجیے۔

$$\underline{a} = \frac{5}{3}\underline{i} + \frac{1}{3}\underline{j}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{25+1}{9}} = \frac{\sqrt{26}}{3}$$

$$|\underline{a}| = \frac{\sqrt{26}}{3}$$

$$\underline{a} = \frac{5}{3}\underline{i} + \frac{1}{3}\underline{j}$$
$$|\underline{a}| = \frac{\sqrt{26}}{3}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{26}} \times \frac{5}{3}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{26}} \times \frac{1}{3}\underline{j}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{26}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{26}}\underline{j} \text{ جواب}$$

-4 اگر $\underline{a} = 2\underline{i} - \underline{j}$, $\underline{b} = 3\underline{i} + \underline{j}$ اور $\underline{c} = 4\underline{i} + \underline{j}$ ہوں تو درج ذیل ویکٹر معلوم کیجیے۔(i) $5\underline{b} - \underline{a} + \underline{c}$

$$= 5(3\underline{i} + \underline{j}) - (2\underline{i} - \underline{j}) + (4\underline{i} + \underline{j})$$
$$= 15\underline{i} - 2\underline{i} + 4\underline{i} + 5\underline{j} + \underline{j} + \underline{j}$$
$$= (15-2+4)\underline{i} + (5+1+1)\underline{j}$$
$$= 17\underline{i} + 7\underline{j} \text{ جواب}$$

(ii) $8\underline{a} + \underline{b} + 5\underline{c}$

$$= 8(2\underline{i} - \underline{j}) + (3\underline{i} + \underline{j}) + 5(4\underline{i} + \underline{j})$$
$$= 16\underline{i} + 3\underline{i} + 20\underline{i} - 8\underline{j} + \underline{j} + 5\underline{j}$$
$$= (16+3+20)\underline{i} - (8-1-5)\underline{j}$$
$$= 39\underline{i} - 2\underline{j} \text{ جواب}$$

(iii) $\underline{c} + \underline{b} - 4\underline{a}$

$$= 4\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{i} + \underline{j} - 4(2\underline{i} - \underline{j})$$
$$= 4\underline{i} + 3\underline{i} - 8\underline{i} + \underline{j} + \underline{j} + 4\underline{j}$$
$$= (4+3-8)\underline{i} + (1+1+4)\underline{j}$$
$$= -\underline{i} + 6\underline{j} \text{ جواب}$$

5- درج ذیل مساوات میں x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

$$(2x\underline{i} + y\underline{j}) + (-\underline{i} + 5\underline{j}) = \frac{1}{4}\underline{i} - 8\underline{j}$$

$$(2x\underline{i} + y\underline{j}) + (-\underline{i} + 5\underline{j}) = \frac{1}{4}\underline{i} - 8\underline{j}$$

$$(2x-1)\underline{i} + (y+5)\underline{j} = \frac{1}{4}\underline{i} - 8\underline{j}$$

دونوں اطراف $\underline{i}$ اور $\underline{j}$ کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

$$2x-1 = \frac{1}{4}, \quad y+5 = -8 \quad \text{حل:}$$

$$2x = \frac{1}{4} + 1, \quad y = -8 - 5$$

$$2x = \frac{1+4}{4}, \quad \boxed{y = -13}$$

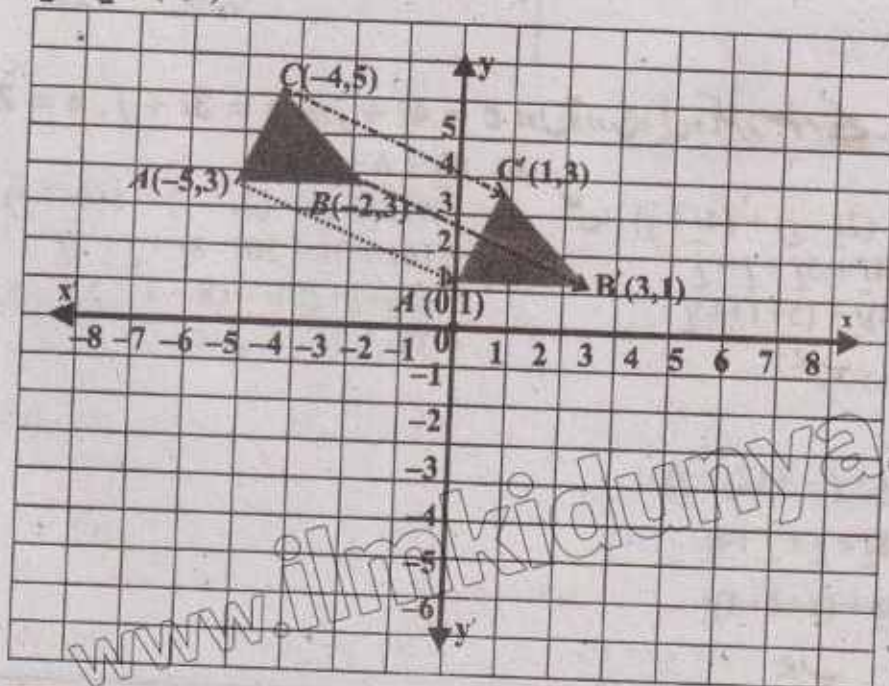
$$x = \frac{5}{2 \times 4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{8}}$$

6- نقاط $A(-5, 3)$ ، $B(-2, 3)$ اور $C(-4, 5)$ کو مترسم کر کے مثلث بنائیے۔ ΔABC کو ٹرانسلیشن ویکٹر $5\underline{i} - 2\underline{j}$ کے ذریعے $\Delta A'B'C'$ میں بھی منتقل کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{نیا راس } A' &= (-5\underline{i} + 3\underline{j}) + (5\underline{i} - 2\underline{j}) \\ &= (-5+5)\underline{i} + (3-2)\underline{j} = 0\underline{i} + \underline{j} = (0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{نیا راس } B' &= (-2\underline{i} + 3\underline{j}) + (5\underline{i} - 2\underline{j}) \\ &= (-2+5)\underline{i} + (3-2)\underline{j} \\ &= 3\underline{i} + \underline{j} = (3, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{نیا راس } C' &= (-4\underline{i} + 5\underline{j}) + (5\underline{i} - 2\underline{j}) \\ &= (-4+5)\underline{i} + (5-2)\underline{j} \\ &= \underline{i} + 3\underline{j} = (1, 3) \end{aligned}$$



7- ویکٹر کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جہاں نقاط $C(7,6)$ ، $B(6,3)$ ، $A(2,3)$ اور $D(3,6)$ ہیں۔

$$A(2,3), B(6,3), C(7,6), D(3,6)$$

$$\overrightarrow{AB} = (6-2)\underline{i} + (3-3)\underline{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 4\underline{i} + 0\underline{j}$$

$$\overrightarrow{DC} = (7-3)\underline{i} + (6-6)\underline{j}$$

$$\overrightarrow{DC} = 4\underline{i} + 0\underline{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$$

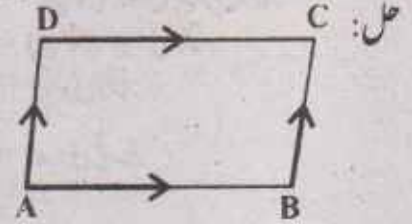
اور

$$\overrightarrow{AD} = (3-2)\underline{i} + (6-3)\underline{j}$$

$$\overrightarrow{AD} = \underline{i} + 3\underline{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = (7-6)\underline{i} + (6-3)\underline{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = \underline{i} + 3\underline{j} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$$



جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ دیے گئے نقاط متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

8- ویکٹر کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ مثلث ABC ایک متساوی الساقین مثلث ہے، جہاں نقاط A، B اور C کے

مختصات بالترتیب $(1,2)$ ، $(4,6)$ اور $(7,2)$ ہیں۔

$$A(1,2), B(4,6), C(7,2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-1)\underline{i} + (6-2)\underline{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$$

اور

$$\overrightarrow{BC} = (7-4)\underline{i} + (2-6)\underline{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = 3\underline{i} - 4\underline{j}$$

جب کہ

$$\overrightarrow{AC} = (7-1)\underline{i} + (2-2)\underline{j}$$

$$\overrightarrow{AC} = 6\underline{i} + 0\underline{j}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

اب

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$$

جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ دیے گئے نقاط متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں۔

9- ایک گیند کو ولاش ویکٹر $\underline{v} = 6\underline{i} + 8\underline{j}$ کے ساتھ پھینکا جاتا ہے۔ ولاش کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

$$|\underline{v}| = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100}$$

$$|\underline{v}| = 10$$

10- ایک ہوائی جہاز مشرق کی سمت 200 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے اڑ رہا ہے۔ وہاں شمال کی سمت میں 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے ہوا چل رہی ہے۔ مجموعی ولاشی اور اس کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: ہوائی جہاز کی رفتار $(V_a) = 200i$ (مشرق)

ہوا کی رفتار $(V_w) = 60j$ (شمال)

مجموعی رفتار $= 200i + 60j$

عددی قیمت $= |V| = \sqrt{(200)^2 + (60)^2} = \sqrt{40000 + 3600}$

$= \sqrt{43600} = 20\sqrt{109} \text{ km/h}$

کلومیٹر فی گھنٹہ $= 208.8$

معروضی طرز سوالات

اضافی کثیر الانتخابی سوالات

مکمل کیے گئے سوالات (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں منتخب کیے گئے کثیر الانتخابی سوالات

6.1 مندرجہ ذیل محدوداتی مستوی

درست جواب کا انتخاب کریں۔

- 1- محور x اور y - محور ایک نقطہ پر ملے ہیں جو کہلاتا ہے:
 - (a) ایسیما
 - (b) آرڈینیٹ
 - (c) مبدا
 - (d) راس
- 2- نقطہ $P(-2, 1)$ ربع میں واقع ہے:
 - (a) پہلا ربع
 - (b) دوسرا ربع
 - (c) تیسرا ربع
 - (d) چوتھا ربع
- 3- تیسرے ربع میں واقع نقطہ ہے:
 - (a) $(-2, 1)$
 - (b) $(-4, -1)$
 - (c) $(2, 1)$
 - (d) $(3, -1)$
- 4- محور x اور y - محور کا نقطہ قاطع ہے:
 - (a) $(0, 0)$
 - (b) $(0, 1)$
 - (c) $(1, 0)$
 - (d) $(1, 1)$

6.2 سکیلرز اور ویکٹرز

- 5- ایک مقدار جس کی صرف عددی قیمت ہوتی ہے کہلاتی ہے:
 - (a) سکیلر
 - (b) ویکٹر
 - (c) غیر طبیعی
 - (d) کوئی نہیں
- 6- سکیلر مقدار کی ایک مثال ہے:
 - (a) ماس
 - (b) فورس
 - (c) پوزیشن
 - (d) ولاشی
- 7- ایک مقدار جس کی عددی قیمت اور سمت دونوں ہوتی ہیں کہلاتی ہے:
 - (a) سکیلر
 - (b) ویکٹر
 - (c) غیر طبیعی
 - (d) کوئی نہیں

- 8 ویکٹر $\vec{a}$ کی ایک مثال ہے: (a) $\vec{a}$ (b) $\vec{b}$ (c) وقت (d) حجم

6.2.1 ویکٹر کا سمتی قطار خط کے طور پر اظہار

- 9 ایک ویکٹر جو دیے گئے ویکٹر کی مخالف سمت میں ہو لیکن عددی قیمت میں برابر ہو، کہلاتا ہے: (a) اکائی ویکٹر (b) صفر ویکٹر (c) منفی ویکٹر (d) پوزیشن ویکٹر
- 10 ایک ویکٹر جس کی عددی قیمت صفر ہو کہلاتا ہے: (a) اکائی ویکٹر (b) صفر ویکٹر (c) منفی ویکٹر (d) پوزیشن ویکٹر
- 11 دو ویکٹر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ جن کی لمبائی اور سمت ایک جیسی ہو، کہلاتے ہیں: (a) متوازی ویکٹرز (b) مساوی ویکٹرز (c) ایک جیسے ویکٹرز (d) متوازی ویکٹرز
- 12 ایک ویکٹر جس کا ابتدائی نقطہ مبدأ $O(0,0)$ ہو، کہلاتا ہے: (a) صفر ویکٹر (b) پونٹ ویکٹر (c) پوزیشن ویکٹر (d) کوئی نہیں
- 13 نقطہ $(-1, 4)$ کا $O(0,0)$ کے لحاظ سے پوزیشن ویکٹر ہے: (a) $\vec{i} + 4\vec{j}$ (b) $\vec{i} - 4\vec{j}$ (c) $\vec{i} - 4\vec{j}$ (d) $\vec{i} + 4\vec{j}$
- 14 ویکٹر $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ کی عددی قیمت ہے: (a) $\sqrt{x^2 + y^2}$ (b) $\sqrt{x^2 - y^2}$ (c) $x^2 - y^2$ (d) $x^2 + y^2$
- 15 ایک ویکٹر کی عددی قیمت کو اس کا بھی کہا جاتا ہے: (a) نورم (b) لمبائی (c) A اور B دونوں (d) کوئی نہیں
- 16 اگر $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ ہو تو $|\vec{b}|$ ہوگا: (a) $\sqrt{-25}$ (b) $\sqrt{-7}$ (c) $\sqrt{7}$ (d) 5
- 17 اکائی ویکٹر کی عددی قیمت ہوتی ہے: (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4
- 18 صفر ویکٹر کی عددی قیمت ہوتی ہے: (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

6.2.5 ویکٹر کی سکالر ضرب

- 19 اگر $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ہو تو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ایک ہی سمت میں ہوں گے اگر: (a) $\lambda < 0$ (b) $\lambda > 0$ (c) $\lambda < 1$ (d) $\lambda < 0$
- 20 اگر $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ہو تو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ مخالف سمت میں ہوں گے اگر: (a) $\lambda < 0$ (b) $\lambda > 0$ (c) $\lambda = 1$ (d) $\lambda = 0$

6.2.6 پونٹ ویکٹر

- 21 ایک ویکٹر کی "1" ہو، کہلاتا ہے: (a) پونٹ ویکٹر (b) پوزیشن ویکٹر (c) منفی ویکٹر

22- اگر $\underline{a}$ ایک غیر صفری ویکٹر ہو تو اس کے پونٹ ویکٹر کو ظاہر کیا جاسکتا ہے:

(d) $\underline{a}$

(c) $|\underline{a}|$

(b) $|\underline{a}|$

(a) $\underline{a}$

23- اگر $\underline{a}$ ایک غیر صفری ویکٹر ہو تو اس کے پونٹ ویکٹر کی تعریف کی جاتی ہے:

(d) $\hat{\underline{a}} = \frac{|\underline{a}|}{\underline{a}}$

(c) $\hat{\underline{a}} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$

(b) $\hat{\underline{a}}$

(a) $\underline{a} \lambda$

24- اگر $\underline{a}$ ایک اکائی ویکٹر ہو تو $|\underline{a}|$ ہوگا:

(d) 4

(c) 3

(b) 2

(a) 1

ویکٹرز کی جمع

6.3

25- اگر دو ویکٹرز $\underline{u}$ اور $\underline{v}$ ایک مثلث کے دو ملحقہ اضلاع کو ظاہر کریں تو تیسرا ضلع ہوگا:

(d) $|\underline{u} + \underline{v}|$

(c) $\underline{u} + \underline{v}$

(b) $\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$

(a) $\underline{u} - \underline{v}$

26- اگر $\underline{a} = -\underline{i} + \underline{j}$ اور $\underline{b} = 2\underline{i} + 2\underline{j}$ تو $\underline{a} + \underline{b}$ برابر ہوگا:

(d) $-3\underline{i} + 3\underline{j}$

(c) $3\underline{i} + 3\underline{j}$

(b) $\underline{i} + 3\underline{j}$

(a) $\underline{i} + 3\underline{j}$

27- دو ویکٹرز $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ جمع ہو سکتے ہیں:

(b) ہیڈ ٹو ٹیل رول سے

(d) یہ تمام

(a) مثلثی قانون سے

(c) جمع کے متوازی الاضلاع قانون سے

28- اگر دو ویکٹرز $\underline{a}$ اور $-\underline{a}$ جمع کیے جائیں تو نتیجہ ہوگا:

(d) منفی ویکٹر

(c) پوزیشن ویکٹر

(b) پونٹ ویکٹر

(a) صفری ویکٹر

دو ویکٹرز کا فرق

6.4

29- دو ویکٹرز کا فرق ایک ویکٹر ہوتا ہے:

(d) عددی قیمت

(c) مستقل مقدار

(b) ویکٹر

(a) سکیلر

30- اگر دو ویکٹرز جن کے $\underline{x}$ اور $\underline{y}$ اجزاء برابر ہوں اور ان کو آپس میں تفریق کیا جاتے تو نتیجہ ہوگا:

(d) پوزیشن ویکٹر

(c) صفری ویکٹر

(b) پونٹ ویکٹر

(a) سکیلر

ویکٹرز دو غیر صفری اور غیر متوازی ہم مستوی ویکٹرز کی شکل میں

6.5

31- دو یا زیادہ ویکٹرز جو ایک ہی مستوی میں ہوں کہلاتے ہیں:

(d) ویکٹرز

(c) مترادف ویکٹرز

(b) ہم مستوی ویکٹرز

(a) مساوی ویکٹرز

32- ایک ویکٹر کی ٹرانسلیشن کا نتیجہ ہوتا ہے:

(d) پونٹ ویکٹر

(c) صفری ویکٹر

(b) سکیلر

(a) ویکٹر

33- ایک نقطہ $A(-4, 2)$ کی ٹرانسلیشن ویکٹرز $2\underline{i} + 7\underline{j}$ سے بننے والا نیا نقطہ ہے:

(d) $(7, 2)$

(c) $(-4, 2)$

(b) $(3, 4)$

(a) $(3, 4)$

34- ویکٹر کی شکل میں حرکت کی پہلی مساوات ہے:

(d) $\underline{V}_f^2 - \underline{V}_i^2 = 2\underline{a}S$

(c) $\underline{V}_f = \underline{V}_i + \underline{a}t^2$

(b) $\underline{a}t = \underline{V}_f + \underline{V}_i$

(a) $\underline{V}_f - \underline{V}_i = \underline{a}t$

$$y = \underline{V}_x t \quad (d)$$

$$y = \underline{V}_y t \quad (c)$$

$$x = \underline{V}_x t \quad (b)$$

$$x = \underline{V}_x t \quad (a)$$

عمودی حرکت کی مساوات ہے:

$$y = \underline{V}_x t \quad (d)$$

$$y = \underline{V}_x t \quad (c)$$

$$y = \underline{V}_y t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (b)$$

$$x = \underline{V}_x t \quad (a)$$

اجوابات

- | | | | | |
|-------------------------------------|---|---|------------------|-------------------------|
| 5- سکالر | 4- (0,0) | 3- (-4,-1) | 2- دوسرا ربع | 1- مبدا |
| 10- صفرو ویکٹر | 9- منفی ویکٹر | 8- ولاشی | 7- ویکٹر | 6- ماس |
| 15- A اور B دونوں | 14- $\sqrt{x^2 + y^2}$ | 13- $-i + 4j$ | 12- پوزیشن ویکٹر | 11- مساوی ویکٹرز |
| 20- $\lambda < 0$ | 19- $\lambda > 0$ | 18- 0 | 17- 1 | 16- 5 |
| 25- $\underline{u} + \underline{v}$ | 24- 1 | 23- $\hat{a} = \frac{\underline{a}}{ \underline{a} }$ | 22- $\hat{a}$ | 21- یونٹ ویکٹر |
| 30- صفرو ویکٹر | 29- ویکٹر | 28- صفرو ویکٹر | 27- یہ تمام | 26- $i + 3j$ |
| 35- $x = \underline{V}_x t$ | 34- $\underline{V}_f = \underline{V}_i + \underline{a} t$ | 33- (3, 4) | 32- ویکٹر | 31- ہر مستوی ویکٹرز |
| | | | | 36- $\underline{V}_x t$ |

اضافی مختصر سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے مختصر جوابی سوالات

مستطیلی محدوداتی مستوی

6.1

مختصر جواب دیں۔

- ان ربع کے نام بتائیے جن میں ہر نقطہ واقع ہے۔
(i) (-4, 2) (ii) (-3, -6) (iii) (5, -3) (iv) (1, 2)
حل: (i) دوسرا ربع (ii) تیسرا ربع (iii) چوتھا ربع (iv) پہلا ربع
- ویکٹر PQ کو $x\hat{i} + y\hat{j}$ کی شکل میں لکھیے۔ اگر P(-3, -6) اور Q(1, 2)۔
حل: $\underline{PQ} = (1 - (-3))\hat{i} + (2 - (-6))\hat{j}$
 $\underline{PQ} = 4\hat{i} + 8\hat{j}$
- اگر $|\underline{u}| = \frac{1}{4}$ اور $|\underline{v}| = \frac{15}{4}$ معلوم کیجیے۔
حل: $|\underline{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2}$
 $= \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{225}{16}} = \sqrt{\frac{226}{16}} = \frac{\sqrt{226}}{4} \Rightarrow |\underline{u}| = \frac{\sqrt{226}}{4}$

4- ویکٹر $\underline{v} = -3\hat{i} + 4\hat{j}$ کی سمت میں اکائی ویکٹر معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned}\underline{v} &= -3\hat{i} + 4\hat{j} \\ |\underline{v}| &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= \sqrt{25}\end{aligned}$$

$$|\underline{v}| = 5$$

$$\hat{v} = \frac{|\underline{v}|}{\underline{v}} = \frac{-3\hat{i} + 4\hat{j}}{5}$$

$$\hat{v} = -\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{3\hat{i} + 4\hat{j}}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} \\ &= \frac{-3\hat{i} + 4\hat{j}}{\sqrt{9+16}} \\ &= \frac{-3\hat{i} + 4\hat{j}}{\sqrt{25}} = \frac{-3\hat{i} + 4\hat{j}}{5}\end{aligned}$$

$$\hat{v} = -\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$$

5- معلوم کریں کہ ویکٹر $\underline{u} = 8\hat{i} + 4\hat{j}$ اور $\underline{v} = 2\hat{i} + \hat{j}$ متوازی ہیں یا نہیں۔

$$\begin{aligned}\underline{u} &= 8\hat{i} + 4\hat{j} \\ &= 4(2\hat{i} + \hat{j})\end{aligned}$$

$$\underline{u} = 4\underline{v}$$

4- λ جو دیکھا ہے کہ $\underline{u}$ متوازی ہے $\underline{v}$ کے۔ اگر $\underline{u} = -5\underline{v}$ جبکہ $\underline{u} = 10\hat{i} - \lambda\hat{j}$ اور $\underline{v} = 2\hat{i} + 7\hat{j}$ تو λ کی قیمت معلوم کریں۔

$$\begin{aligned}\underline{u} &= -5\underline{v} \\ 10\hat{i} - \lambda\hat{j} &= -5(-2\hat{i} + 7\hat{j}) \\ 10\hat{i} - \lambda\hat{j} &= 10\hat{i} - 35\hat{j} \\ \therefore \underline{u} &= 10\hat{i} - \lambda\hat{j} \\ \underline{v} &= -2\hat{i} + 7\hat{j}\end{aligned}$$

λ کے عددی سر کا موازنہ

$$-\lambda = -35 \Rightarrow \boxed{\lambda = 35}$$

7- ویکٹر $\underline{u} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ کی مخالف سمت میں اکائی ویکٹر معلوم کریں۔

$$|\underline{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4}$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{13}$$

$$\therefore \underline{u} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$$

اب ویکٹر $\underline{u}$ کی مخالف سمت اکائی ویکٹر ہے۔

$$\hat{u} = -\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$$

$$= -\frac{3\hat{i} - 2\hat{j}}{\sqrt{13}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{13}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\hat{j} \quad \text{جواب}$$

مطلوبہ یونٹ ویکٹر

8- اگر $\underline{u} + \underline{v} = 6\hat{i} - 3\hat{j}$ اور $\underline{u} = 5\hat{i} - 4\hat{j}$ معلوم کیجیے۔
 حل:

$$\underline{u} + \underline{v} = (5\hat{i} - 4\hat{j}) + (6\hat{i} - 3\hat{j})$$

$$= (5+6)\hat{i} + (-4-3)\hat{j}$$

$$\underline{u} + \underline{v} = 11\hat{i} - 7\hat{j}$$

9- اگر $3\underline{b} + 4\underline{a} = -3\hat{i} + 5\hat{j}$ اور $\underline{a} = 4\hat{i} - \hat{j}$ معلوم کیجیے۔
 حل:

$$3\underline{b} + 4\underline{a} = 3(-3\hat{i} + 5\hat{j}) + 4(4\hat{i} - \hat{j})$$

$$= -9\hat{i} + 15\hat{j} + 16\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$= (-9+16)\hat{i} + (15-4)\hat{j}$$

$$= 7\hat{i} + 11\hat{j}$$

10- اگر $\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b} = 9\hat{i} + 12\hat{j}$ اور $\underline{a} = 4\hat{i} - 6\hat{j}$ معلوم کیجیے۔
 حل:

$$\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b} = \frac{1}{2}(4\hat{i} - 6\hat{j}) + \frac{2}{3}(9\hat{i} + 12\hat{j})$$

$$= 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2(3\hat{i} + 4\hat{j})$$

$$= 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{i} + 8\hat{j}$$

$$= (2+6)\hat{i} + (-3+8)\hat{j}$$

11- اگر $\underline{u} + 4\underline{v} = \underline{w}$ اور $\underline{w} = 3\hat{i} + 3\hat{j}$ ، $\underline{u} = \hat{i} - 2\hat{j}$ معلوم کیجیے۔
 حل:

$$\underline{u} + 4\underline{v} = \underline{w}$$

$$\hat{i} - 2\hat{j} + 4\underline{v} = 3\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$4\underline{v} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$4\underline{v} = (3-1)\hat{i} + (3+2)\hat{j}$$

$$4\underline{v} = 2\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \frac{2}{4}\hat{i} + \frac{5}{4}\hat{j} \Rightarrow \underline{v} = \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{5}{4}\hat{j}$$

12- اگر $\underline{v} - 2\underline{u} = 6\hat{i} - \hat{j}$ اور $\underline{u} = \hat{i} + 5\hat{j}$ معلوم کیجیے۔
 حل:

$$\underline{v} - 2\underline{u} = 6\hat{i} - \hat{j} - 2(\hat{i} + 5\hat{j})$$

$$= 6\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{i} - 10\hat{j}$$

$$= (6-2)\hat{i} + (-1-10)\hat{j}$$

$$\underline{v} - 2\underline{u} = 4\hat{i} - 11\hat{j} \quad \text{جواب}$$

13- اگر $2\underline{a} - 3\underline{b} - \underline{c} = 2\hat{i} - \hat{j}$ اور $\underline{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ ، $\underline{a} = 7\hat{i} - 3\hat{j}$ معلوم کیجیے۔
 حل:

$$2\underline{a} - 3\underline{b} - \underline{c} = 2(7\hat{i} - 3\hat{j}) - 3(3\hat{i} + 4\hat{j}) - (2\hat{i} - \hat{j})$$

$$= 14\hat{i} - 6\hat{j} - 9\hat{i} - 12\hat{j} - 2\hat{i} + \hat{j}$$

$$= (14-9-2)\hat{i} + (-6-12+1)\hat{j}$$

$$2a - 3b - c = 3i - 17j \quad \text{جواب}$$

$$(xi + yj) - (2i - 4j) = -5i + 3j \quad \text{اگر } i \text{ اور } j \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔}$$

$$(xi + yj) - (2i - 4j) = -5i + 3j$$

$$(x-2)i + (y+4)j = -5i + 3j$$

$$\Rightarrow x-2 = -5 \quad y+4 = 3$$

$$x = -5 + 2 \quad y = 3 - 4$$

$$x = -3$$

$$y = -1$$

i اور j کے عددی سروں کا موازنہ

$$(x+5)i + (y-3)j = 2i + 7j \quad \text{اگر } i \text{ اور } j \text{ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔}$$

$$(x+5)i + (y-3)j = 2i + 7j$$

$$x+5 = 2 \quad y-3 = 7$$

$$x = 2 - 5 \quad y = 7 + 3$$

$$x = -3 \quad y = 10$$

i اور j کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

ویکٹرز کی ٹرانسلیشن

6.6

16- ٹرانسلیشن ویکٹرز کی تعریف کریں۔

جواب: ٹرانسلیشن ویکٹر وہ ویکٹر ہے جو کسی نقطے، جسم یا نظام کی ایک جگہ سے دوسری جگہ حرکت کو بغیر کسی گردش یا باگاڑ کے بیان کرتا ہے۔

18- اگر $A(7, -3)$, $B(-2, 4)$, $C(5, 4)$ ایک ΔABC کے راس ہوں تو ٹرانسلیشن ویکٹر $-4i$ کی مدد سے نئے راس معلوم کیجیے۔

$$\text{حل: } A' = (7i - 3j) + (4i - j)$$

$$= (7+4)i - (3+1)j$$

$$= 11i - 4j$$

$$\text{نیا راس } B' = (-2i + 4j) + (4i - j)$$

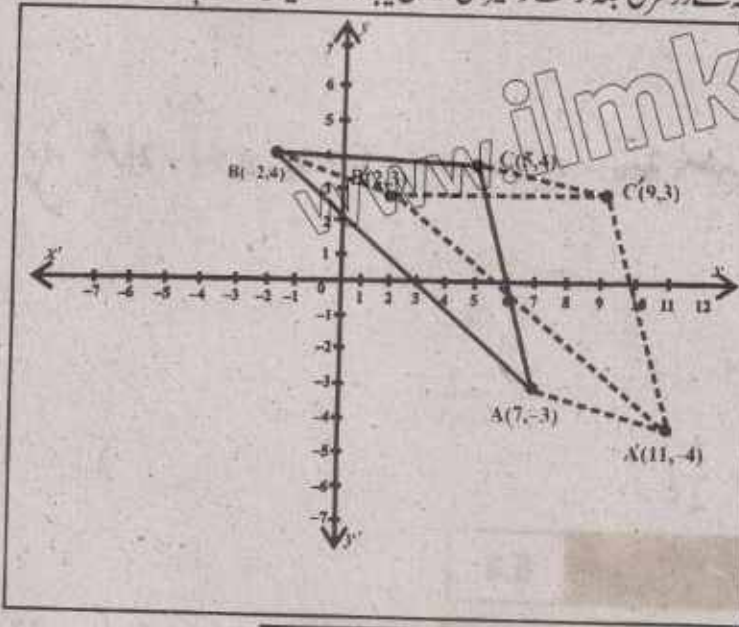
$$= (-2+4)i + (4-1)j$$

$$= 2i + 3j = (2, 3)$$

$$\text{نیا راس } C' = (5i + 4j) + (4i - j)$$

$$= (5+4)i + (4-1)j$$

$$= 9i + 3j = (9, 3)$$



ویکٹرز پر مشتمل جیومیٹرک مسائل کا حل اور اطلاق

6.7

19- اگر $A(3, 1)$, $B(-2, -3)$, $C(2, 2)$ ایک مثلث کے راس ہوں تو معلوم کریں کہ مثلث ABC تساوی الاضلاع ہے۔

$$\overline{AB} = (-2-3)i + (-3-1)j = -5i - 4j$$

$$\overline{BC} = (2-(-2))i + (2-(-3))j = 4i + 5j$$

$$\overline{AC} = (2-3)i + (2-1)j = -i + j$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

$$|BC| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$|AB| = |BC|$$

لہذا $\triangle ABC$ متساوی الساقین ہے۔
-20 اگر $\overline{AB} = x\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ اور $\overline{DC} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ایک متوازی الاضلاع کے دو مخالف اضلاع ہوں تو x کی قیمت معلوم کریں۔

حل: چونکہ $\overline{AB} = x\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ اور $\overline{DC} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ایک متوازی الاضلاع کے دو مخالف اضلاع ہیں۔

اس لیے

$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

$$x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$x = -3$$

ا کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

-21 اگر $\overline{AB} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ اور $\overline{DC} = 4\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ ایک متوازی الاضلاع کے دو متوازی اور مخالف اضلاع ہیں تو y کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $\overline{AB}$ اور $\overline{DC}$ ایک متوازی الاضلاع کے دو متوازی اور مخالف اضلاع ہیں۔ اس لیے

$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

$$4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} = 4\mathbf{i} - y\mathbf{j}$$

$$-5 = -y$$

$$y = 5$$

ا کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

-22 اگر A، B اور C بالترتیب نقاط $(2, -4)$ ، $(4, 0)$ اور $(1, 6)$ ہوں۔ ویکٹرز کا استعمال کرتے ہوئے نقطہ D کے محددات معلوم کریں اگر $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع ہو۔

حل: فرض کیا کہ D(x, y) مطلوبہ راس ہے۔

کیونکہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

$$(4-2)\mathbf{i} + (0-(-4))\mathbf{j} = (1-x)\mathbf{i} + (6-y)\mathbf{j}$$

$$2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = (1-x)\mathbf{i} + (6-y)\mathbf{j}$$

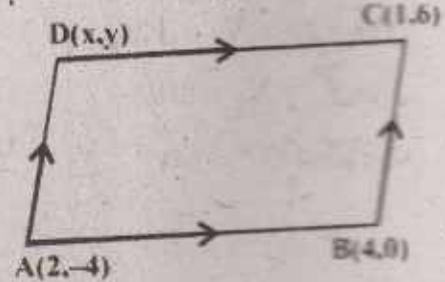
$$1-x = 2 \quad , \quad 6-y = 4$$

$$-x = 2-1 \quad , \quad -6y = 4-6$$

$$-x = 1 \quad , \quad -y = -2$$

$$x = -1$$

$$y = 2$$



پس نقطہ D کے محددات $(-1, 2)$ ہیں۔

-23 اگر $D(-8, 0)$ اور $C(-2, 3)$ ، $B(4, 1)$ ایک متوازی الاضلاع ABCD کے راس ہوں تو راس A کے محددات معلوم کریں۔

حل: فرض کیا کہ A(x, y) مطلوبہ راس ہے۔ کیونکہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

کیونکہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

لہذا

$$(4-x)\mathbf{i} + (1-y)\mathbf{j} = (-2-(-8))\mathbf{i} + (3-0)\mathbf{j}$$

$$(4-x)\mathbf{i} + (1-y)\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

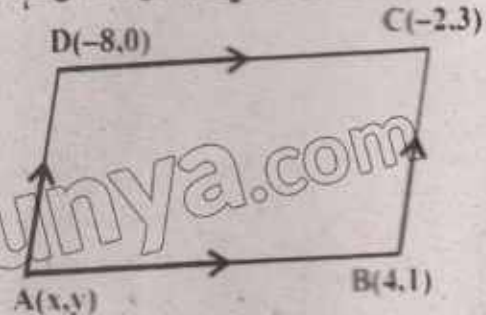
$$4-x = 6 \quad , \quad 1-y = 3$$

$$-x = 6-4 \quad , \quad -y = 3-1$$

$$-x = 2 \quad , \quad -y = 2$$

$$x = -2$$

$$y = -2$$



پس مطلوبہ راس $A(-2, -2)$ ہے۔

24۔ ایک پروپیلرڈ راکٹ دھن سے ابتدائی سمتی رفتار $3\hat{i} + 5\hat{j}$ کے ساتھ پھینکا گیا۔ کتنے وقت کے بعد یہ 15 کلومیٹر دور افقی طور پر موجودہ ہدف سے ٹکرائے گا۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$$\underline{v_i} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$\text{افقی رفتار} = v_x = 3$$

$$\text{عمودی رفتار} = v_y = 5$$

$$\text{فاصلہ} = x = 15\text{m}$$

$$\therefore x = v_x t$$

$$t = \frac{x}{v_x}$$

$$t = \frac{15}{3}$$

$$t = 5 \text{ sec}$$

25۔ ایک گاڑی ولائی ویکٹر $\underline{v_i} = 17\hat{i}$ کے ساتھ ایک لوپ میں داخل ہوتی ہے اور ولائی ویکٹر $\underline{v_f} = 20\hat{j}$ کے ساتھ باہر نکلتی ہے۔ ولائی میں کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$$\text{ابتدائی ولائی} = \underline{v_i} = 17\hat{i}$$

$$\text{حتمی ولائی} = \underline{v_f} = 20\hat{j}$$

$$\therefore \text{ولائی میں تبدیلی} = \Delta \underline{v} = \underline{v_f} - \underline{v_i}$$

$$\Delta \underline{v} = 20\hat{j} - 17\hat{i}$$

$$|\Delta \underline{v}| = \sqrt{20^2 + (-17)^2}$$

$$= \sqrt{400 + 289}$$

$$|\Delta \underline{v}| = \sqrt{689} \text{ جواب}$$

