

اس پونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- ◀ تفاعل پر ہونے والے عوامل اور تفاعل کی ترکیب کی وضاحت کر سکیں۔
- ◀ معکوس تفاعل کی تعریف کر سکیں اور مثالوں کے ساتھ ان کی ڈومین اور رینج کو بیان کر سکیں۔
- ◀ ترکیبی تفاعل کو بیان کر سکیں جیسا کہ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ۔
- ◀ تفاعل کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل (مثلاً مالیات، نقل و حمل اور فروخت) پر لاگو کر سکیں۔
- ◀ مطلق قدر والے تفاعل کا گراف بنا سکیں۔
- ◀ ایک متغیر کے مطلق قدر والے ایک درجی مساواتوں اور غیر مساواتوں کو حل کر سکیں اور قدر کی رینج کے طور پر حل کو عددی خط پر ظاہر کر سکیں۔
- ◀ مطلق قدر والے تفاعل کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل (مثلاً توانائی کی لہر، وسعت اور فاصلہ کا حساب لگانے کے لیے) پر لاگو کر سکیں۔

تفاعل (Function)

4.1

اگر X اور Y دو غیر خالی سیٹ ہوں، تو سیٹ X سے سیٹ Y تک ایک تفاعل ایسا رابطہ ہے جو سیٹ X کے ہر رکن کا سیٹ Y کے صرف ایک رکن سے تعلق جوڑتا ہے۔ اسے $f: X \rightarrow Y$ لکھا جاتا ہے۔ جہاں سیٹ X کو ڈومین اور سیٹ Y کو تفاعل کی کوڈومین (co-domain) کہا جاتا ہے۔ جبکہ رینج کوڈومین کا وہ تہتی سیٹ ہے جس میں صرف وہ اصل آؤٹ پٹ قدریں شامل ہوتی ہیں جو تفاعل سے بنائی جاتی ہیں۔

مثال 4.1 اگر $f(x) = x^2 + 3x + 1$ ہو تو معلوم کیجیے۔

- (i) $f(0)$ (ii) $f(2)$ (iii) $f(a)$ (iv) $f(x+1)$

حل: $f(x) = x^2 + 3x + 1$

(i) $f(0) = (0)^2 + 3(0) + 1 = 1$

(ii) $f(2) = (2)^2 + 3(2) + 1 = 4 + 6 + 1 = 11$

(iii) $f(a) = a^2 + 3a + 1$

(iv) $f(x+1) = (x+1)^2 + 3(x+1) + 1$

$= x^2 + 2x + 1 + 3x + 3 + 1$

$= x^2 + 5x + 5$

یاد رکھیے!

رینج ہمیشہ کوڈومین کا تہتی سیٹ ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 5x \\ f(x+2)^2 &= 2(x+2)^2 + 5(x+2) \\ &= 2(x^2 + 4x + 4) + 5x + 10 \\ &= 2x^2 + 8x + 8 + 5x + 10 \\ &= 2x^2 + 13x + 18 \end{aligned}$$

مثال 2: $f(x) = (x+1)^2$ کی ڈومین اور رینج معلوم کیجیے۔

حل:

$$f(0) = (0+1)^2 = 1; f(4) = (4+1)^2 = 25; f(-10) = (-10+1)^2 = 81;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+1\right)^2 = \frac{9}{4}; f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+1)^2 = 7.46; f(-1) = 0; \dots\dots\dots$$

ہر حقیقی عدد x کے لیے، $f(x) = (x+1)^2$ ایک غیر منفی حقیقی عدد ہوتا ہے۔ پس تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سیٹ f کی رینج : تمام حقیقی اعداد کا سیٹ f کی ڈومین

تفاعل کے عوامل

تفاعل کے عوامل پر الجبری عوامل (جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم) لاگو ہوتے ہیں۔

اگر $f(x)$ اور $g(x)$ دو تفاعل ہوں تو ان کے مجموعے کو یوں لکھا جاتا ہے:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

مثال 3: فرض کریں $f(x) = 2x + 3$ اور $g(x) = x^2 + x + 1$ تو $f(x)$ اور $g(x)$ کو جمع کیجیے۔

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 3 \\ g(x) &= x^2 + x + 1 \\ (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (2x + 3) + (x^2 + x + 1) = x^2 + 3x + 4 \end{aligned}$$

b تفاعل کی تفریق

اگر $f(x)$ اور $g(x)$ دو تفاعل ہوں تو ان میں فرق کو یوں لکھا جاتا ہے:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

مثال 4: فرض کریں $f(x) = 5x + 2$ اور $g(x) = x^2 - 3$ تو $f(x) - g(x)$ معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x + 2 \\ g(x) &= x^2 - 3 \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (5x + 2) - (x^2 - 3) \\ &= 5x + 2 - x^2 + 3 = -x^2 + 5x + 5 \end{aligned}$$

c تفاعل کی ضرب

اگر $f(x)$ اور $g(x)$ دو تفاعل ہوں تو ان کے حاصل ضرب کو یوں لکھا جاتا ہے:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

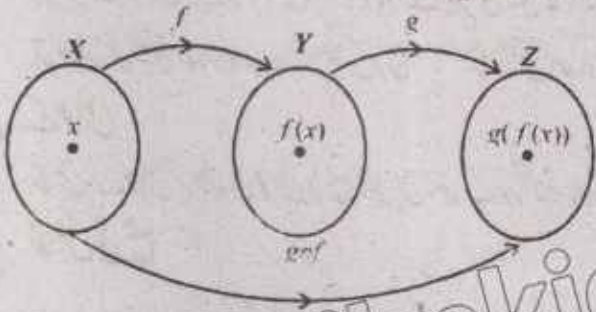
$$= \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$= \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)}$$

$$= x - 2$$

تفاعل کی ترکیب

تفاعل کی ترکیب دو یا دو سے زیادہ تفاعلوں کو ملا کر ایک نیا واحد تفاعل بنانے کا عمل ہے ترکیب کا عمل کنندہ "o" دو تفاعلات کو لیتا ہے اور اس کے نتیجے میں ایک نیا تفاعل بنتا ہے۔ آئیے شکل سے تعریف کی وضاحت کرتے ہیں۔



مثال 5: فرض کریں $g(x) = 2x - 3$ اور $f(x) = x + 1$ تو $f(x) \cdot g(x)$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = 2x - 3$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$= (x + 1)(2x - 3)$$

$$= 2x^2 - 3x + 2x - 3$$

$$= 2x^2 - x - 3$$

تفاعل کی تقسیم

اگر $f(x)$ اور $g(x)$ دو تفاعل ہوں تو ان کی حاصل تقسیم کو یوں لکھا جاتا ہے:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{جہاں } g(x) \neq 0$$

مثال 6: فرض کریں $f(x) = x^2 - 4$ اور $g(x) = x + 2$ تو

معلوم کیجیے جہاں $-x \neq -2$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$= \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)}$$

$$= x - 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال 7: اگر $f(x) = 2x + 3$ اور $g(x) = x^2$ تو معلوم کیجیے۔

- (i) $(fog)(x)$ (ii) $(gof)(x)$ (iii) $(fof)(x)$ (iv) $(gog)(x)$

حل: $f(x) = 2x + 3, g(x) = x^2$

(i) $(fog)(x) = f(g(x))$

$$= f(x^2)$$

$$= 2x^2 + 3$$

(ii) $(gof)(x) = g(f(x))$

$$= g(2x + 3)^2$$

$$(gof)(x) = (2x + 3)^2$$

$$= 4x^2 + 12x + 9$$

(iii) $(fof)(x) = f(f(x))$

$$= f(2x + 3)$$

$$= 2(2x + 3) + 3$$

$$= 4x + 9$$

(iv) $(gog)(x) = g(g(x))$

$$= g(x^2)$$

$$(gog)(x) = (x^2)^2 = x^4$$

یاد رکھیے!

عمومی طور پر

$$(fog)(x) \neq (gof)(x)$$

ون۔نو۔ون تفاعل:

ایک تفاعل ون۔نو۔ون (یا انجیکشن) کہلاتا ہے اگر ہر ان پٹ ایک منفرد آؤٹ پٹ سے ملتا ہو۔

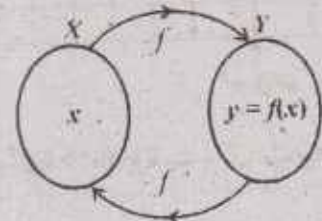
آن نو تفاعل:

ایک تفاعل آن نو (یا سرجیکشن) کہلاتا ہے اگر کوڈومین کا ہر رکن ڈومین میں کم از کم ایک مابین غلط رہتا ہو۔

بائی جیکٹیو تفاعل:

ایک تفاعل بائی جیکٹیو کہلاتا ہے اگر وہ ون۔نو۔ون بھی ہو اور آن نو بھی۔

تفاعل f سیٹ X سے ان پٹ x لیتا ہے اور اسے سیٹ Y کے آؤٹ پٹ y سے ملاتا ہے یعنی $y = f(x)$ ۔
 f کا معکوس تفاعل جس کو f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے اس عمل کو پلٹ دیتا ہے یہ y کو ان پٹ اور x کو آؤٹ پٹ کے طور پر لیتا ہے:
 $f^{-1}: Y \rightarrow X, f^{-1}(y) = x$

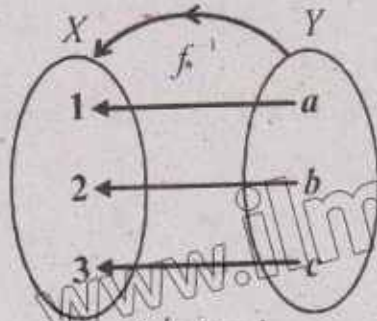


نوٹ:
 اگر $y = f(x)$ ہو تو $f^{-1}(y) = x$ کو $f(x)$ کا معکوس تفاعل کہتے ہیں۔

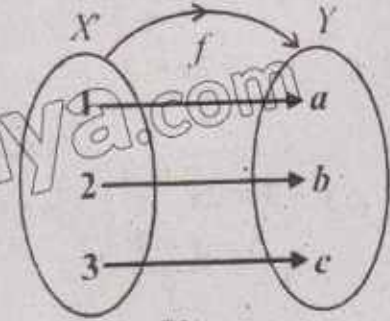
کی ریش f کی ڈومین: آئیے اس کو ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں:

فرض کریں $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c\}$

$f: \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ ہو تو $f^{-1}: \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$



$$\begin{aligned} f^{-1}(a) &= 1 \\ f^{-1}(b) &= 2 \\ f^{-1}(c) &= 3 \end{aligned}$$

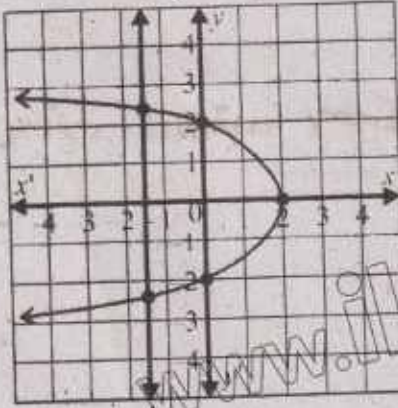


$$\begin{aligned} f(1) &= a \\ f(2) &= b \\ f(3) &= c \end{aligned}$$

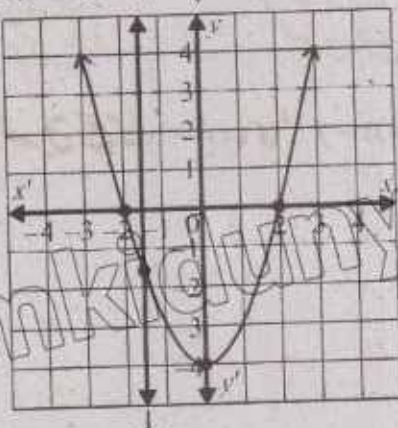
یہ نوٹ کرنا اہم ہے کہ کسی تفاعل کا معکوس صرف اس وقت ممکن ہوتا ہے جب وہ ون-ٹو ون اور آن ٹو (بائی جیکٹو) ہو۔

عمودی خط کا ٹیسٹ:

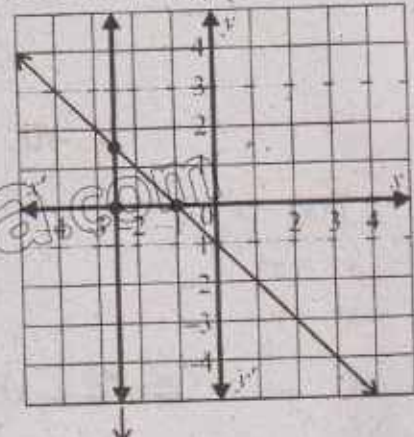
گراف میں کھینچا گیا کوئی بھی خط/منحنی خط ایک تفاعل کو ظاہر کرتا ہے اگر ہر عمودی خط اس خط کو زیادہ سے زیادہ ایک نقطہ پر قطع کرے۔



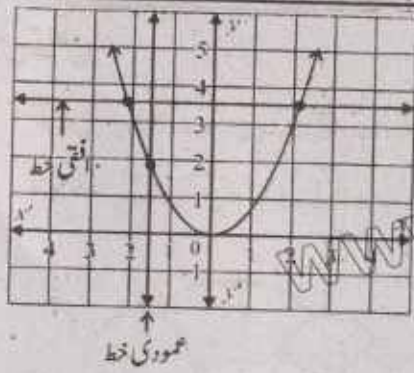
عمودی خط دو نقاط پر قطع کرتا ہے۔



عمودی خط ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے۔



عمودی خط ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے۔



شکل 4.8 اور شکل 4.9 کے گراف متقابل کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ شکل 4.10 کا گراف متقابل کو ظاہر نہیں کرتا۔

افقی خط کا ٹیسٹ

اگر ہر افقی خط دیے گئے منحنی خط کو زیادہ سے زیادہ ایک نقطہ پر قطع کرے، تو گراف

ون۔نو۔ون متقابل کہلاتا ہے۔

عمودی خط متقابل $f(x) = x^2$ کے گراف کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے لہذا یہ افقی ٹیسٹ میں ناکام ہو جاتا ہے۔ اس لیے یہ ون۔نو۔ون

متقابل نہیں ہے۔

مثال 8: $f(x) = 2x + 3$ کا معکوس متقابل معلوم کیجیے۔ $f^{-1}(x)$ کی ڈومین اور رینج بھی معلوم کیجیے۔

$$f(x) = 2x + 3$$

حل:

$$y = 2x + 3$$

($f(x)$ کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے)

$$y - 3 = 2x$$

$$\therefore x = \frac{y-3}{2}$$

(x کے لیے حل کیجیے)

$$f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$$

$$[\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے

تمام حقیقی اعداد

تمام حقیقی اعداد

تمام حقیقی اعداد

تمام حقیقی اعداد

$f(x)$ کی ڈومین:

$f(x)$ کی رینج:

$f^{-1}(x)$ کی ڈومین:

$f^{-1}(x)$ کی رینج:

مثال 9: اگر $f(x) = x^3$ ہو تو $f^{-1}(x)$ معلوم کیجیے اور تصدیق کیجیے کہ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

$$f(x) = x^3$$

$$y = x^3$$

$$x^3 = y$$

$$x = y^{\frac{1}{3}}$$

(x کے لیے حل کیجیے)

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}} \quad [y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$$

$$f^{-1}(x) = (x)^{\frac{1}{3}} \text{ (y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے)}$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(x)^{\frac{1}{3}} = (x^{\frac{1}{3}})^3 = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \text{، پس}$$

چیلنج!

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{، } f^{-1}(f(x)) = x \text{ کہ } f(x) \text{ اور } f^{-1}(x) \text{ متبادلات ہیں}$$

$$y = \frac{-1}{4}x + 2$$

(f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے)

$$\frac{-1}{4}x + 2 = y$$

$$\frac{-1}{4}x = y - 2$$

$$-4\left(\frac{-1}{4}x\right) = -4(y - 2)$$

(مساوات کے دونوں طرف سے -4 ضرب دینے سے)

$$x = -4y + 8$$

(x کے لیے حل کرنے سے)

$$f^{-1}(x) = -4x + 8$$

(y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے)

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(-4x + 8)$$

$$= \frac{-1}{4}(-4x + 8) + 2$$

$$= \frac{-1}{4} \times (-4x) + \left(\frac{-1}{4} \times 8\right) + 2$$

$$= x - 2 + 2 = x \quad (i)$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{-1}{4}x + 2\right)$$

$$= -4\left(\frac{-1}{4}x + 2\right) + 8$$

$$= -4 \times \left(\frac{-1}{4}x\right) - 4 \times 2 + 8$$

$$= x - 8 + 8$$

$$= x \quad (ii)$$

$$f(x) = \frac{-1}{4}x + 2$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ

4.1 مثلث

(gog)(x) (d) (fof)(x) (c)

$$3; g(x) = x^3 \quad (i)$$

$$f(x) = \frac{2}{x}, x \neq 0; g(x) = 2x^2 - 1 \quad (ii)$$

$$f(x) = 2x - 1; g(x) = \frac{x+1}{2} \quad (iii)$$

$$f(x) = 2x + 3, g(x) = x^3 \quad (i)$$

(a) (fog)(x)

$$\begin{aligned} (fog)(x) &= (f(g(x))) \\ &= f(x^3) \\ &= 2(x^3) + 3 \\ &= 2x^3 + 3 \end{aligned}$$

(b) (gof)(x)

$$\begin{aligned} (gof)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x+3) \\ &= (2x+3)^3 \end{aligned}$$

(c) (fof)(x)

$$\begin{aligned} (fof)(x) &= f(f(x)) \\ &= f(2x+3) \\ &= 2(2x+3) + 3 \\ &= 4x + 6 + 3 \\ &= 4x + 9 \end{aligned}$$

(d) (gog)(x)

$$\begin{aligned} (gog)(x) &= g(g(x)) \\ &= g(x^3) \\ &= (x^3)^3 \\ &= x^9 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{2}{x}, x \neq 0; g(x) = 2x^2 - 1 \quad (ii)$$

(a) (fog)(x)

$$\begin{aligned} (fog)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x^2 - 1) \\ &= \frac{2}{2x^2 - 1} \end{aligned}$$

(b) (gof)(x)

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

$$= g\left(\frac{2}{x}\right) = 2\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 1$$

$$= 2\left(\frac{4}{x^2}\right) - 1$$

1- اگر $f(x) = 2x + 5$ اور $g(x) = 3x - 2$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

$$f(x)g(x) \quad (i)$$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x) = 2x + 5$ اور $g(x) = 3x - 2$

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (2x + 5) + (3x - 2) \\ &= 2x + 5 + 3x - 2 \\ &= 5x + 3 \end{aligned}$$

$$f(x) - g(x) \quad (ii)$$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x) = 2x + 5$ اور $g(x) = 3x - 2$

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (2x + 5) - (3x - 2) \\ &= 2x + 5 - 3x + 2 \\ &= -x + 7 \end{aligned}$$

2- اگر $f(x) = x + 2$ اور $g(x) = 2x + 4$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

$$f(x).g(x) \quad (i)$$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x) = x + 2$ اور $g(x) = 2x + 4$

$$\begin{aligned} f(x).g(x) &= (x + 2)(2x + 4) \\ &= 2x^2 + 4x + 4x + 8 \\ &= 2x^2 + 8x + 8 \end{aligned}$$

$$g(x).f(x) \quad (ii)$$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x) = x + 2$ اور $g(x) = 2x + 4$

$$\begin{aligned} g(x).f(x) &= (2x + 4)(x + 2) \\ &= 2x^2 + 4x + 4x + 8 \\ &= 2x^2 + 8x + 8 \end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad (iii)$$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x) = x + 2$ اور $g(x) = 2x + 4$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + 2}{2x + 4} = \frac{x + 2}{2(x + 2)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} \quad (iv)$$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x) = x + 2$ اور $g(x) = 2x + 4$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x + 4}{x + 2} = \frac{2(x + 2)}{(x + 2)} = 2$$

3- درج ذیل f اور g تقابل کے لیے معلوم کیجیے۔

$$(gof)(x) \quad (b) \quad (fog)(x) \quad (a)$$

$$\begin{aligned}
 &= g(2x-1) \\
 &= \frac{(2x-1)+1}{2} \\
 &= \frac{2x-1+1}{2} \\
 &= \frac{2x}{2} = x
 \end{aligned}$$

(c) $(f \circ f)(x)$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$\begin{aligned}
 &= f(2x-1) \\
 &= 2(2x-1)-1 \\
 &= 4x-2-1 \\
 &= 4x-3
 \end{aligned}$$

(d) $(g \circ g)(x)$

$$\begin{aligned}
 (g \circ g)(x) &= g(g(x)) \\
 &= g\left(\frac{x+1}{2}\right) \\
 &= \frac{\frac{x+1}{2} + 1}{2} \\
 &= \frac{\frac{x+1+2}{2}}{2} \\
 &= \frac{x+3}{2} \\
 &= \frac{x+3}{2} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{x+3}{4}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{x^2} - 1 = \frac{8-x^2}{x^2}$$

(c) $(f \circ f)(x)$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$\begin{aligned}
 &= f\left(\frac{2}{x}\right) \\
 &= \frac{2}{\frac{2}{x}} = 2 \times \frac{x}{2} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

(d) $(g \circ g)(x)$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x))$$

$$\begin{aligned}
 &= g(2x^2-1) \\
 &= 2(2x^2-1)^2-1 \\
 &= 2(4x^4-4x^2+1)-1 \\
 &= 8x^4-8x^2+2-1 \\
 &= 8x^4-8x^2+1
 \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x-1 ; g(x) = \frac{x+1}{2} \quad \text{(iii)}$$

(a) $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\begin{aligned}
 &= f\left(\frac{x+1}{2}\right) \\
 &= 2\left(\frac{x+1}{2}\right)-1 \\
 &= x+1-1 \\
 &= x
 \end{aligned}$$

(b) $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

-4 k کی قیمت معلوم کیجیے، بشرطیکہ $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ جہاں $f(x) = 3x+2$ اور $g(x) = 6x-k$

L.H.S

$$\begin{aligned}
 &(f \circ g)(x) \\
 &= f(g(x)) \\
 &= f(6x-k) \\
 &= 3(6x-k)+2 \\
 &= 18x-3k+2 \quad \text{(i)}
 \end{aligned}$$

R.H.S

$$\begin{aligned}
 &(g \circ f)(x) \\
 &= g(f(x)) \\
 &= g(3x+2) \\
 &= 6(3x+2)-k \\
 &= 18x+12-k \quad \text{(ii)}
 \end{aligned}$$

$$18x - 3k + 2 = 18x + 12 - k$$

$$18x - 18x - 3k + k = 12 - 2$$

$$-2k = 10$$

$$2k = -10$$

$$k = -\frac{10}{2}$$

$$k = -5$$

5- اگر $f(x) = 3x + 2$ اور $g(x) = 2x + 3$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

$$f(g(-2)) \quad (iii) \quad f(f(3)) \quad (ii) \quad g(f(4)) \quad (i)$$

$$g(f(4)) \quad (i)$$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 3x + 2$ اور $g(x) = 2x + 3$

$$f(4) = 3(4) + 2 = 12 + 2 = 14$$

$$g(14) = 2(14) + 3 = 28 + 3 = 31$$

$$f(f(3)) \quad (ii)$$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 3x + 2$ اور $g(x) = 2x + 3$

$$f(3) = 3(3) + 2 = 9 + 2 = 11$$

$$f(11) = 3(11) + 2 = 33 + 2 = 35$$

$$f(g(-2)) \quad (iii)$$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 3x + 2$ اور $g(x) = 2x + 3$

$$g(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$$

$$f(-1) = 3(-1) + 2 = -3 + 2 = -1$$

6- درج ذیل ہر ایک کا $f^{-1}(x)$ معلوم کیجیے۔

$$f(x) = 2x - 3 \quad (i)$$

$$f(x) = 2x - 3$$

حل: $f(x)$ کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے

$$y = 2x - 3$$

$$2x - 3 = y$$

$$2x = y + 3$$

$$x = \frac{y+3}{2} \quad | \text{ } x \text{ کے لیے حل کرنے سے}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2} \therefore y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

حل: $f(x) = 4x^3 - 1$ (ii)

$$f(x) = 4x^3 - 1$$

حل: $f(x)$ کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے

$$y = 4x^3 - 1$$

$$4x^3 - 1 = y$$

$$4x^3 = y + 1$$

$$x^3 = \frac{y+1}{4}$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{\frac{y+1}{4}} \quad | \text{ } x \text{ کے لیے حل کرنے سے}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{4}} \quad | \text{ } x \text{ کے لیے حل کرنے سے}$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y+1}{4}} \therefore y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{4}} \quad | \text{ } y \text{ کو } x \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad x \geq 1, x \geq 1 \quad (iii)$$

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad | \text{ } x \text{ کے لیے حل کرنے سے}$$

$$y = \sqrt{x-1} \quad | \text{ } f(x) \text{ کو } y \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$\sqrt{x-1} = y$$

$$(\sqrt{x-1})^2 = y^2 \quad | \text{ } y \text{ کے ساتھ مربع لینے سے}$$

$$x-1 = y^2$$

$$x = y^2 + 1 \quad | \text{ } x \text{ کے لیے حل کرنے سے}$$

$$f^{-1}(y) = y^2 + 1 \therefore y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(x) = x^2 + 1 \quad | \text{ } y \text{ کو } x \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{3x-2}, x \neq \frac{2}{3} \quad (iv)$$

$$f(x) = \frac{x+1}{3x-2} \quad | \text{ } x \text{ کے لیے حل کرنے سے}$$

$$y = \frac{x+1}{3x-2} \quad | \text{ } f(x) \text{ کو } y \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

(ii) اگر $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$ ہو تو x معلوم کیجیے۔

$$f(x) = 4x + 2$$

$$y = 4x + 2 \quad | \text{ } y \text{ کو } x \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$4x + 2 = y \quad | \text{ یا}$$

$$4x = y - 2$$

$$x = \frac{y-2}{4} \quad | \text{ } x \text{ کے لیے حل کرنے سے}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{4} \quad | \because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x|$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4} \quad \text{(i)} \quad | \text{ } y \text{ کو } x \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$g(x) = 6x - 18$$

$$y = 6x - 18$$

$$6x - 18 = y \quad | \text{ یا}$$

$$6x = y + 18$$

$$x = \frac{y+18}{6}$$

$$g^{-1}(y) = \frac{y+18}{6} \quad | \because y = g(x) \Rightarrow g^{-1}(y) = x|$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x+18}{6} \quad \text{(ii)} \quad | \text{ } y \text{ کو } x \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

دی گئی شرط کے مطابق

$$f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{x+18}{6} \quad \text{سے (ii) اور (i)}$$

$$6(x-2) = 4(x+18)$$

$$6x - 12 = 4x + 72$$

$$6x - 4x = 72 + 12$$

$$2x = 84$$

$$x = \frac{84}{2}$$

$$x = 42$$

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{تصدیق کیجیے}$$

$$f(x) = x - 6 \quad \text{(i)}$$

$$f(x) = x - 6 \quad | \text{ حل}$$

$$y = x - 6 \quad | \text{ } y \text{ کو } x \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$y(3x-2) = x+1$$

$$3xy - 2y = x+1$$

$$3xy - x = 2y+1$$

$$x(3y-1) = 2y+1$$

$$x = \frac{2y+1}{3y-1} \quad | \text{ } x \text{ کے لیے حل کرنے سے}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{2y+1}{3y-1} \quad \therefore y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3x-1} \quad | \text{ } y \text{ کو } x \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

-7 اور $f(x) = 4x + 2$ جب کہ g اور f دو متقابل ہیں

$$g(x) = 6x - 18$$

(i) $f^{-1}(x)$ اور $g^{-1}(x)$ معلوم کیجیے۔

$$f(x) = 4x + 2$$

$$y = 4x + 2 \quad | \text{ } y \text{ کو } x \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$4x + 2 = y \quad | \text{ یا}$$

$$4x = y - 2$$

$$x = \frac{y-2}{4} \quad | \text{ } x \text{ کے لیے حل کرنے سے}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{4} \quad | \because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x|$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4} \quad | \text{ } y \text{ کو } x \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$g(x) = 6x - 18 \quad \text{اب}$$

$$y = 6x - 18 \quad | \text{ } y \text{ کو } x \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$6x - 18 = y \quad | \text{ یا}$$

$$6x = y + 18$$

$$x = \frac{y+18}{6} \quad | \text{ } x \text{ کے لیے حل کرنے سے}$$

$$g^{-1}(y) = \frac{y+18}{6} \quad | \because y = g(x) \Rightarrow g^{-1}(y) = x|$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x+18}{6} \quad | \text{ } y \text{ کو } x \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$x = 4y + 3 \quad (\text{ہے کے لیے حل کرنے کے } x)$$

$$f^{-1}(y) = 4y + 3 \quad [\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$$

$$f^{-1}(x) = 4x + 3 \quad (\text{ہے کے ساتھ تبدیل کرنے کے } y)$$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f(4x + 3) \\ &= \frac{4x + 3 + 3}{4} = \frac{4x}{4} = x \quad (i) \end{aligned}$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x-3}{4}\right)$$

$$= 4\left(\frac{x-3}{4}\right) + 3$$

$$= x - x + 3 = x \quad (ii)$$

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{پس، (i) اور (ii) ثابت ہوا کہ}$$

$$f(x) = \frac{x-4}{x+2}, \quad x \neq -2 \quad (iv)$$

$$f(x) = \frac{x-4}{x+2}$$

حل:

$$y = \frac{x-4}{x+2} \quad (\text{ہے کے ساتھ تبدیل کرنے کے } f(x) \text{ کو } y)$$

$$y(x+2) = x-4$$

$$xy + 2y = x - 4$$

$$xy - x = -2y - 4$$

$$x(y-1) = -2y-4$$

$$x = \frac{-2y-4}{y-1} \quad (\text{ہے کے لیے حل کرنے کے } x)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{-2y-4}{y-1} \quad [\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x-4}{x-1} \quad (\text{ہے کے ساتھ تبدیل کرنے کے } y \text{ کو } x)$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{-2x-4}{x-1}\right) = \frac{\frac{-2x-4}{x-1} - 4}{\frac{-2x-4}{x-1} + 2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{-2x-4-4(x-1)}{x-1}}{\frac{-2x-4+2(x-1)}{x-1}} \\ &= \frac{-2x-4-4(x-1)}{-2x-4+2(x-1)} \\ &= \frac{-2x-4-4x+4}{-2x-4+2x-2} \\ &= \frac{-6x}{-4} = \frac{3x}{2} \end{aligned}$$

$$x-6=y$$

$$x=y+6 \quad (\text{ہے کے لیے حل کرنے کے } x)$$

$$f^{-1}(y) = y+6 \quad [\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$$

$$f^{-1}(x) = x+6 \quad (\text{ہے کے ساتھ تبدیل کرنے کے } y \text{ کو } x)$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(x+6) = (x+6)-6$$

$$= x+6-6 = x \quad (i)$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x-6) = (x-6)+6$$

$$= x-6+6 = x \quad (ii)$$

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{پس، (i) اور (ii) ثابت ہوا کہ}$$

$$f(x) = 7x-4 \quad (ii)$$

حل:

$$f(x) = 7x-4$$

$$y = 7x-4 \quad (\text{ہے کے ساتھ تبدیل کرنے کے } f(x) \text{ کو } y)$$

$$7x-4=y$$

$$7x=y+4$$

$$x = \frac{y+4}{7}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+4}{7} \quad (\text{ہے کے لیے حل کرنے کے } x)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{y+4}{7} \quad [\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{7} \quad (\text{ہے کے ساتھ تبدیل کرنے کے } y \text{ کو } x)$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+4}{7}\right) = 7\left(\frac{x+4}{7}\right) - 4$$

$$= x+4-4 = x \quad (i)$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(7x-4) = \frac{7x-4+4}{7} = \frac{7x}{7}$$

$$= x \quad (ii)$$

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{پس، (i) اور (ii) ثابت ہوا کہ}$$

$$f(x) = \frac{x-3}{4} \quad (iii)$$

حل:

$$f(x) = \frac{x-3}{4}$$

$$y = \frac{x-3}{4} \quad (\text{ہے کے ساتھ تبدیل کرنے کے } f(x) \text{ کو } y)$$

$$\frac{x-3}{4} = y$$

$$x-3=4y$$

$$= (-\infty, \infty)$$

$$f(x) \text{ کی رینج} = \text{تمام حقیقی اعداد}$$

$$= (-\infty, \infty)$$

$$f^{-1}(x) \text{ کی ڈومین} = \text{تمام حقیقی اعداد}$$

$$= (-\infty, \infty)$$

$$f^{-1}(x) \text{ کی رینج} = \text{تمام حقیقی اعداد}$$

$$= (-\infty, \infty)$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x}, x \neq -1 \quad \text{(iii)}$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x}, x \neq -1$$

حل:

$$f(x) \text{ کی ڈومین} = x \text{ صفر نہیں ہو سکتا ہے}$$

$$= (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

$$f(x) \text{ کی رینج} = x \text{ صفر نہیں ہو سکتا ہے}$$

$$= (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

$$f^{-1}(x) \text{ کی ڈومین} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

$$f^{-1}(x) \text{ کی رینج} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x-2}, x \geq 2 \quad \text{(iv)}$$

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

حل:

$$f(x) \text{ کی ڈومین} = x \geq 2 = [2, \infty)$$

$$f(x) \text{ کی رینج} = [0, \infty)$$

$$f^{-1}(x) \text{ کی ڈومین} = [0, \infty)$$

$$f^{-1}(x) \text{ کی رینج} = [2, \infty)$$

$$-11 \text{ اگر } f(x) = x^2 + 9 \text{ اور } g(x) = x + 21 \text{ تو } a \text{ کی}$$

$$f(a) = g(a) \text{ قیمتیں معلوم کیجیے جب کہ}$$

$$f(x) = x^2 + 9, g(x) = x + 21$$

$$f(a) = a^2 + 9, g(a) = a + 21$$

$$f(a) = g(a) \quad (\text{معلوم})$$

$$a^2 + 9 = a + 21$$

$$a^2 - a + 9 - 21 = 0$$

$$a^2 - a - 12 = 0$$

$$a^2 - 4a + 3a - 12 = 0$$

$$a(a - 4) + 3(a - 4) = 0$$

$$(a - 4)(a + 3) = 0$$

$$a - 4 = 0$$

$$a = 4$$

$$a + 3 = 0$$

$$a = -3$$

$$a = 4, -3 \text{ پس}$$

$$-2x - 4 = 4x + 4 - 6x$$

$$= \frac{x-1}{-2x-4+2x-2} = \frac{x-1}{-6}$$

$$= \frac{x-1}{-6}$$

$$= \frac{-6x}{x-1} \times \frac{x-1}{-6} = x \quad \text{(i)}$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x-4}{x+2}\right) = \frac{-2\left(\frac{x-4}{x+2}\right) - 4}{\frac{x-4}{x+2} - 1}$$

$$= \frac{-2(x-4) - 4(x+2)}{x-4 - (x+2)} = \frac{-2x + 8 - 4x - 8}{x-4 - x - 2} = \frac{-6x}{-6} = x$$

$$= \frac{-6x}{-6} = \frac{-6x}{-6} \times \frac{x+2}{x+2} = x$$

$$= x \quad \text{(ii)}$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $f^{-1}(f(x)) = x$ اور $f(f^{-1}(x)) = x$ کی ڈومین اور رینج معلوم کیجیے۔

$$f(x) = 12x - 3 \quad \text{(i)}$$

$$f(x) = 12x - 3$$

حل:

$$f(x) \text{ کی ڈومین} = \text{تمام حقیقی اعداد}$$

$$= (-\infty, \infty)$$

$$f(x) \text{ کی رینج} = \text{تمام حقیقی اعداد}$$

$$= (-\infty, \infty)$$

$$f^{-1}(x) \text{ کی ڈومین} = \text{تمام حقیقی اعداد}$$

$$= (-\infty, \infty)$$

$$f^{-1}(x) \text{ کی رینج} = \text{تمام حقیقی اعداد}$$

$$= (-\infty, \infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 8 \quad \text{(ii)}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 8$$

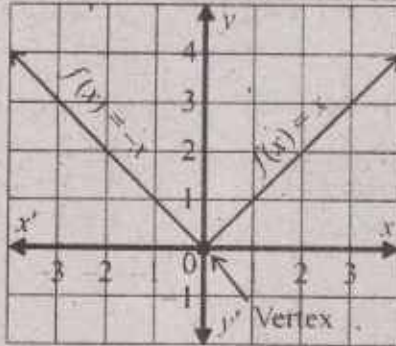
حل:

$$f(x) \text{ کی ڈومین} = \text{تمام حقیقی اعداد}$$

4.2 مطلق قدر والے تفاعل کا گراف (Graphs of Absolute Valued Functions)

ایک مطلق قدر تفاعل ایسا تفاعل ہوتا ہے جس میں الجبر کی جملے یا مطلق قدر کی تمام حدود مطلق قدر کے تفاعل کے تفاعل، اصل تفاعل $f(x) = |x|$ کی مختلف حالتیں ہیں جو تفاعل کے تفاعل حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



ایک مطلق قدر تفاعل ایسا تفاعل ہوتا ہے جس میں الجبر کی جملے یا مطلق قدر کی تمام حدود مطلق قدر کے تفاعل کے تفاعل، اصل تفاعل $f(x) = |x|$ کی مختلف حالتیں ہیں جو تفاعل کے تفاعل حاصل کیے جاتے ہیں۔

تفاعل $f(x) = |x|$ کے گراف کی شکل V جیسی ہے اور یہ y-محور کے لحاظ سے سمیٹرک ہے۔ وہ نقطہ جہاں گراف سمت تبدیل کرتا ہے، اس کو کہلاتا ہے جو کہ (0,0) ہے۔ ایک مطلق قدر تفاعل کی راسی شکل $f(x) = a|x-h|+k$ ہے جہاں $a \neq 0$ اور (h,k) اس کا راس ہے۔ اس کا گراف $x = h$ کے گرد سمیٹرک ہے۔

مثال 10: درج ذیل تفاعل کے گراف بنائیے۔

$$g(x) = |x - 3| \quad (ii)$$

$$f(x) = |x| + 2 \quad (i)$$

حل: مرحلہ I: قدروں کا جدول بنائیے۔

حل: مرحلہ I: قدروں کا جدول بنائیے۔

x	-4	-2	0	3	5...
f(x)	7	5	3	0	2...

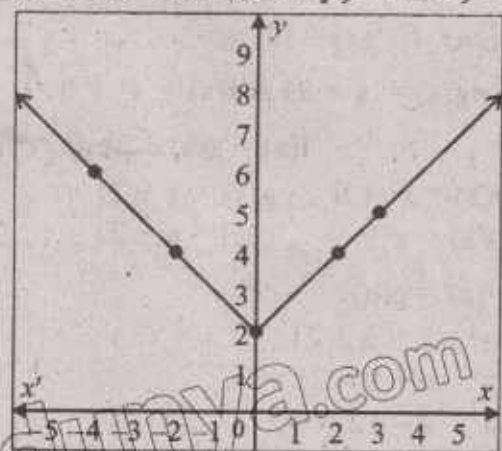
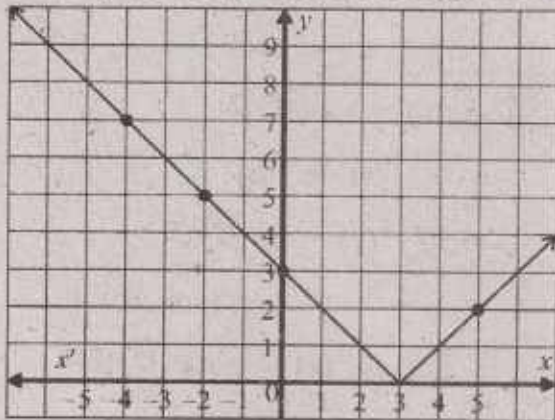
x	-4	-2	0	3	4...
g(x)	6	4	2	5	6...

مرحلہ II: مرتب جوڑوں کو گراف پر ظاہر کیجیے۔

مرحلہ II: مرتب جوڑوں کو گراف پر ظاہر کیجیے۔

مرحلہ III: مرتب جوڑوں کو ملا کر V شکل کا گراف بنائیے۔

مرحلہ III: مرتب جوڑوں کو ملا کر V شکل کا گراف بنائیے۔

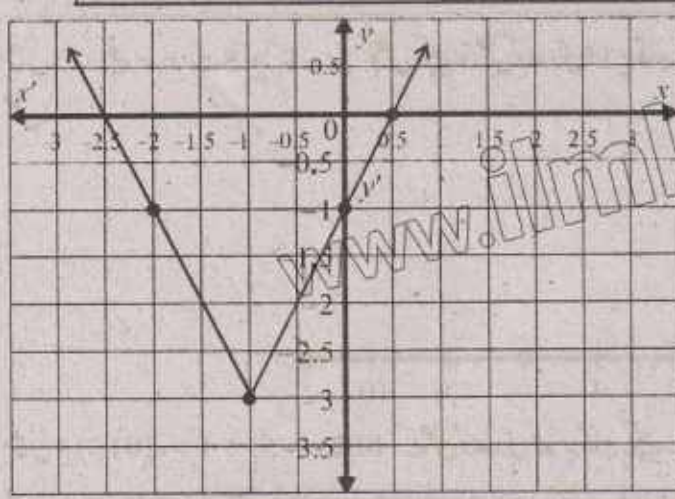


مثال 11: $f(x) = 2|x+1| - 3$ کا گراف بنائیے۔

حل: $f(x) = 2|x+1| - 3$

مرحلہ I: قدروں کا جدول بنائیے۔

x	-2	-1	0	0.5
f(x)	-1	-3	-1	0...



مرحلہ II: ایک مساوی کو گراف پر ظاہر کیجیے۔

مرحلہ III: مترتب جوڑوں کو ملا کر نقطہ ۷ کا گراف بنائیے۔

نوٹ کریں کہ ۱ کے گراف کا اس (-1, -3) ہے اور گرافے خط ۱ کے گروسمیٹرک ہے۔

ایک متغیر میں مطلق قدر والی یک درجی مساوات کا حل (Solution of Absolute Valued Linear Equation in One Variable)

4.3

ایک متغیر میں مطلق قدر والی یک درجی مساوات ایسی مساوات ہوتی ہے جس میں مطلق قدر کو کسی یک درجی جملے پر لاگو کیا جاتا ہے۔

مثال 12: $2|x - 3| = 16$ کو حل کیجیے اور عددی خط پر حل کو ظاہر کیجیے۔

$$2|x - 3| = 16$$

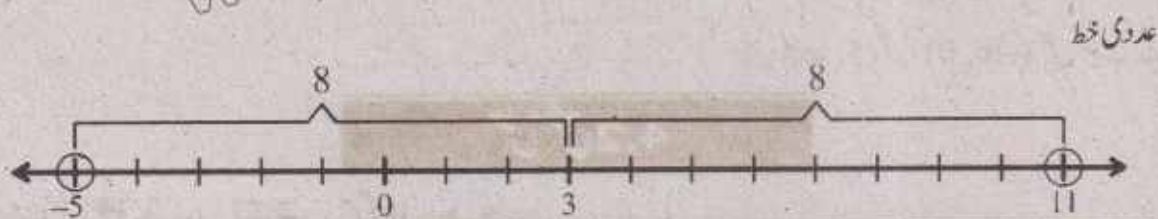
$$|x - 3| = 8$$

$$\pm (x - 3) = 8 \quad \text{یا} \quad x - 3 = \pm 8$$

$$x - 3 = 8 \quad \text{یا} \quad x - 3 = -8$$

$$x = 11 \quad \text{یا} \quad x = -5$$

$$\text{حل: } \{11, -5\}$$



ایک متغیر میں مطلق قدر والی یک درجی غیر مساوات کا حل (Solution of Absolute Valued Linear Inequality in One Variable)

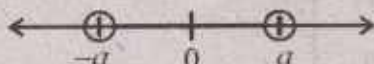
4.4

ایک متغیر میں مطلق قدر والی یک درجی غیر مساوات ایسی غیر مساوات ہوتی ہے جس میں صرف ایک متغیر کے ساتھ یک درجی جملے کی مطلق قدر

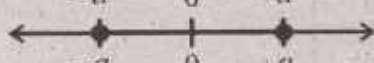
شامل ہوتی ہے۔

اس کی شکلیں یہ ہو سکتی ہیں: $|ax + b| < 0$, $|ax + b| > 0$, $|ax + b| \geq 0$, $|ax + b| \leq 0$

نوٹ:



(i) $-a < x < a$ ہے (a, a) کے



(ii) $a < x < a$ ہے (a, a) کے



(iii) $x < -a$ یا $x > a$ ہے $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ کے

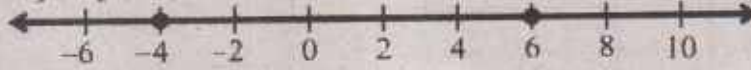


(iv) $x < -a$ یا $x > a$ ہے $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ کے

مثال 13: غیر مساوات $|x - 1| \geq 5$ کے حل کیجیے اور حل کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔
حل:

$$\begin{aligned} |x - 1| &\geq 5 \\ \pm(x - 1) &\geq 5 \\ -(x - 1) &\geq 5 \quad \text{یا} \quad x - 1 \geq 5 \\ x - 1 &\leq -5 \quad \text{یا} \quad x - 1 \geq 5 \\ x &\leq -4 \quad \text{یا} \quad x \geq 6 \end{aligned}$$

حل سیٹ ہے $(-\infty, -4] \cup [6, \infty)$



مثال 14: $40|2x - 5| + 1 > 201$ کے حل کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

حل: سب سے پہلے مطلق قدر والے جملے کو غیر مساوات کے ایک طرف کیجیے۔

$$40|2x - 5| + 1 > 201$$

$$40|2x - 5| > 200$$

$$\frac{40|2x - 5|}{40} > \frac{200}{40}$$

(دونوں اطراف 40 سے تقسیم کرنے سے)

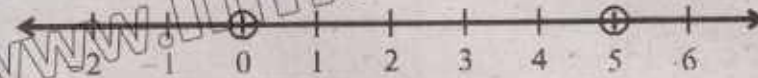
$$|2x - 5| > 5$$

$$\pm(2x - 5) > 5$$

$$-(2x - 5) > 5 \quad \text{یا} \quad 2x - 5 > 5$$

$$2x - 5 < -5 \quad \text{یا} \quad 2x > 10$$

$$x < 0 \quad \text{یا} \quad x > 5$$



پس، $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$ حل سیٹ ہے۔

حل مشق 4.2

1- درج ذیل مطلق قدر والے تقاطعوں کے گراف بنائیے۔

$$f(x) = |x - 2| \quad (i)$$

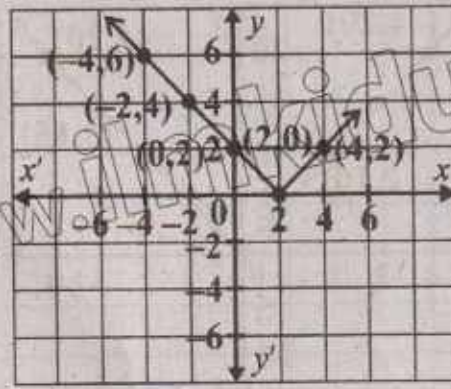
$$f(x) = |x - 2|$$

حل:

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = x - 2 $	$(x, f(x))$
-4	$f(x) = -4 - 2 = -6 = 6$	$(-4, 6)$
-2	$f(x) = -2 - 2 = -4 = 4$	$(-2, 4)$
0	$f(x) = 0 - 2 = -2 = 2$	$(0, 2)$
2	$f(x) = 2 - 2 = 0 = 0$	$(2, 0)$
4	$f(x) = 4 - 2 = 2 = 2$	$(4, 2)$

اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف کو بنائیں۔



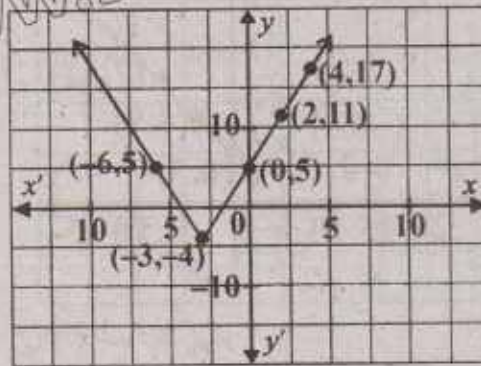
$$f(x) = 3|x+3| - 4 \quad (\text{ii})$$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 3|x+3| - 4$

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = 3 x+3 - 4$	(x, f(x))
-6	$f(x) = 3 -6+3 - 4 = 3 -3 - 4 = 3(3) - 4 = 5$	(-6, 5)
-3	$f(x) = 3 -3+3 - 4 = 3 0 - 4 = 3(0) - 4 = -4$	(-3, -4)
0	$f(x) = 3 0+3 - 4 = 3(3) - 4 = 9 - 4 = 5$	(0, 5)
2	$f(x) = 3 2+3 - 4 = 3 5 - 4 = 3(5) - 4 = 11$	(2, 11)
4	$f(x) = 3 4+3 - 4 = 3 7 - 4 = 3(7) - 4 = 17$	(4, 17)

اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف کو بنائیں۔



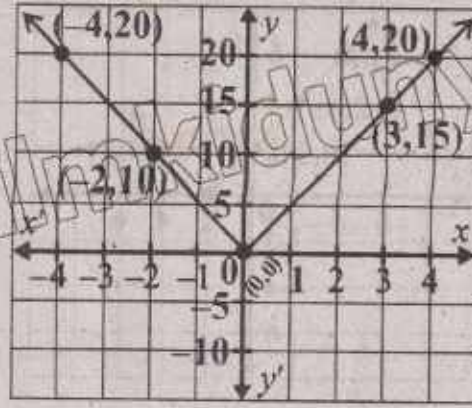
$$f(x) = 5|x| \quad (\text{iii})$$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 5|x|$

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = 5 x $	(x, f(x))
-4	$f(x) = 5 -4 = 5(4) = 20$	(-4, 20)
-2	$f(x) = 5 -2 = 5(2) = 10$	(-2, 10)
0	$f(x) = 5 0 = 5(0) = 0$	(0, 0)
3	$f(x) = 5 3 = 5(3) = 15$	(3, 15)
4	$f(x) = 5 4 = 5(4) = 20$	(4, 20)

اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف کو بنائیں۔

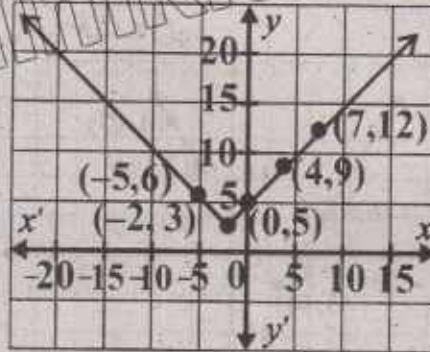


$$f(x) = |x + 2| + 3 \quad (\text{iv})$$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = |x + 2| + 3$

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = x + 2 + 3$	$(x, f(x))$
7	$f(7) = 7 + 2 + 3 = 9 + 3 = 9 + 3 = 12$	(7, 12)
4	$f(4) = 4 + 2 + 3 = 6 + 3 = 6 + 3 = 9$	(4, 9)
0	$f(0) = 0 + 2 + 3 = 2 + 3 = 2 + 3 = 5$	(0, 5)
-2	$f(-2) = -2 + 2 + 3 = 0 + 3 = 0 + 3 = 3$	(-2, 3)
-5	$f(-5) = -5 + 2 + 3 = -3 + 3 = 3 + 3 = 6$	(-5, 6)



اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف کو بنائیں۔

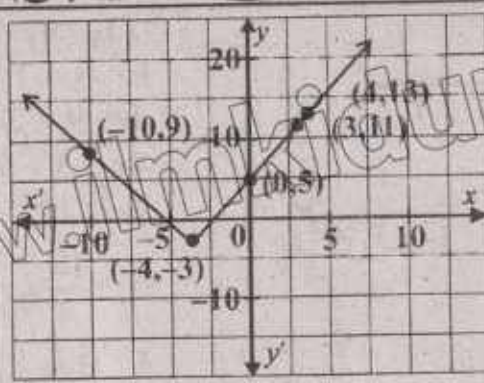
$$f(x) = 2|x + 4| - 3 \quad (\text{v})$$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 2|x + 4| - 3$

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = 2 x + 4 - 3$	$(x, f(x))$
-10	$f(-10) = 2 -10 + 4 - 3 = 2 -6 - 3 = 2(6) - 3 = 9$	(-10, 9)
-4	$f(-4) = 2 -4 + 4 - 3 = 2 0 - 3 = 2(0) - 3 = -3$	(-4, -3)
0	$f(0) = 2 0 + 4 - 3 = 2 4 - 3 = 2(4) - 3 = 5$	(0, 5)
3	$f(3) = 2 3 + 4 - 3 = 2 7 - 3 = 2(7) - 3 = 11$	(3, 11)
4	$f(4) = 2 4 + 4 - 3 = 2 8 - 3 = 2(8) - 3 = 13$	(4, 13)

اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف کو بنائیں۔

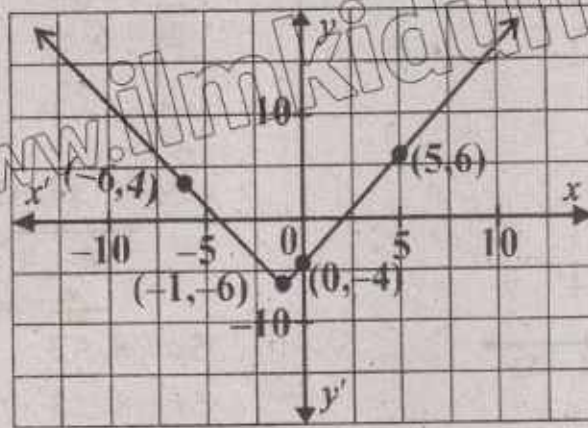


$$f(x) = 2|x+1| - 6 \quad (\text{vi})$$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 2|x+1| - 6$ قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = 2 x+1 - 6$	$(x, f(x))$
-6	$f(x) = 2 -6+1 - 6 = 2 -5 - 6 = 2(5) - 6 = 4$	$(-6, 4)$
-1	$f(x) = 2 -1+1 - 6 = 2 0 - 6 = 2(0) - 6 = -6$	$(-1, -6)$
0	$f(x) = 2 0+1 - 6 = 2 1 - 6 = 2(1) - 6 = -4$	$(0, -4)$
5	$f(x) = 2 5+1 - 6 = 2 6 - 6 = 6$	$(5, 6)$

اوپر دیے گئے جدول کو غما کر کے اور گراف کو بنائیں۔



$$2x+1 = \pm 7$$

$$2x+1 = 7 \text{ یا } 2x+1 = -7$$

$$2x = 7 - 1$$

$$2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

$$\text{یا } 2x+1 = -7$$

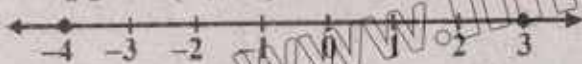
$$\text{یا } 2x = -7 - 1$$

$$\text{یا } 2x = -8$$

$$\text{یا } x = \frac{-8}{2}$$

$$\text{یا } x = -4$$

$$\text{حل سیٹ} = \{3, -4\}$$



$$|4x-9| = 3 \quad (\text{iii})$$

$$|4x-9| = 3$$

حل:

2- حل کیجیے اور حل کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

$$|x-2| = 6 \quad (\text{i})$$

حل:

$$|x-2| = 6$$

$$x-2 = \pm 6$$

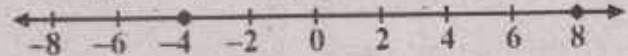
$$x-2 = 6 \text{ یا } x-2 = -6$$

$$x-2 = 6 \text{ یا } x-2 = -6$$

$$x = 6+2 \text{ یا } x = -6+2$$

$$x = 8 \text{ یا } x = -4$$

$$\text{حل سیٹ} = \{8, -4\}$$



$$|2x+1| = 7 \quad (\text{ii})$$

$$|2x+1| = 7$$

حل:

$$\pm (3x - 2) \leq 12$$

$$3x - 2 \leq 12 \quad \text{یا} \quad -(3x - 2) \leq 12$$

$$3x - 2 \leq 12 \quad \text{یا} \quad 3x - 12 \geq -12$$

$$3x \leq 12 + 2 \quad \text{یا} \quad 3x \geq -12 + 12$$

$$3x \leq 14 \quad \text{یا} \quad 3x \geq 0$$

$$x \leq \frac{14}{3} \quad \text{یا} \quad x \geq -\frac{0}{3}$$

$$x \leq 4\frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad x \geq -3\frac{1}{3}$$

$$-3\frac{1}{3} \leq x \leq 4\frac{2}{3}$$

$$\text{لہذا،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$$

$$\text{پس،}$$

$$\frac{2}{2} \left| \frac{3}{2}x - 5 \right| < \frac{4}{2}$$

$$\left| \frac{3}{2}x - 5 \right| < 2$$

$$\pm \left(\frac{3}{2}x - 5 \right) < 2$$

$$\frac{3}{2}x - 5 < 2 \quad \text{یا} \quad -\left(\frac{3}{2}x - 5 \right) < 2$$

$$\frac{3}{2}x - 5 < 2 \quad \text{یا} \quad \frac{3}{2}x - 5 > -2$$

$$\frac{3}{2}x < 2 + 5 \quad \text{یا} \quad \frac{3}{2}x > -2 + 5$$

$$\frac{3}{2}x < 7 \quad \text{یا} \quad \frac{3}{2}x > 3$$

$$x < 7 \times \frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad x > 3 \times \frac{2}{3}$$

$$x < \frac{14}{3} \quad \text{یا} \quad x > 2$$

$$x < 4\frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad 2 < x < \frac{14}{3}$$

$$\text{لہذا،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left(2, 4\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left(2, 4\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left(2, 4\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left(2, 4\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left(2, 4\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left(2, 4\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left(2, 4\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left(2, 4\frac{2}{3}\right)$$

تفاعل پر مشتمل حقیقی زندگی کے مسائل حل کرنا

4.5

(Solving Real-Life Problems Involving Function)

تفاعل کا استعمال حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کرنے کے لیے بڑے پیمانے پر کیا جاتا ہے جیسے کہ مالیات، نقل و حمل اور فروخت کے شعبوں میں۔ مالیات میں تفاعل آمدنی، اخراجات، سود یا واپس کے ساتھ منافع کو ظاہر کرتے ہیں۔ نقل و حمل میں تفاعل فاصلے، رفتار اور وقت کے درمیان تعلق کو بیان کر سکتے ہیں۔ جس سے سفر کے اوقات یا ایندھن کے استعمال کا حساب لگانے میں مدد ملتی ہے۔ کاروبار میں تفاعل فروخت شدہ اشیاء کی تعداد کی بنیاد پر آمدنی، لاگت اور منافع کے ماڈل بنانے کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ ان مسائل کو حل کرنے میں متعلقہ متغیرات کی شناخت کرنا، ان کے تعلق کو ایک تفاعل یا مساوات کے طور پر ظاہر کرنا اور نامعلوم قدروں کو معلوم کرنا، فیصلے کرنا یا نتائج کی پیش گوئی کرنے کے لیے الجبری طریقے استعمال کرنا شامل ہے۔

مثال 15: فرض کیا $E(n)$ (روپوں میں) کا تفاعل ہے، جہاں n دنوں کی تعداد ہے۔ اگر ایک مزدور 10 دن کام کرتا ہے تو اس کی آمدنی معلوم کیجیے۔

$$E(n) = 1,500n$$

$$E(10) = 1,500 \times 10$$

$$= \text{Rs. } 15,000$$

اگر مزدور 10 دن کام کرتا ہے تو اس کی آمدنی ہوگی:

مثال 16: فرض کیا $f(x) = 200 + 15x$ ٹیکسی کے کرائے (روپوں میں) کا تفاعل ہے جہاں x کلومیٹر کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ 50 کلومیٹر کے فاصلے کے لیے مطلوبہ کرایہ معلوم کیجیے۔

$$f(x) = 200 + 15x$$

$$= f(50) = 200 + 15 \times 50$$

$$= 200 + 750 = \text{Rs. } 950$$

مطلوبہ کرایہ

مطلق قدر والے تفاعل پر مشتمل حقیقی زندگی کے مسائل حل کرنا

4.6

(Solving Real-Life Problems Involving Absolute Valued Functions)

مطلق قدر والے تفاعل سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کرنے کے لیے ضروری ہے جہاں فاصلہ، وسعت یا اتار چڑھاؤ شامل ہوں چاہے سمت کوئی بھی ہو۔ توانائی کی لہروں، بجلی، آواز، درجہ حرارت، لہروں کے تجزیہ میں مطلق قدر تفاعل لہر کی وسعت یا شدت کے ماڈل بناتے ہیں۔ طبیعیات اور انجینئرنگ میں، وسعت کو اکثر قوت، چارج یا ویکٹر کی جسامت کو بیان کرنے کے لیے مطلق قدروں کا استعمال کرتے ہوئے ظاہر کیا جاتا ہے جو سمت سے آزاد ہوتا ہے۔ فاصلہ سے متعلق مسائل میں، کسی حوالہ نقطہ سے کسی چیز کے مکمل ہونے کی طرح، مطلق قدر تفاعل یہ پیمائش کرتے ہیں کہ ایک مقدار دوسری مقدار سے کتنی دور ہے، اس بات کو یقینی بناتے ہوئے کہ قدر ہمیشہ غیر منفی رہے۔ یہ تفاعل مسائل یا دو اصطلاحات جہد ملی کے ساتھ حالات کو بیان کرنے میں مدد کرتے ہیں۔

مثال 17: ایک حساس برقی آلہ 220V پر کام کرتا ہے لیکن 5V تک اتار چڑھاؤ کو برداشت کرتا ہے۔ یہ حالت $|V - 220| \leq 5$ کے ذریعے ماڈل کی گئی ہے قابل قبول وولٹیج کی حد کیا ہے؟

$$|V - 220| \leq 5$$

$$-5 \leq V - 220 \leq 5$$

$$-5 + 220 \leq V \leq 5 + 220 \quad \text{یا} \quad 215 \leq V \leq 225$$

لہذا، قابل قبول وولٹیج 215V اور 225V کے درمیان ہے۔

مثال 18: ایک زلزلہ سینسر اس وقت انتخابہ جاری کرتا ہے جب ریکارڈ شدہ شدت محفوظ سطح 4.5 سے 1.2 یونٹس کے فرق کے ساتھ ہو۔ حالت کو

$$|M - 4.5| > 1.2$$

$$|M - 4.5| > 1.2$$

$$\pm (M - 4.5) > 1.2$$

$$-(M - 4.5) > 1.2 \quad \text{یا} \quad M - 4.5 > 1.2$$

$$M - 4.5 < -1.2 \quad \text{یا} \quad M - 4.5 > 1.2$$

$$M < 3.3 \quad \text{یا} \quad M > 5.7$$

جب $M < 3.3$ یا $M > 5.7$ ہو تو سینسر انتخابہ جاری کرے گا۔

حل مشق 4.3

- 1- ایک تفاعل $B(t) = 5,000 + 200t$ جو t مہینوں کے بعد کل بینس (روپوں میں) ظاہر کرتا ہے۔ 6 مہینوں کے بعد بینس کتنا ہوگا؟

$$B(t) = 5,000 + 200t$$

حل: دیا گیا تفاعل ہے

تفاعل میں 6 درج کرنے سے

$$B(6) = 5,000 + 200(6)$$

$$B(6) = 5,000 + 1200$$

$$B(6) = 6,200$$

لہذا، روپے 6,200 = بینس

- 2- ایک تفاعل $f(k) = 150 + 20k$ جو k کلومیٹر کی مسافت کے لیے کل کرائے (روپوں میں) کو ظاہر کرتا ہے۔ 12 کلومیٹر کی سواری کے لیے کتنا کرایہ ہوگا؟

$$f(k) = 150 + 20k$$

حل: دیا گیا تفاعل ہے

تفاعل میں 12 درج کرنے سے

$$f(12) = 150 + 20(12)$$

$$f(12) = 150 + 240$$

$$f(12) = 390$$

پس، 12 کلومیٹر کی سواری کے لیے کرایہ 390 روپے ہوگا۔

- 3- فینس صوفہ سیٹ بنانے کی مقررہ لاگت 5500 روپے ہے، جسے $f(n) = 5500n$ کے طور پر ماڈل کیا گیا ہے، جہاں n صوفہ سیٹوں کی تعداد ہے۔ 50 صوفہ سیٹوں کی لاگت معلوم کیجیے۔

$$f(n) = 5500n$$

حل: دیا گیا تفاعل ہے

تفاعل میں 50 درج کرنے سے

$$f(50) = 5500(50)$$

$$f(50) = 275,000$$

پس، 50 صوفہ سیٹوں کی کل قیمت 275,000 روپے ہے۔

- 4- ایک تفاعل $T(d) = \frac{d}{60}$ جو d کلومیٹر کا فاصلہ T گھنٹوں میں طے کرنے کو ظاہر کرتا ہے۔ 180 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں کتنا وقت لگے گا؟

$$T(d) = \frac{d}{60}$$

حل: (دیا گیا تفاعل ہے)

تفاعل میں 180 درج کرنے سے

$$T(180) = \frac{180}{60}$$

$$T(180) = 3$$

پس، 180 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں 3 گھنٹے لگیں گے۔

- 5۔ ایک کمپنی انکوڈنگ کے کام کے لیے 100 روپے وصول کرتی ہے اس کے علاوہ کمپنی چھاپے گئے ہر صفحے کے 5 روپے وصول کرتی ہے۔ تفاعل کا ماڈل $f(x) = 100 + 5x$ ہے، جہاں x چھاپے گئے صفحات کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ کمپنی 55 صفحات کی انکوڈنگ اور پرنٹنگ کے کام کے لیے کتنا معاوضہ وصول کرے گی؟

حل: دیا گیا تفاعل ہے
تفاعل میں 55 x درج کرنے سے

$$f(55) = 100 + 5(55)$$

$$f(55) = 100 + 275$$

$$f(55) = 375$$

$$\text{روپے کل وصولی} = \text{Rs. } 375$$

پس، کمپنی 55 صفحات کی انکوڈنگ اور پرنٹنگ کے کام کے لیے، 375 روپے وصول کرے گی۔

- 6۔ ایک کیمیائی تفاعل 37°C پر مستحکم ہو جاتا ہے۔ یہ عمل اس وقت ضرور رکنا چاہیے جب درجہ حرارت میں انحراف 2.5°C سے زیادہ ہو جائے۔ اس حالت کو $|T - 37^\circ| > 2.5^\circ$ کے طور پر ماڈل کیا گیا ہے، جہاں T درجہ حرارت ہے۔ درجہ حرارت کی کن قیمتوں کے لیے عمل کو روک دینا چاہیے؟

$$|T - 37^\circ| > 2.5^\circ$$

$$T - 37 > \pm 2.5^\circ$$

$$T - 37 > 2.5 \text{ یا } T - 37 < -2.5$$

$$T > 2.5 + 37 \text{ یا } T < -2.5 + 37$$

$$T > 39.5 \text{ یا } T < 34.5$$

اگر درجہ حرارت 39.5°C سے اوپر یا 34.5°C سے نیچے ہو تو عمل روک دینا چاہیے۔
 $T < 34.5^\circ\text{C}$ یا $T > 39.5^\circ\text{C}$

- 7۔ ایک فیکٹری دھاتی سلاخیں تیاری کرتی ہے جن کی لمبائی 2.5 میٹر ہونی چاہیے جس میں ± 0.04 میٹر کا فرق قابل برداشت ہے۔ اس حالت کو مطلق قدر والی غیر مساوات $|x - 2.5| \leq 0.04$ سے ماڈل کیا گیا ہے۔ قابل قبول لمبائیوں کی سعت کیا ہے؟

$$|x - 2.5| \leq 0.04$$

$$x - 2.5 \leq \pm 0.04$$

$$x - 2.5 \leq 0.04 \text{ یا } x - 2.5 \geq -0.04$$

$$x \leq 0.04 + 2.5 \text{ یا } x \geq -0.04 + 2.5$$

$$x \leq 2.54 \text{ یا } x \geq 2.46$$

$$2.46 \text{ m} \leq x \leq 2.54 \text{ m}$$

- 8۔ ایک مشین کے پرزے کو اس طرح سیدھ میں کیا جانا چاہیے کہ اس کا مرکز بالکل 0 پر ہو۔ اگر یہ 0.1 ملی میٹر سے زیادہ اپنے مرکز سے ہٹ جائے تو پرزے کو مسترد کر دیا جاتا ہے۔ اس حالت کو $|x| > 0.1$ کے ذریعے ماڈل کیا گیا ہے۔ مرکز کی کون سی حالتیں مسترد ہونے کا سبب بنتی ہیں؟

$$|x| > 0.1$$

$$x > \pm 0.1$$

$$x > 0.1 \text{ یا } x < -0.1$$

لہذا، کسی بھی مقام کے لیے جو 0.1 ملی میٹر سے زیادہ یا 0.1 ملی میٹر سے کم ہو، مسترد کر دیا جاتا ہے۔ یعنی

$$x > 0.1 \text{ mm} \text{ یا } x < -0.1 \text{ mm}$$

حل اعاده مشق 4

1- درج ذیل سوالات کے دیے گئے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) اگر $f(x) = \frac{5x-6}{3}$ ہو تو $f(3)$ کی قیمت کیا ہے؟

- (a) 1 (b) 3 (c) 9 (d) 15

(ii) X سے Y تفاعل f کو _____ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

- (a) $f: XY$ (b) $f: Y \rightarrow X$ (c) $f: X \rightarrow Y$ (d) $f: \frac{X}{Y}$

(iii) $(f \circ g)(x)$ برابر ہے:

- (a) $(f+g)(x)$ (b) $(f-g)(x)$ (c) $f(g(x))$ (d) $f(x) \div g(x)$

(iv) اگر $f(x) = 2x + 3$ اور $g(x) = x + 1$ ہوں تو $f(x) + g(x)$ برابر ہے:

- (a) $3x$ (b) $3x + 4$ (c) 4 (d) $2x^2 + 3$

(v) اگر $f(x) = 5x + 2$ اور $h(x) = 2x - 2$ ہوں تو $f(x) - h(x)$ برابر ہے:

- (a) $3x$ (b) $5x^2 - 4$ (c) $3x + 4$ (d) $-3x - 4$

(vi) اگر $f(x) = 3x + 1$ اور $g(x) = 2x$ ہوں تو $f(x) \times g(x)$ برابر ہے:

- (a) $6x + 2x$ (b) $5x^2 + 1$ (c) $x + 1$ (d) $6x^2 + 2x$

(vii) اگر $x \neq -2$, $f(x) = x^2 - 4$ اور $g(x) = x + 2$ ہوں تو $\frac{f(x)}{g(x)}$ برابر ہے:

- (a) $\frac{1}{x-2}$ (b) $\frac{1}{x+2}$ (c) $x+2$ (d) $x-2$

(viii) مطلق قدر والے تفاعل کے گراف کی شکل کیا ہوتی ہے؟

- (a) شکل U (b) شکل V (c) شکل L (d) شکل M

(ix) اگر گراف تفاعل کو ظاہر کرے تو ہر عمودی خط کو تفاعل کو _____ پر قطع کرنا چاہیے۔

- (a) 4 نقاط (b) 3 نقاط (c) 2 نقاط (d) 1 نقطہ

(x) اگر $f(x) = x^3$ ہوں تو $f(-2)$ برابر ہے:

- (a) -8 (b) 8 (c) 4 (d) -6

جوابات

- (i) 3 (ii) $f: X \rightarrow Y$ (iii) $f(g(x))$ (iv) $3x + 4$ (v) $3x + 4$

- (vi) $6x^2 + 2x$ (vii) $x - 2$ (viii) شکل V (ix) 1 نقطہ (x) -8

2- اگر $f(x) = 25 - x^2$ اور $g(x) = 5 + x$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(i) $f(x) + g(x)$

حل: دیا گیا ہے $g(x) = 5 + x$ اور $f(x) = 25 - x^2$

(معلوم) $f(x) + g(x)$

$$= (25 - x^2) + (5 + x)$$

$$= 25 - x^2 + 5 + x$$

$$= -x^2 + x + 25 + 5$$

$$= -x^2 + x + 30$$

$$= f(14 + 2x)$$

$$= (14 + 2x)^3$$

$$(ii) (g \circ f)(x)$$

$$f(x) = x^3 \text{ اور } g(x) = 14 + 2x \text{ دیا گیا ہے۔ حل:}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(x^3)$$

$$= 14 + 2x^3 = 2(7 + x^3)$$

$$(iii) f(f \circ f)(x)$$

$$f(x) = x^3 \text{ اور } g(x) = 14 + 2x \text{ دیا گیا ہے۔ حل:}$$

$$f(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= f(x^3)$$

$$= (x^3)^3$$

$$= x^9$$

$$(iv) (g \circ g)(x)$$

$$f(x) = x^3 \text{ اور } g(x) = 14 + 2x \text{ دیا گیا ہے۔ حل:}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x))$$

$$= g(14 + 2x) = 14 + 2(14 + 2x)$$

$$= 14 + 28 + 4x = 42 + 4x$$

$$= 2(21 + 2x) = 2(2x + 21)$$

$$f^{-1}(x) \text{ معلوم کیجیے اگر}$$

$$f(x) = 9x - 1$$

$$f(x) = 9x - 1$$

$$y = 9x - 1 \quad [y \text{ کو } f(x) \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}]$$

$$9x - 1 = y$$

$$9x = y + 1$$

$$x = \frac{y+1}{9} \quad [x \text{ کے لیے حل کرنے سے}]$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{9} \quad \because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{9} \quad [y \text{ کو } x \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}]$$

$$f(x) = \frac{5}{x-1}, x \neq 1 \quad (ii)$$

$$f(x) = \frac{5}{x-1}, x \neq 1$$

حل: یہاں

$$y = \frac{5}{x-1} \quad [y \text{ کو } f(x) \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}]$$

$$y(x-1) = 5$$

$$(x-1) = \frac{5}{y}$$

$$(ii) f(x) - g(x)$$

$$f(x) = 25 - x^2 \text{ اور } g(x) = 5 + x \text{ دیا گیا ہے۔ حل:}$$

$$f(x) - g(x)$$

$$= (25 - x^2) - (5 + x)$$

$$= 25 - x^2 - 5 - x$$

$$= -x^2 - x + 25 - 5$$

$$= -x^2 - x + 20$$

$$(iii) f(x) g(x)$$

$$f(x) = 25 - x^2 \text{ اور } g(x) = 5 + x \text{ دیا گیا ہے۔ حل:}$$

$$f(x) g(x)$$

$$= (25 - x^2)(5 + x)$$

$$= 25(5 + x) - x^2(5 + x)$$

$$= 125 + 25x - 5x^2 - x^3$$

$$= -x^3 - 5x^2 + 25x + 125$$

$$(iv) \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f(x) = 25 - x^2 \text{ اور } g(x) = 5 + x \text{ دیا گیا ہے۔ حل:}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{25 - x^2}{(5 + x)} = \frac{(5)^2 - (x)^2}{(5 + x)}$$

$$= \frac{(5 + x)(5 - x)}{(5 + x)}$$

$$= \frac{(5 + x)(5 - x)}{(5 + x)}$$

$$= 5 - x$$

$$(v) f(7)$$

$$f(x) = 25 - x^2$$

$$f(7) = 25 - (7)^2$$

$$= 25 - 49$$

$$= -24$$

$$(vi) g(-8)$$

$$g(x) = 5 + x$$

$$g(-8) = 5 + (-8)$$

$$= 5 - 8 = -3$$

$$3 \text{ اگر } f(x) = x^3 \text{ اور } g(x) = 14 + 2x \text{ تو معلوم کیجیے۔}$$

$$(i) (f \circ g)(x)$$

$$f(x) = x^3 \text{ اور } g(x) = 14 + 2x \text{ دیا گیا ہے۔ حل:}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$x = y^2 + 5 \quad [\text{x کے لیے حل کرنے سے}]$$

$$f^{-1}(y) = y^2 + 5 \quad [\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$$

$$f^{-1}(x) = x^2 + 5 \quad [\text{x کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے}]$$

$$f(x) = \frac{3-x}{2} \quad (\text{iv})$$

$$f(x) = \frac{3-x}{2} \quad \text{حل:}$$

$$y = \frac{3-x}{2} \quad [f(x) \text{ کو } y \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}]$$

$$\frac{3-x}{2} = y \quad \text{یا}$$

$$3-x = 2y$$

$$-x = 2y - 3$$

$$x = -2y + 3$$

[x کے لیے حل کرنے سے]

$$f^{-1}(y) = -2y + 3 \quad [\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$$

$$f^{-1}(x) = -2x + 3 \quad [x \text{ کو } y \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}]$$

$$f^{-1}(x) = 3 - 2x$$

$$x = \frac{5}{y}$$

[x کے لیے حل کرنے سے]

$$f^{-1}(y) = \frac{5+y}{y} \quad \therefore y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5+x}{x} \quad [x \text{ کو } y \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}]$$

$$f(x) = \sqrt{x-5}, \quad x \geq 5 \quad (\text{iii})$$

$$f(x) = \sqrt{x-5} \quad \text{حل:}$$

$$y = \sqrt{x-5} \quad [f(x) \text{ کو } y \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}]$$

$$y = \sqrt{x-5}$$

$$(\sqrt{x-5})^2 = y^2 \quad \text{دونوں اطراف کا مربع لینے سے}$$

$$x-5 = y^2$$

5- درج ذیل مطلق قدر والے تقاطعوں کا گراف بنائیے۔

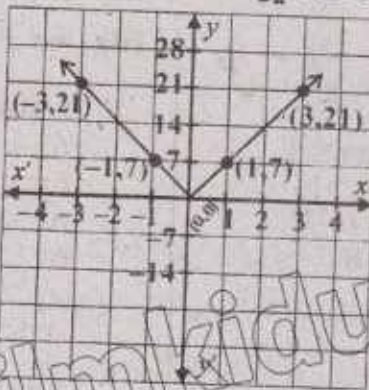
$$f(x) = 7|x| \quad (\text{i})$$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 7|x|$

قیمتوں کا جدول

x	f(x) = 7 x	(x, f(x))
-3	f(x) = 7 -3 = 7(3) = 21	(-3, 21)
-1	f(x) = 7 -1 = 7(1) = 7	(-1, 7)
0	f(x) = 7 0 = 7(0) = 0	(0, 0)
1	f(x) = 7 1 = 7(1) = 7	(1, 7)
3	f(x) = 7 3 = 7(3) = 21	(3, 21)

اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف بنائیں۔



$$f(x) = |x+6| - 2 \quad (\text{ii})$$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = |x+6| - 2$

قیمتوں کا جدول

x	f(x) = x+6 - 2	(x, f(x))
-10	f(x) = -10+6 - 2 = -4 - 2 = 4 - 2 = 2	(-10, 2)

(ii) $f^{-1}(x)$ کی قیمت جس کے لیے $f(x) = f^{-1}(x)$

$f(x) = 3x + 7$

$y = 3x + 7$ | x کو y کے ساتھ تبدیل کرنے کے لیے

$3x + 7 = y$

$3x = y - 7$

$x = \frac{y-7}{3}$

| x کے لیے حل کرنے کے لیے

$f^{-1}(y) = \frac{y-7}{3} \because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$

| y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے کے لیے

$f(x) = f^{-1}(x)$

(معلوم)

$3x + 7 = \frac{x-7}{3}$

$3(3x + 7) = x - 7$

$9x + 21 = x - 7$

$9x - x = -7 - 21$

$8x = -28$

$x = \frac{-28}{8} = \frac{-7}{2}$

(ii) $f^{-1}(x)$

$f(x) = 3x + 7$

$y = 3x + 7$ | x کو y کے ساتھ تبدیل کرنے کے لیے

$3x + 7 = y$

$3x = y - 7$

$x = \frac{y-7}{3}$

| x کے لیے حل کرنے کے لیے

$f^{-1}(y) = \frac{y-7}{3} \because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$

| y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے کے لیے

9- ایک کمپنی ہر فروخت شدہ چیز پر 100 روپے منافع کماتی ہے اور اس کا ماہانہ خرچ 10,000 روپے ہے۔ تفاعل

$x \cdot P(x) = 100x - 10,000$ اشیا فروخت کرنے کے منافع کو ظاہر کرتا ہے۔ ہر ایک ایون (منافع = 0) تک پہنچنے کے لیے

کتنی اشیا فروخت کرنا ضروری ہے؟

حل: (دیا گیا تفاعل)

$P(x) = 100x - 10,000$

$0 = 100x - 10,000$

$-100x = -10,000$

$100x = 10,000$

$x = \frac{10000}{100}$

$x = 100$

لہذا، ہر ایک ایون (منافع = 0) تک پہنچنے کے لیے 100 اشیا کی فروخت ضروری ہے۔

10- ایک مشور کسی ایک چیز پر 15 فیصد رعایت دیتا ہے۔ تفاعل $D(p) = 0.85$ اصل قیمت p پر رعایت کے بعد کی قیمت فروخت دیتا ہے۔ اس چیز کی قیمت فروخت کیا ہے جس کی اصل لاگت 2,000 روپے ہو۔

$D(p) = 0.85$ (i)

حل:

جہاں $D(p) = 0.85$ اصل قیمت p پر 15% رعایت کے بعد قیمت فروخت کے تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔
روپے 2000 (p) دی گئی اصل قیمت

مساوات (i) میں روپے 2000 p درج کرنے سے

$$D(2000) = 0.85(2000) = 1700$$

روپے فروخت = Rs. 1700

لہذا

پس، اگر کسی چیز کی اصل قیمت 2000 روپے ہو تو 15% رعایت کے بعد اس کی قیمت 1700 روپے ہو جائے گی۔

- 11- ایک جی پی ایس سسٹم کو اس وقت درست مانا جاتا ہے۔ اگر اصل مقام رپورٹ کردہ مقام سے 6 میٹر سے زیادہ مختلف نہ ہو۔ اگر اصل مقام نقطہ $x = 100$ پر ہے۔ تو قابل قبول حد کو اس طرح بیان کیا گیا ہے $|x - r| \leq 6$ جہاں r رپورٹ شدہ مقام ہے۔ قابل قبول رپورٹ کردہ مقامات کی حد کیا ہے؟

حل: دی گئی غیر مساوات ہے

$$|x - r| \leq 6 \quad (i)$$

جہاں اصل مقام 100 x ہے۔

دی گئی غیر مساوات (i) میں $x = 100$ درج کرنے سے

$$|100 - r| \leq 6$$

اس کا مطلب ہے کہ رپورٹ کی گئی جگہ r اصل مقام 100 سے زیادہ سے زیادہ 6 میٹر تک مختلف ہو سکتی ہے۔

$$\begin{aligned} 100 - r &\leq 6 & \text{یا} & & -(100 - r) &\leq 6 \\ 100 - r &\leq 6 & & & 100 - r &\geq -6 \\ -r &\leq 6 - 100 & & & -r &\geq -6 - 100 \\ -r &\leq -94 & & & -r &\geq -106 \\ r &\geq 94 & & & r &\leq 106 \end{aligned}$$

$$94 \leq r \leq 106 \quad \text{لہذا}$$

اصل مقام 100 سے زیادہ سے زیادہ 6 میٹر ہو تو رپورٹ کی گئی جگہ کی حد 94 سے 106 کے درمیان ہونی چاہیے۔

معروضی طرز سوالات

اضافی کثیر الانتخابی سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تفلیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے کثیر الانتخابی سوالات

تفاعل

4.1

درست جواب کا انتخاب کریں۔

- ریاضیاتی طور پر سیٹ X سے سیٹ Y تک کے تفاعل کو کس طرح لکھا جاتا ہے؟
(a) $f: X \rightarrow Y$ (b) $f: Y \rightarrow X$ (c) $f: X \rightarrow Y$ (d) $f: (X, Y)$
- ریاضی سیاق و سباق میں تفاعل کا لفظ کس نے متعارف کروایا؟
(a) آئزک نیوٹن (b) رینی ڈسکارٹ (c) گوٹفرائیڈ ولہلم لیبز (d) البرٹ آئن سٹائن
- ایک تفاعل $f: X \rightarrow Y$ میں سیٹ x کو کس نام سے پکارا جاتا ہے؟
(a) ریش (b) کوڈومین (c) ڈومین (d) متغیر
- اگر $f(x) = x^2 + 3x + 1$ ہو تو $f(-2)$ کی قیمت کیا ہوگی؟
(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) 6
- اگر $f(x) = \frac{x^2 + x}{6}$ ہو تو $f(3)$ ہوگا:
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6

100 (d)

75 (c)

-6 اگر $g(y) = 3x^2 + 5x$ ہو تو $g(5)$ کی قیمت ہوگی:

35 (b)

45 (a)

-7 $f(\sqrt{3})$ کی قیمت تعادل $f(x) = (x+1)^2$ میں کیا ہوگی؟(a) $(\sqrt{3})^2$ (b) $4 + 2\sqrt{3}$ (c) $3 + 4\sqrt{2}$ (d) $3 + \sqrt{3} \sqrt{2}$ -8 اگر $f(a) = 5$ ہو تو 5 کو تعادل کا کہتے ہیں:(a) $f^{-1}(a)$

(b) ڈومین

(c) عکس

(d) قوت

-9 $f(x) = (x+1)^2$ کی رینج ہوگی۔

(a) منفی اعداد کا سیٹ

(b) صحیح اعداد کا سیٹ

(c) تمام غیر منفی اعداد کا سیٹ

(d) ڈومین کے برابر

تفاعل کے عوامل

4.1.1

-10 اگر $f(x) = 5x + 1$ اور $g(x) = -3x + 7$ ہو تب $f(x) + g(x)$ کی قیمت ہوگی:(a) $2x + 8$ (b) $8x + 8$ (c) $2x - 8$ (d) $15x + 8$ -11 اگر $f(x) = x + 4$ اور $g(x) = x - 4$ ہو تب $(f \cdot g)(x)$ ہوگا:(a) $2x^2 - 8x - 16$ (b) $2x$ (c) $x^2 + 16$ (d) $x^2 - 16$ -12 اگر $f(x) = x^2$ اور $g(x) = 2x - 1$ ہو تب $(f - g)(x)$ کی قیمت ہوگی:(a) $x^2 + 2x + 1$ (b) $-x^2 + x + 1$ (c) $x^2 - 2x$ (d) $x^2 - 2x + 1$ -13 اگر $f(x) = 3x + 2$ اور $g(x) = x - 5$ ہو تب $(f + g)(x)$ ہوگا:(a) $3x^2 - 13x - 10$ (b) $2x + 7$ (c) $4x - 3$ (d) $4x + 3$ -14 اگر $f(x) = 10x^3$ اور $g(x) = 5x$ ہو تب $\frac{f(x)}{g(x)}$ ہوگا:(a) $2x^2$ (b) $10x^4$ (c) $50x^4$ (d) $10x^2$ -15 اگر $f(x) = x^2 - 1$ اور $g(x) = x + 1$ ہو تب $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی قیمت ہوگی:(a) $x^2 - x$ (b) $x + 1$ (c) $x - 1$ (d) $x^3 - 1$ -16 اگر $f(x) = x^3 + y^3$ اور $g(x) = x + y$ ہو تب $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی قیمت کیا ہوگی؟(a) $x^2 + xy + y^2$ (b) $x^2 - xy + y^2$ (c) $(x+y)^3$ (d) $(x-y)^3$ -17 اگر $f(x) = x + k$ اور $g(x) = -3 - x$ ہو تب k کی قیمت کیا ہوگی۔ جب $f(x) + g(x) = 4$ ہو؟

(a) 12

(b) 7

(c) 9

(d) -3

-18 اگر $f(x) = x - 3$ اور $g(x) = x^2 - 2$ ہو تب $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی قیمت ہوگی:(a) $x + 3$ (b) $x - 3$ (c) $\frac{1}{x-3}$ (d) $\frac{1}{x+3}$

19- اگر $f(x) = 2x + 3$ اور $g(x) = x^2$ ہو تو $(fog)(x)$ کی قیمت ہوگی:

- (a) $2x^2 + 3$ (b) $2x + 3$ (c) $x^2 + 3$ (d) $2 + x + 3$

20- اگر $f(x) = -3x - 7$ اور $g(x) = x^3$ ہو تو $(fog)(x)$ کی قیمت ہوگی:

- (a) $3x + 7$ (b) $x^3 - x - 7$ (c) $-3x^3 - 7$ (d) $3x^3 + 7$

21- اگر ایک تفاعل ون۔ٹو۔ ون بھی ہو اور آن ٹو بھی ہو تو وہ کہلاتا ہے۔

- (a) یکتا تفاعل (b) بائی جیکٹو تفاعل (c) منفی تفاعل (d) ان ٹو تفاعل

22- ون۔ٹو۔ ون تفاعل _____ بھی کہلاتا ہے۔

- (a) انجیکٹو (b) بائی جیکٹو (c) منفی (d) مسلسل

23- اگر $g(x) = x^2$ ہو تو $(gog)(x)$ کی قیمت ہوگی:

- (a) x^3 (b) x^5 (c) x^4 (d) x^6

24- اگر $f(x) = x + 5$ ہو تو $(fof)(x)$ کی قیمت ہوگی:

- (a) $x + 10$ (b) $x - 10$ (c) $x - 25$ (d) $x + 25$

25- اگر $f(x) = x^2 + 4$ اور $g(x) = x^2$ ہو تو $(gof)(x)$ کی قیمت ہوگی:

- (a) $x + 3$ (b) $x^2 + 6$ (c) $x^2 - 4$ (d) $x^6 + 4$

معکوس تفاعل

4.1.3

26- اگر $y = f(x)$ ہو تو $y = f^{-1}(x)$ کہلاتا ہے:

- (a) $f^{-1}(x)$ کا منفی (b) $f(x)$ کا معکوس (c) $f(x)$ کا تفاعل (d) $f(x)$ کی ڈومین

27- $f(x) =$ _____ کی ڈومین

- (a) $f^{-1}(x)$ (b) $f(x)$ کا معکوس (c) $f^{-1}(x)$ کی رینج (d) $x = y$

28- اگر $f(x) = \{(2, a), (5, b)\}$ ہو تو $f^{-1}(x)$ ہوگا:

- (a) $\{(2, a), (5, b)\}$ (b) $\{(a, 2), (b, 5)\}$ (c) $\{(a, 2), (b, 5)\}$ (d) $\{(a, 5), (b, 2)\}$

29- $f^{-1}(x) =$ _____ کی ڈومین۔

- (a) $f(x)$ کی ڈومین (b) $f(x)$ کی رینج (c) $f^{-1}(x)$ کی ڈومین (d) $f^{-1}(x)$ کی رینج

30- کسی تفاعل کا معکوس صرف اسی وقت ممکن ہوتا ہے جب وہ ہو:

- (a) صرف آن ٹو (b) صرف ان ٹو (c) صرف ون۔ٹو۔ ون (d) ون۔ٹو۔ ون اور آن ٹو

31- $f(x) = 2x - 5$ کا معکوس تفاعل ہے:

- (a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x - 5}$ (b) $f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$ (c) $f^{-1}(x) = 5x + 2$ (d) $f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{2}$

32- $f(x) = x^2 + 3$ کا $f^{-1}(x)$ ہے:

- (a) $\frac{x - 3}{2}$ (b) $\sqrt{x - 3}$ (c) $\sqrt{x} + 3$ (d) $\sqrt{\frac{x - 3}{2}}$

33- اگر $f^{-1}(9)$ ہو تو $f(x)$ ہو گا: $x^2 + 1$ (a) $x^2 - 1$ (b) $x^2 + 1$ (c) $x^2 - 1$ (d)

2 (d)

8 (c)

730 (b)

3 (a)

34- $f^{-1}(x)$ کی ڈومین کیا ہوگی۔ اگر $f(x)$ کی رینج $[0, \infty)$ ہے؟

(d) $(-\infty, \infty)$

(c) $(0, \infty)$

(b) $(-\infty, 0)$

(a) $[0, \infty)$

35- اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ہو تو $f^{-1}(x)$ ہو گا:

(d) x

(c) $-x$

(b) $\frac{1}{x}$

(a) x^2

4.2 مطلق قدر والے تفاعل کا گراف

36- کسی عدد کی مطلق قیمت ہمیشہ ہوتی ہے؟

(d) صرف جفت عدد

(c) غیر منفی

(b) صرف منفی عدد

(a) منفی

37- وہ نقطہ جہاں گراف سمت تبدیل کرتا ہے وہ کہلاتا ہے:

(d) تفاعل

(c) راس

(b) رینج

(a) ڈومین

38- ایک مطلق قدر والے تفاعل کی راہی شکل کون سی درست ہے؟

(d) $g(x) = |x-h| \times k$

(c) $g(x) = a|x-h| + k$

(b) $g(x) = a|x| + k$

(a) $g(x) = a|h-x|$

39- $f(x) = |x-5|$ کے گراف کا درست مترتب جوڑا ہے:

(d) $(-1, -6)$

(c) $(3, 8)$

(b) $(4, -9)$

(a) $(-4, 9)$

40- $g(x) = |x| + 3$ کے گراف کا درست مترتب جوڑا ہے:

(d) $(3, -6)$

(c) $(5, 8)$

(b) $(0, 4)$

(a) $(6, 3)$

41- کون سا مترتب جوڑا تفاعل $f(x) = |x-1|$ کے گراف کے لیے درست نہیں ہے؟

(d) $(-6, -7)$

(c) $(-9, 10)$

(b) $(-5, 6)$

(a) $(3, 2)$

42- مساوات $|x| = 7$ کا حل ہے:

(d) کوئی حل نہیں

(c) 7 اور -7

(b) صرف 7

(a) صرف -7

43- $|x-10| = 0$ کا حل ہے:

(d) کوئی حل نہیں

(c) 10

(b) -10

(a) 10

44- $|3x| = 15$ کا حل ہے:

(d) $x = 18, x = 12$

(c) $x = 5$

(b) $x = 15$

(a) $x = 5, x = 15$

45- درج ذیل میں سے کس مساوات کے پورے حل ہیں؟

(d) $|x+2| + 5 = 2$

(c) $|x-8| = 4$

(b) $|3x| = 1$

(a) $|x| + 5 = 5$

4.4 ایک متغیر میں مطلق قدر والی ایک درجی غیر مساوات کا حل

46- $-5 \leq x \leq 5$ کے مترادف ہے:

(d) $(\infty, 5)$

(c) $(-5, \infty)$

(b) $[-5, 5]$

(a) $(-5, 5)$

-47 $a < x < a$ کے مترادف ہے:

(a, ∞) (d)

($-\infty$, a) (c)

[a, a] (b)

[a, a] (a)

-48 "x اور 0 کے درمیان فاصلہ کم از کم 10 اکائیاں ہیں" کے لیے کون سی غیر مساوات درست ہے؟

$|x| \geq 10$ (d)

$|x| > 10$ (c)

$|x| \leq 10$ (b)

$|x| < 10$ (a)

-49 $|3x - 6| \geq 9$ کا حل سیٹ ہے:

$x \leq -1$ یا $x \geq 5$ (d)

$x < 1$ یا $x > -5$ (c)

$x = 1.5$ (b) $x < 1$ یا $x < -5$ (a)

-50 $2|x| - 4 < 6$ کا حل ہے:

$-1 < x < 1$ (d)

$x < 1$ یا $x > 5$ (c)

$-5 < x < 5$ (b)

$x < 5$ (a)

جوابات

2 -5	-1 -4	3 - ذومین	-2 - گولڈ اینڈ ولیم لینز	-1 - $f: X \rightarrow Y$
$2x + 8$ -10	-9 - تمام غیر منفی اعداد کا سیٹ	-8 - عکس	-7 - $4 + 2\sqrt{3}$	-6 - 100
$x - 1$ -15	$2x^2$ -14	$4x - 3$ -13	$x^2 - 2x + 1$ -12	x^2 16 -11
$-3x^3 - 7$ -20	$2x^2 + 3$ -19	$\frac{1}{x+3}$ -18	7 -17	$x^2 - xy + y^2$ -16
$x^6 + 4$ -25	$x + 10$ -24	x^4 -23	22 -	-21 - بانی جینیوٹائٹس
ون - نوہ ون اور آن نو -30	$f(x)$ کی ریش -29	$(a, 2)$ -28	$f^{-1}(x)$ کی ریش -27	-26 - $f(x)$ کا معکوس
$\frac{1}{x}$ -35	10 -34	2 -33	$\sqrt{x-3}$ -32	$f^{-1}(x)$ $\frac{x+5}{2}$ -31
(5, 8) -40	(-4, 9) -39	$g(x) = a x-h +k$ -38	-37 - راس	-36 - غیر منفی
$ x-8 = 4$ -45	$x = 5$, $x = -5$ -44	10 -43	-7 اور 7 -42	(-6, 7) -41
$-5 < x < 5$ -50	$x \leq -1$ یا $x \geq 5$ -49	$ x \geq 10$ -48	(-a, a) -47	$ -5, 5 $ -46

اضافی مختصر سوالات

مختصر جوابی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے مختصر جوابی سوالات

تفاعل

4.1

مختصر جواب دیں۔



1- تفاعل کی تعریف کریں۔
جواب: اگر X اور Y دو غیر خالی سیٹ ہوں تو سیٹ X سے سیٹ Y تک ایک تفاعل ایسا رہا ہے جو سیٹ X کے ہر رکن کا سیٹ Y کے صرف ایک رکن سے تعلق جوڑتا ہے۔ اے $f: X \rightarrow Y$ لکھا جاتا ہے۔

2- تفاعل کی ڈومین کو بیان کریں۔

جواب: کسی تفاعل کی ڈومین ان تمام ممکنہ ان پٹ قدروں (x - قدریں) کا سیٹ ہوتی ہے جن کے لیے وہ تفاعل واضح ہو۔

10- اگر $f(x) = 3x - 7$ اور $g(x) = -x - 3$ تو

$f(x) - g(x)$ معلوم کریں۔

حل: $f(x) = 3x - 7, g(x) = -x - 3$
 $f(x) - g(x) = (3x - 7) - (-x - 3)$
 $= 3x - 7 + x + 3$
 $= 4x - 4$

11- اگر $f(x) = 7x - 3$ اور $g(x) = 2x^2 + 5$ تو $(f.g)(x)$

معلوم کریں۔

حل: $f(x) = 7x - 3, g(x) = 2x^2 + 5$
 $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
 $= (7x - 3)(2x^2 + 5)$
 $= 14x^3 + 35x - 6x^2 - 15$
 $= 14x^3 - 6x^2 + 35x - 15$

12- اگر $f(x) = x - 3$ اور $g(x) = x^2 + 4x - 21$ تو

$\frac{g(x)}{f(x)}$ معلوم کریں۔

حل: $f(x) = x - 3, g(x) = x^2 + 4x - 21$
 $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + 4x - 21}{x - 3}$
 $= \frac{x^2 + 7x - 3x - 21}{x - 3}$
 $= \frac{x(x + 7) - 3(x + 7)}{(x - 3)}$
 $= \frac{(x + 7)(x - 3)}{(x - 3)}$
 $= x + 7$

13- اگر $f(x) = a + b$ اور $g(x) = (a^2 - ab + b^2)$ تو

$f(x).g(x)$ معلوم کریں۔

حل: $f(x) = a + b, g(x) = a^2 - ab + b^2$
 $f(x).g(x) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
 $= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$
 $= a^3 + b^3$

14- اگر $f(x) = \frac{3}{x}$ اور $g(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ تو $(f+g)(x)$

معلوم کریں۔

3- تفاعل کی درجہ کو بیان کریں۔

جواب: درجہ ان تمام ممکنہ آؤٹ پٹ اعداد (y-قدریں) کا سیٹ ہوتا ہے جو تفاعل ان پٹ قدریں درجہ کرنے کے بعد پیدا کرتا ہے۔

4- اگر $f(x) = x^2 - 5x + 3$ ہو تو $f(3)$ معلوم کریں۔

حل: $f(x) = x^2 - 5x + 3$

$f(3) = (3)^2 - 5(3) + 3$

$= 9 - 15 + 3$

$= -9 + 3 + 15$

$= 12 - 15 + 3$

5- اگر $g(x) = (x - 1)^3$ ہو تو $g(-4)$ معلوم کریں۔

حل: $g(x) = (x - 1)^3$

$g(-4) = (-4 - 1)^3$

$= (-5)^3$

$= -125$

6- اگر $f(x) = 2^x$ تو $f(5)$ معلوم کریں۔

حل: $f(x) = 2^x$

$f(5) = 2^5$

$= 32$

7- تفاعل $f(x) = \frac{3}{x+2}$ کی ڈومین معلوم کریں۔

حل: چونکہ $x = 2$ تفاعل کو غیر تعریف شدہ بنا دیتا ہے۔ اس لیے اس کی ڈومین 2 کے علاوہ تمام حقیقی اعداد ہیں۔

$f(x) = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ کی ڈومین

8- تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کی ڈومین اور رینج معلوم کریں۔

جواب: ہم کسی بھی منفی یا مثبت عدد کا جذر المکعب لے سکتے ہیں۔ کوئی پابندی نہیں کہ ان پٹ یا آؤٹ پٹ کیا ہے۔

$f = (-\infty, \infty)$ تمام حقیقی اعداد کی ڈومین

$f = (-\infty, \infty)$ تمام حقیقی اعداد کی رینج

9- اگر $f(x) = 5x^2 - 3$ اور $g(x) = x^2 - 5$ ہو تو $f(x)$ اور $g(x)$ کو جمع کریں۔

حل: $f(x) = 5x^2 - 3, g(x) = x^2 - 5$

$f(x) + g(x) = (5x^2 - 3) + (x^2 - 5)$

$= 5x^2 - 3 + x^2 - 5$

$= 6x^2 - 8$

$$x = \frac{y^2 - 1}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y^2 - 1}{2} \quad \because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2} \quad \text{یہ } x \text{ کو } y \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے کے لئے ہے}$$

$$-27 \quad \text{اگر } f(x) = x^2 \text{ ہو تو } f(f^{-1}(x)) \text{ معلوم کریں۔}$$

$$\text{حل: } f(x) = x^2$$

$$y = x^2 \quad | \quad f(x) \text{ کو } y \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$x^2 = y$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{y} \quad \text{دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے}$$

$$x = y^{\frac{1}{2}} \quad (\text{کے لئے حل کرنے سے})$$

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{2}} \quad \because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{یہ } x \text{ کو } y \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x$$

$$\frac{5x^2 + y}{x^2} = \frac{y-1}{5}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{y-1}{5}} \quad \text{دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے}$$

$$x = \sqrt{\frac{y-1}{5}} \quad (\text{کے لئے حل کرنے سے})$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y-1}{5}} \quad \because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{5}} \quad \text{یہ } x \text{ کو } y \text{ کے ساتھ تبدیل کرنے سے}$$

$$-26 \quad f(x) = \sqrt{2x+1} \text{ کا معکوس تفاعل معلوم کریں۔}$$

$$\text{حل: } f(x) = \sqrt{2x+1}$$

$$y = \sqrt{2x+1} \quad (\text{کے لئے تبدیل کرنے سے})$$

$$\sqrt{2x+1} = y \quad \text{دونوں اطراف کا مربع لینے سے}$$

$$(\sqrt{2x+1})^2 = y^2$$

$$2x+1 = y^2$$

$$2x = y^2 - 1$$

$$x = \frac{y^2 - 1}{2} \quad (\text{کے لئے حل کرنے سے})$$

4.2 مطلق قدر والے تفاعل کا گراف

$$-28 \quad \text{مطلق قدر والے تفاعل کی تعریف کریں۔}$$

$$\text{جواب: ایک مطلق قدر والا تفاعل ایسا تفاعل ہوتا ہے جس میں الجبری جملے کو مطلق قدر کی لائنوں میں بند کیا جاتا ہے۔ اس کی عمومی شکل } f(x) = |x| \text{ ہے۔}$$

$$-29 \quad \text{مطلق قدر والے بنیادی تفاعل } f(x) = |x| \text{ کی رینج کیا ہوتی ہے۔}$$

$$\text{جواب: مطلق قدر والے بنیادی تفاعل } f(x) = |x| \text{ کی رینج } [0, \infty) \text{ ہے۔ کیوں کہ } |x| \text{ منفی نہیں ہو سکتا ہے، اس کی سب سے چھوٹی قیمت 0 اور سب سے بڑی قیمت کی کوئی حد نہیں ہے یعنی } \infty \text{ تک پہنچتی ہے۔}$$

$$-30 \quad \text{تفاعل } f(x) = |x| \text{ کے گراف کی شکل کیسی ہوتی ہے؟}$$

$$\text{جواب: تفاعل } f(x) = |x| \text{ کے گراف کی شکل V جیسی ہوتی ہے۔}$$

$$-31 \quad \text{مطلق قدر والے تفاعل کی رینج کیسی ہے؟}$$

$$\text{جواب: ایک مطلق قدر والا تفاعل کی رینج } [0, \infty) \text{ ہے۔}$$

$$-32 \quad \text{اگر } g(x) = a(x-4)+7 \text{ ایک ایک درجی تفاعل ہے اور } a = 0 \text{ دیا گیا ہے تو } g(x) \text{ کا گراف کیسا ہوگا؟}$$

$$\text{جواب: دیا گیا ہے۔ (i) } g(x) = a(x-4)+7$$

$$\text{مساوات (i) میں } a = 0 \text{ درج کرنے سے}$$

$$g(x) = 0(x-4)+7$$

$$g(x) = 0+7=7$$

$$g(x) = 7$$

$$y = 7$$

پس، $g(x)$ کا گراف ایک افقی لکیر ہے اور افقی لکیر پر عمودی خط کے گرد سمیٹ کر ہوتی ہے۔ اس لیے یہ $x = 4$ کے گرد بھی سمیٹ کر ہے۔

4.4 ایک متغیر میں مطلق قدر والی ایک درجی غیر مساوات کا حل

$$3|x-2| = 18 \quad -33$$

$$3|x-2| = 18$$

$$\frac{3}{3}|x-2| = \frac{18}{3} \quad (\text{دونوں اطراف کو 3 سے تقسیم کرنے سے})$$

$$|x-2| = 6$$

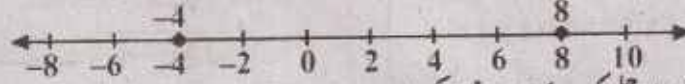
$$(x-2) = \pm 6$$

$$x-2 = 6 \quad \text{یا} \quad x-2 = -6$$

$$x = 6+2 \quad \text{یا} \quad x = -6+2$$

$$x = 8 \quad \text{یا} \quad x = -4$$

$$\text{حل سیٹ} = \{8, -4\}$$



$$|5-2x| = 3, \quad -34$$

$$|5-2x| = \pm 3$$

$$5-2x = \pm 3$$

$$5-2x = 3$$

$$-2x = -2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$5-2x = -3$$

$$-2x = -8$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$\text{حل سیٹ} = \{1, 4\}$$



$$|x-2| \geq 7 \quad -35$$

$$|x-2| \geq 7$$

$$\pm(x-2) \geq 7$$

$$x-2 \geq 7$$

$$x-2 \geq 7$$

$$x \geq 7+2$$

$$x \geq 9$$

$$(-\infty, -5] \cup [9, \infty)$$

$$-(x-2) \geq 7$$

$$x-2 \leq -7$$

$$x \leq -7+2$$

$$x \leq -5$$

