

اس یونٹ کو مکمل کرنے کے لیے غلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- ◀ معلومات کو مرتبہ 2 کے قالب کی شکل میں ظاہر کر سکیں۔
- ◀ دو قابلوں کے مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب پر مشتمل صورتحال کو حل کر سکیں۔
- ◀ ایک سکیلر مقدار اور قالب کا حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
- ◀ 2-by-2 مرتبہ کے قالب کا ضربی معلوم اور مقطع معلوم کر سکیں۔
- ◀ معکوس قالب کے طریقے اور کریمر کے قانون کو استعمال کرتے ہوئے دو متغیرات میں ایک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کر سکیں۔
- ◀ مثالوں کے ساتھ وضاحت کر سکیں کہ کس طرح ریاضی نئے سائنسی نظریات اور ٹیکنالوجیز میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے (جیسے کہ، ریاضیاتی ماڈلنگ، استعمال، نئے مادیات اور ادویات کو ڈیزائن کرنے اور بہتر بنانے اور پیچیدہ نظاموں جیسے انسانی دماغ کے رویوں کو سمجھنے کے لیے کیا جاتا ہے)۔
- ◀ حقیقی دنیا کے مسائل پر قالب کے تصورات کا اطلاق کر سکیں [جیسے انجینئرنگ، معاشیات، کمپیوٹر گرافکس اور طبیعیات میں]۔

قالب (Matrices)

3.1

قالب ایک مستطیلی شکل کی ترتیب ہے، جس کے ارکان قطاروں اور کالموں میں ایک خاص ترتیب میں مربعی بریکٹ کے اندر لکھے جاتے ہیں۔ یہ ترتیبات بعض الجبری عوامل کی پابند ہوتی ہیں۔ عام طور پر، قابلوں کو انگریزی حروف تہجی کے بڑے حروف سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ ان کے ارکان کو چھوٹے حروف سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

مثال کے طور پر،

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

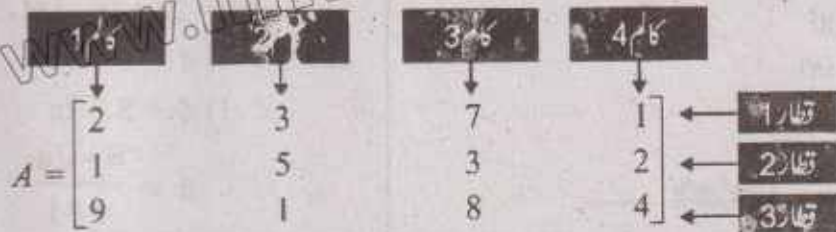
سکولوں میں اوقات کار، ہوائی اڈے پر پرواز کا شیڈول یا ریلوے سٹیشن پر ٹرینوں کی آمدروانگی کا وقت قابلوں کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔

قالب کی قطاریں اور کالم (Rows and Columns of a Matrix)

قطار: افقی لائن یا لائنوں میں لکھے ہوئے رکن یا ارکان قالب کی قطار یا قطاریں بناتے ہیں۔

کالم: عمودی لائن یا لائنوں میں لکھے ہوئے رکن یا ارکان قالب کے کالم بناتے ہیں۔

مثال کے طور پر،



قالب A کی 3 قطاریں اور 4 کالم ہیں۔

کالم 1	کالم 2	کالم 3	
7	4	8	قطار 1
3	0	10	قطار 2
2	1	11	قطار 3

قالب B کی 3 قطاریں اور 3 کالم ہیں۔

$$C = [5]$$

قالب C کی 1 قطار اور 1 کالم ہے۔

ارکان (Elements or Entries)

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ہو تو 1، 2، 3، 4، 5 اور 6 قالب A کے ارکان کہلاتے ہیں۔

قالب کا مرتبہ (Order or Size of a Matrix)

اگر قالب A کی m قطاریں اور n کالم ہوں تو قالب A کا مرتبہ "m × n" ہوتا ہے اور اسے m-by-n پڑھا جاتا ہے۔

قالب $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 9 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ 3×3 (3-by-3 پڑھا جاتا ہے) اگر ایک قالب مرتبہ 3-by-4 ہو تو اس کا مطلب ہے

کہ قالب کی 3 قطاریں اور 4 کالم ہیں۔ اس کا مطلب 3 ضرب 4 = 12 نہیں البتہ 12 قالب میں ارکان کی تعداد ہوتا ہے۔

مساوی قالب (Equal Matrices)

دو قالب A اور B مساوی قالب کہلاتے ہیں اگر ان کا مرتبہ اور متعلقہ ارکان ایک جیسے ہوں۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 4-2 & 3 \\ 4 & 4-6 \end{bmatrix}$ مساوی قالب ہیں۔

اسی طرح، $C = [a \ b]$ اور $D = [3 \ 4]$ مساوی قالب ہوں گے اگر $a = 3$ اور $b = 4$ ہو۔

حل مشق 3.1

1- ہر قالب کی قطاروں اور کالموں کی تعداد لکھیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, C = [8 \ -10 \ 11], D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 5 & 9 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: قالب A کے قطاروں کی تعداد = 2

قالب A کے کالموں کی تعداد = 2

قالب B کے قطاروں کی تعداد = 3

قالب B کے کالموں کی تعداد = 1

قالب C کے قطاروں کی تعداد = 1

www.ilmkidunya.com

قالب C کے کالموں کی تعداد = 3
 قالب D کے قطاروں کی تعداد = 3
 قالب D کے کالموں کی تعداد = 3
 قالب E کے قطاروں کی تعداد = 2
 قالب E کے کالموں کی تعداد = 3

-2 ہر قالب کا مرتبہ لکھیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B = [3 \ 4], C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 9 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, F = [5]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

قالب A کا مرتبہ 1-by-2 ہے۔

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

قالب C کا مرتبہ 2-by-2 ہے۔

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

قالب E کا مرتبہ 3-by-2 ہے۔

$$B = [3 \ 4]$$

قالب B کا مرتبہ 1-by-2 ہے۔

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

قالب D کا مرتبہ 2-by-3 ہے۔

$$F = [5]$$

قالب F کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

-3 درج ذیل میں کون سے قالب مساوی ہیں؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 \times 3 & 2 - 1 \\ 2 \times 2 & 4 - 2 \\ 4 + 4 & 3 + 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 + 4 \\ -8 + 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 3 - 3 & 3 \\ 3 + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ اور } F = \begin{bmatrix} 3 - 3 & 3 \\ 3 + 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow F = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A = F$$

مساوی قالب ہیں کیونکہ ان کے مرتبے اور متعلقہ ارکان ایک جیسے ہیں یعنی

$$B = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix} \text{ اور } D = \begin{bmatrix} 5 + 4 \\ -8 + 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$B = D$$

مساوی قالب ہیں کیونکہ ان کے مرتبے اور متعلقہ ارکان ایک جیسے ہیں یعنی

$$C = \begin{bmatrix} 2 \times 3 & 2 - 1 \\ 2 \times 2 & 4 - 2 \\ 4 + 4 & 3 + 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{اور } E = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = E$$

مساوی قالب ہیں کیونکہ ان کے مرتبے اور متعلقہ ارکان ایک جیسے ہیں یعنی

4- اگر $\begin{bmatrix} a+2 & c-3 \\ b-1 & d+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو a, b, c اور d کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

$$\begin{bmatrix} a+2 & c-3 \\ b-1 & d+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

حل: دیا گیا ہے کہ

چونکہ دونوں قالب مساوی ہیں، لہذا ان کے متعلقہ ارکان ایک جیسے ہیں۔

$$a+2=5$$

$$c-3=8$$

$$b-1=6$$

$$d+4=4$$

$$a=5-2$$

$$c=8+3$$

$$b=6+1$$

$$d=4-4$$

$$a=3$$

$$c=11$$

$$b=7$$

$$d=0$$

5- اگر $\begin{bmatrix} 2x+1 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 7 & y \end{bmatrix}$ ہو تو x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

$$\begin{bmatrix} 2x+1 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 7 & y \end{bmatrix}$$

حل: دیا گیا ہے کہ

چونکہ دونوں قالب مساوی ہیں، لہذا ان کے متعلقہ ارکان ایک جیسے ہیں۔

$$2x+1=9$$

$$y=5$$

$$2x=9-1$$

$$2x=8$$

$$x=\frac{8}{2}$$

$$x=4$$

$$x=4, y=5$$

6- اگر $\begin{bmatrix} a+b & 2d-1 \\ 3b+2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 11 & c \end{bmatrix}$ ہو تو a, b, c اور d کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

$$\begin{bmatrix} a+b & 2d-1 \\ 3b+2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 11 & c \end{bmatrix}$$

حل: دیا گیا ہے کہ

چونکہ دونوں قالب مساوی ہیں، لہذا ان کے متعلقہ ارکان ایک جیسے ہیں۔

$$a+b=10 \quad \text{--- (i)}$$

$$3b+2=11 \quad \text{--- (ii)}$$

$$4=c \quad \text{--- (iii)}$$

$$2d-1=5 \quad \text{--- (iv)}$$

$$c=4 \quad \text{--- (iii)}$$

$$3b+2=11 \quad \text{--- (ii)}$$

$$3b=11-2$$

$$3b=9$$

$$b=\frac{9}{3}=3 \Rightarrow b=3$$

مساوات (i) میں $b=3$ درج کرنے سے

$$a+b=10$$

$$a+3=10$$

$$a = 10 - 3 = 7 \Rightarrow a = 7$$

ے (iv)

$$2d - 1 = 5$$

$$2d = 5 + 1$$

$$2d = 6$$

$$d = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow d = 3$$

$$a = 7, b = 3, c = 4, d = 3$$

7- اگر $\begin{bmatrix} p+q & p-5 \\ 11 & 2q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو p اور q کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:

$$p + q = 6 \quad \text{--- (i)}$$

$$p - 2q = 0 \quad \text{--- (ii)}$$

ے (ii)

$$p - 2q = 0$$

$$p = 2q$$

مساوات (i) میں $p = 2q$ درج کرنے سے

$$p + q = 6$$

$$2q + q = 6$$

$$3q = 6$$

$$q = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow q = 2$$

مساوات (i) میں $q = 2$ درج کرنے سے

$$p + q = 6$$

$$p + 2 = 6$$

$$p = 6 - 2 = 4 \Rightarrow p = 4$$

$$p = 4, q = 2$$

پس،

3.2 قالیوں کی اقسام (Types of Matrices)

3.2

(i) قالب قطاری: ایسا قالب جس کی صرف ایک ہی قطار ہو، قطاری قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر، $C = [a]$, $B = [a \ b]$, $A = [0 \ 1 \ 4]$ قطاری قالب ہیں، ان کا مرتبہ بالترتیب 1-by-2، 1-by-3 اور

1-by-1 ہے۔

(ii) کالمی قالب: ایسا قالب جس کا صرف ایک ہی کالم ہو، کالمی قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر، $C = [2]$, $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ کالمی قالب ہیں، ان کا مرتبہ بالترتیب 3-by-1، 2-by-1 اور

1-by-1 ہے۔

(iii) صفری قالب: اگر کسی قالب کے تمام ارکان صفر ہوں، تو وہ صفری قالب کہلاتا ہے اس کو O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر، $[0]$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ صفری قالب ہیں ان کا مرتبہ بالترتیب 1-by-1، 2-by-2 اور 3-by-2 ہے۔

(iv) مربعی قالب: ایسا قالب جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو، مربعی قالب کہلاتا ہے۔ جیسا کہ n-by-n مرتبہ کے قالب کو اکثر مرتبہ

n کا مربعی قالب کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ مرتبہ 3 کا ایک مربعی قالب ہے۔

مربعی قالب $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ میں a_{11}, a_{22}, a_{33} کو اصل یا مرکزی وتری ارکان کہا جاتا ہے۔

(v) مستطیلی قالب: اگر کسی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر نہ ہو، تو اسے مستطیلی قالب کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ مستطیلی قالب ہیں۔

(vi) وتری قالب: ایک مربعی قالب کو وتری قالب کہا جاتا ہے اگر اس کے مرکزی وتری ارکان میں سے کم از کم ایک غیر صفر ہو اور غیر وتری ارکان سب صفر ہوں۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ وتری قالب ہیں، ان کا مرتبہ بالترتیب 3-by-3 اور 2-by-2 ہے۔

(vii) سکالر قالب: ایک وتری قالب کو سکالر قالب کہا جاتا ہے اگر مرکزی وتر میں موجود تمام ارکان ایک جیسے اور غیر صفر ہوں۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \end{bmatrix}$ سکالر قالب ہیں، ان کا مرتبہ بالترتیب 3-by-3، 2-by-2 اور 1-by-1 ہے۔

(viii) وحدانی قالب: ایک سکالر قالب کو وحدانی قالب کہا جاتا ہے اگر اس کے تمام مرکزی وتری ارکان 1 ہوں۔

مثال کے طور پر، $P = [1]$ ، $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ وحدانی قالب ہیں، ان کا مرتبہ بالترتیب 1-by-1، 2-by-2 اور 3-by-3 ہے۔ ہم ان قالبوں کو $I_1 = [1]$ ، $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

یاد رکھیے!

سکالر اور وحدانی قالب وتری قالب بھی ہوتے ہیں لیکن تمام وتری قالب سکالر اور وحدانی قالب نہیں ہوتے۔

(ix) قالب کا ٹرانسپوز: ایسا قالب جو اپنے محکمے قالب کی قطاروں اور کالموں کو آپس میں تبدیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اسے دیے گئے قالب کا ٹرانسپوز کہا جاتا ہے۔ اگر A ایک قالب ہو تو اس کے ٹرانسپوز کو A' سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

(x) سمیٹرک قالب: ایک مربعی قالب A سمیٹرک کہلاتا ہے اگر وہ اپنے ٹرانسپوز کے برابر ہو یعنی $A' = A$ ۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو $A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$ اس طرح A ایک سمیٹرک قالب ہے۔

(xi) سکیوسمیٹرک قالب: ایک مربعی قالب A سکیوسمیٹرک کہلاتا ہے اگر $A^t = -A$ ۔

مثال کے طور پر، $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ ہوگا $B^t = -B$ اس طرح B ایک سکیوسمیٹرک قالب ہے۔

(xii) منفی قالب: A کا منفی قالب اس کے ہر رکن کو -1 سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔ A سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر، اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \end{bmatrix}$ ہو تو $-A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \end{bmatrix}$ ۔

حل مشق 3.2

1- درج ذیل قالبوں میں سے وحدانی قالب، قطاری قالب، کالمی قالب اور صفری قالبوں کی شناخت کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

حل: قالب A ایک قطاری قالب ہے جس کا مرتبہ 1-by-3 ہے۔

قالب B ایک صفری قالب ہے جس کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

یہ قطاری قالب اور کالمی قالب بھی ہے۔

قالب C ایک وحدانی قالب ہے جس کا مرتبہ 2-by-2 ہے۔

قالب D ایک صفری قالب ہے جس کا مرتبہ 2-by-2 ہے۔

قالب E ایک کالمی قالب ہے جس کا مرتبہ 3-by-1 ہے۔

قالب F ایک کالمی قالب ہے جس کا مرتبہ 3-by-1 ہے۔

2- درج ذیل قالبوں میں سے قطاری، کالمی، مربعی اور مستطیلی قالبوں کی شناخت کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 7 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: قالب F ایک قطاری قالب ہے۔

قالب A ایک کالمی قالب ہے۔

قالب B، D اور G ایک مربعی قالب ہے۔

قالب A، C، E، F اور H مستطیلی قالب ہیں۔

3- وتری، سکیلر اور وحدانی قالبوں کی شناخت کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: قالب C اور D مرتبہ 2-by-2 کے وتری قالب ہیں۔

قالب B اور E مرتبہ 2-by-2 کے سکیلر قالب ہیں۔

قالب A مرتبہ 2-by-2 کا وحدانی قالب ہے۔

4- درج ذیل قالیوں کے تراپوز معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \ -2 \ 4], \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \ -2 \ 4], \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{حل:}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B' = [3 \ 7 \ 6], \quad C' = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad D' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

5- درج ذیل قالیوں کے منفی قالب معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad -B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad -C = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{حل:}$$

6- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ ہوں تو تصدیق کیجیے کہ:

$$(i) (A')' = A \quad (ii) (B')' = B$$

$$(i) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{حل:}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A')' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A$$

$$(A')' = A \quad \text{پس ثابت ہوا کہ}$$

$$(ii) B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{حل:}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(B')' = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = B$$

$$(B')' = B \quad \text{پس ثابت ہوا کہ}$$

7- ثابت کیجیے کہ $L = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ ایک سمٹرک قالب ہے۔

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{حل:}$$

$$L' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} = L$$

$$L' = L \quad \text{پس } L \text{ ایک سمٹرک قالب ہے۔}$$

قالیوں پر درج ذیل بنیادی عوامل ہوتے ہیں۔

(i) قالی کی سکیلر سے ضرب

(ii) قالیوں کی جمع/تفریق

(iii) قالیوں کی ضرب

ایک قالی کو دوسرے قالی سے تقسیم کرنے کا کوئی تصور موجود نہیں ہے۔

(Multiplication of a Matrix by a Scalar/ Real Number) قالی کی سکیلر سے ضرب

دیے گئے قالی $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ اور سکیلر k کے لیے، ہم ایک نیا قالی $kA = \begin{bmatrix} ka & bk & kc \\ kd & ke & kf \end{bmatrix}$ بناتے ہیں، یعنی کہ ہر

رکن کو سکیلر k سے ضرب دیتے ہیں۔ خاص طور پر اگر $k = -1$ ہو تو $-A = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \end{bmatrix}$

(Addition of Matrices) قالیوں کی جمع

اگر A اور B ہم مرتبہ دو قالی ہوں تو انہیں جمع کیا جاسکتا ہے ان کے مجموعہ $A + B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو کہ اسی مرتبہ کا ایک قالی ہوتا ہے۔ ان قالیوں کو جمع کے لیے قابل موافق کہا جاتا ہے $A + B$ کو A اور B کے متناظرہ ارکان کو جمع کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 1: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہوں تو $A + B$ اور $B + A$ معلوم کیجیے۔

حل: $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

A کا مرتبہ 3-by-3 اور B کا مرتبہ 3-by-3 ہے لہذا A اور B کو جمع کیا جاسکتا ہے۔

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+4 & 8+1 & 2-2 \\ 5+3 & 3+0 & 1+6 \\ 6+2 & 0+3 & 7+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 8 & 3 & 7 \\ 8 & 3 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 4+3 & 1+8 & -2+2 \\ 3+5 & 0+3 & 6+1 \\ 2+6 & 3+0 & 4+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 8 & 3 & 7 \\ 8 & 3 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{اور}$$

(Subtraction of Matrices) قالیوں کی تفریق

اگر A اور B ایک ہی مرتبہ کے دو قالی ہوں تو انہیں تفریق کیا جاسکتا ہے اور ان کا فرق جسے $A - B$ یا $B - A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو کہ اسی مرتبہ کا ایک قالی ہوتا ہے۔ ان قالیوں کو تفریق کے لیے قابل موافق کہا جاتا ہے۔ $A - B$ کو A کے متناظرہ ارکان سے B کے متناظرہ ارکان کو تفریق کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 2: $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ہوں تو $A - B$ اور $B - A$ معلوم کیجیے۔

حل: $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5-3 & 9-6 \\ 4-2 & 8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 3-5 & 6-9 \\ 2-4 & 1-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{اور}$$

$$A - B \neq B - A \quad \text{ہم نے دیکھا}$$

مثال 3: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ ہوں تو $A + B$ اور $B - A$ معلوم کیجیے۔

حل: $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

A کا مرتبہ 2-by-2 اور B کا مرتبہ 2-by-3 ہے۔ اس لیے A اور B جمع اور تفریق کے لیے قابل موافق نہیں ہیں۔

قالبوں کا قانون مبادلہ اور ملازم بلحاظ جمع (Commutative and Associative Laws of Addition of Matrices)

(a) قالبوں کا قانون مبادلہ بلحاظ جمع

کوئی بھی ایک جیسے مرتبہ کے قالبوں A اور B کے لیے $A + B = B + A$ ۔ یہ قانون قالبوں کا قانون مبادلہ بلحاظ جمع کہلاتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کیا}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ب}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 & 3+3 \\ 4+4 & 5+2 & 6+2 \\ 7+0 & 8-1 & 9+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 8 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{اور}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+1 & 1+2 & 3+3 \\ 4+4 & 2+5 & 2+6 \\ 0+7 & -1+8 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 8 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \dots(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے $A + B = B + A$ ، لہذا، قالبوں کا قانون مبادلہ بلحاظ جمع لاگو ہوتا ہے۔

(h) قالیوں کا قانون تلازم بلحاظ جمع کوئی بھی ایک جیسے مرتبہ کے قالیوں A، B، اور C کے لیے $(A + B) + C = A + (B + C)$ ۔ یہ قانون قالیوں کا قانون تلازم بلحاظ جمع کہلاتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کیا}$$

$$(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{اب،}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 & 3+3 \\ 4+4 & 5+2 & 6+2 \\ 7+0 & 8-1 & 9+0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 8 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 11 & 7 & 11 \\ 8 & 8 & 10 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{اور}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3+0 & 1+2 & 3+0 \\ 4+3 & 2+0 & 2+3 \\ 0+1 & -1+1 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 11 & 7 & 11 \\ 8 & 8 & 10 \end{bmatrix} \quad \dots(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے، $(A + B) + C = A + (B + C)$ لہذا، قالیوں کا قانون تلازم بلحاظ جمع لاگو ہوتا ہے۔

قالب کا جمعی ذاتی قالب (Additive Identity of a Matrix)

قالب کا جمعی ذاتی قالب ایسا قالب ہوتا ہے جسے جب اسی مرتبہ کے کسی بھی قالب A میں جمع کیا جائے تو وہ A کو غیر تبدیل شدہ رہنے دیتا ہے۔

ریاضیاتی طور پر، $A + O = A = O + A$ جہاں O ایک صفری قالب ہے جسے جمعی ذاتی قالب بھی کہا جاتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کیا}$$

$$A + O = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = A \quad \text{اب}$$

$$O + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = A \quad \text{اور}$$

قالب کا جمعی معکوس (Additive Inverse of a Matrix)

ایک قالب A کا جمعی معکوس ایک دوسرا قالب -A ہوتا ہے اس طرح کہ:

$$A + (-A) = O = (-A) + A.$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کیا} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{تو}$$

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O \quad \text{اب}$$

$$(-A) + A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

لہذا A اور -A ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

حل مشق 3.3

1- درج ذیل میں سے کون سے قالب جمع اور تفریق کے لیے قابل موافق ہیں؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, C = [5 \ 2], D = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, E = [2],$$

$$F = [7 \ 11], G = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, H = [3], M = \begin{bmatrix} i \\ m \end{bmatrix}$$

جواب: قالب A اور D جمع اور تفریق کے لیے موزوں ہیں کیونکہ ان کے مرتبے ایک جیسے ہیں۔

قالب B، قالب G اور قالب M جمع اور تفریق کے لیے موزوں ہیں کیونکہ ان کے مرتبے ایک جیسے ہیں۔

قالب C اور قالب F جمع اور تفریق کے لیے موزوں ہیں کیونکہ ان کے مرتبے ایک جیسے ہیں۔

قالب E اور قالب H جمع اور تفریق کے لیے موزوں ہیں کیونکہ ان کے مرتبے ایک جیسے ہیں۔

$$2- \text{ اگر } X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ اور } Z = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ ہو تو درج ذیل معلوم کیجیے۔}$$

(i) $X + Y$

(ii) $Y + 7Z$

(iii) $4X - Z$

(iv) $X + 2Y + 3Z$

(v) $X - 4Y + Z$

(vi) $Z - Z$

حل: دیا گیا ہے کہ

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ اور } Z = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(i) $X + Y$

$$\begin{aligned} X + Y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+1 & -1+2 \\ -2+3 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(ii) $Y + 7Z$

$$\begin{aligned} Y + 7Z &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+21 & 2+0 \\ 3+0 & 4-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 2 \\ 3 & -10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(iii) $4X - Z$

$$\begin{aligned} 4X - Z &= 4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -4-0 \\ -8-0 & 8+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -8 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(iv) $X + 2Y + 3Z$

$$\begin{aligned} X + 2Y + 3Z &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+2+9 & -1+4+0 \\ -2+6+0 & 2+8-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(v) $X - 4Y + Z$

$$\begin{aligned} X - 4Y + Z &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-4+3 & -1-8+0 \\ -2-12+0 & 2-16-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -14 & -16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(vi) $Z - Z$

$$\begin{aligned} Z - Z &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3-3 & 0-0 \\ 0-0 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(i) $P = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$

$-P = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$

(ii) $Q = \begin{bmatrix} 9 & -3 \end{bmatrix}$

$-Q = \begin{bmatrix} -9 & 3 \end{bmatrix}$

حل:

(iii) $R = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$-R = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

حل:

(iv) $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

حل:

$-S = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$-S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ہوں تو درج ذیل کی تصدیق کیجیے کہ:

(i) $A + B = B + A$

(iii) $(2A + B) + C = 2A + (B + C)$

(i) $A + B = B + A$

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(iv) $3(A + B) = 3A + 3B$

$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+3 & 3+4 \\ -3+5 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ — (i)}$

$B + A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3+2 & 4+3 \\ 5-3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ — (ii)}$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $A + B = B + A$

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+3 & 3+4 \\ -3+5 & 2+6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5+1 & 7-2 \\ 2+0 & 8+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 13 \end{bmatrix} \text{ — (i)}$

$$\begin{aligned}
 A + (B + C) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right] \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3+1 & 4-2 \\ 5+0 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2+4 & 3+2 \\ -3+5 & 2+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{---(ii)}
 \end{aligned}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(A + B) + C = A + (B + C)$

(iii) $(2A + B) + C = 2A + (B + C)$

$$\begin{aligned}
 (2A + B) + C &= 2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 6+4 \\ -6+5 & 4+6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7+1 & 10-2 \\ -1+0 & 10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -1 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{---(i)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2A + (B + C) &= 2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right] \\
 &= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3+1 & 4-2 \\ 5+0 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4+4 & 6+2 \\ -6+5 & 4+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -1 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{---(ii)}
 \end{aligned}$$

پس، (i) اور (ii) سے $(2A + B) + C = 2A + (B + C)$

(iv) $3(A + B) = 3A + 3B$

$$\begin{aligned}
 3(A + B) &= 3 \left[\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \right] \\
 &= 3 \begin{bmatrix} 2+3 & 3+4 \\ -3+5 & 2+6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 21 \\ 6 & 24 \end{bmatrix} \quad \text{---(i)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3A + 3B &= 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+9 & 9+12 \\ -9+15 & 6+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 21 \\ 6 & 24 \end{bmatrix} \quad \text{---(ii)}
 \end{aligned}$$

پس، (i) اور (ii) سے $3(A + B) = 3A + 3B$

5- $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ ہوں تو ثابت کیجیے کہ A قاب B کا اور B قاب A کا بھی معکوس ہے۔

حل: دیا گیا ہے کہ
 $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

ہم جانتے ہیں کہ اگر A اور B دو ایک جیسے مرتبے کے قاب ہوں جیسا کہ $A+B=O=B+A$ تو قاب A اور B ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

اب
 $A+B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 5-5 & 6-6 \\ 7-7 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$ (i)

$B+A = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+5 & -6+6 \\ -7+7 & 2-2 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$ (ii)

$A+B=O=B+A$ پس (i) اور (ii) سے

6- اگر $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ہوں تو تصدیق کیجیے۔

(i) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(ii) $(A-B)^t = A^t - B^t$

(i) $(A+B)^t = A^t + B^t$

$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

حل: دیا گیا ہے کہ

$A+B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+8 & -2-1 \\ 0+3 & 3+0 \end{bmatrix}$

$A+B = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$(A+B)^t = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ — (i)

$A^t + B^t = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6+8 & 0+3 \\ -2-1 & 3+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ — (ii)

$(A+B)^t = A^t + B^t$ پس (i) اور (ii) سے

(ii) $(A-B)^t = A^t - B^t$

$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$A - B = \begin{bmatrix} 6-8 & -2+1 \\ 0-3 & 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

$(A-B)^t = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ — (i)

$A^t - B^t = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-8 & 0-3 \\ -2+1 & 3-0 \end{bmatrix}$

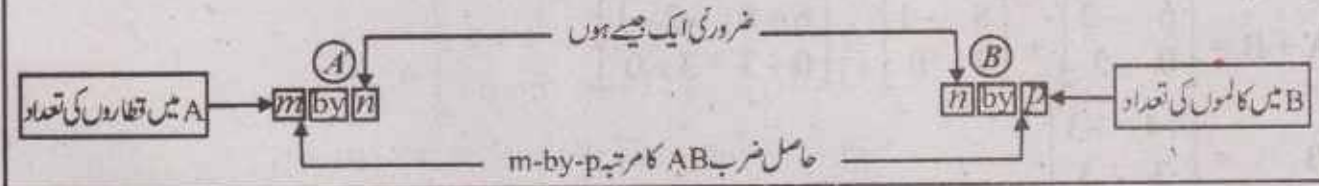
$= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$(A-B)^t = A^t - B^t$ پس (i) اور (ii) سے

3.4 ماتریوں کی ضرب (Multiplication of Matrices)

قالب A کو قالب B سے ضرب کے لیے قابل موافق کہا جاتا ہے اگر A میں کالموں کی تعداد B میں قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔ چنانچہ، اگر A اور B بالترتیب مرتبہ m-by-n اور n-by-p کے دو قالب دیے گئے ہوں تو قالب A اور B کا حاصل ضرب AB سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کا مرتبہ m-by-p ہوتا ہے۔

یاد رکھیے!



یاد رکھیے!

ضرب کے لیے ضروری ہے کہ A اور B دو قالب ہوں اور A میں کالموں کی تعداد B میں قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔ جب:

(i) قالب B میں قطاروں کی تعداد = قالب A میں کالموں کی تعداد (ii) قالب A کی قالب B کے ساتھ ضرب کو AB لکھا جاتا ہے۔

(iii) AB معلوم کرنے کے لیے ہم A کی پہلی قطار سے شروع کرتے ہیں اور اس کے ہر رکن کو قالب B کے پہلے کالم کے متناظرہ ارکان سے ضرب دے کر جمع کرتے ہیں۔ اس سے AB کی پہلی قطار کا پہلا رکن حاصل ہوتا ہے۔

پھر ہم A کی پہلی قطار کے ہر رکن کو B کے دوسرے کالم سے ضرب دیتے ہیں اور حاصل ضرب کو جمع کرتے ہیں یہ عمل حاصل ضرب قالب AB کی پہلی قطار کا دوسرا رکن فراہم کرتا ہے۔ اسی طرح ہم باری باری A کی تمام قطاروں کو B کے کالموں سے ضرب دیتے ہیں اور حاصل ضرب کو جمع کرتے ہیں تاکہ قالب AB کے باقی ارکان حاصل کیے جاسکیں۔

مثال 4: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} l & m \\ n & p \end{bmatrix}$ ہوں تو معلوم کیجیے:

- (i) اگر ممکن ہو تو AB (i) حل: A قالب میں کالموں کی تعداد = 2
 (ii) اگر ممکن ہو تو BA (ii) B قالب میں قطاروں کی تعداد = 2
 پس AB ممکن ہے۔

$$BA = \begin{bmatrix} l & m \\ n & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} la + mc & lb + md \\ na + pc & nb + pd \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$ مشاہدہ کیا کہ

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m \\ n & p \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} al + bn & am + bp \\ cl + dn & cm + dp \end{bmatrix}$$

مثال 5: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ہوں تو معلوم کیجیے:

- (i) اگر ممکن ہو تو AB (i) حل: A قالب میں کالموں کی تعداد = 2
 (ii) اگر ممکن ہو تو BA (ii) B قالب میں قطاروں کی تعداد = 2
 پس AB ممکن ہے۔

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times (-2) + 0 \times 1 \\ 5 \times (-2) + (-3) \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 0 \\ -10 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

(ii) B قالب میں کالموں کی تعداد = 1

A قالب میں قطاروں کی تعداد = 2

پس BA ممکن ہے۔

خود آزمائی!

اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ہو تو AB اور اس کا مرتبہ معلوم کیجیے۔

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [5(-2) + 3(1)]$$

$$= [-10 + 3] = [-7]$$

$AB = [-7]$ اور اس کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

قالبوں کا قانون مبادلہ نہ ضرب (Commutative Law of Multiplication of Matrices)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 2 \times 0 & 5 \times 5 + 2 \times (-2) \\ 3 \times 1 + 4 \times 0 & 3 \times 5 + 4 \times (-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+0 & 25-4 \\ 3+0 & 15-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 21 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 5 \times 3 & 1 \times 2 + 5 \times 4 \\ 0 \times 5 + (-2) \times 3 & 0 \times 2 + (-2) \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+15 & 2+20 \\ 0-6 & 0-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 22 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} \quad \dots(ii)$$

(i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $AB \neq BA$

لہذا، قالبوں کی ضرب میں عمومی طور پر قانون مبادلہ لاگو نہیں ہوتا۔

قالبوں کا قانون تلازم بلحاظ ضرب (Associative Law of Multiplication of Matrices)

اگر A, B, C کوئی تین قالب ہوں، تو $(AB)C = A(BC)$ قالبوں کا قانون تلازم بلحاظ ضرب کہلاتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کیا}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(2) + 0(0) & 1(1) + 0(3) \\ 2(2) + 1(0) & 2(1) + 1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 1+0 \\ 4+0 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1) + 1(4) & 2(2) + 1(0) \\ 4(1) + 5(4) & 4(2) + 5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 4+0 \\ 4+20 & 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 24 & 8 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1) + 1(4) & 2(2) + 1(0) \\ 0(1) + 3(4) & 0(2) + 3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 4+0 \\ 0+12 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(6)+0(12) & 1(4)+0(0) \\ 2(6)+1(12) & 2(4)+1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0 & 4+0 \\ 12+12 & 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 24 & 8 \end{bmatrix} \dots(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے $(AB)C = A(BC)$

قالبوں کا قانون تلازم بلحاظ ضرب لاگو ہوتا ہے۔

ضرب کا قانون تقسیمی بلحاظ جمع اور تفریق

(Distributive Laws of Multiplication Over Addition and Subtraction)

(a) فرض کیا A, B, C کوئی تین قالب ہوں، تو درج ذیل ضرب کے قانون تقسیمی بلحاظ جمع ہیں:

(i) $A(B + C) = AB + AC$ (بایاں قانون تقسیمی بلحاظ جمع)

(ii) $(A + B)C = AC + BC$ (دایاں قانون تقسیمی بلحاظ جمع)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(4)+2(7) & 1(1)+2(6) \\ 0(4)+1(7) & 0(1)+1(6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+14 & 1+12 \\ 0+7 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 13 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \dots(i)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4 & 1+8 \\ 0+2 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+10 & 0+4 \\ 0+5 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+11 & 9+4 \\ 2+5 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 13 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \dots(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے $A(B + C) = AB + AC$

اس طرح ہم دایاں قانون تقسیمی بلحاظ جمع بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

(b) اگر A, B, C کوئی سے تین قالب ہوں، تو درج ذیل ضرب کے قانون تقسیمی بلحاظ تفریق ہیں:

(i) $A(B - C) = AB - AC$ (بایاں قانون تقسیمی بلحاظ تفریق)

(ii) $(A - B)C = AC - BC$ (دایاں قانون تقسیمی بلحاظ تفریق)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(B-C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-2 & 3-1 \\ 1-0 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(2)+2(1) & 1(2)+2(1) \\ 0(2)+1(1) & 0(2)+1(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2 & 2+2 \\ 0+1 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(4)+2(1) & 1(3)+2(2) \\ 0(4)+1(1) & 0(3)+1(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+2 & 3+4 \\ 0+1 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(2)+2(0) & 1(1)+2(1) \\ 0(2)+1(0) & 0(1)+1(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0 & 1+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB - AC = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2 & 7-3 \\ 1-0 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے $A(B-C) = AB - AC$

اس طرح ہم دیاں قانون تقسیمی بلحاظ تفریق بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

قالب کا ضربی ذاتی قالب (Multiplicative Identity of a Matrix)

قالب کا ضربی ذاتی قالب ایک ایسا قالب ہوتا ہے جسے کسی بھی قالب A سے ضرب دیں تو قالب A میں کوئی تبدیلی نہ آئے یعنی،

$$AI = IA = A \quad \text{جہاں } I \text{ ایک ضربی ذاتی قالب ہے۔}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کیا}$$

$$AI = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1)+3(0) & 2(0)+3(1) \\ 4(1)+1(0) & 4(0)+1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 0+3 \\ 4+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(2)+0(4) & 1(3)+0(1) \\ 0(2)+1(4) & 0(3)+1(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 0+4 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = A$$

پس، قالب A کا ضربی ذاتی قالب I ہے۔

حل مشق 3.4

- (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ اگر ممکن ہو تو AB اور BA معلوم کیجیے۔ -1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: دیا گیا ہے کہ

$2 = 2$ قالب B میں قطاروں کی تعداد ، $2 = 2$ قالب A میں کالموں کی تعداد

پس AB ممکن ہے

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) + 2(1) & 1(2) + 2(-1) \\ -1(3) + 0(1) & -1(2) + 0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 2-2 \\ -3+0 & -2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ اور } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ دیا گیا ہے کہ}$$

$2 = 2$ قالب A میں قطاروں کی تعداد ، $2 = 2$ قالب B میں کالموں کی تعداد

پس BA ممکن ہے

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) + 2(-1) & 3(2) + 2(0) \\ 1(1) + (-1)(-1) & 1(2) + (-1)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 6+0 \\ 1+1 & 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ii) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ حل: دیا گیا ہے کہ}$$

$2 = 2$ قالب A میں کالموں کی تعداد

$2 = 2$ قالب B میں قطاروں کی تعداد

پس AB ممکن ہے

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= [1(3) + (-2)(-4)]$$

$$= [3 + 8] = [11]$$

$1 = 1$ اور قالب B میں کالموں کی تعداد

$1 = 1$ قالب A میں قطاروں کی تعداد

پس BA ممکن ہے

$$BA = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times (-2) \\ -4 \times 1 & -4 \times (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(iii) A = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ حل: دیا گیا ہے کہ}$$

$1 = 1$ قالب A میں کالموں کی تعداد

$1 = 1$ قالب B میں قطاروں کی تعداد

پس AB ممکن ہے

$$AB = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(2) & 4(5) \\ 4(2) & 4(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$$

$2 = 2$ قالب B میں کالموں کی تعداد

$2 = 2$ قالب A میں قطاروں کی تعداد

پس BA ممکن ہے

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= [2(4) + 5(4)]$$

$$= [8 + 20] = [28]$$

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

حل: دیا گیا ہے کہ

2 = قالب A میں کالموں کی تعداد

2 = قالب B میں قطاروں کی تعداد

پس، AB ممکن ہے

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-1)+2(2) & 1(4)+2(3) & 1(1)+2(1) \\ -1(-1)+1(2) & -1(4)+1(3) & -1(1)+1(1) \\ 3(-1)+0(2) & 3(4)+0(3) & 3(1)+0(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+4 & 4+6 & 1+2 \\ 1+2 & -4+3 & 1+1 \\ -3+0 & 12+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ -3 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

3 = قالب B میں کالموں کی تعداد

3 = قالب A میں قطاروں کی تعداد

پس، BA ممکن ہے

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(1)+4(-1)+1(3) & -1(2)+4(1)+1(0) \\ 2(1)+3(-1)+1(3) & 2(2)+3(1)+1(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-4+3 & -2+4+0 \\ 2-3+3 & 4+3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

(v) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

حل: دیا گیا ہے کہ

3 = قالب A میں کالموں کی تعداد

3 = قالب B میں قطاروں کی تعداد

پس AB ممکن ہے

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+2(2)+2(1) & 1(5)+2(4)+2(6) \\ 3(1)+1(2)+1(1) & 3(5)+1(4)+1(6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4+2 & 5+8+12 \\ 3+2+1 & 15+4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 25 \\ 6 & 25 \end{bmatrix}$$

2 = قالب B میں کالموں کی تعداد

2 = قالب A میں قطاروں کی تعداد

پس BA ممکن ہے

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+5(3) & 1(2)+5(1) & 1(2)+5(1) \\ 2(1)+4(3) & 2(2)+4(1) & 2(2)+4(1) \\ 1(1)+6(3) & 1(2)+6(1) & 1(2)+6(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 7 & 7 \\ 14 & 8 & 8 \\ 19 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

2- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ہوں تو ثابت کیجیے

(i) $AB \neq BA$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(2)+1(0) & 5(-1)+1(3) \\ -1(2)+4(0) & -1(-1)+4(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+0 & -5+3 \\ -2+0 & 1+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 13 \end{bmatrix} \dots(i)$$

حل:

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(5)+(-1)(-1) & 2(1)+(-1)(4) \\ 0(5)+3(-1) & 0(1)+3(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+1 & 2-4 \\ 0-3 & 0+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} \dots(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $AB \neq BA$

(ii) $A(B - C) = AB - AC$

$$B - C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 & -1-1 \\ 0-1 & 3-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{aligned}
 A(B-C) &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5(-3)+1(-1) & 5(-2)+1(-1) \\ -1(-3)+4(-1) & -1(-2)+4(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15-1 & -10-1 \\ 3-4 & +2-4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -16 & -11 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \dots(i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(2)+1(0) & 5(-1)+1(3) \\ -1(2)+4(0) & -1(-1)+4(3) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 10+0 & -5+3 \\ -2+0 & 1+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AC &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(5)+1(1) & 5(1)+1(4) \\ -1(5)+4(1) & -1(1)+4(4) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 25+1 & 5+4 \\ -5+4 & -1+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 9 \\ -1 & 15 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AB-AC &= \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 26 & 9 \\ -1 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-26 & -2-9 \\ -2-(-1) & 13-15 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -16 & -11 \\ -2+1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -11 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \dots(ii)
 \end{aligned}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $A(B-C) = AB - AC$

(iii) $A(BC) = (AB)C$

$$\begin{aligned}
 BC &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(5)+(-1)(1) & 2(1)+(-1)(4) \\ 0(5)+3(1) & 0(1)+3(4) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 10-1 & 2-4 \\ 0+3 & 0+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(BC) &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(9)+1(3) & 5(-2)+1(12) \\ -1(9)+4(3) & -1(-2)+4(12) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 45+3 & -10+12 \\ -9+12 & 2+48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 2 \\ 3 & 50 \end{bmatrix} \quad \dots(i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(2)+1(0) & 5(-1)+1(3) \\ -1(2)+4(0) & -1(-1)+4(3) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+0 & -5+3 \\ -2+0 & 1+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10(5)+(-2)(1) & 10(1)+(-2)(4) \\ (-2)(5)+13(1) & -2(1)+13(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 50-2 & 10-8 \\ -10+13 & -2+52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 2 \\ 3 & 50 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (ii)$$

$A(BC) = (AB)C$ پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ

$$(iv) (BC)^t = C^t B^t$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(5)+(-1)(1) & 2(1)+(-1)(4) \\ 0(5)+3(1) & 0(1)+3(4) \end{bmatrix}$$

حل:

$$BC = \begin{bmatrix} 10-1 & 2-4 \\ 0+3 & 0+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(BC)^t = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 12 \end{bmatrix} \dots(i)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, C^t = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C^t B^t = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(2)+1(-1) & 5(0)+1(3) \\ 1(2)+4(-1) & 1(0)+4(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10-1 & 0+3 \\ 2-4 & 0+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 12 \end{bmatrix} \dots(ii)$$

$(BC)^t = C^t B^t$ پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ

$$(v) (B+C)A = BA + CA$$

$$B+C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & -1+1 \\ 0+1 & 3+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

حل:

$$(B+C)A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7(5)+0(-1) & 7(1)+0(4) \\ 1(5)+7(-1) & 1(1)+7(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 35-0 & 7+0 \\ 5-7 & 1+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 7 \\ -2 & 29 \end{bmatrix} \dots(i)$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(5) + (-1)(-1) & 2(1) + (-1)(4) \\ 0(5) + 3(-1) & 0(1) + 3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+1 & 2-4 \\ 0-3 & 0+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(5) + 1(-1) & 5(1) + 1(4) \\ 1(5) + 4(-1) & 1(1) + 4(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25-1 & 5+4 \\ 5-4 & 1+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 9 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$$

$$BA + CA = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 9 \\ 1 & 17 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 11+24 & -2+9 \\ -3+1 & 12+17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 7 \\ -2 & 29 \end{bmatrix} \dots(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(B + C)A = BA + CA$

$$\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{اگر } -3$$

$$\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4(6) + a(6) \\ b(6) + 3(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 24 + 6a \\ 6b + 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

چونکہ دونوں قلاب مساوی ہیں، لہذا ان کے متعلقہ ارکان ایک جیسے ہوں گے

$$24 + 6a = 6$$

$$6a = 6 - 24$$

$$6a = -18$$

$$a = -3, b = -\frac{5}{2} \quad \text{پس}$$

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{اگر } -4$$

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(1) + 1(3) & x(0) + 1(-1) \\ y(1) + 2(3) & y(0) + 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+3 & 0-1 \\ y+6 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$x = 4 \text{ اور } y = -2 \quad \text{پس}$$

$$a = -\frac{18}{6}$$

$$a = -3$$

$$6b + 18 = 3$$

$$6b = 3 - 18$$

$$6b = -15$$

$$b = -\frac{15}{6}$$

$$b = -\frac{5}{2}$$

حل:

$$\begin{bmatrix} x+3 & 0-1 \\ y+6 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

حل:

چونکہ دونوں قلاب مساوی ہیں، لہذا ان کے متعلقہ

ارکان ایک جیسے ہوں گے

$$x + 3 = 7$$

$$x = 7 - 3$$

$$x = 4$$

$$y + 6 = 4$$

$$y = 4 - 6$$

$$y = -2$$

مرتبہ 2 کے قالب کا مقطع (Determinant of a Matrix of Order 2)

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ مرتبہ 2 کا ایک قالب ہے۔ A کے مقطع کو اس طرح لکھا جاتا ہے

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

مثال کے طور پر، فرض کیا کہ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک مربعی قالب ہے تو $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ قالب A کا مقطع کہلاتا

ہے اور $ad - bc$ مقطع کی قیمت کہلاتا ہے۔ ہم نوٹ کر سکتے ہیں کہ A اور $|A|$ کے ارکان ایک جیسے ہیں۔ مقطع میں قالب کی بریکٹ $|A|$ کو عمودی لائنوں سے تبدیل کیا جاتا ہے۔

مثال 6: $B = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ کے مقطع کی قیمت معلوم کیجیے۔

یاد رکھیے!
قطاروں کو کالموں میں اور کالموں کو قطاروں میں تبدیل کرنے سے مقطع کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔

$$|B| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 8 \times 3 - 4 \times 2 = 24 - 8 = 16$$

حل:

نادر اور غیر نادر قالب (Singular and Non-Singular Matrices)

ایک مربعی قالب A نادر قالب کہلاتا ہے اگر $|A| = 0$ ہو۔ ایک مربعی قالب A غیر نادر قالب کہلاتا ہے اگر $|A| \neq 0$ ہو۔

مثال کے طور پر، فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \times 4 - 2 \times 8 = 16 - 16 = 0$$

اب

پس قالب A ایک نادر قالب ہے۔
مثال کے طور پر، فرض کیا $M = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

$$|M| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 7 \times 9 - 4 \times 3 = 63 - 12 = 51 \neq 0$$

پس قالب M ایک غیر نادر قالب ہے۔

قالب کا ایڈجائنٹ (Adjoint of a Matrix)

ایک مربعی قالب کا ایڈجائنٹ، قالب الجبر میں اہم تصور ہے، خاص طور پر جب کسی قالب کا معکوس معلوم کیا جا رہا ہو یا مساواتوں کا نظام حل کیا جا رہا ہو۔
مرتبہ 2 کے ایک مربعی قالب A کا ایڈجائنٹ، وتری ارکان کی جگہ اور دوسرے ارکان کی علامتوں کو تبدیل کرنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

اسے $\text{Adj } A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \text{ ہو تو } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \text{ اگر}$$

(Multiplicative Inverse of a Non-Singular Matrix) غیر نادر قالب کا ضربی معکوس

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{3}{4}$ اور $\frac{4}{3}$ ضربی معکوس ہیں $\left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}\right)$ کیونکہ ان کا حاصل ضرب 1 ہے۔

اسی طرح، اگر ہمارے پاس ایک ہی مرتبہ کے دو مربعی قالب ہوں اور ان کا حاصل ضرب ایک واحد I آئے اور کہیے! نادر قالب کا ضربی معکوس نہیں ہوتا۔ قالب ہو، تو یہ قالب ایک دوسرے کے ضربی معکوس کہلاتے ہیں۔

فرض کریں A کوئی مربعی قالب ہے اور B ایک اور مربعی قالب ہے جس کا مرتبہ A کے مرتبہ کے برابر ہے، اس طرح کہ $AB = BA = I$ تو A اور B ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

ہم A کے ضربی معکوس A^{-1} سے ظاہر کرتے ہیں۔

(Adjoint Method to Find Inverse of a square Matrix) ایڈجائنٹ کے طریقہ سے مربعی قالب کا معکوس معلوم کرنا

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک غیر نادر قالب ہے، تو A کا ضربی معکوس ہے:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال 7: اگر $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو A کا ضربی معکوس معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \times 3 - 5 \times 4$$

$$= 24 - 20 = 4 \neq 0$$

A غیر نادر قالب ہے اس لیے A^{-1} ممکن ہے۔

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

آئیے ثابت کرتے ہیں کہ A اور A^{-1} ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{حل: اور}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \times \frac{3}{4} + 5 \times (-1) & 8 \times \left(-\frac{5}{4}\right) + 5 \times 2 \\ 4 \times \frac{3}{4} + 3 \times (-1) & 4 \times \left(-\frac{5}{4}\right) + 3 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \times 8 + (-5) \times 4 & 3 \times 5 + (-5) \times 3 \\ (-4) \times 8 + 8 \times 4 & (-4) \times 5 + 8 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 24-20 & 15-15 \\ -32+32 & -20+24 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad \text{پس}$$

$$|B| = (3 \times 4) - 2(4) \\ = 12 - 8 = 4 \neq 0$$

$$\text{Adj } B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \times \text{Adj } B$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{4} & -\frac{4}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (2 \times 2) - (3 \times 1) \\ = 4 - 3 = 1$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(2) + (-1)(-3) & 1(-1) + (-1)(2) \\ -\frac{1}{2}(2) + \frac{3}{4}(-3) & -\frac{1}{2}(-1) + \frac{3}{4}(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & -1-2 \\ -1-\frac{9}{4} & \frac{1}{2}+\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -\frac{4-9}{4} & \frac{4}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -\frac{13}{4} & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ii})$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ہاں، ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ ایک ضربی معکوس کا ریورسل قانون ہے۔

مثال 8: $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ ایک

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ اور } \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ لہذا،}$$

ضربی معکوس ہیں۔
چیلنج!

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ہوں تو تصدیق

کیجیے، $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ کیا اس کو ہم ضربی معکوس کا ریورسل قانون بھی کہہ سکتے ہیں؟

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3) + 1(2) & 2(4) + 1(4) \\ 3(3) + 2(2) & 3(4) + 2(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+2 & 8+4 \\ 9+4 & 12+8 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 13 & 20 \end{vmatrix}$$

$$= (8 \times 20) - (13 \times 12) \\ = 160 - 156 \\ = 4 \neq 0$$

$$\text{Adj}(AB) = \begin{bmatrix} 20 & -12 \\ -13 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \times \text{Adj}(AB)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 20 & -12 \\ -13 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{20}{4} & \frac{-12}{4} \\ \frac{-13}{4} & \frac{8}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -\frac{13}{4} & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{i}) \text{ اب}$$

R.H.S

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔
حل: دیا گیا ہے کہ

مثال 9: اگر $A = \begin{bmatrix} x & 8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ ایک نادر قالب ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $|A| = 0$ ایک نادر قالب ہے تو

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 8 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} \quad \text{اب}$$

چونکہ A ایک نادر قالب ہے، اس لیے

$$|A| = 10x - 40 = 0$$

$$10x = 40$$

$$\Rightarrow x = 4$$

چیلنج!

کوئی 2-by-2 مرتبہ کا قالب لیں اور معلوم کیجیے کہ کیا یہ نادر ہے یا غیر نادر۔ اس کا ایڈجائنٹ بھی معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

حل: فرض کیا

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(4) - 1(2)$$

$$= 12 - 2 = 10 \neq 0$$

لہذا، یہ ایک غیر نادر قالب۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل مشق 3.5

1- ہر مقطع کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 10(6) - 4(5) = 60 - 20 = 40$$

(ii) $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -5(-7) - (-3)(8) = 35 + 24 = 59$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \times 1 + (-2) \times \frac{3}{2} & 4 \times \frac{1}{2} + (-2) \times 1 \\ (-6) \times 1 + 4 \times \frac{3}{2} & (-6) \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{اور}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 4 + \frac{1}{2} \times (-6) & 1 \times (-2) + \frac{1}{2} \times 4 \\ \frac{3}{2} \times 4 + 1 \times (-6) & \frac{3}{2} \times (-2) + 1 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$AB = BA = I$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{اس لیے}$$

ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

یاد رکھیے!

اگر A نادر قالب ہو یعنی کہ $|A| = 0$ ، تو اس کا معکوس نہیں ہوتا۔

3- اگر $A = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$ نادر قالب ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$$

دی گئی شرط کے مطابق قالب A ایک نادر قالب ہے، لہذا

$$\begin{vmatrix} x & 6 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(15) - 5(6) = 0$$

$$15x - 30 = 0 \Rightarrow 15x = 30$$

$$x = \frac{30}{15} = 2$$

4- درج ذیل قالبوں کا ایڈجائنٹ معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{Adj } B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } C = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

5- درج ذیل قالبوں کا ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

$$(i) \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: فرض کیا

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5(5) - 0(0) = 25 - 0 = 25 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{25} & \frac{0}{25} \\ \frac{0}{25} & \frac{5}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3(2) - 0(8) = 6 - 0 = 6$$

$$= 3(2) - 0(8) = 6 - 0 = 6$$

2- معلوم کیجیے کہ درج ذیل قالب نادر ہیں یا غیر نادر۔

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(2) - (3)(3) = 10 - 9 = 1 \neq 0$$

$$= 5(2) - (3)(3) = 10 - 9 = 1 \neq 0$$

پس، قالب A ایک غیر نادر قالب ہے۔

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 7 & 21 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 7(6) - 2(21) = 42 - 42 = 0$$

$$= 7(6) - 2(21) = 42 - 42 = 0$$

پس، قالب B ایک نادر قالب ہے۔

$$C = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 13(3) - 7(5) = 39 - 35 = 4 \neq 0$$

$$= 13(3) - 7(5) = 39 - 35 = 4 \neq 0$$

پس، قالب C ایک غیر نادر قالب ہے۔

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(0) - 0(0) = 0 - 0 = 0$$

$$= 2(0) - 0(0) = 0 - 0 = 0$$

پس، قالب D ایک نادر قالب ہے۔

$$= 3(-3) - 5(5) = -9 - 25 = -34 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-34} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{-34} & \frac{-5}{-34} \\ \frac{-5}{-34} & \frac{3}{-34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{34} & \frac{5}{34} \\ \frac{5}{34} & \frac{-3}{34} \end{bmatrix}$$

$$(v) \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 10(3) - 3(8) = 30 - 24 = 6 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{6} & \frac{-8}{6} \\ \frac{-3}{6} & \frac{10}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$(vi) \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2(5) - 4(-3) = -10 + 12 = 2 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$(ii) \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (4)(2) - 7(8) = -8 - 56 = -64 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-64} \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{-64} & \frac{-8}{-64} \\ \frac{-7}{-64} & \frac{-4}{-64} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{32} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{64} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 40 & 8 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 40 & 8 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 40 & 8 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 40(2) - 5(8) = 80 - 40 = 40 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -5 & 40 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -5 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{40} & \frac{-8}{40} \\ \frac{-5}{40} & \frac{40}{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(-3) - 5(5) = -9 - 25 = -34 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

7- ثابت کیجیے کہ درج ذیل قالب ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2(2) + (-1)(3) & 2(1) + (-1)(2) \\ -3(2) + 2(3) & -3(1) + 2(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

چونکہ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = I$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = I$

$$= \begin{bmatrix} 2(2) + 1(-3) & 2(-1) + 1(2) \\ 3(2) + 2(-3) & 3(-1) + 2(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6+6 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{--- (i)}$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

(ii) $\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -\frac{15}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4(4) + 15(-1) & 4(-\frac{15}{2}) + 15(2) \\ 2(4) + 8(-1) & 2(-\frac{15}{2}) + 8(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16-15 & -30+30 \\ 8-8 & -15+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{15}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = I$

$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

6- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ہو تو A^{-1} معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

حل: فرض کیا

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 5(-1) - 2(-3) = -5 + 6 = 1 \neq 0$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا A^{-1} ممکن ہے۔

$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$

$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5(-1) + (-3)(-2) & 5(3) + (-3)(5) \\ 2(-1) + (-1)(-2) & 2(3) + (-1)(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+6 & 15-15 \\ -2+2 & 6-5 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{--- (i)}$

$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1(5) + 3(2) & -1(-3) + 3(-1) \\ -2(5) + 5(2) & -2(-3) + 5(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+6 & 3-3 \\ -10+10 & 6-5 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{--- (ii)}$

پس (i) اور (ii) سے یہ ثابت ہوا کہ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$= \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{-8} & \frac{1}{-8} \\ \frac{8}{-8} & \frac{0}{-8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{8} & -\frac{1}{8} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (i)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2) - (-3)(-1) = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

اس لیے قالب B ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا، B^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \times \text{Adj } B$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-3 \times 6) - 5(-2) = -18 + 10 = -8 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{6}{-8} & \frac{2}{-8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -\frac{15}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \times 4 + \left(-\frac{15}{2}\right) \times 2 & 4 \times 15 + \left(-\frac{15}{2}\right) \times 8 \\ -1 \times 4 + 2 \times 2 & -1 \times 15 + 2 \times 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 - 15 & 60 + (-15) \times 4 \\ -4 + 4 & -15 + 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 60 - 60 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (ii)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -\frac{15}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ اور } \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ}$$

ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

8- اگر ثابت کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

$$= \begin{bmatrix} -3(2) + (-2)(-3) & -3(-1) + (-2)(2) \\ 5(2) + 6(-3) & 5(-1) + 6(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 + 6 & 3 - 4 \\ 10 - 18 & -5 + 12 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 0(7) - (-8)(-1) = 0 - 8 = -8 \neq 0$$

اس لیے AB ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا، $(AB)^{-1}$ ممکن ہے۔

$$\text{Adj}(AB) = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \times \text{Adj}(AB)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-8}{-80} & \frac{-3}{-80} \\ \frac{0}{-80} & \frac{10}{-80} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{80} \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \dots(i)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0(2) - 5(-1) = 0 + 5 = 5 \neq 0$$

قالب B ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا B^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \times \text{Adj } B$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0) - 8(2) = 0 - 16 = -16 \neq 0$$

اس لیے قالب A ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\left(-\frac{3}{4}\right) + 1\left(\frac{5}{8}\right) & 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) \\ 3\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\left(\frac{5}{8}\right) & 3\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \\ -\frac{9}{4} + \frac{10}{8} & -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-12+5}{8} & \frac{-4+3}{8} \\ \frac{-18+10}{8} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-8}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \dots(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے یہ ثابت ہوا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$(ii) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

$$= \begin{bmatrix} 1(0) + 2(5) & 1(-1) + 2(2) \\ 8(0) + 0(5) & 8(-1) + 0(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+10 & -1+4 \\ 0+0 & -8+0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 10(-8) - 0(3) = -80 \neq 0$$

$$= -80 \neq 0$$

اس AB ایک غیر نادر قالب ہے، لہذا $(AB)^{-1}$ ممکن ہے۔

$$\text{Adj}(AB) = \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \times \text{Adj}(AB)$$

$$= \frac{1}{-80} \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

ذیل میں دی گئی ہے

$$ax + by = m$$

$$cx + dy = n$$

جہاں m, a, b, c, d حقیقی اعداد ہیں۔

یہاں ہم درج ذیل طریقہ سے دو متغیرات میں دو یک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کرنا سیکھیں گے:

(i) معکوس قالب کا طریقہ (ii) کریر کا قانون

(Matrix Inversion Method) معکوس قالب کا طریقہ

درج ذیل مساواتوں کو حل کرتے ہیں:

$$ax + by = m \quad \text{فرض کیا}$$

$$cx + dy = n \quad \text{اور}$$

ان مساواتوں کو قالب کی شکل میں یوں لکھتے ہیں:

$$\begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \quad (i)$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \quad \text{فرض کیا}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

اگر $|A| \neq 0$ ہو تو (i) کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX = B$$

$$\text{اور } A^{-1}AX = A^{-1}B$$

[بائیں طرف سے A^{-1} سے ضرب دینے سے]

$$IX = A^{-1}B \quad [A^{-1}A = I \text{ جیسا کہ}]$$

$$X = A^{-1}B \quad [\text{as } IX = X \text{ جیسا کہ}]$$

$$X = \frac{\text{Adj } A}{|A|} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}}{ad - bc}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} dm - bn \\ ab - cm \end{bmatrix}}{ad - bc} = \begin{bmatrix} \frac{dm - bn}{ad - bc} \\ \frac{ab - cm}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -16 & -16 \\ 8 & 1 \\ -16 & -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5}(0) + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) & \frac{2}{5}\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{16}\right) \\ -1(0) + 0\left(\frac{1}{2}\right) & -1\left(\frac{1}{8}\right) + 0\left(-\frac{1}{16}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{80} \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{80} \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad \dots(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

یک درجی ہمزاد مساواتوں کا حل

3.6

(Solution of Simultaneous Linear Equations)

یک درجی مساوات ایک الجبری مساوات ہے جس میں متغیر کی زیادہ سے زیادہ قوت 1 ہوتی ہے۔ دو متغیرات میں ایک درجی مساوات کی عام شکل یہ ہے:

$$ax + by = c \quad \text{جہاں } a, b, c \text{ حقیقی اعداد ہیں اور } x, y \text{ متغیرات اور } a \text{ اور } b \text{ غیر صفر ہیں۔}$$

یک درجی ہمزاد مساواتیں دو یا دو سے زیادہ یک درجی مساواتوں کا ایک سیٹ ہوتی ہیں جن میں دو یا دو سے زیادہ متغیرات ہوتے ہیں اور جنہیں ایک مشترکہ حل معلوم کرنے کے لیے ایک ساتھ حل کیا جاتا ہے۔

دو متغیرات میں دو یک درجی مساواتوں کے نظام کی عام شکل

$$= \frac{1}{-22} \begin{bmatrix} -65 + 21 \\ -52 - 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{-22} \begin{bmatrix} -44 \\ -66 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = 2, y = 3$$

پس، $\{(2, 3)\}$ = حل سیٹ

چیلنج!

دو متغیرات میں کوئی سی دو یک درجی مساواتیں لیں اور ان کو معکوس قالب کے طریقہ سے حل کیجیے۔

$$3x + 4y = 25$$

$$6x - 2y = 10$$

حل:

ان مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 3x + 4y \\ 6x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad (i)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کریں}$$

تو مساوات (i) کو ایسے لکھا جاسکتا ہے

$$AX = B$$

$$X = A^{-1} B \quad \text{یا}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-2) - 6(4) = -6 - 24 = -30$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1} B$ کو ایسے لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -2(25) + (-4)(10) \\ -6(25) + 3(10) \end{bmatrix} = \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -50 - 40 \\ -150 + 30 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{dm - bn}{ad - bc}, y = \frac{an - am}{ad - bc}$$

مثال 10: درج ذیل کو معکوس قالب کے طریقہ سے حل کیجیے۔

$$2x + 3y = 13$$

$$4x - 5y = -7$$

حل: دیا گیا

$$2x + 3y = 13$$

$$4x - 5y = -7$$

مساواتوں کو قالب کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 4x - 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{or} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (i)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کریں}$$

(i) کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$$AX = B \quad \text{یا}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-5) - (3)(4) = -10 - 12 = -22 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A \quad \text{اس لیے}$$

$$= \frac{1}{-22} \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1} B$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-22} \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-22} \begin{bmatrix} (-5) \times 13 + (-3) \times (-7) \\ (-4) \times 13 + 2 \times (-7) \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{\text{Adj } A}{|A|} \times B$$

$$[A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}}{|A|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} dm - bn \\ -cm + an \end{bmatrix}}{|A|}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} dm - bn \\ -cm + an \end{bmatrix}}{|A|}$$

$$x = \frac{dm - bn}{|A|}, y = \frac{an - cm}{|A|}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|A_y|}{|A|}$$

چیلنج!

دو متغیرات میں کوئی سی دو یک درجی مساواتیں لیں اور ان کو کریمیر کے قانون سے حل کیجیے۔

$$2x + 4y = 2$$

$$5x - 2y = -19$$

ان مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھئے

$$\begin{bmatrix} 2x + 4y \\ 5x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -19 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -19 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -19 & -2 \end{bmatrix}, \text{ فرض کیا}$$

$$= \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -90 \\ -120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x = 3, y = 4$$

$$\text{حل سیٹ} = \{(3, 4)\}$$

تاریخ:

گیبریل کریمیر (1704-1752) جنیوا سے تعلق رکھنے والے ایک ریاضی دان تھے۔ کریمیر نے کم عمری سے ہی ریاضی میں ذہانت کا مظاہرہ کیا تھا۔ 18 سال کی عمر میں انھوں نے ریاضی میں اپنی ڈاکٹریٹ کی ڈگری حاصل کی۔



گیبریل کریمیر

(31 جولائی 1704ء - 4 جنوری 1752ء)

1750ء میں انھوں نے کریمیر کا قانون شائع کیا جس میں ایک درجی مساواتوں کے ایسے نظام کے لیے، جس کا صرف ایک ہی حل ہو، مقطع کی مدد سے کسی بھی متغیر کے منفرد حل کے لیے ایک عمومی کلیہ پیش کیا۔ یہ قانون آج بھی مستند ہے۔

کریمیر کا قانون (Cramer's Rule)

فرض کیا درج ذیل ایک درجی ہمزاد مساواتیں ہیں۔

$$ax + by = m$$

$$cx + dy = n$$

ان مساواتوں کو قالب کی شکل میں یوں لکھ سکتے ہیں:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \text{ جہاں}$$

$$AX = B \quad (i)$$

اگر $|A| \neq 0$ ، ہو تو مساوات (i) سے

$$A^{-1} AX = A^{-1} B \quad [\text{بائیں } A^{-1} \text{ سے ضرب دینے سے}]$$

$$IX = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B \quad [\text{جیسا کہ } IX = X]$$

$$A_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-5) - (3)(4)$$

$$= -10 - 12$$

$$= -22 \neq 0$$

$$|Ax| = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (13)(-5) - (-7)(3)$$

$$= -65 + 21 = -44$$

$$x = \frac{|Ax|}{|A|}$$

$$= \frac{-44}{-22} = 2$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-7) - (13)(4)$$

$$= -14 - 52 = -66$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-66}{-22} = 3$$

$$\text{حل سیٹ} = \{(2, 3)\}$$

حقیقی دنیا میں قابلوں کا اطلاق (Applications of Matrices in Real World)

3.7

مثال 12: تین قوتیں ایک ذرہ (particle) پر عمل کر رہی ہیں جو کہ لازمی طور پر متوازن ہوں، یعنی $F_1 + F_2 + F_3 = 0$

جہاں $F_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ اور $F_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ x \end{bmatrix}$ ، $F_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5-3-2 \\ 2+x-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x-2=0$$

$$x=2$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -19 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -19 \end{bmatrix} \text{ اب}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2) - (5)(4)$$

$$= -4 - 20 = -24 \neq 0$$

$$|Ax| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -19 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2) - (-19)(4)$$

$$= -4 + 76 = 72$$

$$x = \frac{|Ax|}{|A|}$$

$$x = \frac{72}{-24} = -3$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 19 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(19) - (5)(2)$$

$$= 38 - 10 = 28$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 19 \end{vmatrix} = \frac{-48}{-24} = 2$$

$$x = -3, y = 2 \text{ لہذا،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \{(-3, 2)\}$$

مثال 11: کریبر کے قانون کا استعمال کرتے ہوئے مساواتوں کو حل کیجیے:

$$2x + 3y = 13$$

$$4x - 5y = -7$$

$$2x + 3y = 13$$

$$4x - 5y = -7$$

حل:

مساوات کی قلمی شکل ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-48-12}{-3} = \frac{-60}{-3} = 20$$

$$= \frac{-60}{-3} = 20$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}}{-3}$$

$$= \frac{-16-56}{-3} = \frac{-72}{-3} = 24$$

پس، حوریہ اور جنت کی موجودہ عمریں بالترتیب 20 سال اور 24 سال ہیں۔

3.8 سائنسی نظریات اور تکنیکی ترقی میں ریاضی کا کردار (The Role of Mathematics in Scientific Theories and Technological Advancement)

ریاضی کو ایک سائنس کی زبان کے طور پر بیان کیا جاتا ہے یہ سائنسی نظریات اور جدید ٹیکنالوجی کو آگے بڑھانے میں ایک بنیادی کردار ادا کرتی ہے۔ سائنس کے قوانین کو سمجھنے سے لے کر زندگی بچانے والی ادویات کی بناوٹ تک، ریاضی حقیقی دنیا کے مظاہر کو بیان کرنے، پیش گوئی کرنے اور بہتر بنانے کے لیے ضروری کلیات فراہم کرتی ہے۔

ایک اہم میدان جہاں ریاضی اپنا کردار ادا کرتی ہے وہ ریاضیاتی ماڈلز اور مفروضات کا استعمال ہے۔ سائنسدان اور انجینئرز ان ماڈلز کو کمپیوٹس نظاموں جیسے موسمی تبدیلیاں، آبادی میں اضافہ یا انسانی دماغ کے افعال کی نمائندگی ظاہر کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ یہ ماڈلز محققین کو مفروضوں کی جانچ، مستقبل کے نتائج کی پیش گوئی اور ایسے منظر ناموں کو جانچنے کی بصیرت دیتے ہیں جنہیں حقیقی دنیا میں نقل کرنا بہت مشکل یا ناممکن ہو۔

مثال کے طور پر، طب اور مادی سائنسی میں ریاضیاتی تصورات کا استعمال نئے مواد یا دواؤں کے ڈیزائن اور بہتر بنانے کے لیے کیا جاتا ہے۔ یہ طریقہ آزمائشی اور غلط تجربات کو کم کر کے وقت اور وسائل کی بچت کرتا ہے۔ اسی طرح، فزکس اور فلکیات جیسے شعبوں میں مساواتیں اور ماڈلز ہمیں کہکشاؤں، بلیک ہولز اور ذیلی جوہری ذرات کی تشکیل کو سمجھنے میں مدد دیتی ہے۔

مثال 13: آٹھ سال پہلے حوریہ کی عمر جنت کی عمر کا $\frac{3}{4}$ گنا تھی۔ چار سال بعد حوریہ کی عمر جنت کی عمر کا $\frac{6}{7}$ گنا ہوگی۔ قابلوں کا استعمال کرتے ہوئے ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ حوریہ کی موجودہ عمر x سال ہے۔ اور جنت کی موجودہ عمر y سال ہے۔ آٹھ سال پہلے حوریہ کی عمر $(x-8)$ سال تھی اور جنت کی عمر $(y-8)$ سال تھی۔ پہلی شرط کے مطابق:

$$x-8 = \frac{3}{4}(y-8)$$

$$\text{یا } 4x-32=3y-24$$

$$\text{یا } 4x-3y=24-32$$

$$4x-3y=-8 \quad (i)$$

4 سال بعد ان کی عمریں $(x+4)$ اور $(y+4)$ ہوں گی۔

دوسری شرط کے مطابق:

$$x+4 = \frac{6}{7}(y+4)$$

$$7x+28=6y+24$$

$$7x-6y=-4 \quad (ii)$$

(i) اور (ii) کو قابلوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

یہاں،

$$A_x = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (4)(-6) - (7)(-3)$$

$$= -24 + 21$$

$$= -3 \neq 0$$

کریمر کا قانون استعمال کرنے سے

$$\vec{x} = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}}{-3}$$

$$= -6 - 20$$

$$= -26 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-26} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{اب } X = A^{-1}B \text{ کو ایسے لکھا جاسکتا ہے۔}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-26} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-26} \begin{bmatrix} -3(19) + (-5)(-1) \\ -4(19) + 2(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-26} \begin{bmatrix} -57 + 5 \\ -76 - 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-26} \begin{bmatrix} -52 \\ -78 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-52}{-26} \\ \frac{-78}{-26} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = 2, y = 3 \text{ پس}$$

$$\text{حل سیٹ } \{(2, 3)\}$$

$$\text{ii) } 3x + 2y = 7$$

$$5x - y = 16$$

$$3x + 2y = 7$$

$$5x - y = 16$$

$$\text{مساواتوں کو قالیوں کی شکل میں لکھنے سے}$$

$$\begin{bmatrix} 3x + 2y \\ 5x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix} \text{---(i)}$$

دواؤں کی دریافت:
ریاضیاتی الگورتھم سمجھنے میں مدد کرتے ہیں کہ جسم میں
خلیوں یا پروٹین کے ساتھ کس طرح تعامل کرے گی اور جس سے متاثرہ علاقے
کی دریافت میں تیزی آتی ہے۔
نیوروسائنس:

ریاضیاتی ماڈل دماغ کی سرگرمی کو تحریر کرنے کے لیے استعمال
ہوتے ہیں، جو محققین کو سیکھنے، یادداشت اور مرگی جیسی بیماریوں کو سمجھنے میں
مدد دیتے ہیں۔
موسمیاتی سائنس:

کمپلیکس مساواتیں ہوا، پانی اور توانائی کے تعامل کو بیان کرتی
ہیں، جو سائنسدانوں کو موسم اور طویل مدتی موسمیاتی تبدیلی کی پیش گوئی
کرنے میں مدد دیتی ہیں۔

حل مشق 3.6

1- اگر ممکن ہو تو معکوس قالب کے طریقہ سے حل کیجیے۔

$$(i) \quad 2x + 5y = 19$$

$$4x - 3y = -1$$

$$2x + 5y = 19$$

$$4x - 3y = -1$$

حل: دیا گیا ہے

مساواتوں کو قالیوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 2x + 5y \\ 4x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -1 \end{bmatrix} \text{---(i)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 19 \\ -1 \end{bmatrix}$$

فرض کیا

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \text{ اب}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (2 \times -3) - (4 \times 5)$$

(iii) $x - 2y = 9$

$2x + 7y = -4$

$x - 2y = 9$

$2x + 7y = -4$

ان مساواتوں کو قیاسی شکل میں لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} x - 2y \\ 2x + 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{---(i)}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$ فرض کیا

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \quad \text{یا}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1(7) - 2(-2) = 7 + 4 = 11 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A \quad \text{اس لیے}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7(9) + 2(-4) \\ -2(9) + 1(-4) \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 63 - 8 \\ -18 - 4 \end{bmatrix}$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix}$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \quad \text{یا}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 5(2) = -3 - 10 = -13 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -1(7) + (-2)(16) \\ -5(7) + 3(16) \end{bmatrix} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -7 - 32 \\ -35 + 48 \end{bmatrix} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -39 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$x = 3, y = -1$ پس،
حل سیٹ = $\{(3, -1)\}$

$$= \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} -2(2) + (-2)(-2) \\ -1(2) + 3(-2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} -4 + 4 \\ -2 - 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پس، $x = 0, y = 1$

حل سیٹ $= \{(0, 1)\}$

2- اگر ممکن ہو تو درج ذیل ایک درجی مساواتوں کے جوڑوں کو کریمر کے قانون کی مدد سے حل کیجیے۔

(i) $x + 4y = 4$

$2x - y = 5$

$x + 4y = 4$

$2x - y = 5$

دیا گیا ہے کہ

حل:

مساواتوں کو قالیوں کی شکل میں لکھئے

$$\begin{bmatrix} x + 4y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 55 \\ -22 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

پس، $x = 5, y = -2$

حل سیٹ $= \{(5, -2)\}$

(iv) $3x + 2y = 2$

$x - 2y = -2$

$3x + 2y = 2$

$x - 2y = -2$

حل:

دیا گیا ہے کہ

مساواتوں کو قالیوں کی شکل میں لکھئے

$$\begin{bmatrix} 3x + 2y \\ x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{--- (i)}$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$AX = B$

$X = A^{-1}B$

یا

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

اب

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3(-2) - 1(2)} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$ اس لیے

$$= 1(-2) - 3(2) \\ = -2 - 6 = -8 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \\ = 7(-2) - (-3)(2) \\ = -14 + 6 = -8$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} \\ = \frac{-8}{-8} \\ = 1$$

$$\text{حل سیٹ} = \{(1, 3)\}$$

$$\text{(iii) } 2x - 5y = -6 \\ 4x - 3y = -12 \\ 2x - 5y = -6 \\ 4x - 3y = -12$$

دیا گیا ہے کہ

حل:

مساواتوں کو قلابوں کی شکل میں لکھتے سے

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \end{bmatrix} \quad \text{یا}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -12 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \\ = 2(-3) - 4(-5) \\ = -6 + 20 = 14 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -12 & -3 \end{vmatrix} \\ = (-6)(-3) - (-12)(-5) \\ = 18 - 60 = -42$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \\ = 1(-3) - 3(7) \\ = -3 - 21 = -24$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} \\ = \frac{-24}{-8} \\ = 3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ = 1(-1) - 2(4) \\ = -1 - 8 \\ = -9 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ = 4(-1) - 5(4) \\ = -4 - 20 \\ = -24$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-24}{-9} = \frac{8}{3}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ = 1(5) - 2(4) = 5 - 8 = -3 \\ y = \frac{|A_y|}{|A|} \\ = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$$

$$\text{(ii) } x + 2y = 7$$

$$3x - 2y = -3$$

$$x + 2y = 7$$

$$3x - 2y = -3$$

دیا گیا ہے کہ

مساواتوں کو قلابوں کی شکل میں لکھتے سے

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{یا}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

3- ایک الیکٹریکل انجینئر ایک سادہ برقی سرکٹ کی دو

شاخوں A اور B میں کرنٹ معلوم کرنا چاہتا ہے۔

مساواتوں کا نظام یہ ہے:

$$x + y = 7$$

$$2x - y = 2$$

جہاں x شاخ A میں کرنٹ ہے اور y شاخ B میں کرنٹ

ہے۔ قابلوں کا استعمال کرتے ہوئے x اور y کی قیمت

معلوم کیجیے۔

$$x + y = 7$$

$$2x - y = 2$$

مساواتوں کو قابلوں کی شکل میں لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} x + y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$A X = B$$

$$X = A^{-1} B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1) - 2(2)$$

$$= -1 - 4 = -5 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1} B$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$= \frac{-42}{14}$$

$$= -3$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-12) - 4(-6) = -24 + 24 = 0$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$= \frac{0}{14} = 0$$

$$\text{حل سیٹ} = \{(-3, 0)\}$$

$$(iv) 3x + 2y = -1$$

$$5x + 6y = 5$$

$$3x + 2y = -1$$

$$5x + 6y = 5$$

دیا گیا ہے کہ

مساواتوں کو قابلوں کی شکل میں لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} 3x + 2y \\ 5x + 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 3(6) - 5(2) = 18 - 10 = 8$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -1(6) - 5(2) = -6 - 10 = -16$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$= \frac{-16}{8}$$

$$= -2$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(5) - 5(-1) = 15 + 5 = 20$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$= \frac{20}{8}$$

$$= \frac{5}{2}$$

5- دو سپورٹ نیمر A اور B، 100 کلو نیوٹن (kN) کا

مشترکہ بوجھ اٹھا رہے ہیں۔ نیمر A پر بوجھ کا دو گنا اور نیمر B پر بوجھ کا تین گنا 240 کلو نیوٹن (kN) بنتا ہے۔
قالبوں کا استعمال کرتے ہوئے نیمر A اور نیمر B پر بوجھ معلوم کیجیے۔

حل: دیے گئے مواد سے مساواتیں بنائیں۔

$$A + B = 100$$

$$2A + 3B = 240$$

ان مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} A + B \\ 2A + 3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 240 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 240 \end{bmatrix} \quad \text{--- (i)}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 100 \\ 240 \end{bmatrix}$$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$CX = D$$

$$X = C^{-1}D$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ = 1(3) - (2)(1) \\ = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$\text{Adj } C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \times \text{Adj } C \\ = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1(7) + (-1)(2) \\ -2(7) + 1(2) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -7 - 2 \\ -14 + 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -9 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 \\ -3 \\ -12 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

پس $x = 3, y = 4$

3 شاخ A(x) میں کرنٹ

4 شاخ B(y) میں کرنٹ

4- تین قوتیں ایک ذرہ پر عمل کر رہی ہیں جو کہ متوازن ہوں۔

$$F_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ x \end{bmatrix} \quad \text{یعنی } F_1 + F_2 + F_3 = 0 \quad \text{جہاں}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} y \\ -1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

قیمت معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا $F_1 + F_2 + F_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 - 2 + y \\ x - 7 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 + y \\ x - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x - 8 = 0 \quad | \quad 6 + y = 0$$

$$x = 8 \quad | \quad y = -6$$

پس $x = 8, y = -6$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX = B$$

$$X = A^{-1} B$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1) - (1)(1)$$

$$= -2 - 1$$

$$= -3 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1(5) + (-1)(1) \\ -1(5) + 2(1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -5 - 1 \\ -5 + 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6/-3 \\ -3/-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = 2, y = 1 \quad \text{لہذا}$$

$$\text{نقطہ تقاطع} = (2, 1)$$

اب C و D کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 240 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(100) + (-1)(240) \\ -2(100) + 1(240) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 - 240 \\ -200 + 240 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$\text{تیم A پر بوجھ} = 60 \text{ kN}$$

$$\text{تیم B پر بوجھ} = 40 \text{ kN}$$

6- ایک 2D گیم کی دنیا میں، دو کردار خط مستقیم پر چل رہے ہیں۔ ایک کردار ایسے خط پر چلتا ہے جہاں اس کی افقی پوزیشن اور عمودی پوزیشن کے دو گنا کا مجموعہ 5 ہے۔ جبکہ دوسرا کردار ایسے خط پر چلتا ہے جہاں اس کی افقی پوزیشن اس کی عمودی پوزیشن سے ایک زیادہ ہے۔ قالیوں کا استعمال کرتے ہوئے ان کا نقطہ تقاطع معلوم کیجیے۔

$$x = \text{فرض کیا افقی پوزیشن}$$

$$y = \text{عمودی پوزیشن}$$

پہلی شرط کے مطابق

$$2x + y = 5 \quad \text{(i)}$$

دوسری شرط کے مطابق

$$x = y + 1$$

$$x - y = 1 \quad \text{(ii)}$$

$$2x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2x + y \\ x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(i)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کیا}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3(-8) + 5(12) \\ -1(-8) + 1(12) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 24 + 60 \\ 8 + 12 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 84 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{84}{2} \\ \frac{20}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x = 42, y = 10$$

لہذا سال $= 42$ آدمی کی موجودہ عمر

سال $= 10$ بیٹے کی موجودہ عمر

-8 دو سائیکل سوار 44 کلومیٹر کے فاصلہ پر ہیں اور ایک ہی

وقت میں سفر شروع کرتے ہیں۔ اگر وہ ایک دوسرے

کی طرف چلیں تو وہ دو گھنٹے میں ملتے ہیں، لیکن اگر وہ

ایک ہی سمت میں چلیں تو تیز رفتار سائیکل سوار سست

رفتار سائیکل سوار کو $7\frac{1}{2}$ گھنٹے میں پیچھے چھوڑ دیتا ہے۔

قالیوں کا استعمال کرتے ہوئے ان کی رفتاریں معلوم کیجیے۔

حل: $x =$ فرض کیا تیز رفتار سائیکل سوار کی رفتار (کلومیٹر فی گھنٹا میں)

-7 دو سال پہلے ایک آدمی اپنے بیٹے سے 5 گنا بڑا تھا۔ 6

سال بعد وہ اپنے بیٹے سے 3 گنا بڑا ہو گیا۔ قالیوں کا

استعمال کرتے ہوئے ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا آدمی کی موجودہ عمر x سال اور بیٹے کی عمر y سال ہے۔

سال 2 x دو سال پہلے آدمی کی عمر

سال 2 y دو سال پہلے بیٹے کی عمر

پہلی شرط کے مطابق

$$x - 2 = 5(y - 2)$$

$$x - 2 = 5y - 10$$

$$x - 5y = -10 + 2$$

$$x - 5y = -8 \quad (i)$$

سال 6 $x + 6$ سال بعد باپ کی عمر ہوگی

سال 6 $y + 6$ سال بعد بیٹے کی عمر ہوگی

دوسری شرط کے مطابق

$$x + 6 = 3(y + 6)$$

$$x + 6 = 3y + 18$$

$$x - 3y = 18 - 6$$

$$x - 3y = 12 \quad (ii)$$

(i) اور (ii) کی قالیوں کی شکل

$$\begin{bmatrix} x - 5y \\ x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (iii)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کیا}$$

مساوات (iii) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

یا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-3) - 1(-5)$$

$$= -3 + 5 = 2 \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -15 & -1 \\ -15 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 88 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -15(22) + (-1)(88) \\ -15(22) + 1(88) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -330 - 88 \\ -330 + 88 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -418 \\ -242 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-418}{-30} \\ \frac{-242}{-30} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.93 \\ 8.07 \end{bmatrix}$$

$$x = 13.93, y = 8.07$$

$$\text{تیز رفتار سائیکل سوار کی رفتار} = 13.93 \text{ km/h}$$

$$\text{ست رفتار سائیکل سوار کی رفتار} = 8.07 \text{ km/h}$$

9- ایک کسر کا شمار کنندہ اس کے مخرج سے 7 کم ہے۔ اگر

شمار کنندہ میں 3 کا اضافہ کر دیا جائے تو نئی کسر $\frac{3}{4}$ بن جاتی

ہے۔ قالیوں کا استعمال کرتے ہوئے اصل کسر معلوم کیجیے

حل: فرض کیا

$$x = \text{کسر کا شمار کنندہ}$$

$$y = \text{کسر کا مخرج نما}$$

پہلی شرط کے مطابق

$$x - y = -7 \text{ — (i)}$$

دوسری شرط کے مطابق

$$\frac{x+3}{y} = \frac{3}{4}$$

$$4(x+3) = 3y$$

$$4x + 12 = 3y$$

$$4x - 3y = -12 \text{ — (ii)}$$

دونوں مساواتوں کو قالیوں کی شکل میں لکھنے سے

y ست رفتار سائیکل سوار کی رفتار (یکومیٹر فی گھنٹہ میں)
پہلی شرط کے مطابق (ایک دوسرے کی طرف بڑھ رہے ہیں)

$$2(x+y) = 44$$

$$x+y = \frac{44}{2}$$

$$x+y = 22 \text{ — (i)}$$

دوسری شرط کے مطابق

$$\frac{15}{2}(x-y) = 44$$

$$15(x-y) = 88$$

$$15x - 15y = 88 \text{ — (ii)}$$

$$\begin{bmatrix} x+y \\ 15x-15y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 88 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 15 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 88 \end{bmatrix} \text{ — (iii)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 15 & -15 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 22 \\ 88 \end{bmatrix} \text{ فرض کیا}$$

مساوات (iii) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

یا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 15 & -15 \end{bmatrix} \text{ اب}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 15 & -15 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-15) - 15(1)$$

$$= -15 - 15$$

$$= -30 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -15 & -1 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -15 & -1 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \text{ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔}$$

حل اعاده مشق 3

1- درج ذیل سوالات کے دیے گئے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) اگر $\begin{bmatrix} a+2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ ہو تو a برابر ہے:

- (a) 3 (b) 5
(c) 6 (d) 7

(ii) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ ایک _____ قالب ہے۔

- (a) قطاری (b) مربعی
(c) کالمی (d) صفری

(iii) $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ایک _____ قالب ہے۔

- (a) وحدانی (b) مربعی
(c) قطاری (d) کالمی

(iv) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ایک _____ قالب ہے۔

- (a) مستطیلی (b) وحدانی
(c) کالمی (d) قطاری

(v) اگر $A^t = A$ ہو تو A ایک _____ قالب ہے۔

- (a) سمیٹرک (b) قطاری
(c) مستطیلی (d) سکیوسمیٹرک

(vi) اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}$ ہوں تو $A+B$ برابر ہے:

- (a) $\begin{bmatrix} 21 & 32 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 24 & 28 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 10 & 12 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 11 & 11 \end{bmatrix}$

(vii) اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}$ ہوں تو $B-A$ برابر ہے:

- (a) $\begin{bmatrix} 10 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 11 & 11 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ کا جسی مکس کیا ہے؟

- (a) $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x-y \\ 4x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \end{bmatrix} \quad (iii)$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \end{bmatrix}$

مساوات (iii) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

یا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

اب

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1(-3) - 4(-1) = -3 + 4 = 1 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(-7) + 1(-12) \\ -4(-7) + 1(-12) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +21-12 \\ +28-12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

لہذا، $x = 9, y = 16$

$$\text{مگر} = \frac{9}{16}$$

$$B' - A' = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-4 & 8-7 \\ 5-2 & 8-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(iii) $2A + 3B$

$$2A + 3B = 2 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 14 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 15 \\ 24 & 24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8+15 & 4+15 \\ 14+24 & 12+24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 19 \\ 38 & 36 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ اور } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ اگر } -3$$

ہوں تو تصدیق کیجیے کہ

(i) $2(A + B) = 2A + 2B$

$$2(A+B) = 2 \left[\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 2+5 & 3+6 \\ 4+2 & 5+1 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 18 \\ 12 & 12 \end{bmatrix} \text{ — (i)}$$

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$2B = 2 \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A + 2B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ اگر (ix)}$$

2-by-3 (b)

3-by-2 (a)

2-by-2 (d)

3-by-3 (c)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \text{ برابر ہے: (x)}$$

12 (b)

11 (a)

-11 (d)

13 (c)

(iii) کالی (ii) قطاری 5 (i)

[10 12] (vi) سمیٹرک (v) وحدانی (iv)

2-by-3 (ix) $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ (viii) [4 4] (vii)

12 (x)

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \text{ اور } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ اگر } -2$$

معلوم کیجیے۔

(i) $(A - B)'$

$$A - B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 4-5 & 2-5 \\ 7-8 & 6-8 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A - B)' = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}'$$

$$(A - B)' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

(ii) $B' - A'$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)C = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7(3)+9(1) & 7(2)+9(7) \\ 6(3)+6(1) & 6(2)+6(7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21+9 & 14+63 \\ 18+6 & 12+42 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30 & 77 \\ 24 & 54 \end{bmatrix} \text{ (i)}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3)+3(1) & 2(2)+3(7) \\ 4(3)+5(1) & 4(2)+5(7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+3 & 4+21 \\ 12+5 & 8+35 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 25 \\ 17 & 43 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5(3)+6(1) & 5(2)+6(7) \\ 2(3)+1(1) & 2(2)+1(7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15+6 & 10+42 \\ 6+1 & 4+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 52 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$AC + BC = \begin{bmatrix} 9 & 25 \\ 17 & 43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & 52 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+21 & 25+52 \\ 17+7 & 43+11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30 & 77 \\ 24 & 54 \end{bmatrix} \text{ (ii)}$$

$$(A+B)C = AC + BC \text{ پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ}$$

$$(iv) C(A-B) = CA - CB$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$= \begin{bmatrix} 4+10 & 6+12 \\ 8+4 & 10+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 18 \\ 12 & 12 \end{bmatrix} \text{ (ii)}$$

$$2(A+B) = 2A + 2B \text{ پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ}$$

$$(ii) (A+B) + C = A + (B+C)$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$= \begin{bmatrix} 2+5 & 3+6 \\ 4+2 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7+3 & 9+2 \\ 6+1 & 6+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \text{ (i)}$$

$$B+C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+3 & 6+2 \\ 2+1 & 1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + (B+C) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+8 & 3+8 \\ 4+3 & 5+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \text{ (ii)}$$

$$(A+B)+C = A + (B+C) \text{ پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ}$$

$$(iii) (A+B)C = AC + BC$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$= \begin{bmatrix} 2+5 & 3+6 \\ 4+2 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(v) (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(5)+3(2) & 2(6)+3(1) \\ 4(5)+5(2) & 4(6)+5(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+6 & 12+3 \\ 20+10 & 24+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 15 \\ 30 & 29 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 16 & 15 \\ 30 & 29 \end{vmatrix}$$

$$= (16 \times 29) - (30 \times 15)$$

$$= 464 - 450 = 14 \neq 0$$

$$\text{Adj}(AB) = \begin{bmatrix} 29 & -15 \\ -30 & 16 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \times \text{Adj}(AB)$$

$$= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 29 & -15 \\ -30 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{29}{14} & \frac{-15}{14} \\ \frac{-30}{14} & \frac{16}{14} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{29}{14} & \frac{-15}{14} \\ \frac{-15}{7} & \frac{8}{7} \end{bmatrix} \text{ ————— (i)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5(1) - 2(6) = 5 - 12 = -7 \neq 0$$

$$\text{Adj } B = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \times \text{Adj } B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & -6 \\ 4 & -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C(A-B) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(-3)+2(2) & 3(-3)+2(4) \\ 1(-3)+7(2) & 1(-3)+7(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9+4 & -9+8 \\ -3+14 & -3+28 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \text{ ————— (i)}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3)+2(4) & 3(3)+2(5) \\ 1(2)+7(4) & 1(3)+7(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+8 & 9+10 \\ 2+28 & 3+35 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 30 & 38 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(5)+2(2) & 3(6)+2(1) \\ 1(5)+7(2) & 1(6)+7(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15+4 & 18+2 \\ 5+14 & 6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 20 \\ 19 & 13 \end{bmatrix}$$

$$CA - CB = \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 30 & 38 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 & 20 \\ 19 & 13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14-19 & 19-20 \\ 30-19 & 38-13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \text{ ————— (ii)}$$

$C(A-B) = CA - CB$ جس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ

$$= \begin{bmatrix} \frac{5+24}{7} & \frac{-3-12}{7} \\ \frac{-15}{7} & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{29}{7} & \frac{-15}{7} \\ \frac{-15}{7} & \frac{8}{7} \end{bmatrix} \text{ — (ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$(vi) AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(5) - 4(3)$$

$$= 10 - 12 = -2 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{-2} & \frac{-3}{-2} \\ \frac{-4}{-2} & \frac{2}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\left(\frac{-5}{2}\right) + 3(2) & 2\left(\frac{3}{2}\right) + 3(-1) \\ 4\left(\frac{-5}{2}\right) + 5(2) & 4\left(\frac{3}{2}\right) + 5(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+6 & 3-3 \\ -10+10 & 6-5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-6}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-5}{7} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(5) - 4(3)$$

$$= 10 - 12 = -2 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{-2} & \frac{-3}{-2} \\ \frac{-4}{-2} & \frac{2}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-5}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{7}\left(\frac{-5}{2}\right) + \frac{6}{7}(2) & \frac{-1}{7}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{6}{7}(-1) \\ \frac{2}{7}\left(\frac{-5}{2}\right) + \frac{-5}{7}(2) & \frac{2}{7}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{-5}{7}(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{14} + \frac{12}{7} & \frac{-3}{14} - \frac{6}{7} \\ \frac{-5}{7} - \frac{10}{7} & \frac{3}{7} + \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+6 & 20+10 \\ 12+3 & 24+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 30 \\ 15 & 29 \end{bmatrix} \quad \text{--- (ii)}$$

(AB)^t = B^tA^t پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا۔

(viii) (AB)C = A(BC)

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(5)+3(2) & 2(6)+3(1) \\ 4(5)+5(2) & 4(6)+5(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+6 & 12+3 \\ 20+10 & 24+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 15 \\ 30 & 29 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 16 & 15 \\ 30 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16(3)+15(1) & 16(2)+15(7) \\ 30(3)+29(1) & 30(2)+29(7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 48+15 & 32+105 \\ 90+29 & 60+203 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 137 \\ 119 & 263 \end{bmatrix} \quad \text{--- (i)}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5(3)+6(1) & 5(2)+6(7) \\ 2(3)+1(1) & 2(2)+1(7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15+6 & 10+42 \\ 6+1 & 4+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 52 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 & 52 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(21)+3(7) & 2(52)+3(11) \\ 4(21)+5(7) & 4(52)+5(11) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{--- (i)}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}(2)+\frac{3}{2}(4) & -\frac{5}{2}(3)+\frac{3}{2}(5) \\ 2(2)+(-1)(4) & 2(3)+(-1)(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+6 & -\frac{15}{2}+\frac{15}{2} \\ 4-4 & 6-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{--- (ii)}$$

AA⁻¹ = A⁻¹A = I پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا۔

(vii) (AB)^t = B^tA^t

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2(5)+3(2) & 2(6)+3(1) \\ 4(5)+5(2) & 4(6)+5(1) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 10+6 & 12+3 \\ 20+10 & 24+5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 16 & 15 \\ 30 & 29 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} 16 & 30 \\ 15 & 29 \end{bmatrix} \quad \text{--- (i)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^t A^t = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5(2)+2(3) & 5(4)+2(5) \\ 6(2)+1(3) & 6(4)+1(5) \end{bmatrix}$$

(iv) $A^{-1}A$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7(1) - 2(3)$$

$$= 7 - 6 = 1 \neq 0$$

لہذا A ممکن ہے۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7(1) - 3(2) & 1(3) + (-3)(1) \\ -2(7) + 7(2) & -2(3) + 7(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

(v) $(AB)^t$

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7(5) + 3(2) & 7(3) + 3(4) \\ 2(5) + 1(2) & 2(3) + 1(4) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 35+6 & 21+12 \\ 10+2 & 6+4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 41 & 33 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} 41 & 12 \\ 33 & 10 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{bmatrix} 42+21 & 104+33 \\ 84+35 & 208+55 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 137 \\ 119 & 263 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)}$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(AB)C = A(BC)$

$$-4 \text{ اگر } A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ ہوں تو}$$

معلوم کیجیے۔

(i) $|B|$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

حل:

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 5(4) - 2(3) = 20 - 6 = 14$$

(ii) $\text{Adj } B$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\text{Adj } B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

(iii) A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7(1) - 2(3)$$

$$= 7 - 6 = 1 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر زائد قاب ہے لہذا A ممکن ہے۔

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-23} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-23} \begin{bmatrix} -1(7) + (-4)(2) \\ -5(7) + 3(2) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-23} \begin{bmatrix} -7-8 \\ -35+6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-23} \begin{bmatrix} -15 \\ -29 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-15}{-23} \\ \frac{-29}{-23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{23} \\ \frac{29}{23} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{15}{23}, y = \frac{29}{23}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \left(\frac{15}{23}, \frac{29}{23} \right) \right\}$$

کریمر کے قانون کے طریقے سے

$$3x + 4y = 7$$

$$5x - y = 2$$

قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 3x+4y \\ 5x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1) - 5(4)$$

$$= -3 - 20 = -23 \neq 0$$

(vi) $(B')^1$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(B')^1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

5- اگر ممکن ہو تو درج ذیل ایک درجی مساواتوں کے جوڑے کو معکوس قالب کے طریقے اور کریمر کے قانون کی مدد سے حل کیجیے۔

$$(i) \quad 3x + 4y = 7$$

$$5x - y = 2$$

حل: معکوس قالب کے طریقے سے دیا گیا ہے کہ

$$\begin{bmatrix} 3x+4y \\ 5x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 3x+4y \\ 5x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (i)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

فرض کیا پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1) - 5(4)$$

$$= -3 - 20 = -23 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(6) - 2(-6)$$

$$= 6 + 12$$

$$= 18 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A \quad \text{اس لیے}$$

$$= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 6(-15) + 6(-3) \\ -2(-15) + 1(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -90 - 18 \\ +30 - 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -108 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-108}{18} \\ \frac{27}{18} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$x = -6, y = \frac{3}{2} \quad \text{پس،}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \left(-6, \frac{3}{2} \right) \right\}$$

$$x - 6y = -15$$

$$2x + 6y = -3$$

مساوات کو قابوں کی شکل میں لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} x - 6y \\ 2x + 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 7(-1) - (4)$$

$$= -7 - 4 = -11$$

$$x = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$= \frac{-15}{-23} = \frac{15}{23}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(2) - 5(7)$$

$$= 6 - 35$$

$$= -29$$

$$y = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$= \frac{-29}{-23} = \frac{29}{23}$$

$$(ii) \quad x - 6y = -15$$

$$2x + 6y = -3$$

حل: معکوس قالب کے طریقے سے

$$x - 6y = -15$$

$$2x + 6y = -3$$

قابوں کی شکل میں لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} x - 6y \\ 2x + 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (i)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -15 \\ -3 \end{bmatrix}$$

فرض کیا

مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

یا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

اب

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ فرض کیا}$$

مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX = B$$

$$X = A^{-1} B$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ اب}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(3) - 1(1)$$

$$= 6 - 1 = 5 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1} B$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3(5) + (-1)(3) \\ -1(5) + (2)(3) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 15 - 3 \\ -5 + 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -3 \end{bmatrix}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -15 & -6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -15 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(6) - 2(-6)$$

$$= 6 + 12$$

$$= 18 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -15 & -6 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-15)(6) - (-3)(-6)$$

$$= -90 - 18$$

$$= -108$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|}$$

$$= \frac{-108}{18} = -6$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -15 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-3) - (2)(-15)$$

$$= -3 + 30 = 27$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$y = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

$$x = -6, y = \frac{3}{2}$$

$$(iii) 2x + y = 5$$

$$x + 3y = 3$$

حل: متکوں قالب کے طریقہ سے

$$2x + y = 5 \text{ دیا گیا ہے کہ}$$

$$x + 3y = 3$$

مساوات کو قابلوں کی شکل میں لکھئے

$$x = \frac{12}{5}$$

$$y = \frac{1}{5} \quad \text{لہذا}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5} \right) \right\}$$

6- قابلوں کا استعمال کرتے ہوئے دو ایسے اعداد معلوم کیجیے کہ پہلے عدد کا دو گنا دوسرے میں شامل کرنے سے 21 بنتا ہے اور دوسرے عدد کا دو گنا پہلے میں جمع کرنے سے 27 بنتا ہے۔

حل: فرض کیا پہلا عدد x اور دوسرا عدد y ہے۔
پہلی شرط کے مطابق

$$2x + y = 21 \quad \text{(i)}$$

دوسری شرط کے مطابق

$$x + 2y = 27 \quad \text{(ii)}$$

مساواتوں کو قابلوں کی شکل میں لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 27 \end{bmatrix} \quad \text{(i)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 21 \\ 27 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کیا}$$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX = B$$

$$X = A^{-1} B \quad \text{یا}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

اب

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2) - 1(1)$$

$$= 4 - 1 = 3 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{12}{5}, y = \frac{1}{5} \quad \text{پس}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5} \right) \right\}$$

کریمر کے قانون کے ذریعے سے

$$2x + y = 5$$

دیا گیا ہے کہ

$$x + 3y = 3$$

مساوات کو قابلوں کی شکل میں لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{یا}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (3) - 1(1)$$

$$= 6 - 1 = 5 \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 5(3) - 3(1)$$

$$= 15 - 3 = 12$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|}$$

$$= \frac{12}{5}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 2(3) - 1(5)$$

$$= 6 - 5 = 1$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$= \frac{1}{5}$$

$$\begin{bmatrix} 4x+6y \\ 6x+5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136 \\ 164 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136 \\ 164 \end{bmatrix} \quad (i)$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 136 \\ 164 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کیا}$$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX = B$$

$$X = A^{-1} B \quad \text{یا}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4(5) - 6(6)$$

$$= 20 - 36$$

$$= -16 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1} B$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 136 \\ 164 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} 5(136) + (-6)(164) \\ -6(136) + 4(164) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} 680 - 984 \\ -816 + 656 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} -304 \\ -160 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1} B$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(21) + (-1)(27) \\ -1(21) + 2(27) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 42 - 27 \\ -21 + 54 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 15 \\ 33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$x = 5, y = 11 \quad \text{پس،}$$

پس، 5 اور 11 مطلوبہ اعداد ہیں۔

7- 4 چاقو اور 6 کانٹوں کی قیمت 136 روپے ہے جب کہ

6 چاقوؤں اور 5 کانٹوں کی قیمت 164 روپے ہے۔

قالیوں کا استعمال کرتے ہوئے ایک چاقو اور ایک

کانٹے کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیا ایک چاقو کی قیمت x روپے اور ایک کانٹے کی قیمت y روپے ہے۔

پہلی شرط کے مطابق

$$4x + 6y = 136 \quad (i)$$

دوسری شرط کے مطابق

$$6x + 5y = 164 \quad (ii)$$

مساواتوں کو قالیوں کی شکل میں لکھتے ہیں

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{ب}$$

$$|A| = (5)(6) - (2)(3) \\ = 30 - 6 \\ = 24 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3500 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 6(3500) + (-3)(5000) \\ -2(3500) + 5(5000) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 21000 - 15000 \\ -7000 + 25000 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 6000 \\ 18000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{6000}{24} \\ \frac{18000}{24} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 250 \\ 750 \end{bmatrix}$$

$$x = 250, y = 750$$

روپے 250 = ایک آدمی کی یومیہ اجرت

روپے 750 = ایک عورت کی یومیہ اجرت

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -304 \\ 16 \\ 160 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

پس: $x = 19, y = 10$

روپے 19 = چاقو کی قیمت

روپے 10 = کانٹے کی قیمت

8- ایک دکاندار 5 مردوں اور 3 عورتوں کو ملازمت دیتا

ہے اور 3500 روپے یومیہ اجرت ادا کرتا ہے۔ اگر

مردوں کی تعداد کم کر کے 2 کر دی جائے اور 3 اضافی

عورتوں کو ملازم رکھا جائے، تو یومیہ اجرت کی رقم 5000

روپے جاتی ہے۔ سوالیوں کا استعمال کرتے ہوئے ایک

مرد اور ایک عورت کی یومیہ اجرت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا ایک آدمی کی اجرت x روپے اور ایک عورت کی اجرت

y روپے ہے۔

پہلی شرط کے مطابق

$$5x + 3y = 3500 \quad (i)$$

دوسری شرط کے مطابق

$$2x + 6y = 5000 \quad (ii)$$

ان مساواتوں کو قلبوں کی شکل میں لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} 5x + 3y \\ 2x + 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3500 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3500 \\ 5000 \end{bmatrix} \quad \text{یا}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3500 \\ 5000 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کیا}$$

اب مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \quad \text{یا}$$

معروضی طرز سوالات

اضافی کثیر الانتخابی سوالات

مکمل تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے کثیر الانتخابی سوالات

قالب

3.1

درست جواب کا انتخاب کریں۔

- 1- قالب $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ میں کتنی قطاریں ہیں؟
- 2- قالب $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ میں کتنے کالم ہیں؟
- 3- قالب $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ کی دوسری قطار کے ارکان ہیں:
- 4- قالب $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ کی پہلی قطار اور دوسرے کالم کا رکن کیا ہے؟

- (a) 6 (b) 3 (c) 2 (d) 4
- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4
- (a) 1,3 (b) 2,4 (c) 12 (d) 3,4
- (a) 7 (b) 1 (c) 4 (d) 3

قالب کا مرتبہ

3.1.3

5- ان میں سے کون سا قالب 2×2 کے مرتبہ کا ہے۔

- (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- 6- قالب $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ بتائیں۔
- 7- ایک قالب کا مرتبہ 3-by-2 ہے۔ اس کے ہر کالم کے ارکان کی تعداد ہوگی۔
- 8- ایک 3 by 2 مرتبہ والے قالب کے کالموں کی تعداد کتنی ہوگی؟
- 9- قالب $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ کیا ہے؟

- (a) 3-by-3 (b) 3-by-1 (c) 1-by-3 (d) 1-by-1
- (a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 4
- (a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 6
- (a) 3-by-2 (b) 3-by-3 (c) 2×2 (d) 6

- 10- اگر $\begin{bmatrix} x & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ ہوں تو x کی قیمت ہوگی۔
 (a) 0 (b) 5 (c) 1 (d) 3
- 11- اگر $\begin{bmatrix} a+b \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ اور $b = 3$ ہو تو a کی قیمت ہوگی۔
 (a) 2 (b) 4 (c) 7 (d) 9
- 12- اگر $\begin{bmatrix} 2x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو x کی قیمت ہوگی۔
 (a) 20 (b) 1 (c) 5 (d) 10

قالبوں کی اقسام

3.2

- 13- قالب $A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ کس قسم کا قالب ہے؟
 (a) قطاری (b) مربعی (c) صفری (d) کالمی
- 14- قالب $B = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$ کس قسم کا قالب ہے؟
 (a) وحدانی (b) مربعی (c) کالمی (d) قطاری
- 15- کون سا قالب صفری قالب ہے؟
 (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$
- 16- قالب $B = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ کس قسم کا قالب ہے؟
 (a) مربعی (b) قطاری (c) صفری (d) کالمی
- 17- کون سا مرتبہ مربعی قالب کا ہے؟
 (a) 1×3 (b) 3×2 (c) 3×3 (d) 3×1
- 18- قالب $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ کس قسم کا قالب ہے؟
 (a) قطاری (b) مربعی (c) صفری (d) مستطیلی
- 19- کون سا مرتبہ مستطیلی قالب کا ہے؟
 (a) 1×3 (b) 3×3 (c) 2×2 (d) 1×1
- 20- کون سا قالب وتری قالب نہیں ہے؟
 (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- 21- قالب $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ کس قسم کا قالب ہے؟
 (a) قطاری (b) سکالر (c) صفری (d) مستطیلی

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

22- وحدانی قاتب کی شناخت کریں۔
23- قاتب $A = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ کا انیسوز ہے:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$[2 \ -7 \ 3] \text{ (b)}$$

$$[-7 \ 3 \ 2] \text{ (a)}$$

24- ایک مربعی قاتب A سیکورک کہلاتا ہے اگر

$$A^t = -A \text{ (d)}$$

$$A^t = A \text{ (c)}$$

$$A = -A \text{ (b)}$$

$$A = A^{-1} \text{ (a)}$$

25- ان میں سے کون سی مثال سکیو سیکورک قاتب کی ہے؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

26- ایسا قاتب A کون سا ہے جس کا $A^t = -A$ ہو؟

(d) صفری

(c) قطاری

(b) سکیو سیکورک

(a) وحدانی

3.3 قاتبوں پر الجبری قواعد

3.3

27- اگر قاتب A کا مرتبہ 3×2 اور قاتب B کا مرتبہ 3×2 ہو تو $A+B$ سے حاصل شدہ قاتب کا مرتبہ ہوگا:

$$3 \times 3 \text{ (d)}$$

$$2 \times 3 \text{ (c)}$$

$$6 \times 4 \text{ (b)}$$

$$3 \times 2 \text{ (a)}$$

28- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ہوں تو $A+B$ ہوگا۔

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

29- اگر $2A = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ ہو تو قاتب A ہوگا۔

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

30- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ اور $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو $A+B$ کا مرتبہ کیا ہوگا؟

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

31- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ ہو تو $B-A$ ہوگا۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

32- قاتبوں کا قانون مبادلہ ملحوظ جمع ہے۔

$$A+B=0 \text{ (d)}$$

$$A+B=AB \text{ (c)}$$

$$A+B=B+A \text{ (b)}$$

$$A+B=A-B \text{ (a)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

33- قالب $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ کا جی ذاتی قالب ہے:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ (b)} \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

34- قالب $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ کا جی معکوس قالب ہے:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ +3 & 2 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

35- اگر قالب $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ہو تو $3A - A$ ہوگا:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

36- کون سے قالب جمع کے لیے قابل موافق ہیں؟

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

37- قالبوں A اور B کے لیے کون سا بیان درست ہوتا ہے؟

$$AB = I \text{ (d)}$$

$$(A-B)^t = A^t B^t \text{ (e)}$$

$$(A-B)^t = A^t - B^t \text{ (b)}$$

$$A - B = B - A \text{ (a)}$$

38- اگر $Q = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ ہو تو $4Q =$ _____

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -12 \\ 0 & -16 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

3.4 قالبوں کی ضرب (Multiplication of Matrices)

39- قالبوں کا کون سا جوڑا ضرب کے لیے قابل موافق ہے؟

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

40- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ کا حاصل ضرب ہے:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

41- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو AB ہوگا:

$$\begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

42- اگر $A = \begin{bmatrix} -3 & 7 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -4 \\ -11 \end{bmatrix}$ ہو تو AB کا مرتبہ ہوگا:

$$2\text{-by-1} \text{ (d)}$$

$$1\text{-by-1} \text{ (c)}$$

$$2\text{-by-2} \text{ (b)}$$

$$1\text{-by-2} \text{ (a)}$$

43- قالبوں کی ضرب کی خاصیت تلازم ہے:

$$(AB)C = A(BC) \text{ (d)} \quad AB + C = AB + AC \text{ (c)}$$

$$AB = I \text{ (b)}$$

$$AB = BA \text{ (a)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

قالب کا ضربی معکوس

3.5

-44 قالب $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ اگر A^{-1} ہو تب $|A|$ ہے۔

16 (d)

11 (c)

0 (b)

29 (a)

-46 $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ کی قیمت کیا ہوگی؟

-6 (d)

6 (c)

10 (b)

4 (a)

-47 اگر $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تب $|B|$ کی قیمت ہے:

$ac - bd$ (d)

$cb - ad$ (c)

$ad - bc$ (b)

$ab - cd$ (a)

نادر اور غیر نادر قالب

3.5.2

-48 درج ذیل میں سے کون سا نادر قالب ہے؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

-49 درج ذیل میں سے کون سا قالب غیر نادر ہے؟

$$\begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

-50 اگر $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & k \end{bmatrix} = 0$ ہو تو k کی قیمت ہوگی۔

0 (d)

5 (c)

2 (b)

4 (a)

-51 درج ذیل میں سے کون سا قالب نادر نہیں ہے؟

$$\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 21 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

غیر نادر قالب کا ایڈجائنٹ

3.5.3

-52 قالب $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ کا ایڈجائنٹ ہے:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

-53 قالب $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ کا ایڈجائنٹ ہے:

$$\begin{bmatrix} a & d \\ b & c \end{bmatrix} \text{ (d)}$$

$$\begin{bmatrix} -a & c \\ b & -d \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$\begin{bmatrix} d & -d \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

54۔ کس تالاب کا ضربی معکوس ممکن نہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (c)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$(AB)^{-1} = \text{_____} \quad -55$$

$$(A+B)' \quad (d)$$

$$AB \quad (c)$$

$$B^{-1}A^{-1} \quad (b)$$

$$(BA)^{-1} \quad (a)$$

$$AA^{-1} = \text{_____} \text{ اگر } A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad -56$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (c)$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

57۔ تالاب B کا ضربی معکوس نہیں ہوتا اگر

$$|B| = 10 \quad (d)$$

$$|B| = 0 \quad (c)$$

$$|B| = 4 \quad (b)$$

$$|B| = -1 \quad (a)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad -5$$

$$7 \quad -4$$

$$3, 4 \quad -3$$

$$3 \times 2 \quad -3$$

$$3 \quad -1$$

$$3 \quad -10$$

$$3\text{-by-}2 \quad -9$$

$$3 \quad -8$$

$$3 \quad -7$$

$$1\text{-by-}3 \quad -6$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad -15$$

$$1 \times 1 \quad -14$$

$$13 \quad -13$$

$$5 \quad -12$$

$$4 \quad -11$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad -20$$

$$1 \times 3 \quad -19$$

$$18 \quad -18$$

$$3 \times 3 \quad -17$$

$$16 \quad -16$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \quad -25$$

$$A^t = A \quad -24$$

$$[-7 \quad 3 \quad 2] \quad -23$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad -22$$

$$21 \quad -21$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad -30$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad -29$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \quad -28$$

$$3 \times 2 \quad -27$$

$$26 \quad -26$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} \quad -35$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad -34$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -33$$

$$A+B-B+A \quad -32 \quad [2 \quad 2 \quad -4] \quad -31$$

$$\begin{bmatrix} -8 & -12 \\ 0 & -16 \end{bmatrix} \quad -38$$

$$(A-B)^t = A^t - B^t \quad -37$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad -36$$

$$(AB)C = A(BC) \quad -43$$

$$1\text{-by-}1 \quad -42$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad -41$$

$$5 \quad -40$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad -39$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad -48$$

$$ad - bc \quad -47$$

$$-6 \quad -46$$

$$11 \quad -45$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad -44$$

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad -53$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad -52$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \quad -51$$

$$2 \quad -50$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad -49$$

$$|D| = 0 \quad -57$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad -56$$

$$B^{-1}A^{-1} \quad -55$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad -54$$

اضافی مختصر سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے مختصر جوابی سوالات

متعلقہ ارکان ایک جیسے ہوں۔

9۔ اگر $\begin{bmatrix} 5x-1 & 4 \\ 11 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$ ہوں تب x اور y کی قیمتیں معلوم کریں۔

حل: دیا گیا ہے کہ $\begin{bmatrix} 5x-1 & 4 \\ 11 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$

چونکہ دیے گئے قالب مساوی ہیں۔ لہذا ان کے مرتبے اور متعلقہ ارکان ایک جیسے ہوں گے۔

$$\begin{array}{l|l} 5x-1=14 & \\ 5x-14+1 & y=9 \\ 5x=15 & \\ x=\frac{15}{5} & \\ x=3 & \end{array}$$

پس $x=3, y=9$

10۔ کیا قالب $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور قالب $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ مساوی ہیں یا نہیں۔ وجہ بتائیے۔

جواب: نہیں قالب A اور قالب B مساوی قالب نہیں ہیں۔ دونوں کا مرتبہ تو ایک جیسا ہے مگر دونوں قابلوں میں دوسری قطار کے متعلقہ ارکان ایک جیسے نہیں ہیں۔

11۔ اگر $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-1 & -4 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ ہوں تو a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

حل: مساوی قابلوں کے متعلقہ ارکان بھی مساوی ہوتے ہیں۔

$$\begin{array}{l|l} a-1=7 & \\ a=7+1 & \\ a=8 & b=9 \end{array}$$

پس $a=8, b=9$

قالب کی قطاریں اور کالم

3.1.1

مختصر جواب دیں۔

1۔ قالب کی تعریف کریں:

جواب: قالب ایک مسطیلی شکل کی ترتیب ہے جس کے ارکان قطاروں اور کالموں میں مربعی بریکٹ کے اندر لکھے جاتے ہیں۔

2۔ قالب کے حوالے سے قطار کی تعریف کریں۔

جواب: قطار میں لکھے ہوئے ارکان قالب کی قطار بناتے ہیں۔

3۔ قالب کے حوالے سے کالم کی تعریف کریں۔

جواب: عمودی لائن میں لکھے ہوئے ارکان قالب کے کالم بناتے ہیں۔

4۔ $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ اس قالب میں کتنی قطاریں اور کالم ہیں؟

جواب: قالب B کی دو قطاریں اور تین کالم ہیں۔

قالب کا مرتبہ

3.1.3

5۔ قالب $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ لکھیں۔

جواب: قالب A کا مرتبہ 1×3 ہے۔

6۔ قالب $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ لکھیں۔

جواب: قالب B کا مرتبہ 3×2 ہے۔

7۔ کیا قالب $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ اور قالب $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ برابر ہے؟

جواب: نہیں ان دونوں قابلوں کا مرتبہ برابر نہیں ہے۔ قالب A کا مرتبہ 2×2 ہے اور قالب B کا مرتبہ 1×2 ہے۔

مساوی قالب

3.1.4

8۔ مساوی قالب کی تعریف کریں۔

جواب: دو قالب A اور B مساوی قالب کہلاتے ہیں۔ اگر ان کا مرتبہ اور

20- قاب $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 19 & -19 \end{bmatrix}$ کا ٹرانسپوز معلوم کریں۔

حل: $C^t = \begin{bmatrix} -1 & 19 \\ 0 & -19 \end{bmatrix}$

$$C^t = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -19 \end{bmatrix}$$

21- اگر $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کریں کہ $(C^t)^t = C$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} \text{ حل:}$$

$$C^t = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(C^t)^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$$

پس ثابت ہوا کہ $(C^t)^t = C$

22- قاب $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ کا منفی قاب معلوم کریں۔

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ حل:}$$

$$-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$$

23- اگر $A = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کریں کہ یہ ایک سکیلر قاب ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \text{ حل:}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = A$$

پس ثابت ہوا کہ A ایک سکیلر قاب ہے کیوں کہ $A^t = A$

24- ثابت کریں کہ $M = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ -13 & 0 \end{bmatrix}$ ایک سکیو میٹرک ہے۔

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ -13 & 0 \end{bmatrix} \text{ حل:}$$

$$M^t = \begin{bmatrix} 0 & -13 \\ 13 & 0 \end{bmatrix} = -M$$

12- قطاری قاب کی تعریف کریں:

جواب: ایسا قاب جس کی صرف ایک ہی قطار ہو قطاری قاب کہلاتا ہے۔

$$\text{مثلاً } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

13- کالمی قاب کی تعریف کریں۔

جواب: ایسا قاب جس کا صرف ایک ہی کالم ہو کالمی قاب کہلاتا ہے۔

$$\text{مثلاً } B = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

14- ایک مربعی قاب کون سا ہوتا ہے؟

جواب: ایسا قاب جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو مربعی

$$\text{قاب کہلاتا ہے۔ مثلاً } A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ ایک مربعی قاب ہے۔}$$

15- مستطیلی قاب کی تعریف کریں۔

جواب: اگر قاب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر نہ ہو تو اسے

$$\text{مستطیلی قاب کہتے ہیں۔ مثلاً } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

16- وتری قاب کی تعریف کریں۔

جواب: ایک مربعی قاب کو وتری قاب کہا جاتا ہے، اگر اس کے مرکزی

وتری ارکان میں سے کم از کم ایک غیر صفر ہو اور غیر وتری ارکان

سب صفر ہوں۔

$$\text{مثلاً } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17- سکیلر قاب کی تعریف کریں:

جواب: ایک وتری قاب کو سکیلر قاب کہا جاتا ہے۔ اگر مرکزی وتر میں

موجود تمام ارکان ایک جیسے اور غیر صفر ہوں۔

18- وحدانی قاب کی تعریف کریں۔

جواب: ایک سکیلر قاب کو وحدانی قاب کہا جاتا ہے۔ اگر اس کے تمام

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ مثلاً}$$

مرکزی وتری ارکان 1 ہوں

19- قاب $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ کا ٹرانسپوز معلوم کریں۔

$$\text{حل: } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

28۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ ہو تو $A^t + B^t$ معلوم کریں۔

حل: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$A^t = [1 \ 7], B^t = [0 \ 4]$

$A^t + B^t = [1 \ 7] + [0 \ 4]$

$= [1+0 \ 7+4]$

$= [1 \ 1]$

3.4 قالیوں کی ضرب

3.4

29۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ہو تو AB معلوم کریں۔

حل: $AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3(-5) + 0(1) \\ -3(-5) + 5(1) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -15 + 0 \\ 15 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 20 \end{bmatrix}$

30۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو BA معلوم کریں۔

حل: $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1(1) + 0(3) & 1(2) + 0(4) \\ 0(1) + 1(3) & 0(2) + 1(4) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+0 \\ 0+3 & 0+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

31۔ اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تو $(BC)^t$ معلوم کریں۔

حل: $BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1(1) + 0(4) & 1(7) + 0(2) \\ 2(1) + 3(4) & 2(7) + 3(2) \end{bmatrix}$

$M^t = M$

پس ثابت ہوا کہ M ایک سکیوسٹرک قالب ہے۔

3.3 قالیوں پر الجبری عوامل

3.3

25۔ اگر $Z = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 15 \end{bmatrix}$ ہو تو $7Z$ معلوم کریں۔

حل: $Z = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

$7Z = 7 \begin{bmatrix} -3 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -21 & 0 & 105 \end{bmatrix}$

26۔ اگر $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ اور $Z = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ہو تو $Y - 5Z$ معلوم کریں۔

حل: $Y - 5Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 35 & 30 \\ 20 & -15 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1-35 & 0-30 \\ 1-20 & 2+15 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -34 & -30 \\ -19 & 17 \end{bmatrix}$

27۔ اگر $Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تو $Z - 3Z$ معلوم کریں۔

حل: $Z - 3Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2-6 & 3-9 \\ -3+9 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

36- ثابت کریں کہ $A = \begin{bmatrix} 19 & 3 \\ 17 & 2 \end{bmatrix}$ ایک غیر نادر قالب ہے۔

حل: $A = \begin{bmatrix} 19 & 3 \\ 17 & 2 \end{bmatrix}$

$|A| = 19(2) - 17(3)$

$= 38 - 51$

$= -13 \neq 0$

چونکہ $|A| \neq 0$ ، لہذا قالب A ایک غیر نادر قالب ہے۔

37- اگر $B = \begin{bmatrix} k & 6 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$ ایک نادر قالب ہو تو K کی قیمت

معلوم کریں۔

حل: $B = \begin{bmatrix} k & 6 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{bmatrix} k & 6 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} = 0$

$k(14) - 7(6) = 0$

$14k - 42 = 0$

$14k = 42$

$k = \frac{42}{14}$

$k = 3$

38- قالب $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ کا ایڈجائنٹ معلوم کریں۔

حل: $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

39- قالب $M = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$ کا ایڈجائنٹ معلوم کریں۔

حل: $M = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$

$\text{Adj } M = \begin{bmatrix} v & -t \\ -u & s \end{bmatrix}$

40- ایک قالب کا ضربی معکوس کب ممکن نہیں ہوتا ہے؟

حل: جب قالب ایک نادر قالب ہوتا ہے تب قالب کا ضربی معکوس

ممکن نہیں ہوتا ہے۔

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7+0 \\ 2 & 12 & 14+6 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$

$(BC)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 7 & 20 \end{bmatrix}$

32- $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل:

$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = -3(4) - (-7)(2) = -12 + 14 = 2$

33- $A = \begin{bmatrix} -7 & 35 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ کا مقطع معلوم کریں۔

حل:

$A = \begin{bmatrix} -7 & 35 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{bmatrix} -7 & 35 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

$= 7(5) - (-1)(35)$

$= 35 + 35 = 0$

34- قالب $C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ کا مقطع معلوم کریں۔

حل:

$C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

$|C| = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

$= 7(0) - (-3)(-5)$

$= 0 - 15 = -15$

35- بتائیے کہ قالب $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$ نادر یا غیر نادر

حل:

$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$

$= 4(21) - 12(7)$

$= 84 - 84 = 0$

پس A ایک نادر قالب ہے۔

$$= \begin{bmatrix} 8\left(\frac{3}{4}\right) + 5(-1) & 8\left(-\frac{5}{4}\right) + 5(2) \\ 4\left(\frac{3}{4}\right) + (3)(-1) & 4\left(-\frac{5}{4}\right) + 3(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{--- (i)}$$

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \times 8 + \left(-\frac{5}{4}\right) \times 4 & \frac{3}{4} \times 5 + \left(-\frac{5}{4}\right) \times 3 \\ -1 \times 8 + 2 \times 4 & -1 \times 5 + 2 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 2 - 5 \times 1 & \frac{15}{4} - \frac{15}{4} \\ -8 + 8 & -5 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{--- (ii)}$$

اور $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ سے (i) اور (ii) سے $AB = BA = I$ اس لیے

ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔ $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

43۔ $B = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 9 & 21 \end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس معلوم کریں۔

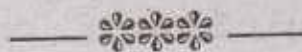
حل: $B = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 9 & 21 \end{bmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 9 & 21 \end{vmatrix}$$

$$= (-3 \times 21) - (9 \times -7)$$

$$= -63 + 63 = 0$$

پس قالب B کا ضربی معکوس ممکن نہیں ہے کیوں کہ یہ ایک نادر قالب ہے۔



41۔ قالب $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس معلوم کریں۔

جواب: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0) - 3(1)$$

$$= 0 - 3$$

$$= -3 \neq 0$$

چونکہ قالب A ایک غیر نادر قالب ہے اس لیے قالب A کا ضربی معکوس ممکن ہے۔

$$\text{Adj. } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{|A|} \text{Adj. } A$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{-3} \\ -3 & \frac{2}{-3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

42۔ ثابت کریں کہ $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ایک دوسرے کے

ضربی معکوس ہیں۔

حل: فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$