

اس پونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلب اس قابل ہو جائیں گے کہ:

کمپلیکس اعداد، کمپلیکس کانجوگٹ، کمپلیکس عدد کے ماڈیولس یا مطلق قدر کی شناخت کر سکیں۔

الجبری خصوصیات کا اطلاق کر سکیں اور کمپلیکس اعداد پر بنیادی عوامل لاگو کر سکیں۔

کمپلیکس اعداد کے سیٹ پر جمعی ذاتی عنصر اور ضربی ذاتی عنصر کا مظاہرہ کر سکیں۔

ایک کمپلیکس عدد z کا جمعی معکوس اور ضربی معکوس معلوم کر سکیں۔

ایک کمپلیکس عدد z کی درج ذیل خصوصیات کا مظاہرہ کر سکیں:

$$\bar{\bar{z}} = z, z\bar{z} = |z|^2 \quad 0 \quad |z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2; \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0 \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad 0$$

کمپلیکس عدد، کمپلیکس عدد کے ماڈیولس اور کمپلیکس عدد کے الجبری عوامل کی جیومیٹرک وضاحت کا اطلاق کر سکیں۔

$$n = \pm 2, n = \pm 1 \text{ جہاں } x_2 + iy_2 \neq 0, \left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \right)^n \text{ اور } (x + iy)^n$$

یک درجی ہمزا و مساواتوں کو حل کر سکیں۔

کمپلیکس عددی سروں والی یک درجی ہمزا و مساواتوں کو حل کر سکیں۔

کمپلیکس اعداد (Complex Numbers)

1.1

کمپلیکس عدد ایک ایسا عدد ہے جسے $x + iy$ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے جہاں x اور y حقیقی اعداد ہیں اور i خیالاتی اکائی ہے۔

یہ خیالاتی اکائی ہمیں بتاتی ہے کہ $i^2 = -1$

مثال 1: درج ذیل کو مختصر کیجیے۔

$$i^{-25} \quad (iv)$$

$$i^{17} \quad (iii)$$

$$i^8 \quad (ii)$$

$$i^7 \quad (i)$$

$$i^7 = i^6 \times i = (i^2)^3 \times i = (-1)^3 \times i = -i \quad (i)$$

$$i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1 \quad (ii)$$

$$i^{17} = i^{16} \times i = (i^2)^8 \times i = (-1)^8 \times i = i \quad (iii)$$

$$i^{-25} = \frac{1}{i^{25}} = \frac{1}{i^{24} \times i} = \frac{1}{(i^2)^{12} \times i} = \frac{1}{(-1)^{12} \times i} = \frac{1}{1 \times i} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i \quad (iv)$$

کیا آپ جانتے ہیں؟

کمپلیکس اعداد سمارٹ فون سگنل پر ویسٹنگ اور ایم آر آئی

ایم جی جی ٹیکنالوجیز کے لیے ضروری ہیں۔

(Rectangular Form of a Complex Number)

ایک کمپلیکس عدد $(x + yi)$ یا $x + iy$ کی شکل کا ہوتا ہے، جہاں x اور y حقیقی اعداد ہیں۔ x کو حقیقی حصہ کہا جاتا ہے اور y کو کمپلیکس عدد کا خیالاتی حصہ کہا جاتا ہے۔

(i) اگر $x = 0$ ہو تو کمپلیکس عدد کو خالص خیالاتی عدد کہا جاتا ہے۔

(ii) اگر $y = 0$ ہو تو کمپلیکس عدد کو حقیقی عدد کہا جاتا ہے۔

(iii) کمپلیکس عدد $x + iy$ کو عموماً z سے ظاہر کیا جاتا ہے اور ہم یوں لکھتے ہیں:

$$y = \text{Im}(z) \text{ اور } x = \text{Re}(z)$$

$$\text{مثال کے طور پر، } \text{Re}(5 - 7i) = 5 \text{ اور } \text{Im}(5 - 7i) = -7$$

(Equality of Complex Numbers)

دو کمپلیکس اعداد $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ صرف اور صرف اس وقت مساوی کہلاتے ہیں اگر اور $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ اور

$$\text{یعنی } \text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) \text{ اور } x_1 = x_2 \text{ اور } y_1 = y_2$$

مثال کے طور پر، اگر $\alpha + i\beta = -2 + 5i$ ہو تو $\alpha = -2$ ، $\beta = 5$

مثال 2: اگر $(2x - 1) + (y + 4)i = 5 + 7i$ ہو تو x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

$$(2x - 1) + (y + 4)i = 5 + 7i$$

دیے گئے دو کمپلیکس اعداد مساوی ہیں اس لیے ان کے حقیقی اور خیالاتی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔
لہذا

$$2x - 1 = 5$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$y + 4 = 7$$

$$y = 7 - 4$$

$$y = 3$$

حل مشق 1.1

1- درج ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) i^5

$$i^5 = i^4 \times i = (i^2)^2 \times i = (-1)^2 \times i = 1 \times i = i$$

$$(\because i^2 = -1)$$

(ii) i^{16}

$$i^{16} = (i^2)^8 = (-1)^8 = 1$$

$$(\because i^2 = -1)$$

(iii) $(-i)^{-19}$

$$(-i)^{-19} = \frac{1}{(-i)^{19}} = \frac{1}{(-1 \times i)^{19}} = \frac{1}{(-1)^{19} \times i^{19}} = \frac{1}{-1 \times i^{18} \times i}$$

$$= \frac{1}{-1 \times (i^2)^9 \times i} = \frac{1}{-1 \times (-1)^9 \times i} = \frac{1}{-1 \times -1 \times i} = \frac{1}{1 \times i} \quad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{1}{i} = \frac{1 \times i}{i \times i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

(iv) $27i^{-26}$

$$= \frac{27}{i^{26}} = \frac{27}{(i^2)^{13}} = \frac{27}{(-1)^{13}} = \frac{27}{-1} = -27$$

$$(\because i^2 = -1)$$

$$(ii) (3x + 2) - (4 - y)i = 5 + 3i$$

$$(3x + 2) - (4 - y)i = 5 + 3i$$

دے گئے دونوں کمپلیکس اعداد آپس میں مساوی ہیں اس لیے ان کے حقیقی اور خیالی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

$$3x + 2 = 5 \quad , \quad -(4 - y) = 3$$

$$3x = 5 - 2 \quad , \quad -4 + y = 3$$

$$3x = 3 \quad , \quad y = 3 + 4$$

$$x = \frac{3}{3} \quad , \quad y = 7$$

$$x = 1$$

$$(iii) (2 + i)x + (1 - 2i)y = 3 + 4i$$

$$(2 + i)x + (1 - 2i)y = 3 + 4i$$

$$2x + xi + y - 2yi = 3 + 4i$$

$$2x + y + xi - 2yi = 3 + 4i$$

$$(2x + y) + (x - 2y)i = 3 + 4i$$

دے گئے دونوں کمپلیکس اعداد آپس میں مساوی ہیں اس لیے ان کے حقیقی اور خیالی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

$$2x + y = 3 \quad , \quad x - 2y = 4$$

$$2x + y = 3 \quad (i)$$

$$x - 2y = 4 \quad (ii)$$

مساوات (i) کو 2 سے ضرب دینے سے

$$4x + 2y = 6 \quad (iii)$$

مساوات (ii) اور (iii) کو جمع کریں۔

$$x - 2y = 4$$

$$4x + 2y = 6$$

$$5x = 10$$

$$x = \frac{10}{5} \Rightarrow x = 2$$

$x = 2$ مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$2(2) + y = 3$$

$$4 + y = 3$$

$$y = 3 - 4 \Rightarrow y = -1$$

$$x = 2, y = -1$$

$$(iv) (1 - i)x + (2 + i)y = 4 - i$$

$$(1 - i)x + (2 + i)y = 4 - i$$

$$x - xi + 2y + yi = 4 - i$$

$$x + 2y - xi + yi = 4 - i$$

$$(x + 2y) + (-x + y)i = 4 - i$$

دے گئے دونوں کمپلیکس اعداد آپس میں مساوی ہیں اس لیے ان کے حقیقی اور خیالی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

$$x + 2y = 4 \quad (i) \quad -x + y = -1 \quad (ii)$$

مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے

$$x + 2y = 4$$

$$-x + y = -1$$

$$3y = 3$$

$$y = \frac{3}{3}$$

$$y = 1$$

$y = 1$ مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$x + 2(1) = 4$$

$$x + 2 = 4 \Rightarrow x = 4 - 2 = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2, y = 1 \quad \text{پس}$$

$$(v) (3x - 1) + (2y - 3)i = 8 + 7i$$

$$(3x - 1) + (2y - 3)i = 8 + 7i$$

پس دونوں کمپلیکس اعداد آپس میں مساوی ہیں اس لیے ان کے حقیقی اور خیالی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

$$3x - 1 = 8 \quad , \quad 2y - 3 = 7$$

$$3x = 8 + 1 \quad , \quad 2y = 7 + 3$$

$$3x = 9 \quad , \quad 2y = 10$$

$$x = \frac{9}{3} \quad , \quad y = \frac{10}{2}$$

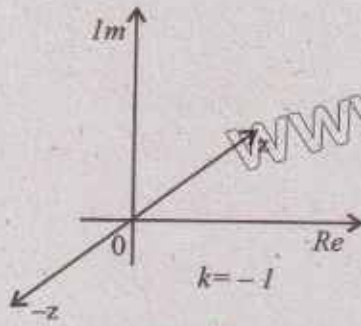
$$x = 3$$

$$y = 5$$

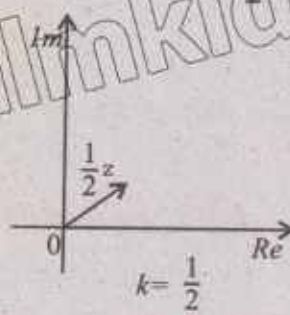
(Algebraic Operations on Complex Numbers) کمپلیکس اعداد پر الجبری عمل 1.2

(Scalar multiplication of Complex Numbers) کمپلیکس اعداد کی سکالر ضرب

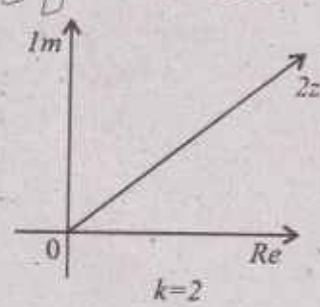
اگر $z = x + iy$ اور $k \in \mathbb{R}$ ہوں تو $kz = (kx) + i(ky)$ یا $kz = (kx) + i(ky)$



فصل 1.5



فصل 1.4



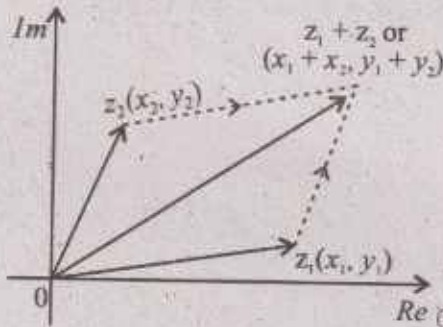
فصل 1.3

دو کمپلیکس اعداد کی جمع (Addition of Two Complex Numbers)

اگر $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ جہاں x_1, y_1, x_2, y_2 حقیقی اعداد ہوں تو

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

شکل 1.6: جمع کے حوالے سے دو کمپلیکس اعداد کی جمع کے مطابق



فصل 1.6

- (i) $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$ جہاں $a, b, c, d \in R$,
 $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ تو
- (ii) If $z_1 = a - ib, z_2 = c + id$ جہاں $a, b, c, d \in R$,
 $z_1 + z_2 = (a - ib) + (c + id) = (a + c) + (-b + d)i$

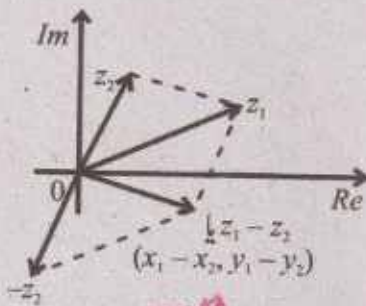
مثال 3: اور $(3 + 4i)$ کو جمع کیجیے۔

$$(3 + 4i) + (5 - 2i) \\ = (3 + 5) + (4 - 2)i \\ = 8 + 2i$$

دو کمپلیکس اعداد کی تفریق (Subtraction of Two Complex Numbers)

اگر $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ جہاں x_1, y_1, x_2, y_2 حقیقی اعداد ہوں تو

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \\ z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \\ = (x_1 + iy_1) + (-x_2 - iy_2) \\ = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \\ z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$



فصل 1.7

$$(4 - 3i) - (2 - 5i) \quad (ii)$$

$$(8 + 2i) - (5 - 6i) \quad (i)$$

$$(i) \quad (8 + 2i) - (5 - 6i)$$

$$= 8 + 2i - 5 + 6i$$

$$= (8 - 5) + (2i + 6i) = 3 + 8i$$

$$(ii) \quad (4 - 3i) - (2 - 5i)$$

$$= 4 - 3i - 2 + 5i$$

$$= (4 - 2) + (-3 + 5)i = 2 + 2i$$

خود آزمائی

اگر $z_1 - z_2 = 4 + 6i$ اور $z_2 = 3 - 2i$ ہو تو z_1 معلوم کیجیے۔

$$z_1 - z_2 = 4 + 6i$$

$$z_1 = 4 + 6i + z_2$$

$$z_1 = 4 + 6i + 3 - 2i$$

$$z_1 = 7 + 4i$$

$$(\because z_2 = 3 - 2i)$$

(Multiplication of Two Complex Numbers)

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1(x_2 + iy_2) + iy_1 x_2 \\ &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

مثال 5: (i) مختصر کیجیے۔ $(3 - 4i)(5 - 6i)$

(ii) اگر $z_1 = 2 + 3i$ اور $z_2 = 4 + 7i$ تو $z_1 z_2$ معلوم کیجیے۔

(i) $(3 - 4i)(5 - 6i)$

$$\begin{aligned} &= 3(5 - 6i) - 4i(5 - 6i) \\ &= 15 - 18i - 20i + 24i^2 \\ &= 15 - (18 + 20)i - 24 \\ &= 15 - 38i - 24 \\ &= (15 - 24) - 38i = -9 - 38i \end{aligned}$$

(ii) $z_1 z_2 = (2 + 3i)(4 + 7i)$

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ z_1 z_2 &= (2 \times 4 - 3 \times 7) + i(2 \times 7 + 3 \times 4) \\ &= (8 - 21) + (14 + 12)i = -13 + 26i \end{aligned}$$

(Division of Two Complex Numbers)

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}, z_2 \neq 0$$

$$= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + iy_1 x_2 - i^2 y_1 y_2}{(x_2)^2 - (iy_2)^2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 - i(x_1 y_2 - y_1 x_2) + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$(i^2 = -1)$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 - i(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

2- کیلیکس عدد z معلوم کیجیے۔

$$\frac{z}{2+i} = 3-i$$

$$\frac{z}{2+i} = 3-i$$

$$z = (3-i)(2+i)$$

$$= 3(2+i) - i(2+i)$$

$$= 6 + 3i - 2i - i^2$$

$$= 6 + i - (-1) = 6 + 1 + i = 7 + i$$

$$z = 7 + i$$

خود آزمائی!

1- مختصر کیجیے۔

$$\left(\frac{1+2i}{3-i} \right) (2+i)$$

$$= \frac{(1+2i)(2+i)}{3-i} = \frac{2+i+4i+2i^2}{3-i}$$

$$= \frac{2+5i+2(-1)}{3-i} = \frac{2+5i-2}{3-i} = \frac{0+5i}{3-i}$$

$$= \frac{5i}{3-i} = \frac{5i}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i} = \frac{15i+5i^2}{9-(-1)}$$

$$\frac{15i + 5(-1)}{9+1} = \frac{-5+15i}{10}$$

$$= \frac{-5}{10} + \frac{15i}{10} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

مثال 6: $\frac{3+4i}{5-7i}$ کو $x + yi$ کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

$$\frac{3+4i}{5-7i} = \frac{3+4i}{5-7i} \times \frac{5+7i}{5+7i} = \frac{15+21i+20i+28i^2}{(5)^2 - (7i)^2}$$

$$= \frac{15-28 + (21+20)i}{25+49} \quad (i^2 = -1)$$

$$= \frac{-13+41i}{74} = -\frac{13}{74} + \frac{41}{74}i$$

کمپلیکس اعداد کی خصوصیات (Properties of Complex Numbers)

کمپلیکس اعداد کی خصوصیات پر پورا اترتے ہیں۔	کمپلیکس اعداد کی جمع کی درج ذیل خصوصیات پر پورا اترتے ہیں۔
(i) خاصیت بندش (Closure Property) کوئی سے دو کمپلیکس اعداد z_1 اور z_2 کے لیے، حاصل ضرب $z_1 z_2$ بھی ایک کمپلیکس عدد ہوتا ہے۔	(i) خاصیت بندش (Closure Property) کوئی سے دو کمپلیکس اعداد z_1 اور z_2 کے لیے، مجموعہ $z_1 + z_2$ بھی ایک کمپلیکس عدد ہوتا ہے۔
(ii) خاصیت مبادلہ (Commutative Property) کوئی سے دو کمپلیکس اعداد z_1 اور z_2 کے لیے، $z_1 z_2 = z_2 z_1$	(ii) خاصیت مبادلہ (Commutative Property) کوئی سے دو کمپلیکس اعداد z_1 اور z_2 کے لیے، $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
(iii) خاصیت تلازم (Associative Property) کوئی سے تین کمپلیکس اعداد z_1, z_2, z_3 کے لیے، $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$	(iii) خاصیت تلازم (Associative Property) کوئی سے تین کمپلیکس اعداد z_1, z_2, z_3 کے لیے، $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
(iv) ضربنی ذاتی عنصر (Multiplicative Identity) کوئی سے ایک ایسا کمپلیکس عدد ہوتا ہے جو کہ ہر کمپلیکس عدد کے لیے، $z \times 1 = 1 \times z = z$ کمپلیکس عدد $1 = 1 + 0i$ ضربنی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔	(iv) جمعی ذاتی عنصر (Additive Identity) کوئی سے ایک ایسا کمپلیکس عدد ہوتا ہے جو کہ ہر کمپلیکس عدد کے لیے، $z + 0 = 0 + z = z$ کمپلیکس عدد $0 = 0 + 0i$ جمعی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔
(v) ضربنی معکوس (Multiplicative Inverse) کوئی بھی غیر صفر کمپلیکس عدد z کے لیے ایسا کمپلیکس عدد ہوتا ہے جس کے لیے $z w = w z = 1$ کمپلیکس عدد z کا ضربنی معکوس کہلاتا ہے اور w کو z^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔	(v) جمعی معکوس (Additive Inverse) کوئی بھی کمپلیکس عدد z کے لیے ایسا کمپلیکس عدد ہوتا ہے جس کے لیے $z + (-z) = (-z) + z = 0$ کمپلیکس عدد z کا جمعی معکوس کہلاتا ہے۔

(Distributive Property of Multiplication Over Addition) ضرب کی تقسیمی خاصیت (vi)

کوئی سے تین کمپلیکس اعداد z_1, z_2, z_3 کے لیے $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ اور $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

مثال 9: $z = 7 - 10i$ کا جمعی معکوس معلوم کیجیے۔

$$z = 7 - 10i$$

$$z = -7 + 10i \quad (\text{z کا جمعی معکوس})$$

$$-z + (-z) = 7 - 10i + (-7 + 10i) \quad \text{کیوں کہ}$$

$$= 7 - 10i - 7 + 10i = 0$$

مثال 10: $4 - 3i$ کا ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

$$z = 4 - 3i \quad (\text{معلوم}) \quad \text{فرض کیا}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{4 - 3i} \quad (\text{z کا ضربی معکوس})$$

$$= \frac{4 + 3i}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{4 + 3i}{(4)^2 - (3i)^2}$$

$$z^{-1} = \frac{4 + 3i}{16 + 9} = \frac{4 + 3i}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3i}{25}$$

مثال 7: اگر $z = -7 - 4i$ ہو تو ثابت کیجیے۔ $z + 0 = z$

$$z + 0 = (-7 - 4i) + (0 + 0i)$$

$$= -7 - 4i + 0 + 0i$$

$$= -7 - 4i = z$$

پس ثابت ہوا $z + 0 = z$ (0 جمعی ذاتی عنصر ہے)

مثال 8: $z = 3 - 2i$ کے لیے ضربی ذاتی عنصر کی تصدیق کیجیے۔

$$z \times 1 = (3 - 2i)(1 + 0i)$$

$$= 3 + 0i - 2i - 0i^2$$

$$= 3 - 2i = z$$

$$1 \times z = (1 + 0i)(3 - 2i)$$

$$= 3 - 2i + 0i - 0i^2$$

$$= 3 - 2i = z$$

$$z \times 1 = 1 \times z = z$$

1.2 مشتق

1- مختصر کیجیے اور $a + bi$ کی شکل میں لکھیے۔

(i) $(2 + 5i) + (3 - zi)$

$$(2 + 5i) + (3 - zi) = 2 + 5i + 3 - zi$$

$$= 2 + 3 + 5i - zi$$

$$= 5 + (5 - z)i$$

(iii) $(9 - 2i) - (7 - 3i)$

$$(9 - 2i) - (7 - 3i) = 9 - 2i - 7 + 3i$$

$$= 9 - 7 - 2i + 3i$$

$$= 2 + i$$

(v) $(3 + 4i)(2 - 3i)$

$$(3 + 4i)(2 - 3i) = 3(2 - 3i) + 4i(2 - 3i)$$

$$= 6 - 9i + 8i - 12i^2$$

$$= 6 - 9i + 8i - 12(-1)$$

$$= 6 - 9i + 8i + 12$$

$$= 6 + 12 - 9i + 8i$$

$$= 18 - i$$

(ii) $(16 - 3i) + (9 + 2i)$

$$(16 - 3i) + (9 + 2i) = 16 - 3i + 9 + 2i$$

$$= 16 + 9 - 3i + 2i$$

$$= 25 - i$$

(iv) $(11 + 9i) - (9 - 7i)$

$$(11 + 9i) - (9 - 7i) = 11 + 9i - 9 + 7i$$

$$= 11 - 9 + 9i + 7i$$

$$= 2 + 16i$$

(vi) $(5 - 2i)(3 - 4i)$

$$(5 - 2i)(3 - 4i) = 5(3 - 4i) - 2i(3 - 4i)$$

$$= 15 - 20i - 6i + 8i^2$$

$$= 15 - 20i - 6i + 8(-1)$$

$$= 15 - 20i - 6i - 8$$

$$= 15 - 8 - 20i - 6i$$

$$= 7 - 26i$$

(vii) $(3 - 5i) \div (2 - 4i)$

$$\begin{aligned} (3 - 5i) \div (2 - 4i) &= \frac{3 - 5i}{2 - 4i} \\ &= \frac{3 - 5i}{2 - 4i} \times \frac{2 + 4i}{2 + 4i} \\ &= \frac{3(2 + 4i) - 5i(2 + 4i)}{(2)^2 - (4i)^2} \\ &= \frac{6 + 12i - 10i - 20i^2}{4 - (16i^2)} \\ &= \frac{6 + 12i - 10i - 20(-1)}{4 - (16 \times -1)} \quad (\because i^2 = -1) \\ &= \frac{6 + 12i - 10i + 20}{4 + 16} \\ &= \frac{6 + 20 + 12i - 10i}{20} \\ &= \frac{26 + 2i}{20} \\ &= \frac{26}{20} + \frac{2i}{20} = \frac{13}{10} + \frac{i}{10} \end{aligned}$$

(viii) $(5 + 2i) \div (6 - 3i)$

$$\begin{aligned} (5 + 2i) \div (6 - 3i) &= \frac{5 + 2i}{6 - 3i} \\ &= \frac{5 + 2i}{6 - 3i} \times \frac{6 + 3i}{6 + 3i} \\ &= \frac{5(6 + 3i) + 2i(6 + 3i)}{(6)^2 - (3i)^2} \\ &= \frac{30 + 15i + 12i + 6i^2}{36 - (9i^2)} \\ &= \frac{30 + 15i + 12i + 6(-1)}{36 - (9 \times -1)} \quad (\because i^2 = -1) \\ &= \frac{30 - 6 + 15i + 12i}{36 + 9} \\ &= \frac{24 + 27i}{45} \\ &= \frac{24}{45} + \frac{27i}{45} \\ &= \frac{8}{15} + \frac{3i}{5} \end{aligned}$$

2- دیے گئے ہر کمپلیکس عدد کا جمعی معکوس معلوم کیجیے۔

(i) $3 + 2i$

$z = 3 + 2i$

فرض کیا

$z = -3 - 2i$ کا جمعی معکوس

(ii) $4 - 3i$

$z = 4 - 3i$

فرض کیا

$z = -4 + 3i$ کا جمعی معکوس

(iii) $5 - 7i$

$z = -5 + 7i$ کا جمعی معکوس

(iii) $\frac{2}{3} - \frac{5}{4}i$

$z = \frac{2}{3} - \frac{5}{4}i$ کا جمعی معکوس

(i) $4 + 5i$

$$z = 4 + 5i$$

فرض کیا $z = z^{-1}$ کا ضربی معکوس

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{4+5i}$$

$$= \frac{1}{4+5i} \times \frac{4-5i}{4-5i}$$

$$= \frac{4-5i}{(4)^2 - (5i)^2}$$

$$= \frac{4-5i}{16-25i^2}$$

$$= \frac{4-5i}{16-(25 \times (-1))} \quad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{4-5i}{16+25}$$

$$= \frac{4-5i}{41} = \frac{4}{41} - \frac{5i}{41}$$

(iii) $7 - 3i$

$$z = 7 - 3i$$

فرض کیا $z = z^{-1}$ کا ضربی معکوس

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{7-3i}$$

$$= \frac{1}{7-3i} \times \frac{7+3i}{7+3i}$$

$$= \frac{7+3i}{(7)^2 - (3i)^2}$$

$$= \frac{7+3i}{49-9i^2}$$

$$= \frac{7+3i}{49+9} \quad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{7+3i}{58} = \frac{7}{58} + \frac{3i}{58}$$

(ii) $6 + 2i$

$$z = 6 + 2i$$

فرض کیا $z = z^{-1}$ کا ضربی معکوس

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{6+2i}$$

$$= \frac{1}{6+2i} \times \frac{6-2i}{6-2i}$$

$$= \frac{6-2i}{(6)^2 - (2i)^2} = \frac{6-2i}{36-4i^2}$$

$$= \frac{6-2i}{36-(4 \times (-1))} \quad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{6-2i}{36+4}$$

$$= \frac{6-2i}{40} = \frac{6}{40} - \frac{2i}{40}$$

$$= \frac{3}{20} - \frac{1}{20}i$$

(iv) $\sqrt{5} - 4i$

$$z = \sqrt{5} - 4i$$

فرض کیا $z = z^{-1}$ کا ضربی معکوس

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{5}-4i}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}-4i} \times \frac{\sqrt{5}+4i}{\sqrt{5}+4i}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+4i}{(\sqrt{5})^2 - (4i)^2} = \frac{\sqrt{5}+4i}{5-16i^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+4i}{5-(16 \times (-1))} \quad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{\sqrt{5}+4i}{5+16} = \frac{\sqrt{5}+4i}{21}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{21} + \frac{4}{21}i$$

4- اگر $z_1 = 2 + 5i$ اور $z_2 = 1 - 3i$ ہو تو تصدیق کیجیے کہ

(i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

L.H.S

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 + 5i) + (1 - 3i) \\ &= 2 + 5i + 1 - 3i \\ &= 2 + 1 + 5i - 3i \\ &= 3 + 2i \end{aligned} \quad (1)$$

R.H.S

$$\begin{aligned} z_2 + z_1 &= (1 - 3i) + (2 + 5i) \\ &= 1 - 3i + 2 + 5i \\ &= 1 + 2 - 3i + 5i \\ &= 3 + 2i \end{aligned} \quad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوا

L.H.S = R.H.S

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ پس ثابت ہوا کہ

(ii) $z_1 z_2 = z_2 z_1$

L.H.S

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2 + 5i)(1 - 3i) \\ &= 2(1 - 3i) + 5i(1 - 3i) \\ &= 2 - 6i + 5i - 15i^2 \\ &= 2 - 6i + 5i - 15(-1) \\ &= 2 - 6i + 5i + 15 \\ &= 2 + 15 - 6i + 5i \\ &= 17 - i \end{aligned} \quad (1)$$

R.H.S

$$\begin{aligned} z_2 z_1 &= (1 - 3i)(2 + 5i) \\ &= 1(2 + 5i) - 3i(2 + 5i) \\ &= 2 + 5i - 6i - 15i^2 \\ &= 2 + 5i - 6i - 15(-1) \\ &= 2 + 5i - 6i + 15 \\ &= 2 + 15 + 5i - 6i \\ &= 17 - i \end{aligned} \quad (2)$$

L.H.S = R.H.S

$z_1 z_2 = z_2 z_1$ پس ثابت ہوا کہ

(iii) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

L.H.S

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= [(2 + 5i) + (1 - 3i)] + (2 + i) \\ &= [2 + 5i + 1 - 3i] + (2 + i) \\ &= (2 + 1 + 5i - 3i) + (2 + i) \\ &= (3 + 2i) + (2 + i) \\ &= 3 + 2i + 2 + i \\ &= 3 + 2 + 2i + i \\ &= 5 + 3i \end{aligned} \quad (1)$$

R.H.S

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (2 + 5i) + [(1 - 3i) + (2 + i)] \\ &= (2 + 5i) + [1 - 3i + 2 + i] \\ &= (2 + 5i) + (1 + 2 - 3i + i) \\ &= (2 + 5i) + (3 - 2i) \\ &= 2 + 5i + 3 - 2i \\ &= 2 + 3 + 5i - 2i \\ &= 5 + 3i \end{aligned} \quad (2)$$

(1) اور (2) سے حاصل ہوا

L.H.S = R.H.S

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ پس ثابت ہوا کہ

(iv) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

L.H.S

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= [(2 + 5i)(1 - 3i)](2 + i) \\ &= [2(1 - 3i) + 5i(1 - 3i)](2 + i) \\ &= (2 - 6i + 5i - 15i^2)(2 + i) \\ &= (2 - 6i + 5i - 15(-1))(2 + i) \\ &= (2 - 6i + 5i + 15)(2 + i) \\ &= (2 + 15 - 6i + 5i)(2 + i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (17 - i)(2 + i) \\ &= 17(2 + i) - i(2 + i) \\ &= 34 + 17i - 2i - i^2 \\ &= 34 + 17i - 2i - (-1) \\ &= 34 + 17i - 2i + 1 \\ &= 34 + 1 + 17i - 2i \\ &= 35 + 15i \end{aligned} \quad (1)$$

R.H.S

$$\begin{aligned} z_1(z_2 z_3) &= (2+5i)[(1-3i)(2+i)] \\ &= (2+5i)[1(2+i) - 3i(2+i)] \\ &= (2+5i)(2+i-6i-3i^2) \\ &= (2+5i)(2+i-6i-3(-1)) \\ &= (2+5i)(2+i-6i+3) \\ &= (2+5i)(2+3+i-6i) \\ &= (2+5i)(5-5i) \\ &= 2(5-5i) + 5i(5-5i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 10 - 10i + 25i - 25i^2 \\ &= 10 - 10i + 25i - 25(-1) \\ &= 10 - 10i + 25i + 25 \\ &= 10 + 25 - 10i + 25i \\ &= 35 + 15i \end{aligned} \quad (2)$$

(1) اور (2) سے حاصل ہوا۔

L.H.S = R.H.S

$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ پس ثابت ہوا کہ

(v) $z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0$

$z_1 = 2+5i$

$-z_1 = -(2+5i) = -2-5i$

$z_1 + (-z_1) = (2+5i) + (-2-5i)$

$= 2+5i-2-5i$

$= 2-2+5i-5i = 0+0 = 0$

$(-z_1) + z_1 = (-2-5i) + (2+5i)$

$= -2-5i+2+5i$

$= -2+2-5i+5i = 0+0 = 0$

$z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0$

پس ثابت ہوا کہ

$\frac{(1+i)^2}{2-i} = x+iy$

$\frac{(1)^2+2(1)i+(i)^2}{2-i} = x+iy$

$\frac{1+2i+(-1)}{2-i} = x+iy$

$\frac{1+2i-1}{2-i} = x+iy$

$\frac{1-1+2i}{2-i} = x+iy$

$\frac{2i}{2-i} = x+iy$

$\frac{2i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = x+iy$

$\frac{4i+2i^2}{(2)^2-i^2} = x+iy$

$\frac{4i+2(-1)}{4-(-1)} = x+iy$

$\frac{4i-2}{4+1} = x+iy$

$\frac{-2+4i}{5} = x+iy$

$\frac{-2}{5} + \frac{4}{5}i = x+iy$

حقیقی اور خیالی حصوں کے موازنہ کرنے سے

$x = -\frac{2}{5}, y = \frac{4}{5}$

$(2x+iy)(1-i) = 4+2i$

$2x(1-i) + iy(1-i) = 4+2i$

-6 اگر $(2x+iy)(1-i) = 4+2i$ ہو تو x اور y کی قیمتیں معلوم کیے۔

حل:

$$2x - 2xi + iy - i \cdot y = 4 + 2i$$

$$2x - 2xi + iy - (-1)y = 4 + 2i$$

$$2x - 2xi + iy + y = 4 + 2i$$

$$2x + y - 2xi + iy = 4 + 2i$$

$$2x + y + i(-2x + y) = 4 + 2i$$

$$2x + y = 4 - (i), -2x + y = 2 - (ii)$$

$$\begin{array}{r} 2x + y = 4 \\ -2x + y = 2 \\ \hline 2y = 6 \\ y = \frac{6}{2} = 3 \end{array}$$

حقیقی اور خیالی حصوں کے موازنہ کرنے سے

مساوات (i) مساوات (ii) کو جمع کرنے سے

مساوات (i) میں $y = 3$ درج کرنے سے

$$2x + 3 = 4$$

$$2x = 4 - 3 \Rightarrow 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}, y = 3$$

7- a اور B کی قیمتیں معلوم کیجیے۔ اگر $(a + bi)(1 + 3i) = -8 + 11i$

حل:

$$(a + bi)(1 + 3i) = -8 + 11i$$

$$a(1 + 3i) + bi(1 + 3i) = -8 + 11i$$

$$a + 3ai + bi + 3bi^2 = -8 + 11i$$

$$a + 3ai + bi + 3b(-1) = -8 + 11i$$

$$a - 3b + 3ai + bi = -8 + 11i$$

$$(a - 3b) + (3a + b)i = -8 + 11i$$

حقیقی اور خیالی حصے کو موازنہ کرنے سے

$$a - 3b = -8 - (i),$$

$$3a + b = 11 \quad (ii)$$

$$9a + 3b = 33 \quad (iii)$$

مساوات (ii) کو 3 سے ضرب دیں

مساوات (i) اور (iii) کو جمع کریں

$$a - 3b = -8$$

$$9a + 3b = 33$$

$$\hline 10a = 25$$

$$a = \frac{25}{10} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2} - 3b = -8$$

$$2\left(\frac{5}{2}\right) - 2(3b) = 2(-8)$$

$$5 - 6b = -16$$

$$-6b = -16 - 5$$

$$-6b = -21 \Rightarrow 6b = 21$$

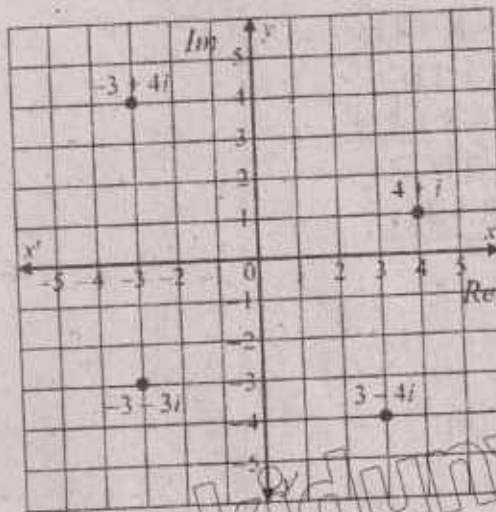
$$b = \frac{21}{6}$$

$$b = \frac{7}{2}$$

$$a = \frac{5}{2}, b = \frac{7}{2} \quad \text{لہذا،}$$

کمپلیکس یا آرگنڈ مستوی (Complex or Argand Plane) 1.3

ایک کمپلیکس عدد $z = x + iy$ کا تعین مکمل طور پر حقیقی اعداد کے ایک مرتبہ جوڑ سے (x, y) سے ہوتا ہے۔ اعداد $8, -5i$ اور $7i$ بالترتیب $(2, -5), (8, 0)$ اور $(0, -7)$ کے مساوی ہیں۔ اس طرح ایک کمپلیکس عدد $z = x + iy$ کو مکمل طور پر مستوی میں نقطہ (x, y) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
یہاں کچھ کمپلیکس اعداد کو کمپلیکس مستوی پر ظاہر کیا گیا ہے۔

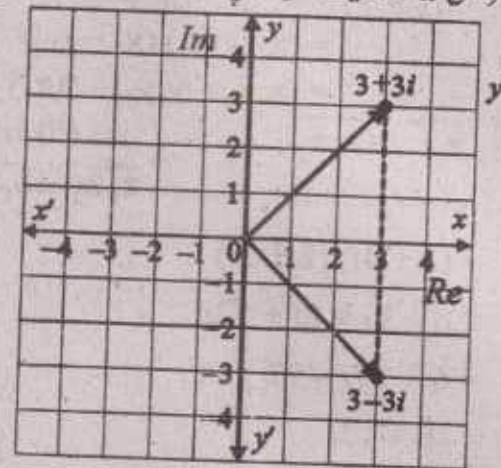
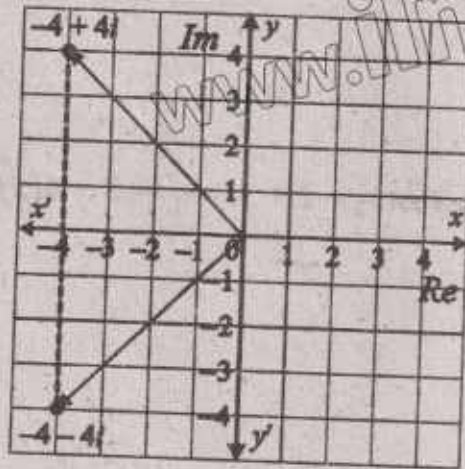


کمپلیکس عدد کا کانجوگٹ (Conjugate of a Complex Number)

کمپلیکس عدد $x + iy$ کا کانجوگٹ $x - iy$ ہوتا ہے۔ z کے کمپلیکس کانجوگٹ کو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کمپلیکس عدد z کا کانجوگٹ حاصل کرنے کے لیے i کو $-i$ سے تبدیل کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $3 + 8i$ کا کانجوگٹ $3 - 8i$ ہوتا ہے۔ کمپلیکس عدد کا اپنے کانجوگٹ سے حاصل ضرب ایک حقیقی عدد ہوتا ہے۔

$$\text{مثال کے طور پر، } (1 + 2i)(1 - 2i) = (1)^2 - (2i)^2 = 1 + 4 = 5$$

Geometrical Representation of Conjugate of a Complex Number



کمپلیکس کانجوگٹ کی خصوصیات (Properties of Complex Conjugate)

خاصیت 1:

کوئی دو کمپلیکس عدد $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ جہاں x_1, x_2, y_1, y_2 حقیقی اعداد ہوں۔

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)}$$

$$= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$$

$$= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 - iy_1 - iy_2$$

$$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

مثال 11: اگر $z_1 = 4 + 3i$ اور $z_2 = 5 + 2i$ ہوں تو ثابت کیجیے کہ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$z_1 + z_2 = 4 + 3i + 5 + 2i = 9 + 5i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = 9 - 5i \quad \text{--- (i)}$$

$$\overline{z_1} = 4 - 3i$$

$$\overline{z_2} = 5 - 2i$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = 4 - 3i + 5 - 2i$$

$$= 9 - 5i \quad \text{--- (ii)}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{--- (ii) اور (i)}$$

خاصیت 2: $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$

ثبوت: فرض کیا $z_1 = (x_1 + iy_1)$ اور $z_2 = (x_2 + iy_2)$ جہاں x_1, x_2, y_1, y_2 حقیقی اعداد ہوں۔

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (i)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)}$$

$$= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (ii)$$

$$\therefore \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2} \quad \text{عن (ii) اور (i)}$$

مثال 12: اگر $z_2 = 2 + 3i$, $z_1 = 3 + 4i$ ثابت کیجیے کہ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$

حل:

$$z_1 z_2 = (3 + 4i)(2 + 3i)$$

$$= 6 + 9i + 8i + 12i^2$$

$$= 6 + 17i - 12$$

$$= -6 + 17i$$

$$\overline{z_1 z_2} = -6 - 17i \quad (i)$$

$$\overline{z_1} \overline{z_2} = (3 - 4i)(2 - 3i) \quad \text{اور}$$

$$= 6 - 9i - 8i + 12i^2$$

$$= 6 - 9i - 8i - 12$$

$$\overline{z_1} \overline{z_2} = -6 - 17i \quad (ii)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} \quad \text{عن (ii) اور (i)}$$

خاصیت 3

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad (z_2 \neq 0)$$

ثبوت: فرض کیا

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 \quad \text{اور}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \quad \text{اب}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) - i(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} \quad (i) \quad \text{اور}$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} \quad \text{اب}$$

$$= \frac{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)}{(x_2 - iy_2)(x_2 + iy_2)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + i x_1 y_2 - i y_1 x_2 - i^2 y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\therefore \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (ii)$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \quad \text{ع (ii) اور (i)}$$

خود آزمائی!

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{کوئی سے دو کمپلیکس اعداد لیں اور ثابت کیجیے کہ} \quad (i)$$

$$z_1 = (2 + 3i), z_2 = (4 + 5i)$$

حل: فرض کیا

$$\bar{z}_1 = 2 - 3i, \bar{z}_2 = 4 - 5i$$

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 + 5i)$$

$$= 2 + 3i + 4 + 5i$$

$$= 6 + 8i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{6 + 8i} = 6 - 8i \quad (i)$$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (2 - 3i) + (4 - 5i) = 2 - 3i + 4 - 5i = 6 - 8i \quad (ii)$$

پس ثابت ہوا

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

(i) اور (ii) سے

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad \text{کوئی سے دو کمپلیکس اعداد لیں اور ثابت کیجیے کہ} \quad (ii)$$

حل:

$$z_1 z_2 = (2 + 3i)(4 + 5i)$$

$$= 8 + 10i + 12i + 15i^2$$

$$= 8 + 22i + 15 \times (-1)$$

$$= 8 + 22i - 15 = -7 + 22i$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{-7 + 22i} = -7 - 22i \quad (i)$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (2 - 3i)(4 - 5i)$$

$$= 8 - 10i - 12i + 15i^2$$

$$= 8 - 22i + 15(-1)$$

$$= 8 - 15 - 22i = -7 - 22i \quad (ii)$$

پس ثابت ہوا

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

(i) اور (ii) سے

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, (z_2 \neq 0) \quad \text{کوئی سے دو کمپلیکس اعداد لیں اور ثابت کیجیے کہ} \quad (ii)$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \quad \text{حل:}$$

$$= \frac{2+3i}{4+5i} \times \frac{4-5i}{4-5i}$$

$$= \frac{8-10i+12i-15i^2}{(4)^2-(5i)^2}$$

$$= \frac{8+2i+15 \times (-1)}{(4)^2-(5i)^2}$$

$$= \frac{8+15+2i}{16+25} = \frac{23+2i}{41} = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i = \frac{23}{41} - \frac{2}{41}i \quad \text{--- (i)}$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{2-3i}{4-5i}$$

$$= \frac{2-3i}{4-5i} \times \frac{4+5i}{4+5i}$$

$$= \frac{8+10i-12i-15i^2}{(4)^2-(5i)^2} = \frac{8-2i-15(-1)}{16-(25 \times (-1))}$$

$$= \frac{8+15-2i}{16-(25 \times (-1))} = \frac{23-2i}{16+25} = \frac{23-2i}{41}$$

$$= \frac{23}{41} - \frac{2}{41}i \quad \text{--- ii}$$

پس ثابت ہوا کہ

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \text{--- (ii) اور (i)}$$

مثال 13: اگر $z_1 = 5 + 4i$ و $z_2 = 3 + 2i$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $\left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+4i}{3+2i}$$

$$= \frac{(5+4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

$$= \frac{15-10i+12i-8i^2}{(3)^2-(2i)^2} = \frac{23+2i}{9+4}$$

$$= \frac{23+2i}{13} = \frac{23}{13} + \frac{2}{13}i$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{23}{13} + \frac{2}{13}i \quad \text{--- (i)}$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{5-4i}{3-2i} = \frac{(5-4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$$

$$= \frac{15+10i-12i-8i^2}{9+4} = \frac{15-2i+8}{9+4}$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{23-2i}{13} = \frac{23}{13} - \frac{2}{13}i \quad \text{--- (ii)}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \text{اس لیے (i) اور (ii)}$$

خاصیت 4: $\bar{\bar{z}} = z$ ثبوت: فرض کیا $z = x + iy$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\bar{\bar{z}} = x + iy = z$$

$$\bar{\bar{z}} = z \quad \text{پس ثابت ہوا}$$

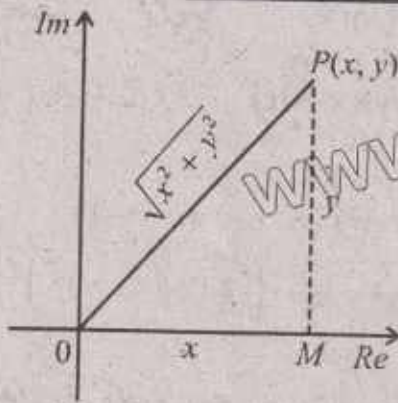
مثال 14: اگر $z = 7 + 3i$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $\bar{\bar{z}} = z$ حل:

$$z = 7 + 3i$$

$$\bar{z} = 7 - 3i \quad \text{تو}$$

$$\bar{\bar{z}} = 7 + 3i = z$$

$$\bar{\bar{z}} = z \quad \text{پس ثابت ہوا}$$



جس طرح ایک حقیقی عدد کی مطلق قیمت حقیقی عددی خط پر اس کے مبدا سے فاصلے کو مانتی ہے، اسی طرح ایک کمپلیکس عدد کا ماڈیولس کمپلیکس مستوی میں اس کے مبدا سے فاصلے کو مانتا ہے۔ غور کریں کہ مبدا سے نقطہ $P(x, y)$ تک کا فاصلہ ایک رداسی خط کے ساتھ ہوتا ہے اور یہ قائمہ الزاویہ مثلث کا وتر بناتا ہے، جہاں افقی اور عمودی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب x اور y ہوتی ہیں۔

تعریف: اگر $z = x + iy$ ہو تو $\sqrt{x^2 + y^2}$ کمپلیکس عدد z کا ماڈیولس کہلاتا ہے اور اسے $|z|$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{یعنی}$$

$$|i| = |0 + 1i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \quad \text{(i) مثال کے طور پر}$$

$$|3 - 5i| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \quad \text{(ii)}$$

(Properties of Modulus of a Complex Number) کمپلیکس عدد کے ماڈیولس کی خصوصیات

خاصیت 1: کوئی سے کمپلیکس عدد کے لیے $|z| = |\bar{z}|$

$$|z| = |-z| = |\bar{z}| = |\bar{\bar{z}}| \quad \text{خاصیت 2:}$$

$$z = x + iy \quad \text{فرض کیا}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{اب (i)}$$

$$\begin{aligned} |-z| &= |-x - iy| \\ &= \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(ii)} \end{aligned}$$

$$\bar{z} = x - yi \Rightarrow \bar{\bar{z}} = x + yi$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(iii)}$$

$$z = x + iy \quad \text{جب کہ } \bar{z} = x - iy$$

$$-\bar{z} = -x + iy$$

$$\begin{aligned} |-\bar{z}| &= \sqrt{(-x)^2 + (y)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(iv)} \end{aligned}$$

سے (iv)، (iii)، (ii)، (i)

$$|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$$

$$z = x + iy \quad \text{فرض کیا}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(i) پھر}$$

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{اب}$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{(x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(ii) اور (i) سے}$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

مثال 15: اگر $z = 5 + 4i$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $|z| = |\bar{z}|$

$$z = 5 + 4i$$

حل:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(5)^2 + (4)^2} \\ &= \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} \quad \text{(i)} \end{aligned}$$

$$\bar{z} = 5 - 4i \quad \text{اب}$$

$$\begin{aligned} |\bar{z}| &= \sqrt{(5)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} \quad \text{(ii)} \end{aligned}$$

(i) اور (ii) سے $|z| = |\bar{z}|$

$$\begin{aligned}
 z\bar{z} &= (5+3i)(5-3i) \\
 &= (5)^2 - (3i)^2 \\
 &= (25) - (9i^2) \\
 &= 25 - (-9) \\
 &= 25 + 9 = 34 \quad \text{--- (i)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |z| &= \sqrt{(5)^2 + (3)^2} \\
 |z|^2 &= \left[\sqrt{(5)^2 + (3)^2} \right]^2 \\
 &= 25 + 9 = 34 \quad \text{--- (ii)}
 \end{aligned}$$

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad \text{--- (i) اور (ii) سے}$$

خاصیت 3: $z\bar{z} = |z|^2$ ثبوت: فرض کیا

$$\begin{aligned}
 z &= x + iy \\
 \therefore \bar{z} &= x - iy \\
 z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \quad \text{اب} \\
 &= (x)^2 - (iy)^2 \\
 &= x^2 - (i^2 y^2) \\
 &= x^2 - (-y^2) \quad (i^2 = -1) \\
 &= x^2 + y^2 = |z|^2 \quad (|z| = \sqrt{x^2 + y^2})
 \end{aligned}$$

پس $z\bar{z} = |z|^2$

مثال 16: اگر $z = 5 + 3i$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $z\bar{z} = |z|^2$

حل:

$$\begin{aligned}
 z &= 5 + 3i \\
 \bar{z} &= 5 - 3i
 \end{aligned}$$

حل مشق 1.3

1- درج ذیل کمپلیکس اعداد کا ماڈیولس معلوم کیجیے۔

(i) $4 + 3i$ حل:

$$|4 + 3i| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

(ii) $-5 - 4i$ حل:

$$|-5 - 4i| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

(iii) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ حل:

$$\left| \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

(iv) $-\sqrt{2} - \sqrt{3}i$ حل:

$$|-\sqrt{2} - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2 + 3} = \sqrt{5}$$

2- اگر $z_1 = 2 + 7i$ اور $z_2 = 4 - 3i$ ہو تو تصدیق کیجیے کہ

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

L.H.S

$$\begin{aligned}
 z_1 + z_2 &= (2 + 7i) + (4 - 3i) \\
 &= 2 + 7i + 4 - 3i \\
 &= 2 + 4 + 7i - 3i \\
 &= 6 + 4i \\
 \overline{z_1 + z_2} &= \overline{6 + 4i} = 6 - 4i \quad \text{--- (i)}
 \end{aligned}$$

R.H.S

$$\begin{aligned}
 \overline{z_1} &= \overline{2 + 7i} \\
 \overline{z_2} &= \overline{4 - 3i}
 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned}
 z_2 &= 4 - 3i \\
 \overline{z_2} &= 4 + 3i \\
 \overline{z_1} + \overline{z_2} &= (2 - 7i) + (4 + 3i) \\
 &= 2 - 7i + 4 + 3i \\
 &= 2 + 4 - 7i + 3i \\
 &= 6 - 4i \quad \text{--- (ii)}
 \end{aligned}$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$(ii) \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

L.H.S

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2 + 7i)(4 - 3i) \\ &= 2(4 - 3i) + 7i(4 - 3i) \\ &= 8 - 6i + 28i - 21i^2 \\ &= 8 - 6i + 28i - 21(-1) \\ &= 8 - 6i + 28i + 21 \\ &= 8 + 21 - 6i + 28i \\ &= 29 + 22i \end{aligned}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{29 + 22i} = 29 - 22i \quad \text{--- (i)}$$

$$(iii) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

L.H.S

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2 + 7i}{4 - 3i} = \frac{2 + 7i}{4 - 3i} \times \frac{4 + 3i}{4 + 3i} \\ &= \frac{2(4 + 3i) + 7i(4 + 3i)}{(4)^2 - (3i)^2} \\ &= \frac{8 + 6i + 28i + 21i^2}{16 - (9 \times -1)} \\ &= \frac{8 + 6i + 28i + 21(-1)}{16 + 9} \\ &= \frac{8 + 6i + 28i - 21}{25} \\ &= \frac{8 + 6i + 28i - 21}{25} \\ &= \frac{8 - 21 + 6i + 28i}{25} \\ &= \frac{-13 + 34i}{25} \\ &= \frac{-13}{25} + \frac{34i}{25} \end{aligned}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\frac{-13}{25} + \frac{34i}{25}} = -\frac{13}{25} - \frac{34i}{25} \quad \text{--- (i)}$$

R.H.S

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + 7i \\ \overline{z_1} &= 2 - 7i \\ z_2 &= 4 - 3i \\ \overline{z_2} &= 4 + 3i \\ \overline{z_1 z_2} &= (2 - 7i)(4 + 3i) \\ &= 8 + 6i - 28i - 21i^2 \\ &= 8 + 6i - 28i - 21(-1) \\ &= 8 + 6i - 28i + 21 \\ &= 8 + 21 + 6i - 28i \\ &= 29 - 22i \quad \text{--- (ii)} \end{aligned}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} \quad \text{پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ}$$

R.H.S

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + 7i \\ \overline{z_1} &= 2 - 7i \\ z_2 &= 4 - 3i \\ \overline{z_2} &= 4 + 3i \\ \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} &= \frac{2 - 7i}{4 + 3i} \\ &= \frac{2 - 7i}{4 + 3i} \times \frac{4 - 3i}{4 - 3i} = \frac{2(4 - 3i) - 7i(4 - 3i)}{(4)^2 - (3i)^2} \\ &= \frac{8 - 6i - 28i + 21i^2}{16 - 9i^2} = \frac{8 - 6i - 28i + 21i^2}{16 - (9 \times -1)} \\ &= \frac{8 - 6i - 28i + 21i^2}{16 + 9} = \frac{8 - 6i - 28i + 21(-1)}{25} \\ &= \frac{8 - 21 - 6i - 28i}{25} \\ &= \frac{-13 - 34i}{25} = -\frac{13}{25} - \frac{34i}{25} \quad \text{--- (ii)} \end{aligned}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad \text{پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ}$$

(i) $\overline{\overline{z}} = z$
 $z = 5 - 2i$
 $\overline{z} = 5 + 2i$
 $\overline{\overline{z}} = 5 - 2i$
 $\overline{\overline{\overline{z}}} = z$

پس ثابت ہوا

(ii) $|z| = |\overline{z}|$
 $z = 5 - 2i$
 $\overline{z} = 5 + 2i$

$$|z| = \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \quad \text{--- (i)}$$

$$|\overline{z}| = \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \quad \text{--- (ii)}$$

$|z| = |\overline{z}|$ سے (ii) اور (i)

(iii) $|z| = |-z|$

$$z = 5 - 2i$$

$$-z = -5 + 2i$$

$$|z| = |5 - 2i| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \quad \text{--- (i)}$$

$$|-z| = \sqrt{(-5)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \quad \text{--- (ii)}$$

پس ثابت ہوا

$|z| = |-z|$ سے (ii) اور (i)

(iv) $z\overline{z} = |z|^2$

$$z = 5 - 2i$$

$$\overline{z} = 5 + 2i$$

$$z\overline{z} = (5 - 2i)(5 + 2i)$$

$$= (5)^2 - (2i)^2$$

$$= 25 - 4i^2$$

$$= 25 - (4 \times -1)$$

$$= 25 + 4$$

$$= 29 \quad \text{--- (i)}$$

$$|z| = |5 - 2i| = \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

$$|z|^2 = (\sqrt{29})^2$$

$$|z|^2 = 29 \quad \text{--- (ii)}$$

$$z\overline{z} = |z|^2$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا

(v) $|z| = |-\overline{z}|$

$$z = 5 - 2i$$

$$\overline{z} = 5 + 2i$$

$$-\overline{z} = -(5 + 2i) = -5 - 2i$$

$$|z| = |5 - 2i|$$

$$= \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \quad \text{--- (i)}$$

$$|-\overline{z}| = |-5 - 2i|$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} \quad \text{--- (ii)}$$

$$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

$|z| = |-\overline{z}|$ سے (ii) اور (i) سے ثابت ہوا

4- اگر $z = 4 - 3i$ تو $|z| = |-z| = \bar{z} = -\bar{z}$ کی تصدیق کیجیے۔

$$\begin{aligned} z &= 4 - 3i \\ -z &= -(4 - 3i) = -4 + 3i \\ -z &= -4 + 3i \\ -\bar{z} &= \overline{-4 + 3i} = -4 - 3i \\ -\bar{z} &= -4 - 3i \\ |z| &= |4 - 3i| \\ |z| &= \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} \\ |z| &= 5 \quad \text{(i)} \\ |-z| &= |-4 + 3i| \\ |-z| &= \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} \\ |-z| &= 5 \quad \text{(ii)} \\ -\bar{z} &= -4 - 3i \\ |-\bar{z}| &= |-4 - 3i| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} &= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} \\ &= 5 \\ |-\bar{z}| &= 5 \quad \text{(iii)} \\ \bar{z} &= \overline{4 - 3i} \quad \text{اور} \\ \bar{z} &= 4 + 3i \\ \bar{\bar{z}} &= \overline{4 + 3i} \\ \bar{\bar{z}} &= 4 - 3i \\ |\bar{\bar{z}}| &= \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} \\ |\bar{\bar{z}}| &= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} \\ |\bar{\bar{z}}| &= 5 \quad \text{(iv)} \end{aligned}$$

پس (i)، (ii)، (iii) اور (iv) سے ثابت ہوا۔

$|z| = |-z| = \bar{z} = -\bar{z}$

5- اگر $z_1 = 2 + 3i$ اور $z_2 = -1 + i$ تو معلوم کیجیے۔

(i) $\text{Re}(z_1 z_2)$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2 + 3i)(-1 + i) \\ &= 2(-1 + i) + 3i(-1 + i) \\ &= -2 + 2i - 3i + 3i^2 \\ &= -2 + 2i - 3i + 3(-1) \\ &= -2 - 3 + 2i - 3i = -5 - i \\ &= -5 - i \\ \text{Re}(z_1 z_2) &= -5 \quad \text{لہذا} \end{aligned}$$

(ii) $\text{Im}(z_1 z_2)$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2 + 3i)(-1 + i) \\ &= 2(-1 + i) + 3i(-1 + i) \\ &= -2 + 2i - 3i + 3i^2 \\ &= -2 + 2i - 3i + 3(-1) \\ &= -2 - 3 + 2i - 3i \\ &= -5 - i \\ \text{Im}(z_1 z_2) &= -1 \quad \text{لہذا} \end{aligned}$$

1.5 $(x + iy)^n$ اور $\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right)^n$ جہاں $x_2 + iy_2 \neq 0$ ، $n = \pm 1$ اور $n = \pm 2$ کے حقیقی اور

خیالاتی حصے معلوم کرنا

$(x + iy)^n$ جب کہ $n = \pm 1$

$z = (x + iy)^n$ ایک کمپلیکس عدد ہے۔

(i) $n = 1$ کے لیے

$z = (x + iy)^1$

$= x + iy$

$\text{Re}(z) = x, \text{Im}(z) = y$

$$z = (x + iy)^{-1} \\ = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\ \therefore \operatorname{Re}(z) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

خود آزمائی!

حل: $(x + iy)^n$ کے حقیقی اور خیالی حصے معلوم کیجیے جب کہ $n = \pm 2$

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 &= x^2 + 2xyi + (iy)^2 \\ &= x^2 + 2xyi + (y^2 \times -1) \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi \end{aligned}$$

پس حقیقی حصہ $x^2 - y^2$ اور خیالی حصہ $2xy$

$$(x + iy)^{-2} \quad \text{اب}$$

$$= \left(\frac{1}{x + iy} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{x + iy} \times \frac{x - iy}{x - iy} \right)^2$$

$$= \left(\frac{x - iy}{(x)^2 - (iy)^2} \right)^2 = \left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right)^2 = \frac{(x - iy)^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2xyi + y^2 i^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - 2xyi - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(x^2 - y^2) - 2xyi}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xyi}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \text{خیالی حصہ}, \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \text{حقیقی حصہ}$$

لہذا

مثال 17: $(4 + 3i)^{-1}$ کے حقیقی اور خیالی حصے معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا

$$z = (4 + 3i)^{-1}$$

$$= \frac{1}{(4 + 3i)}$$

$$= \frac{1(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{4 - 3i}{16 - 9i^2}$$

$$= \frac{4-3i}{16+9} = \frac{4-3i}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z) = \frac{4}{25}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{3}{25}$$

مثال 18: $z = (4+3i)^{-2}$ کے حقیقی اور خیالیاتی حصے معلوم کیجیے۔

حل:

$$z = (4+3i)^{-2}$$

$$= \frac{1}{(4+3i)^2}$$

$$= \frac{1}{(4)^2 + (3i)^2 + 2(4)(3i)} = \frac{1}{16-9+24i}$$

$$= \frac{1}{7+24i} = \frac{(7-24i)}{(7+24i)(7-24i)}$$

$$= \frac{7-24i}{49-576i^2} = \frac{7-24i}{49-576(-1)}$$

$$= \frac{7-24i}{49+576} = \frac{7-24i}{625}$$

$$= \frac{7}{625} - \frac{24}{625}i$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{7}{625}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{24}{625} \quad \text{اس لیے}$$

کیا آپ جانتے ہیں؟

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2},$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

مثال 19: $z = \left(\frac{4+3i}{3+2i}\right)^{-1}$ کے حقیقی اور خیالیاتی حصے معلوم کیجیے۔

حل:

$$z = \left(\frac{4+3i}{3+2i}\right)^{-1}$$

$$= \frac{3+2i}{4+3i} = \frac{(3+2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$$

$$= \frac{12-9i+8i-6i^2}{16-9i^2} = \frac{12-9i+8i-6(-1)}{16-9(-1)} = \frac{12-i+6}{16+9}$$

$$= \frac{18-i}{25} = \frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$$

$$\text{Re}(z) = \frac{18}{25}, \text{Im}(z) = -\frac{1}{25}$$

مثال 20: $z = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{-2}$ کے حقیقی اور خیالی حصے معلوم کیجیے۔

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^2 = \left(\frac{1-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} \right)^2 = \left(\frac{1-i-i+i^2}{1^2-i^2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1-2i-1}{1+1} \right)^2 = \left(\frac{-2i}{2} \right)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$= -1 + 0i$$

$$\text{Re}(z) = -1, \text{Im}(z) = 0$$

اس لیے

کمپلیکس عددی سروں کے ساتھ یک درجی ہمزاد مساواتوں کا حل

1.6

(Solution of Simultaneous Linear Equations with Complex Coefficients)

ایک سے زیادہ مساواتیں جن کو متغیرات کی یکساں قدروں سے ثابت کیا جاسکے ہمزاد مساواتوں کہلاتی ہیں۔

مثال 21: کمپلیکس عددی سروں z اور w کے لیے دی گئی یک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کیجیے۔

$$5z - (3+i)w = 7-i$$

$$(2-i)z + 2iw = 4$$

$$5z - (3+i)w = 7-i \quad \text{(i)}$$

$$(2-i)z + 2iw = 4 \quad \text{(ii)}$$

مرحلہ I: مساوات (i) کو ہم w کے لیے حل کرتے ہیں۔

$$5z - (3+i)w = 7-i$$

$$(3+i)w = 5z - 7 + i$$

$$w = \frac{5z - 7 + i}{3+i} \quad \text{(iii)}$$

مرحلہ II: w کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$(2-i)z + 2i \left(\frac{5z - 7 + i}{3+i} \right) = 4$$

$$(2-i)(3+i)z + 10iz - 14i + 2i^2 = 4(3+i)$$

$$(6+2i-3i-i^2)z + 10iz - 14i + 2i^2 = 12+4i$$

$$(6-i+1)z + 10iz - 14i - 2 = 12+4i$$

$$(7-i)z + 10iz - 14i - 2 = 12+4i$$

$$7z - iz + 10iz - 14i - 2 = 12 + 4i$$

$$7z + 9iz = 12 + 4i + 14i + 2$$

$$7z + 9iz = 14 + 18i$$

$$z(7 + 9i) = 2(7 + 9i)$$

$$z = \frac{2(7 + 9i)}{7 + 9i}$$

$$z = 2$$

مرحلہ III $z = 2$ مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$$w = \frac{5(2) - 7 + i}{3 + i} = \frac{10 - 7 + i}{3 + i}$$

$$w = \frac{3 + i}{3 + i} = 1 \Rightarrow w = 1$$

$$z = 2, w = 1 \text{ ابتدا}$$

حل مشق 1.4

$$(iii) (4 - 5i)^{-1}$$

$$(4 - 5i)^{-1}$$

$$= \frac{1}{4 - 5i}$$

$$= \frac{1}{4 - 5i} \times \frac{4 + 5i}{4 + 5i}$$

$$= \frac{4 + 5i}{(4)^2 - (5i)^2}$$

$$= \frac{4 + 5i}{16 - (25 \times -1)}$$

$$= \frac{4 + 5i}{16 + 25}$$

$$= \frac{4 + 5i}{41} = \frac{4}{41} + \frac{5i}{41}$$

$$\frac{5}{41} = \text{حقیقی حصہ}, \frac{4}{41} = \text{خیالاتی حصہ} \therefore$$

$$(i) (8 - 3i)^2$$

$$(8 - 3i)^2$$

$$= (8)^2 - 2(8)(3i) + (3i)^2$$

$$= 64 - 48i + (9(-1))$$

$$= 64 - 9 - 48i = 55 - 48i$$

$$-48 = \text{حقیقی حصہ}, 55 = \text{خیالاتی حصہ} \therefore$$

$$(ii) (5 + 3i)^{-1}$$

$$(5 + 3i)^{-1}$$

$$= \frac{1}{(5 + 3i)}$$

$$= \frac{1}{5 + 3i} \times \frac{5 - 3i}{5 - 3i}$$

$$= \frac{5 - 3i}{(5)^2 - (3i)^2} = \frac{5 - 3i}{25 - 9i^2}$$

$$= \frac{5 - 3i}{25 - (9 \times -1)} = \frac{5 - 3i}{25 + 9}$$

$$= \frac{5 - 3i}{34} = \frac{5}{34} - \frac{3i}{34}$$

$$\frac{5}{34} = \text{حقیقی حصہ}, \frac{-3}{34} = \text{خیالاتی حصہ} \therefore$$

$$= \frac{12 - 8i + 9i - 6(-1)}{9 + 4}$$

$$= \frac{12 - 8i + 9i + 6}{13} = \frac{18 + i}{13} = \frac{18}{13} + \frac{i}{13}$$

$\frac{1}{13} = \text{حقیقی حصہ}, \frac{18}{13} = \text{خیالاتی حصہ} \therefore$

$$(vi) \left(\frac{2-i}{2+i} \right)^{-2}$$

$$\left(\frac{2-i}{2+i} \right)^{-2} = \left(\frac{2+i}{2-i} \right)^2$$

$\therefore$

$$= \left(\frac{2+i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} \right)^2$$

$$= \left(\frac{2(2+i) + i(2+i)}{(2)^2 - (i)^2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{4 + 2i + 2i + i^2}{4 - (-1)} \right)^2$$

$$= \left(\frac{4 + 2i + 2i + (-1)}{4 + 1} \right)^2$$

$$= \left(\frac{4 - 1 + 2i + 2i}{5} \right)^2 = \left(\frac{3 + 4i}{5} \right)^2$$

$$= \frac{(3)^2 + 2(3)(4i) + (4i)^2}{25}$$

$$= \frac{9 + 24i + 16i^2}{25}$$

$$= \frac{9 + 24i + (16 \times -1)}{25}$$

$$= \frac{9 + 24i - 16}{25}$$

$$= \frac{-7 + 24i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i$$

$\frac{24}{25} = \text{خیالاتی حصہ}, \frac{-7}{25} = \text{حقیقی حصہ} \therefore$

$$(iv) (4-3i)^{-2}$$

$$(4-3i)^{-2} = \left(\frac{1}{4-3i} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4-3i} \times \frac{4+3i}{4+3i} \right)^2 = \left(\frac{4+3i}{(4)^2 - (3i)^2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{4+3i}{16 - 9i^2} \right)^2 = \left(\frac{4+3i}{16 - (9 \times -1)} \right)^2$$

$$= \left(\frac{4+3i}{16 + 9} \right)^2 = \left(\frac{4+3i}{25} \right)^2$$

$$= \frac{(4)^2 + 2(4)(3i) + (3i)^2}{(25)^2}$$

$$= \frac{16 + 24i + 9i^2}{625}$$

$$= \frac{16 + 24i + (9 \times -1)}{625} = \frac{16 + 24i - 9}{625}$$

$$= \frac{7 + 24i}{625} = \frac{7}{625} + \frac{24i}{625}$$

$$\frac{24}{625} = \text{خیالاتی حصہ}, \frac{7}{625} = \text{حقیقی حصہ} \therefore$$

$$(v) \left(\frac{3+2i}{4+3i} \right)^{-1}$$

$$\left(\frac{3+2i}{4+3i} \right)^{-1} = \left(\frac{4+3i}{3+2i} \right)^{-1}$$

$\therefore$

$$= \frac{4+3i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i}$$

$$= \frac{4(3-2i) + 3i(3-2i)}{(3)^2 - (2i)^2}$$

$$= \frac{12 - 8i + 9i - 6i^2}{9 - 4i^2}$$

$$= \frac{12 - 8i + 9i - 6i^2}{9 - (4 \times -1)}$$

$$3z + (2 + i)w = 11 - i \quad \text{--- (i) حل}$$

$$(2 - i)z - w = -1 + i \quad \text{--- (ii)}$$

مساوات (i) کو w کے لیے حل کیا

$$3z + (2 + i)w = 11 - i$$

$$(2 + i)w = 11 - i - 3z$$

$$w = \frac{11 - i - 3z}{2 + i} \quad \text{--- (iii)}$$

$$w = \frac{11 - i - 3z}{2 + i} \quad \text{کی قیمت مساوات (iii) سے (ii) میں درج کریں۔}$$

$$(2 - i)z - \frac{11 - i - 3z}{2 + i} = -1 + i$$

$$\frac{(2 + i)(2 - i)z - (11 - i - 3z)}{2 + i} = -1 + i$$

$$[(2)^2 - (i)^2]z - 11 + i + 3z = (-1 + i)(2 + i)$$

$$(4 - (-1))z - 11 + i + 3z = -2 - i + 2i + i^2$$

$$(4 + 1)z - 11 + i + 3z = -2 + i + (-1)$$

$$5z - 11 + i + 3z = -3 + i$$

$$5z + 3z + i - i = -3 + 11$$

$$8z = 8$$

$$z = \frac{8}{8}$$

$$z = 1 \quad \text{--- (iv)}$$

مساوات (iv) سے z = 1 (iii) میں درج کرنے سے

$$w = \frac{11 - i - 3(1)}{2 + i}$$

$$= \frac{11 - i - 3}{2 + i} = \frac{8 - i}{2 + i}$$

$$= \frac{8 - i}{2 + i} \times \frac{2 - i}{2 - i} = \frac{8(2 - i) - i(2 - i)}{(2)^2 - i^2}$$

$$= \frac{16 - 8i - 2i + i^2}{4 - (-1)}$$

$$= \frac{16 - 10i + (-1)}{4 + 1} = \frac{16 - 1 - 10i}{5}$$

$$= \frac{15 - 10i}{5} = \frac{5(3 - 2i)}{5}$$

$$= 3 - 2i$$

$$z = 1, w = 3 - 2i \quad \text{پس}$$

$$(vii) \left(\frac{1 - 2i}{1 + i} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - 2i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1(1 - i) - 2i(1 - i)}{(1)^2 - (i)^2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - i - 2i + 2i^2}{1 - (-1)} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - i - 2i + 2(-1)}{1 + 1} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - i - 2i - 2}{2} \right)^2 = \left(\frac{-1 - 3i}{2} \right)^2$$

$$= \frac{(-1 - 3i)(-1 - 3i)}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-1(-1 - 3i) - 3i(-1 - 3i)}{4}$$

$$= \frac{1 + 3i + 3i + 9i^2}{4}$$

$$= \frac{1 + 6i + (9 \times -1)}{4} = \frac{1 + 6i - 9}{4}$$

$$= \frac{-8 + 6i}{4} = \frac{-8}{4} + \frac{6i}{4}$$

$$= -2 + \frac{3i}{2}$$

حقیقی حصہ = $\frac{3}{2}$ خیالی حصہ = $\frac{3}{2}$

2- کپلیس عددی سروں z اور w کے لیے یک درجی

ہمزا و مساواتوں کو حل کیجیے۔

$$(i) 3z + (2 + i)w = 11 - i$$

$$(2 - i)z - w = -1 + i$$

$$w = \frac{2(6-5i)}{2} = 6-5i$$

$$w = 6-5i$$

مساوات (iii) میں درج کریں۔

$$z = -i - 1 - w$$

$$z = -i - 1 - (6-5i)$$

$$z = -i - 1 - 6 + 5i$$

$$z = -7 - i + 5i$$

$$z = -7 + 4i$$

$$z = -7 + 4i, w = 6-5i$$

(iii)

$$z - 4w = 3i$$

$$2z + 3w = 11 - 5i$$

$$z - 4w = 3i \quad \text{--- (i) حل:}$$

$$2z + 3w = 11 - 5i \quad \text{--- (ii)}$$

مساوات (i) کو w کے لیے حل کریں۔

$$z - 4w = 3i$$

$$-4w = 3i - z$$

$$4w = -3i + z$$

$$w = \frac{-3i + z}{4} \quad \text{--- (iii)}$$

مساوات (ii) میں $w = \frac{-3i + z}{4}$ درج کرنے سے

$$2z + 3\left(\frac{-3i + z}{4}\right) = 11 - 5i$$

$$\frac{4(2z) + 3(-3i + z)}{4} = 11 - 5i$$

$$8z - 9i + 3z = 4(11 - 5i)$$

$$8z - 9i + 3z = 44 - 20i$$

$$11z = 44 - 20i + 9i$$

$$11z = 44 - 11i$$

$$z = \frac{44 - 11i}{11}$$

$$z = \frac{11(4 - i)}{11}$$

$$z = 4 - i$$

مساوات (iii) میں درج کریں۔

$$w = \frac{-3i + 4 - i}{4} = \frac{-4i + 4}{4}$$

$$(ii) \quad 2z + (3 + i)w = 9 - i$$

$$-iz - iw = -1 + i$$

$$2z + (3 + i)w = 9 - i \quad \text{--- (i) حل:}$$

$$-iz - iw = -1 + i \quad \text{--- (ii)}$$

مساوات (ii) کو z کے لیے حل کریں۔

$$-iz = -1 + i + iw$$

$$iz = 1 - i - iw$$

$$z = \frac{1 - i - i^2 w}{i}$$

$$z = \frac{1 - i - iw}{i} \times \frac{i}{i}$$

$$z = \frac{i - i^2 - i^2 w}{i^2}$$

$$z = \frac{i - (-1) - (-1)w}{-1}$$

$$z = \frac{i + 1 + w}{-1}$$

$$z = -i - 1 - w \quad \text{--- (iii)}$$

مساوات (i) میں $z = -i - 1 - w$ درج کرنے سے

$$2z + (3 + i)w = 9 - i$$

$$2(-i - 1 - w) + 3w + wi = 9 - i$$

$$-2i - 2 - 2w + 3w + wi = 9 - i$$

$$-2i + i + w + wi = 9 + 2$$

$$-i + w + wi = 11$$

$$w + wi - i = 11$$

$$w + wi = 11 + i$$

$$w(1 + i) = 11 + i$$

$$w = \frac{11 + i}{1 + i}$$

$$w = \frac{11 + i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i}$$

$$w = \frac{11 - 11i + i - i^2}{(1)^2 - i^2}$$

$$w = \frac{11 - 10i - (-1)}{1 - (-1)}$$

$$w = \frac{11 + 1 - 10i}{1 + 1} = \frac{12 - 10i}{2}$$

$$w = \frac{5}{1+3i}$$

$$w = \frac{5}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i}$$

$$w = \frac{5-15i}{(1)^2 - (3i)^2}$$

$$w = \frac{5-15i}{1-9i^2}$$

$$w = \frac{5-15i}{1-(9 \times -1)}$$

$$w = \frac{5-15i}{1+9}$$

$$w = \frac{5-15i}{10}$$

$$w = \frac{5}{10} - \frac{15}{10}i$$

$$w = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$w = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \text{ مساوات (iii) میں درج کرنے سے}$$

$$z = -2 - w + wi$$

$$z = -2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)i$$

$$z = -2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}i^2$$

$$z = -2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}(-1)$$

$$z = -2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}i$$

$$z = \frac{-4-1+3}{2} + \frac{3i+i}{2}$$

$$z = \frac{-2}{2} + \frac{4i}{2}$$

$$z = -1 + 2i$$

$$z = -1 + 2i, w = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \text{ پس}$$

$$w = \frac{4(-i+1)}{4}$$

$$w = -i + 1$$

$$z = 4 - i, w = 1 - i \text{ لہذا}$$

$$(iv) z + w = 3i$$

$$2z + 3w = 2$$

$$z + w = 3i \text{ (i)}$$

$$2z + 3w = 2 \text{ (ii)}$$

مساوات (i) کو w کے لیے حل کرنے سے

$$z + w = 3i$$

$$w = 3i - z \text{ (iii)}$$

مساوات (ii) میں w = 3i - z درج کرنے سے

$$2z + 3(3i - z) = 2$$

$$2z + 9i - 3z = 2$$

$$2z - 3z = 2 - 9i$$

$$-z = 2 - 9i$$

$$z = -2 + 9i$$

مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$$w = 3i - (-2 + 9i)$$

$$w = 3i + 2 - 9i$$

$$w = 2 + 3i - 9i$$

$$w = 2 - 6i$$

$$z = -2 + 9i, w = 2 - 6i \text{ لہذا}$$

$$(v) 2z + (3 + i)w = 1$$

$$-z - (1 - i)w = 2$$

$$2z + (3 + i)w = 1 \text{ (i)}$$

$$-z - (1 - i)w = 2 \text{ (ii)}$$

مساوات (ii) کو z کے لیے حل کرنے سے

$$-z - (1 - i)w = 2$$

$$-z = 2 + (1 - i)w$$

$$z = -2 - (1 - i)w$$

$$z = -2 - w + wi \text{ (iii)}$$

مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$2z + (3 + i)w = 1$$

$$2(-2 - w + wi) + 3w + wi = 1$$

$$-4 - 2w + 2wi + 3w + wi = 1$$

$$-2w + 3w + 2wi + wi = 1 + 4$$

$$w + 3wi = 5$$

$$w(1 + 3i) = 5$$

حل اعاده مشق 1

1- درج ذیل سوالات کے دیے گئے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) $i^2 + i^4 =$

- (a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

(ii) $(2 - 3i)(2 + 3i)$ کا حقیقی حصہ ہے:

- (a) -3 (b) 1 (c) 3 (d) 13

(iii) $(2 - i)(2 + i)$ کا خیالاتی حصہ ہے:

- (a) 0 (b) 1 (c) 7 (d) 9

(iv) $x + iy$ ایک خالص خیالاتی عدد ہوگا، جب:

- (a) $y = 0$ (b) $x = 0$ (c) $i = 0$ (d) $x = 0, y = 0$

(v) $5 - 2i$ کا جمعی معکوس ہے:

- (a) $5 + 2i$ (b) $-5 - 2i$ (c) $5 - 2i$ (d) $-5 + 2i$

(vi) $1 + i$ کا ضربی معکوس ہے:

- (a) $1 - i$ (b) i (c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

(vii) اگر $z = 4 - 3i$ ہو تو $z\bar{z}$ برابر ہے:

- (a) 3 (b) 9 (c) 16 (d) 25

(viii) $9 - 4i$ کا انجوگیٹ ہے:

- (a) $-9 - 4i$ (b) $9 + 4i$ (c) $9 + 9i$ (d) $4 - 9i$

(ix) اگر $z + \bar{z} = 4 + 4i$ ہو تو $z + \bar{z}$ برابر ہے:

- (a) 8 (b) $8 + 8i$ (c) $8i$ (d) 0

(x) اگر $|z| = 5 + 4i$ ہو تو $|z|$ برابر ہے:

- (a) 9 (b) 25 (c) 41 (d) $\sqrt{41}$

جوابات

- (i) 0 (ii) 13 (iii) 0 (iv) $x = 0$ (v) $-5 + 2i$

- (vi) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (vii) 25 (viii) $9 + 4i$ (ix) 8 (x) $\sqrt{41}$

2- (i) کیا "0" ایک کمپلیکس عدد ہے؟ وضاحت کیجیے۔

جواب: جی ہر حقیقی عدد ایک کمپلیکس عدد ہوتا ہے جس خیالاتی حصہ صفر ہوتا اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں $40 + 0i$

(ii) کمپلیکس عدد کی اپنے ہی کا انجوگیٹ سے ضرب کا نتیجہ کیا ہوتا ہے؟

جواب: اس کا نتیجہ ایک غیر منفی صحیح عدد نکلتا ہے۔

(iii) دو کمپلیکس اعداد کے برابر ہونے کی شرط بیان کیجیے۔

جواب: دو کمپلیکس اعداد اس صورت میں برابر ہو سکتے ہیں جب ان کا حقیقی اور خیالی حصہ آپس میں برابر ہو۔

3- مختصر کیجیے۔

(i) i^{37}

$$i^{37} = i^{36} \cdot i = (i^2)^{18} \cdot i = (-1)^{18} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

حل:

(ii) $i^{13} \times i^{11}$

$$i^{13} \times i^{11} = i^{13+11} = i^{24} = (i^2)^{12} = (-1)^{12} = 1$$

حل:

(iii) $(-i)^{-9}$

$$(-i)^{-9} = \frac{1}{(-i)^9} = \frac{1}{(-1 \times i)^9} = \frac{1}{(-1)^9 \times i^9} = \frac{1}{-1 \times i^8 \times i}$$

حل:

$$= \frac{1}{-1 \times (i^2)^4 \times i} = \frac{1}{-1 \times (-1)^4 \times i} = \frac{1}{-1 \times 1 \times i} = \frac{1}{-1 \times i} = \frac{1}{-i}$$

$$\frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{-(-1)} = \frac{i}{1} = i$$

(iv) $(3 - 4i)(5 - 6i)$

$$(3 - 4i)(5 - 6i)$$

$$= 3(5 - 6i) - 4i(5 - 6i)$$

$$= 15 - 18i - 20i + 24i^2$$

$$= 15 - 24 - 38i$$

$$= -9 - 38i$$

حل:

(v) $(3 + 4i) \div (5 - 7i)$

$$(3 + 4i) \div (5 - 7i)$$

$$= \frac{3 + 4i}{5 - 7i}$$

$$= \frac{3 + 4i}{5 - 7i} \times \frac{5 + 7i}{5 + 7i} = \frac{3(5 + 7i) + 4i(5 + 7i)}{(5)^2 - (7i)^2}$$

$$= \frac{15 + 21i + 20i + 28i^2}{25 - (49 \times -1)} = \frac{15 + 41i + 28(-1)}{25 + 49}$$

$$= \frac{15 - 28 + 41i}{74} = \frac{-13 + 41i}{74} = -\frac{13}{74} + \frac{41i}{74}$$

$$= \frac{15 - 28 + 41i}{74} = \frac{-13 + 41i}{74} = -\frac{13}{74} + \frac{41i}{74}$$

حل:

4- $z = 8 + 9i$ کا جمعی اور ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

حل:

$$z = 8 + 9i$$

$$\text{جمعی معکوس} = -(8 + 9i) = -8 - 9i$$

$$\text{ضربی معکوس} = z^{-1} = \frac{1}{8 + 9i}$$

$$= \frac{1}{8 + 9i} \times \frac{8 - 9i}{8 - 9i}$$

$$= \frac{8 - 9i}{(8)^2 - (9i)^2} = \frac{8 - 9i}{64 - (81 \times -1)}$$

$$= \frac{8 - 9i}{64 + 81} = \frac{8 - 9i}{145} = \frac{8}{145} - \frac{9i}{145}$$

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
 $\overline{z_1} = 3 + 4i$
 $\overline{z_1} = 3 - 4i$
 $\overline{z_2} = 2 + 3i$
 $\overline{z_2} = 2 - 3i$

L.H.S

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3 + 4i) + (2 + 3i) \\ &= 3 + 4i + 2 + 3i \\ &= 3 + 2 + 4i + 3i = 5 + 7i \\ \overline{z_1 + z_2} &= \overline{5 + 7i} = 5 - 7i \quad \text{--- (i)} \end{aligned}$$

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$
 $\overline{z_1} = 3 + 4i$
 $\overline{z_1} = 3 - 4i$
 $\overline{z_2} = 2 + 3i$
 $\overline{z_2} = 2 - 3i$

L.H.S

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3 + 4i)(2 + 3i) \\ &= 3(2 + 3i) + 4i(2 + 3i) \\ &= 6 + 9i + 8i + 12i^2 \\ &= 6 + 17i + 12(-1) \\ &= 6 - 12 + 17i \\ &= -6 + 17i \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{-6 + 17i} = -6 - 17i \end{aligned}$$

(iii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + 4i, z_2 = 2 + 3i \\ \overline{z_1} &= 3 - 4i, \overline{z_2} = 2 - 3i \end{aligned}$$

L.H.S

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} &= \frac{3 - 4i}{2 - 3i} \\ &= \frac{3 - 4i}{2 - 3i} \times \frac{2 + 3i}{2 + 3i} \\ &= \frac{3(2 + 3i) + 4i(2 - 3i)}{(2)^2 - (3i)^2} \end{aligned}$$

R.H.S

$$\begin{aligned} \overline{z_1} + \overline{z_2} &= (3 - 4i) + (2 - 3i) \\ &= 3 - 4i + 2 - 3i \\ &= 3 + 2 - 4i - 3i = 5 - 7i \\ \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ} \end{aligned}$$

R.H.S

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \overline{z_2} &= (3 - 4i)(2 - 3i) \\ &= 3(2 - 3i) - 4i(2 - 3i) \\ &= 6 - 9i - 8i + 12i^2 \\ &= 6 - 17i + 12(-1) \\ &= 6 - 12 - 17i \\ &= -6 - 17i \end{aligned}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} \quad \text{پس ثابت ہوا}$$

$$= \frac{6 - 9i + 8i - 12i^2}{4 - (9 \times (-1))}$$

$$= \frac{6 - i - (12 \times (-1))}{4 - (-9)}$$

$$= \frac{6 - i + 12}{4 + 9}$$

$$= \frac{18 - i}{13} = \frac{18}{13} - \frac{i}{13}$$

$$\left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right) = \frac{18}{13} - \frac{i}{13} = \frac{18}{13} + \frac{i}{13}$$

R.H.S

$$\begin{aligned}\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} &= \frac{3-4i}{2-3i} \\ &= \frac{3-4i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i} \\ &= \frac{3(2+3i)-4i(2+3i)}{(2)^2-(3i)^2} \\ &= \frac{6+9i-8i-12i^2}{4-(9 \times (-1))}\end{aligned}$$

$$\bar{z}_1 = 3-4i, \bar{z}_2 = 2-3i$$

$$(iv) |z_1| = |-\bar{z}_1|$$

$$z_1 = 3+4i$$

$$\bar{z}_1 = 3-4i$$

$$-\bar{z}_1 = -(3-4i) = -3+4i$$

$$L.H.S = |z_1| = |3+4i| = \sqrt{(3)^2+(4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$R.H.S = |-\bar{z}_1| = |-3+4i| = \sqrt{(-3)^2+(4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|z_1| = |-\bar{z}_1|$$

$$=$$

$$(v) \bar{z}_1 = z_2$$

$$z_2 = 2+3i$$

$$\bar{z}_2 = \overline{2+3i} = 2-3i$$

$$\bar{\bar{z}_2} = \overline{2-3i} = 2+3i$$

$$\bar{\bar{z}_2} = z_2 \text{ پس ثابت ہوا}$$

$$(vi) z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2$$

$$z_1 = 3+4i$$

$$\bar{z}_1 = \overline{3+4i} = 3-4i$$

L.H.S

$$z_1 \bar{z}_1 = (3+4i)(3-4i)$$

$$= (3)^2 - (4i)^2$$

$$= 9 - 16i^2$$

$$= 9 - (16 \times (-1))$$

$$= 9 + 16 = 25$$

R.H.S

$$|z_1| = |3+4i| = \sqrt{(3)^2+(4)^2}$$

$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|z_1|^2 = (5)^2 = 25$$

$$z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2 \text{ پس ثابت ہوا}$$

$$\frac{6+i-12(-1)}{4-(-9)}$$

$$= \frac{6+i+12}{4+9}$$

$$= \frac{18+i}{13} = \frac{18}{13} + \frac{i}{13}$$

$$= \frac{18+i}{13} = \frac{18}{13} + \frac{i}{13}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ پس ثابت ہوا}$$

حل:

حل:

حل:

-6 اگر $z_1 = 5 + 4i$ اور $z_2 = 3 + 2i$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(i) $z_1 z_2$

$$\begin{aligned} z_1 &= 5 + 4i, z_2 = 3 + 2i \\ z_1 z_2 &= (5 + 4i)(3 + 2i) \\ &= 5(3 + 2i) + 4i(3 + 2i) \\ &= 15 + 10i + 12i + 8i^2 \\ &= 15 + 22i + 8(-1) \\ &= 15 + 22i - 8 \\ &= 7 + 22i \end{aligned}$$

(ii) $\frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned} z_1 &= 5 + 4i, z_2 = 3 + 2i \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 + 4i}{3 + 2i} = \frac{5 + 4i}{3 + 2i} \times \frac{3 - 2i}{3 - 2i} \\ &= \frac{5(3 - 2i) + 4i(3 - 2i)}{(3)^2 - (2i)^2} = \frac{15 - 10i + 12i - 8i^2}{9 - (4(-1))} \\ &= \frac{15 + 2i - 8(-1)}{9 - (-4)} = \frac{15 + 2i + 8}{9 + 4} \\ &= \frac{23 + 2i}{13} = \frac{23}{13} + \frac{2i}{13} \end{aligned}$$

(iii) $\bar{z}_1 \bar{z}_2$

$$\begin{aligned} z_1 &= 5 + 4i, z_2 = 3 + 2i \\ \bar{z}_1 &= 5 - 4i, \bar{z}_2 = 3 - 2i \\ \bar{z}_1 \bar{z}_2 &= (5 - 4i)(3 - 2i) \\ &= 5(3 - 2i) - 4i(3 - 2i) \\ &= 15 - 10i - 12i + 8i^2 \\ &= 15 - 22i + 8(-1) \\ &= 15 - 22i - 8 \\ &= 7 - 22i \end{aligned}$$

(iv) $|z_1 z_2|$

$$\begin{aligned} z_1 &= 5 + 4i, z_2 = 3 + 2i \\ z_1 z_2 &= (5 + 4i)(3 + 2i) \\ &= 5(3 + 2i) + 4i(3 + 2i) \\ &= 15 + 10i + 12i + 8i^2 \\ &= 15 + 22i + 8(-1) \\ &= 15 + 22i - 8 \\ &= 7 + 22i \\ |z_1 z_2| &= |7 + 22i| = \sqrt{(7)^2 + (22)^2} \\ &= \sqrt{49 + 484} = \sqrt{533} \end{aligned}$$

-7 $z = (2 + 7i)^{-1}$ کے حقیقی اور خیالی حصے معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} z &= (2 + 7i)^{-1} \\ &= \frac{1}{2 + 7i} = \frac{1}{2 + 7i} \times \frac{2 - 7i}{2 - 7i} \\ &= \frac{2 - 7i}{(2)^2 - (7i)^2} = \frac{2 - 7i}{4 - 49i^2} = \frac{2 - 7i}{4 - (49 \times -1)} \\ &= \frac{2 - 7i}{4 + 49} = \frac{2 - 7i}{53} = \frac{2}{53} - \frac{7}{53}i \end{aligned}$$

لہذا حقیقی حصہ $\frac{2}{53}$ اور خیالی حصہ $-\frac{7}{53}$ ۔
-8 کمپلیکس عددی سروں z اور w کے لیے دی گئی ایک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کیجیے۔

$$\begin{aligned} iz + (2 - i)w &= 4 + i \\ iz + (3 + i)w &= 3 + 3i \\ iz + (2 - i)w &= 4 + i \quad \text{(i)} \\ iz + (3 + i)w &= 3 + 3i \quad \text{(ii)} \end{aligned}$$

مسادات (i) و مساوات (ii) سے تفریق کرنے سے

$$iz + (3+i)w = 3+3i$$

$$iz + (2-i)w = 4+i$$

$$[(3+i)-(2-i)]w = -1+2i$$

$$(3+i-2+i)w = -1+2i$$

$$(1+2i)w = -1+2i$$

$$w = \frac{-1+2i}{1+2i}$$

$$w = \frac{-1+2i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{-1(1-2i)+2i(1-2i)}{(1)^2-(2i)^2}$$

$$= \frac{-1+2i+2i-4i^2}{1-(4 \times -1)} = \frac{-1+4i-4(-1)}{1+4}$$

$$= \frac{-1+4i+4}{5} = \frac{3+4i}{5}$$

$$w = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

مسادات (i) میں $w = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ درج کرنے سے

$$iz + (2-i)\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) = 4+i$$

$$iz + 2\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) - i\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) = 4+i$$

$$iz + \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i - \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}i^2 = 4+i$$

$$iz + \frac{6}{5} - \frac{4}{5}(-1) + \left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\right)i = 4+i$$

$$iz + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} + \left(\frac{5}{5}\right)i = 4+i$$

$$iz + \frac{10}{5} + i = 4+i$$

$$iz + 2 + i = 4+i$$

$$iz = 4+2+i-i = 2 \Rightarrow iz = 2$$

$$\frac{z}{i} = \frac{2}{i}$$

$$z = \frac{2}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{2i}{i^2}$$

$$z = \frac{2i}{-1} = -2i$$

$$z = -2i, w = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$(3 - 4i)(a + bi) = 1 + 0i$$

$$3(a + bi) - 4i(a + bi) = 1 + 0i$$

$$3a + 3bi - 4ai - 4bi^2 = 1 + 0i$$

$$3a + 3bi - 4ai - 4b(-1) = 1 + 0i$$

$$3a + 4b + 3bi - 4ai = 1 + 0i$$

$$(3a + 4b) + (3b - 4a)i = 1 + 0i$$

دونوں اطراف کے حقیقی حصہ کو حقیقی حصہ سے اور خیالی حصہ کو خیالی حصہ سے موازنہ کرنے سے

$$3a + 4b = 1 \quad (i), \quad -4a + 3b = 0 \quad (ii)$$

مساوات (i) کو 4 سے (ii) کو 3 سے ضرب دینے سے

$$12a + 16b = 4 \quad (iii), \quad -12a + 9b = 0 \quad (iv)$$

مساوات (iii) اور (iv) کو جمع کریں

$$\begin{array}{r} 12a + 16b = 4 \\ -12a + 9b = 0 \\ \hline +25b = 4 \end{array}$$

$$b = \frac{4}{25}$$

$$b = \frac{4}{25} \text{ مساوات (i) درج کریں۔}$$

$$3a + 4\left(\frac{4}{25}\right) = 1$$

$$3a + \frac{16}{25} = 1$$

مساوات کے دونوں اطراف 25 سے ضرب دینے سے

$$25 \times 3a + 25 \times \frac{16}{25} = 25 \times 1$$

$$75a + 16 = 25$$

$$75a = 25 - 16 = 9$$

$$a = \frac{9}{75} = \frac{3}{25}$$

$$a = \frac{3}{25}, b = \frac{4}{25}$$

پس

$$(3 - 2i)(x + yi) = 2(x - 2yi) + 2i - 1 \quad -10$$

$$(3 - 2i)(x + yi) = 2(x - 2yi) + 2i - 1$$

$$3x + 3yi - 2xi - 2yi^2 = 2x - 4yi + 2i - 1$$

$$3x - 2y(-1) - 2xi + 3yi = 2x - 1 - 4yi + 2i$$

$$3x + 2y + (-2x + 3y)i = (2x - 1) + (-4y + 2)i$$

دونوں اطراف کے حقیقی حصہ کو حقیقی حصہ سے اور خیالی حصہ کو خیالی حصہ سے موازنہ کرنے سے

$$3x + 2y = 2x - 1, \quad -2x + 3y = -4y + 2$$

$$3x - 2x + 2y = -1, \quad -2x + 3y + 4y = 2$$

$$x + 2y = -1 \quad (i), \quad -2x + 7y = 2 \quad (ii)$$

مساوات (i) کو 2 سے ضرب دینے سے

$$2x + 4y = -2 \quad (iii)$$

مساوات (ii) اور (iii) کو جمع کرنے سے

$$-2x + 7y = 2$$

$$\frac{2x + 4y = -2}{11y = 0}$$

$$y = \frac{0}{11} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x + 2(0) = -1$$

$$x + 0 = -1$$

$$x = -1, y = 0 \quad \text{پس}$$

$y = 0$ مساوات (i) میں درج کریں

معروضی طرز سوالات

اضافی کثیر الانتخابی سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے کثیر الانتخابی سوالات

کمپلیکس اعداد

1.1

درست جواب کا انتخاب کریں۔

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{کے حقیقی حل ہیں:} \quad -1$$

(d) کوئی نہیں

(a) ایک

(b) دو

$$i = \quad -2$$

(d)

(c) $0i$

(b) ± 1

$$\sqrt{-1} \quad (a)$$

(d) $-i$

(c) -1

(b) 1

$$i^n = \quad -3$$

(a) i

- 25
-4
-5
-6
(a) i (b) i (c) 1 (d) -1
خیالاتی اکائی کو ظاہر کیا جاتا ہے:
(a) α (b) i (c) β (d) ω
کمپلیکس اعداد کا تصور سب سے پہلے پیش کیا گیا:
(a) 15 ویں صدی میں (b) 16 ویں صدی میں (c) 17 ویں صدی میں (d) 18 ویں صدی میں

کمپلیکس عدد کی مصطلحی شکل

1.1.1

- 7 درج ذیل میں سے کون سا کمپلیکس عدد ہے:
(a) 7 (b) $\sqrt{7}$ (c) $x + yi$ (d) $x^2 - 1$
-8 $-3 + 4yi$ کا حقیقی حصہ ہے:
(a) 4 (b) y (c) i (d) -3
-9 $(-i)^4 =$
(a) 1 (b) i^3 (c) -1 (d) 4
-10 اگر $x = 0$ ہو تو کمپلیکس عدد کہلاتا ہے:
(a) خیالاتی عدد (b) خیالاتی عدد (c) حقیقی عدد (d) مفرد عدد
-11 $(5x - 7i)$ کا خیالاتی حصہ ہے:
(a) 5 (b) -7 (c) x (d) i
-12 $(8 + 2i) - (4 - 3i)$ کا حقیقی حصہ ہے:
(a) 8 (b) 4 (c) $2i$ (d) $4 - i$
-13 $(7 - 4i)$ کا خیالاتی حصہ ہے:
(a) 2 (b) 16 (c) 3 (d) -4

کمپلیکس اعداد کی برابری

1.1.2

- 14 اگر $x + yi = 5 - 9i$ ہو تو $y =$
(a) 9 (b) -9 (c) $x + 5$ (d) yi
-15 اگر $2a + (b - 1)i = 10 + 4i$ ہو تو $a =$
(a) 5 (b) 10 (c) $2a + 10$ (d) $2a - 10$
-16 اگر $(3x + 2) + 4i = 14 - yi$ ہو تو $x =$ اور $y =$
(a) $x = 4; y = -3$ (b) $x = -4; y = 4$ (c) $x = 3; y = 4$ (d) $x = 4; y = -4$
-17 اگر $-5x + yi = -10$ ہو تو $y =$
(a) 10 (b) -5 (c) 0 (d) -2

کمپلیکس اعداد پر الجبرائی عوامل (Algebraic Operations on Complex Numbers)

1.2

- 18 اگر $z = 3 + 5i$ ہو تو $3z =$
(a) $9 + 15i$ (b) $6 + 8i$ (c) $3 - 5i$ (d) $9 + 25i^2$
-19 اگر $z = x + yi$ ہو تو $-5z =$
(a) $5z = -5x + yi$ (b) $-5x - 5yi$ (c) $x - 5yi$ (d) $5x + 5yi$

20- $(4 + 5i)$ اور $(-6 + 7i)$ کا حاصل جمع ہوگا:

- (a) $-6 + 12i$ (b) $10 + 12i$ (c) $10 + 12i$ (d) $-2 + 12i$
- (a) $2 + 2i$ (b) $2 - 3i$ (c) $6 - 5i$ (d) $-2 - 2i$
- (a) $2 - 5i$ (b) $15 - 9i$ (c) $8 - 5i$ (d) $8 + 9i$
- (a) $16 - i$ (b) 17 (c) 15 (d) 16
- (a) $1 + i$ (b) $-i$ (c) -1 (d) i

24- $\frac{1+i}{1-i}$ کی $a + bi$ میں شکل ہوگی۔

1.2.6 کمپلیکس اعداد کی خصوصیات

- 25- کمپلیکس اعداد خاصیت بندش رکھتے ہیں:
- (a) تفریق (b) جمع (c) جمع اور ضرب (d) صرف جمع
- 26- کمپلیکس اعداد کی خاصیت غلطی ہے:
- (a) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ (b) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (c) $z + 0 = z$ (d) $z - z = 0$
- 27- کمپلیکس اعداد کے لیے جمعی ذاتی عنصر ہے:
- (a) $(1, 1)$ (b) $(0, 0i)$ (c) $(1, 0i)$ (d) $(1, i)$
- 28- کمپلیکس اعداد کے لیے ضربی ذاتی عنصر ہے:
- (a) $(1 + 0i)$ (b) $(0, 0i)$ (c) $(1, 1i)$ (d) $(-i, i)$
- 29- $(7 - 2i)$ کا جمعی معکوس ہے:
- (a) $(-2 + 7i)$ (b) $(-7, -2i)$ (c) $(0, 0)$ (d) $(-7 + 2i)$
- 30- اگر z اور w ایک دوسرے کے ضربی معکوس والے کمپلیکس اعداد ہوں تو تب $zw =$
- (a) 0 (b) 1 (c) i (d) $-i$
- 31- کوئی سے بھی دو کمپلیکس اعداد z_1 اور z_2 کے لیے

$$z_1 z_2 = z_1 + z_2 \quad (a) \quad z_1 + z_2 = \frac{n_1}{n_2} \quad (b) \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (c) \quad z_1 - z_2 = \frac{z_1}{z_2} \quad (d)$$

1.3 کمپلیکس یا آرگینڈ مستوی

- 32- عدد $(2 - 7i)$ کے مساوی ہے:
- (a) $(2, -7)$ (b) $(2 + 7)$ (c) $(-2 + 7i)$ (d) $(2 - 7, i)$
- 33- $z = -7i$ کو ظاہر کیا جاسکتا ہے:
- (a) $(7 + i)$ (b) $(1 - 7i)$ (c) $+7i$ (d) $(0, -7)$
- 34- کمپلیکس مستوی کا نام کس کے اعزاز میں رکھا گیا:
- (a) جیمز آرگینڈ (b) لونزڈاولر (c) نیوٹن (d) کال

35- کون سا ضرب جوئی کمپلیکس عدد $z = 8$ کو ظاہر کرتا ہے:

(d) $(8, i)$

(c) $(8, 0)$

(b) $(8, 8)$

(a) $(0, 8)$

کمپلیکس عدد کا کانجوگیٹ

1.3.1

36- ایک کمپلیکس عدد $a + bi$ کے کانجوگیٹ کا اظہار ہے۔

(d) $a + bi^2$

(c) $-a + bi$

(b) $a - bi$

(a) $-a - bi$

37- $-4 + 4i$ کا کانجوگیٹ ہے

(d) $-4 - 4i$

(c) $-8i$

(b) $-4 + 4i$

(a) $4 - 4i$

38- ایک کمپلیکس عدد کا اپنے کانجوگیٹ سے حاصل ضرب ہوتا ہے

(d) طاق عدد

(c) جفت عدد

(b) ایک کمپلیکس عدد

(a) ایک عدد حقیقی

39- $(1 + 2i)(1 - 2i) =$

(d) $5i$

(c) 5

(b) $3i$

(a) 3

40- $-11i$ کا کانجوگیٹ ہے

(d) $11i^2$

(c) $-11i$

(b) -11

(a) $11i$

کمپلیکس کانجوگیٹ کی خصوصیات

1.3.3

41- کوئی سے بھی دو کمپلیکس اعداد z_1 اور z_2 کے لیے

(d) $z_1 z_2$

(c) $z_1 + z_2$

(b) $z_1 - z_2$

(a) $z_1 z_2$

42- $z_1 + z_2 =$ کے لیے $z_2 = 5 - 2i$ اور $z_1 = 4 + 3i$

(d) $4 - 5i$

(c) $5 + 5i$

(b) $9 + i$

(a) $9 - i$

43- اگر $z = -3 + 7i$ تو $\bar{z}$ ہوگا:

(d) $7 - 3i$

(c) $-3 + 7i$

(b) $3 - 7i$

(a) $-3 - 7i$

44- اگر $z = 3 - 7i$ تو $z \bar{z} =$

(d) $21 - 9i$

(c) 58

(b) $57i$

(a) $3 - 21i$

45- اگر z ایک کمپلیکس عدد ہو تو $z \bar{z} =$

(d) $z - 2\bar{z}$

(c) $\bar{z} \cdot \bar{z}$

(b) $z + \bar{z}$

(a) $|z|^2$

کمپلیکس عدد کے ماڈیولس کی خصوصیات

1.4.1

46- اگر $z = 8 - 3i$ تو $|z| =$

(d) 83

(c) 73

(b) 63

(a) 53

47- اگر $z = 13 + 7i$ تو $|\bar{z}| =$

(d) $2i8$

(c) $8i2$

(b) 169

(a) $13 - 7i$

48- اگر $z = -\sqrt{3} - \sqrt{5}i$ تو $|z| =$

(d) $i\sqrt{8}$

(c) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

(b) $\sqrt{34}$

(a) 8

جہاں $x_2 + iy_2 \neq 0$ اور $n = \pm 1$ اور $n = \pm 2$ کے حقیقی اور

$$\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \right)^n$$

اور $(x + iy)^n$

1.5

خیالاتی جسے معلوم کرنا

$$(4 + 3i)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}} \quad -49$$

$$\frac{1}{(4 + 3i)^2} \quad (d) \quad \sqrt{(4)^2 + (3)^2} \quad (c) \quad (-4 - 3)^{-2} \quad (b) \quad (4 + 3i)^2 \quad (a)$$

50- اگر z ایک کمپلیکس عدد ہو تو $\text{Re}(z) = \underline{\hspace{2cm}}$

$$z \cdot \bar{z} \quad (d) \quad \frac{z + \bar{z}}{2} \quad (e) \quad \frac{z + \bar{z}}{2} \quad (b) \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (a)$$

51- اگر z ایک کمپلیکس عدد ہو تو $\text{Im}(z) = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\frac{z + \bar{z}}{2i} \quad (d) \quad \frac{z + \bar{z}}{2} \quad (c) \quad \frac{z - \bar{z}}{2} \quad (b) \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (a)$$

$$\left(\frac{5z - 3i}{3 - i} \right)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}} \quad -52$$

$$\left(\frac{3 + i}{5z - 3i} \right)^{-2} \quad (d) \quad \left(\frac{3 - i}{5z - 3i} \right)^{-2} \quad (c) \quad \left(\frac{5z - 3i}{3 - i} \right)^2 \quad (b) \quad \left(\frac{5z + 3i}{3 - i} \right)^{-2} \quad (a)$$

i -5	$-i$ -4	i -3	$\sqrt{-1}$ -2	کوئی نہیں -1
حقیقی عدد -10	1 -9	-4 -8	$x + yi$ -7	16 ویں صدی -6
5 -15	-9 -14	3 -13	4 -12	-7 -11
$-2 + 12i$ -20	$-5x - 5yi$ -19	$9 + 15i$ -18	0 -17	$x = 4, y = -4$ -16
جمع اور ضرب -25	i -24	17 -23	$8 - 5i$ -22	$2 + 2i$ -21
$-7 + 2i$ -29	$(1 + 0i)$ -28	$(0, 0i)$ -27	$z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ -26	
$(0, -7)$ -33	$(2, -7)$ -32	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ -31	1 -30	
حقیقی عدد -38	$-4 - 4i$ -37	$a - bi$ -36	$(8, 0)$ -35	جین آرگینڈ -34
$-3 + 7i$ -43	$9 - i$ -42	$z_1 + z_2$ -41	$11i$ -40	58 -39
8 -48	$\sqrt{2}i$ -47	73 -46	$ z ^2$ -45	$57i$ -44
$\left(\frac{3 - i}{5z - 3i} \right)^2$ -52	$\frac{z - \bar{z}}{2i}$ -51	$\frac{z + \bar{z}}{2}$ -50	$\frac{1}{(4 + 3i)^2}$ -49	

اضافی مختصر سوالات

مختصر سوالات کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے مختصر جوابی سوالات

کمپلیکس اعداد

1.1

مختصر جواب دیں۔

1- کمپلیکس عدد کی تعریف کریں:

جواب: ایک کمپلیکس عدد ایسا عدد ہے جسے $x + yi$ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ جس میں x اور y حقیقی اعداد ہوں اور i ایک خیالاتی اکائی ہو۔

2- مساوات $x^2 + 1 = 0$ کا کوئی بھی حقیقی حل کیوں نہیں ہے۔

جواب: $x^2 + 1 = 0$ کو حل کرنے سے ہمیں $x^2 = -1$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی حقیقی عدد کا مربع ایک مثبت عدد ہی ہوتا ہے اور کسی بھی حقیقی عدد کا مربع -1 نہیں ہو سکتا ہے۔

لہذا، مساوات $x^2 + 1 = 0$ کا کوئی بھی حقیقی حل نہیں ہے۔

3- خیالاتی اکائی i کی تعریف کریں۔

جواب: خیالاتی اکائی i کی تعریف یوں ہے کہ $i = \sqrt{-1}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

4- i^{27} کو مختصر کریں۔

حل: $i^{27} = i^{26} \times i = (i^2)^{13} \times i = (-1)^{13} \times i = -1 \times i = -i$

5- $(-i)^{17}$ کو مختصر کریں۔

حل: $(-i)^{17} = (-1 \times i)^{17} = (-1)^{17} (i)^{17} = -1 (i)^{16} \times i = -1 (i^2)^8 \times i = -1 (-1)^8 \times i = -1 (1) \times i = -i$

کمپلیکس عدد کی مستطیلی شکل

1.1.1

6- ایک خالص خیالاتی عدد کیا ہوتا ہے؟

جواب: ایک کمپلیکس عدد $z = x + yi$ کو خالص خیالاتی عدد اس وقت کہا جاتا ہے اگر اس کا حقیقی عدد صفر ہو یعنی $(x = 0)$ ۔

7- حقیقی کمپلیکس عدد کیا ہوتا ہے؟ جواب: ایک حقیقی کمپلیکس عدد اس وقت بنتا ہے جب اس کا خیالاتی حصہ صفر ہو یعنی $(y = 0)$

8- $z = 7 - 11i$ کے حقیقی حصہ اور خیالاتی حصہ کی شناخت کریں۔

جواب: حقیقی حصہ $7 \text{ Re}(z)$ ہے۔ خیالاتی حصہ $-11 \text{ Im}(z)$ ہے۔

کمپلیکس اعداد کی برابری

1.1.2

9- کس شرط کے تحت دو کمپلیکس عدد برابر ہوتے ہیں؟

جواب: دو کمپلیکس عدد صرف اور صرف اسی وقت برابر ہوتے ہیں اگر ان کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں ($x_1 = x_2$) اور خیالاتی حصے بھی آپس میں برابر ہوں ($y_1 = y_2$)۔

10- اگر $a + bi = 9 - 13i$ ہوں تو a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

حل: دیا گیا ہے کہ $a + bi = 9 - 13i$

دیے گئے دو کمپلیکس اعداد مساوی ہیں، اس لیے ان کے حقیقی اور خیالاتی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

خیالاتی حصوں کی برابری
حقیقی حصوں کی برابری

$$a = 9$$

$$b = -13$$

11- دیا گیا ہے کہ $(3x + 3) + (5 - y)i = 7 + 3i$ ہو تو x اور y کی قیمتیں معلوم کریں۔

حل: دیا گیا ہے کہ $(3x + 3) + (5 - y)i = 7 + 3i$

دیے گئے دو کمپلیکس اعداد مساوی ہیں، اس لیے ان کے حقیقی اور خیالات حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

$$3x + 3 = 7 \quad 5 - y = 3$$

$$3x = 7 - 3 \quad -y = 3 - 5$$

$$3x = 4 \quad -y = -2$$

$$x = \frac{4}{3} \quad y = 2$$

$$x = \frac{4}{3}, y = 2$$

پس

کمپلیکس اعداد پر الجبری قواعد

1.2

$$z_2 = 19 - 11i - 3 + 7i$$

$$z_2 = 19 - 3 - 11i + 7i$$

$$z_2 = 16 - 4i$$

$$z_2 = 16 - 4i$$

لہذا

$$17- (2 + \sqrt{3}i)(-7 + 2i) \text{ کو } a + bi \text{ کی شکل میں ظاہر کریں۔}$$

$$(2 + \sqrt{3}i)(-7 + 2i)$$

$$= 2(-7 + 2i) + \sqrt{3}i(-7 + 2i)$$

$$= -14 + 4i - 7\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}i^2$$

$$= -14 + (4 - 7\sqrt{3})i + 2\sqrt{3}(-1)$$

$$= -14 + (4 - 7\sqrt{3})i - 2\sqrt{3}$$

$$= (-14 - 2\sqrt{3}) + (4 - 7\sqrt{3})i$$

$$18- \text{ اگر } \frac{z}{3 - 5i} = 2 + i \text{ ہو تو کمپلیکس عدد } z \text{ معلوم کریں۔}$$

$$\frac{z}{3 - 5i} = 2 + i$$

$$z = (2 + i)(3 - 5i)$$

$$z = 2(3 - 5i) + i(3 - 5i)$$

$$z = 6 - 10i + 3i - 5i^2$$

$$z = 6 - 7i - 5(-1) = 6 + 5 - 7i$$

$$z = 11 - 7i$$

$$z = 11 - 7i \quad \text{لہذا}$$

$$12- \text{ اگر } z = 1 - 2yi \text{ ہو تو } -3z \text{ کی قیمت معلوم کریں۔}$$

$$z = 1 - 2yi$$

$$-3z = -3(1 - 2yi)$$

$$= -3 + 6yi$$

$$13- \text{ مختصر کریں } (17 - 7i) + (19 - 7i)$$

$$(17 - 7i) + (19 - 7i)$$

$$= 17 - 7i + 19 - 7i$$

$$= 17 + 19 - 7i - 7i$$

$$= 36 - 14i$$

$$14- \text{ مختصر کریں } (21 - 12i) - (-11 + 17i)$$

$$(21 - 12i) - (-11 + 17i)$$

$$= 21 - 12i + 11 - 17i$$

$$= 21 + 11 - 12i - 17i$$

$$= 32 - 29i$$

$$15- \text{ مختصر کریں } (5 - 3i)(4 + 7i)$$

$$(5 - 3i)(4 + 7i)$$

$$= 5(4 + 7i) - 3i(4 + 7i)$$

$$= 20 + 35i - 12i - 21i^2$$

$$= 20 + 23i - 21(-1)$$

$$= 20 + 23i + 21$$

$$= 41 + 23i$$

$$16- \text{ اگر } z_1 + z_2 = 19 - 11i \text{ اور } z_1 = 3 - 7i \text{ ہو تو } z_2 \text{ معلوم کریں۔}$$

$$\text{حل:}$$

$$z_1 + z_2 = 19 - 11i$$

$$z_2 = 19 - 11i - z_1$$

$$z_2 = 19 - 11i - (3 - 7i)$$

$$\therefore z_2 = 16 - 4i$$

19- $(7-3i) + (6+2i)$ کو مختصر کریں اور $a + bi$ کی شکل میں ظاہر کریں۔

$$(7-3i) + (6+2i)$$

$$= \frac{7-3i}{6+2i}$$

$$= \frac{7-3i}{6+2i} \times \frac{6-2i}{6-2i}$$

$$= \frac{7(6-2i) - 3i(6-2i)}{(6)^2 - (2i)^2}$$

$$= \frac{42 - 14i - 18i + 6i^2}{36 - (4(-1))}$$

$$= \frac{42 - 32i + 6(-1)}{36 - (-4)}$$

$$= \frac{36 - 4}{42 - 32i - 6}$$

$$= \frac{36 - 32i}{40} = \frac{36}{40} - \frac{32}{40}i$$

$$= \frac{9}{10} - \frac{4}{5}i$$

حل:

کمپلیکس اعداد کی خصوصیات

1.2.6

24- $z = 9 - 7i$ کا جمعی معکوس لکھیں۔

$$z = 9 - 7i$$

$$-z = -(9 - 7i)$$

$$-z = -9 + 7i$$

پس $9 - 7i$ کا جمعی معکوس $-9 + 7i$ ہے۔

25- $z = \sqrt{3} - 5i$ کا ضربی معکوس معلوم کریں۔

$$z = \sqrt{3} - 5i$$

$$z^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 5i}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 5i} \times \frac{\sqrt{3} + 5i}{\sqrt{3} + 5i}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 5i}{(\sqrt{3})^2 - (5i)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 5i}{3 - 25i^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 5i}{3 - (25 \times -1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 5i}{3 + 25} = \frac{\sqrt{3} + 5i}{28}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{28} + \frac{5}{28}i$$

20- کمپلیکس عدد کا جمعی ذاتی عنصر کیا ہوتا ہے؟

جواب: ایک کمپلیکس عدد کا جمعی ذاتی عنصر $0 = 0 + 0i$ ہے۔ جب

اسے کسی بھی کمپلیکس عدد z میں جمع کیا جاتا ہے تو حاصل جمع

وہی z ہی رہتا ہے۔

21- اگر $z_1 = 2 + 3i$ اور $z_2 = 4 + i$ ہو تو ظاہر کریں کہ یہ

کمپلیکس اعداد خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع رکھتے ہیں۔

$$z_1 = 2 + 3i, z_2 = 4 + i$$

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 + i)$$

$$= 2 + 4 + 3i + i = 6 + 4i$$

$$z_2 + z_1 = (4 + i) + (2 + 3i)$$

$$= 4 + 2 + i + 3i = 6 + 4i$$

چونکہ دونوں نتائج یکساں ہیں لہذا

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

22- کمپلیکس اعداد کے لیے ضرب کی خاصیت تلازم کیا ہے؟

جواب: کوئی سے بھی تین کمپلیکس اعداد z_1, z_2 اور z_3 کے لیے

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

23- کمپلیکس اعداد کے سیٹ میں ضربی ذاتی عنصر کی خاصیت

کیا ہے؟

جواب: کمپلیکس اعداد کے لیے ضربی ذاتی عنصر $1 = 1 + 0i$ ہے۔

26- اگر $z_1 = 2 + 5i$ اور $z_2 = 7 - 3i$ ہو تو ثابت کریں کہ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$z_1 = 2 + 5i, z_2 = 7 - 3i$

L.H.S

$z_1 + z_2 = (2 + 5i) + (7 - 3i)$

$= 2 + 5i + 7 - 3i$

$= 2 + 7 + 5i - 3i$

$= 9 + 2i$ (i)

R.H.S

$z_2 + z_1 = (7 - 3i) + (2 + 5i)$

$= 7 - 3i + 2 + 5i$

$= 7 + 2 - 3i + 5i$

$= 9 + 2i$ (ii)

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

کمپلیکس یا آرگینڈ مستوی

1.3

27- آرگینڈ مستوی کیا ہے؟

جواب: آرگینڈ مستوی ایک محدثاتی مستوی ہوتی ہے۔ افقی محور (x-محور) کمپلیکس عدد کے حقیقی حصے کو اور عمودی محور (y-محور) خیالاتی حصے کو ظاہر کرتا ہے۔

28- کمپلیکس عدد $7i$ کو ایک مترتب جوڑے میں ظاہر کریں۔

جواب: کیونکہ اس میں حقیقی حصہ موجود نہیں ہے۔ لہذا حقیقی حصے کی قیمت 0 ہے۔ اسی لیے مترتب جوڑا $(0, -7)$ ہے۔

29- مترتب جوڑے $(-7, -3)$ کو کمپلیکس عدد میں ظاہر کریں۔

حل: $(-7, -3)$ کو کمپلیکس عدد $-7 - 3i$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

کمپلیکس عدد کا کانجوگیٹ

1.3.1

30- کمپلیکس عدد کے کانجوگیٹ کی تعریف کریں۔

جواب: کمپلیکس عدد $x + yi$ کا کانجوگیٹ کمپلیکس عدد $x - yi$ ہوتا ہے۔

7 کے کمپلیکس عدد $7i$ کا کانجوگیٹ $-7i$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

31- کسی کمپلیکس عدد z کا کانجوگیٹ معلوم کرنے کا سادہ قانون کیا ہے؟

جواب: کسی کمپلیکس عدد z کا کانجوگیٹ معلوم کرنے کے لیے i کو $-i$ میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $3 - 5i$ کا کانجوگیٹ $3 + 5i$ ہے۔

32- $4 + 4i$ کا کانجوگیٹ کیا ہے؟

جواب: دیا گیا ہے $-4 - 4i = \overline{4 + 4i}$

پس، $4 + 4i$ کا کانجوگیٹ $-4 - 4i$ ہے۔

کمپلیکس کانجوگیٹ کی خصوصیات

1.3.3

33- اگر $z = 19 - 7i$ ہو تو ثابت کریں کہ $\overline{\overline{z}} = z$

حل:

$z = 19 - 7i$

$\overline{z} = 19 - 7i$

$\overline{\overline{z}} = 19 + 7i$

$\overline{\overline{\overline{z}}} = 19 + 7i$

$\overline{\overline{\overline{\overline{z}}}} = 19 - 7i = z$

$\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{z}}}}} = z$

پس ثابت ہوا کہ

34- اگر $z_1 = 4 + 3i$ اور $z_2 = -5 - 7i$ ہو تو ثابت کریں کہ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ حل:

$$z_1 = 4 + 3i, z_2 = -5 - 7i$$

$$\overline{z_1} = 4 - 3i, \overline{z_2} = -5 + 7i$$

L.H.S

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (4 + 3i) + (-5 - 7i) \\ &= 4 + 3i - 5 - 7i = -1 - 4i \end{aligned}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{-1 - 4i} = -1 + 4i$$

R.H.S

$$\begin{aligned} \overline{z_1} + \overline{z_2} &= (4 - 3i) + (-5 + 7i) \\ &= 4 - 3i - 5 + 7i = -1 + 4i \end{aligned}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \text{ پس ثابت ہوا کہ}$$

35- اگر $z_1 = 11 - 4i$ اور $z_2 = -5 + 4i$ ہو تو $\overline{z_1 z_2}$ معلوم کریں۔ حل:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (11 - 4i)(-5 + 4i) \\ &= 11(-5 + 4i) - 4i(-5 + 4i) \\ &= -55 + 44i + 20i - 16i^2 \\ &= -55 + 64i - 16 \times (-1) \\ &= -55 + 64i + 16 = -39 + 64i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{-39 + 64i} \\ &= -39 - 64i \end{aligned}$$

کمپلیکس عدد کے ماڈیولس کی خصوصیات

1.4.1

36- اگر $z = -3 + \sqrt{5}i$ ہو تو ثابت کریں کہ $|z| = |\overline{z}|$ حل:

$$z = -3 + \sqrt{5}i$$

$$\overline{z} = -3 - \sqrt{5}i$$

$$\begin{aligned} |z| &= |-3 + \sqrt{5}i| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{9 + 5} = \sqrt{14} \dots\dots(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overline{z}| &= |-3 - \sqrt{5}i| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{9 + 5} = \sqrt{14} \dots\dots(ii) \end{aligned}$$

$$|z| = |\overline{z}| \text{ پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ}$$