www.ilmkidunya.com

یونٹ 12

احتمال

حاصلاتِ تعلّم

اس یونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- مشترکہ واقعات کا احتمال معلوم کرتے ہوئے جہاں مناسب ہو وہاں سیمپل اسپیس خاکہ، امکانی خاکہ، شجری خاکہ اور وین اشکال استعمال کر سکیں۔
- باہمی متنافی واقعات (جیسے بائیں اور دائیں جانب سکہ اچھالنا، ڈائی پر طاق اور جفت اعداد، کوئی کھیل جیتنا یا ہارنا) پر مشتمل مسائل کو حل کرنے کے لیے احتمال کا قانون جمع لاگو کر سکیں۔
- آزاد اور منحصر واقعات (جیسے تجارت، سکہ اچھالنا، دو پتوں کا یکے بعد دیگرے مع واپسی اور بلا واپسی وغیرہ) پر مشتمل مسائل کو حل کرنے کے لیے احتمال کا قانون ضرب لاگو کر سکیں۔

12.1 احتمال (Probability)

احتمال ہمیں یہ سمجھنے میں مدد کرتا ہے کہ کسی چیز کے رونما ہونے کا کتنا امکان ہے۔ ہم اسے روز استعمال کرتے ہیں، بے شک یہ نہیں جانتے کہ ہم اس کا استعمال کر رہے ہیں، جیسے یہ اندازہ لگانا کہ آیا بارش ہوگی اور چھتری لے کر جانا چاہیے یا کھیل جیتنے کے بارے میں سوچنا۔ یہ ہمیں اس وقت اچھا اندازہ لگانے کا طریقہ فراہم کرتا ہے جب ہم یقین سے نہیں جانتے کہ کیا ہوگا۔ سادہ الفاظ میں، جب بھی ہم غیر یقینی صورتحال سے نمٹتے ہیں تو احتمال کار آمد ہوتا ہے۔

> **کیا آپ جانتے ہیں؟**
>
> شماریاتی تجربہ (Statistical Experiment) ایک قسم کا بلاترتیب تجربہ (Random Experiment) ہوتا ہے جہاں نتائج کو عددی طور پر ماپا جاتا ہے۔ اور شماریاتی طریقوں کے استعمال سے تجزیہ کیا جاتا ہے۔
>
> تمام شماریاتی تجربات بلاترتیب تجربات ہوتے ہیں، لیکن تمام بلاترتیب تجربات شماریاتی تجربات نہیں ہوتے۔

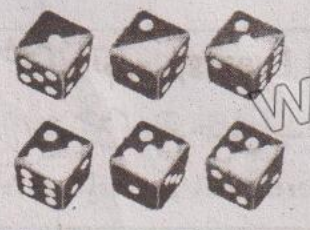
بلاترتیب تجربہ (Random Experiment)

بلاترتیب تجربہ وہ تجربہ ہے جس میں:

(i) تمام ممکنہ نتائج کا سیٹ معلوم ہوتا ہے۔ (ii) درست نتیجہ معلوم نہیں ہوتا۔

مثال کے طور پر سکہ اچھالنا یا ڈائس پھینکنا۔

نتائج اور سیمپل اسپیس (Outcomes and Sample Space)



ایک بلاترتیب تجربے کے ممکنہ نتیجے کو ماحصل (نتیجہ) کہتے ہیں۔

ایک بلاترتیب تجربے میں تمام ممکنہ نتائج کا مجموعہ سیمپل اسپیس کہلاتا ہے۔ اسے S سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور، جب ہم ڈائس پھینکتے ہیں تو ممکنہ نتائج 1, 2, 3, 4, 5, 6 ہوتے ہیں۔

لہٰذا سیمپل اسپیس $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہے۔

سیمپل اسپیس کا ہر رکن سیمپل پوائنٹ کہلاتا ہے۔

> **یاد رکھیے!**
> ایک تجربے کو ایک بار آزمانا آزمائش (Trial) کہلاتا ہے۔ جب ہم ایک سکہ تین بار اچھالتے ہیں تو سکے کا ہر بار اچھالنا ایک آزمائش ہے۔

واقعہ (Event)

ایک بلا ترتیب تجربے میں، ہر ممکنہ نتیجہ ایک واقعہ (Event) کہلاتا ہے۔ لہٰذا ہم واقعہ، سیمپل اسپیس کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر، جب ہم دو سکے اچھالتے ہیں تو دو ہیڈ حاصل کرنا ایک وقعہ ہے۔

واقعات	وضاحت	مثال
مساوی امکانی واقعات (Equally Likely Events)	دو یا دو سے زیادہ واقعات کو مساوی امکانی واقعات کہا جاتا ہے اگر ان میں سے ہر ایک کے رونما ہونے کا مساوی موقع ہو۔	جب ہم ایک ڈائس پھینکتے ہیں تو، اعداد 6,5,4,3,2,1 مساوی امکانی واقعات ہیں۔
یقینی واقعات (Certain Events)	ایک تجربہ میں، وہ واقعہ جو یقینی طور پر رونما ہوتا ہے اسے یقینی واقعہ کہا جاتا ہے۔	جب ہم ایک ڈائس پھینکتے ہیں تو 1 سے 6 کوئی بھی قدرتی عدد حاصل کرنے کا واقعہ ایک یقینی واقعہ ہے۔
ناممکن واقعات (Impossible Events)	ایک ناممکن واقعہ وہ واقعہ ہے جو کسی بھی دی ہوئی حالت میں رونما نہیں ہو سکتا۔	جب ہم دو سکے اچھالتے ہیں تو تین ہیڈز حاصل کرنے کا واقعہ ایک ناممکن واقعہ ہے۔
باہمی متنافی واقعات (Mutually Exclusive Events)	دو یا دو سے زیادہ واقعات کو باہمی متنافی واقعات کہا جاتا ہے اگر ان میں کوئی مشترکہ سیمپل پوائنٹس نہ ہوں، یعنی واقعات A اور B کو باہمی متنافی واقعات کہا جاتا ہے اگر $A \cap B = \phi$ ہو۔	جب ہم ایک ڈائس پھینکتے ہیں تو طاق اور جفت اعداد حاصل کرنے کے واقعات باہمی متنافی واقعات ہیں۔
جامع واقعات (Exhaustive Events)	واقعات کے اس مجموعہ کو جن کا یونین پورا سیمپل اسپیس ہو، جامع واقعات کہا جاتا ہے۔	جب ہم ایک سکہ دو بار اچھالتے ہیں تو دو ہیڈز، صرف ایک ہیڈ اور کوئی ہیڈ نہیں حاصل کرنے کے واقعات جامع واقعات ہیں۔
تکمیلی واقعات (Complementary Events)	کسی واقعہ A کا کمپلیمنٹ وہ واقعہ ہوتا ہے جو ان سیمپل پوائنٹس کے مجموعے کی نمائندگی کرتا ہو جو A میں شامل نہ ہوں۔ اسے A' یا A^C یا $\overline{A}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ واقعہ A اور اس کا کمپلیمنٹ A' باہمی متنافی اور جامع واقعات ہوتے ہیں۔	جب ہم ایک سکہ اچھالتے ہیں تو واقعہ ہیڈ اور واقعہ ٹیل تکمیلی واقعات ہیں۔

مشترکہ واقعات (Combined Events)

مشترکہ واقعہ، جسے مرکب واقعہ (Compound Event) بھی کہا جاتا ہے، ایک ایسا واقعہ ہے جو دو یا دو سے زیادہ سادہ واقعات پر مشتمل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ سادہ واقعہ وہ واقعہ ہے جس میں سیمپل اسپیس کا صرف ایک نقطہ شامل ہو۔ مثال کے طور پر ایک سکے کو دوبارہ اچھالنا اور کم از کم ایک

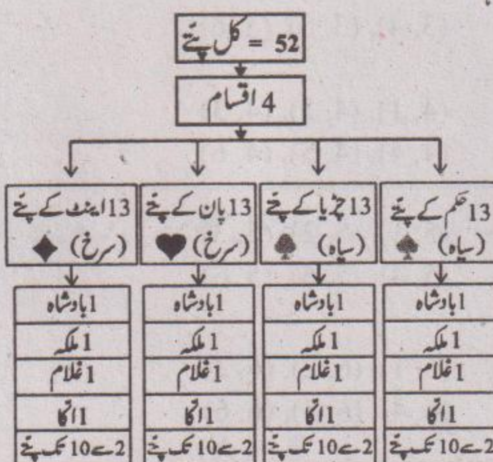
www.ilmkidunya.com

ہیڈ حاصل کرنا مشترکہ واقعہ ہے۔

مشترکہ واقعات کی اقسام (Types of Combined Events)

آزاد واقعات (Independent Events)

(a) دو یا دو سے زیادہ واقعات کو آزاد کہا جاتا ہے، اگر ایک کا نتیجہ دوسرے کے نتیجے پر اثر انداز نہ ہوتا ہو۔
مثال کے طور پر، ایک سکے کا متعدد بار اچھالنا، ہر بار کا اچھالنا دوسرے سے آزاد ہوتا ہے۔



(b) منحصر واقعات (Dependent Events)

دو یا دو سے زیادہ واقعات کو منحصر کہا جاتا ہے اگر ایک کا نتیجہ دوسرے کے نتیجے پر اثر انداز ہوتا ہو۔

مثال کے طور پر، واپس رکھے بغیر تاش کی گڈی سے پتے نکالنا، پہلے نکالے گئے پتے کا دوسرے نکالے گئے پتوں کے احتمال کو تبدیل کر دیتا ہے۔

(c) باہمی متنافی واقعات (Mutually Exclusive Events)

دو یا دو سے زیادہ واقعات کو باہمی متنافی واقعات کہا جاتا ہے اگر وہ ایک ہی وقت میں رونما نہ ہو سکیں۔ اگر ایک واقعہ رونما ہو سکتا ہے، تو دوسرا نہیں ہو سکتا۔ مثال کے طور پر، جب ہم ایک ڈائس پھینکتے ہیں تو ایک ہی وقت میں 3 اور 5 حاصل کرنا ناممکن ہے۔

(d) غیر باہمی متنافی واقعات (Non-Mutually Exclusive Events)

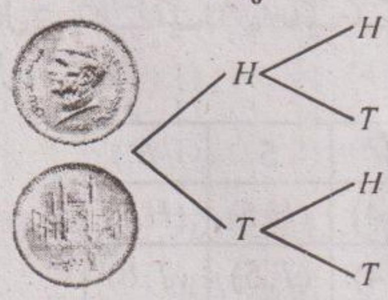
دو یا دو سے زیادہ واقعات کو غیر باہمی متنافی واقعات کہا جاتا ہے اگر وہ ایک ہی وقت میں رونما ہو سکیں۔ یہ واقعات اوور لیپ کر سکتے ہیں۔
مثال کے طور پر، تاش کے پتوں سے سرخ پتا یا بادشاہ نکالنا۔

شجری خاکہ (Tree Diagram)

شجری خاکہ ایک بصری ہے جو احتمال میں ایک یا ایک سے زیادہ واقعات کے تمام ممکنہ نتائج کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ شجری خاکہ کی ہر شاخ ایک ممکنہ نتیجے کا اظہار کرتی ہے۔

(i) جب ہم ڈائس پھینکتے ہیں تو شجری خاکہ (شکل 12.2) سے، سیمپل اسپیس کو یوں لکھا جا سکتا ہے:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$



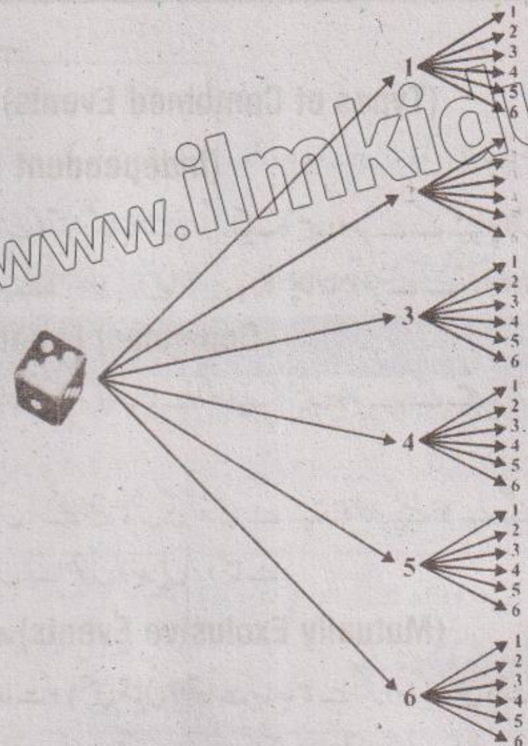
(ii) جبکہ ہم دو سکے اچھالتے ہیں تو شجری خاکہ (شکل 12.3 سے)، سیمپل اسپیس کو یوں لکھا جا سکتا ہے:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

مثال 1: شجری خاکہ استعمال کرتے ہوئے دو ڈائس کو پھینکنے کی سیمپل اسپیس معلوم کیجیے۔

حل: جب ہم دو ڈائس پھینکتے ہیں، چوں کہ ہر ڈائس کے اوپری رُخ پر 6,5,4,3,2,1 ہوتا ہے، تو شجری خاکہ اس طرح دکھائی دے گا۔ لہٰذا، سیمپل اسپیس کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

www.ilmkidunya.com



$S = \{$
(1, 1), (1, 2), (1, 3)
(1, 4), (1, 5), (1, 6)

(2, 1), (2, 2), (2, 3)
(2, 4), (2, 5), (2, 6)

(3, 1), (3, 2), (3, 3)
(3, 4), (3, 5), (3, 6)

(4, 1), (4, 2), (4, 3)
(4, 4), (4, 5), (4, 6)

(5, 1), (5, 2), (5, 3)
(5, 4), (5, 5), (5, 6)

(6, 1), (6, 2), (6, 3)
(6, 4), (6, 5), (6, 6) $\}$

www.ilmkidunya.com

سیمپل اسپیس خاکہ (Sample Space Diagram)

سیمپل اسپیس خاکہ ایک اظہار ہے جو کسی تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کو فہرست یا جدول کی شکل میں ظاہر کرتا ہے۔ جب ہم دو سکے اچھالتے ہیں تو سیمپل اسپیس کو یوں لکھا جاتا ہے: S = {HH, HT, TH, TT}

امکانی خاکہ (Possibility Diagram)

امکانی خاکہ گرڈ یا جدول میں ایک اظہار ہے جو دو واقعات کے تمام ممکنہ نتائج کو ظاہر کرتا ہے۔ جب ہم دو سکے اچھالتے ہیں، تو امکانی خاکہ یوں نظر آئے گا:

سکہ 1

سکہ 2	*H*	*T*
H	*HH*	*HT*
T	*TH*	*TT*

مثال 2: ہاشم نے ایک ڈائس اور ایک سکہ بیک وقت اچھالا۔ امکانی خاکہ بنائیے۔

حل:

ڈائس

سکہ	1	2	3	4	5	6
H	(*H*,1)	(*H*,2)	(*H*,3)	(*H*,4)	(*H*,5)	(*H*,6)
T	(*T*,1)	(*T*,2)	(*T*,3)	(*T*,4)	(*T*,5)	(*T*,6)

واقعہ کا احتمال (Probability of an Event)

ایک بے ترتیب تجربے میں، فرض کیجیے S سیمپل اسپیس اور $E \subseteq S$ ہے۔ پھر اگر E ایک واقعہ ہے، تو E کے وقوع پذیر ہونے کے احتمال کو یوں بیان کیا جاتا ہے:

$$P(E) = \frac{\text{E کے وقوع پذیر ہونے والے سازگار نتائج کی تعداد}}{\text{تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

احتمال کی تعریف کا یہ طریقہ صرف محدود سیمپل اسپیس پر لاگو ہوتا ہے۔ لہٰذا اس یونٹ میں ہم صرف محدود سیمپل اسپیس سے متعلق مسائل حل کریں گے۔

یاد رکھیے!

- $0 \leq P(E) \leq 1$ (احتمال کی قدر ہمیشہ 0 سے لے کر 1 تک ہوتی ہے)
- اگر $P(E) = 1$، ہو تو یہ واقعہ یقینی ہے۔
- اگر $P(E) = 0$، ہو تو یہ واقعہ ناممکن ہے۔
- E کا کمپلیمنٹ واقعہ $\overline{E}$ ہے۔ $P(E) + P(\overline{E}) = 1$

مثال 3: ایک بیگ میں 5 نیلی گیندیں اور 4 سبز گیندیں ہیں۔ ابوبکر تھیلے میں سے بلا ترتیب ایک گیند نکالتا ہے۔ احتمال معلوم کریں کہ نکالی گئی گیند (i) نیلی ہے (ii) نیلی نہیں ہے۔

حل: نتائج کی کل ممکنہ تعداد: $n(S) = 5 + 4 = 9$

(i) فرض کیجیے A نیلی گیند نکلنے کا واقعہ ہے۔ اس لیے $n(A) = 5$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{9}$$

(ii) فرض کیجیے $\overline{A}$ نیلی گیند نہ نکلنے کا واقعہ ہے۔

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

سرگرمی

- طلبہ کو گروہوں میں تقسیم کیجیے۔
- طلبہ سے کہیں کہ وہ ایک سکہ لیں، اسے 5 بار، 10 بار، 15 بار یا 20 بار اچھالیں اور اپنے مشاہدات کو ریکارڈ کریں۔
- ہیڈ اور ٹیل کے اچھالوں کا تناسب کیا ہے؟ ہیڈ کے نتیجہ کا احتمال کیا ہے؟

مثال 4: دو ڈائس پھینکے جاتے ہیں۔ احتمال معلوم کریں کہ نتائج کا مجموعہ ہے۔
(i) 4 کے برابر (ii) 10 سے زیادہ (iii) 13 سے کم۔

حل: جب ہم دو ڈائس پھینکتے ہیں تو سیمپل اسپیس یوں دی جاتی ہے:

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ &(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ &(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ &(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ &(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ &(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}; \; n(S) = 36 \end{aligned}$$

(i) فرض کیجیے A نتائج کے مجموعہ کا 4 کے برابر ہونے کا واقعہ ہے۔

$A = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}; \; n(A) = 3$

نتائج کے مجموعہ کا 4 کے برابر ہونے کا احتمال ہے:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(ii) فرض کیجیے B نتائج کے مجموعہ کا 10 سے زیادہ ہونے کا واقعہ ہے۔

$B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}; \; n(B) = 3$

نتائج کے مجموعہ کا 10 سے زیادہ ہونے کا احتمال ہے:

www.ilmkidunya.com

$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(iii) فرض کیجیے کہ C نتائج کے مجموعہ کا 13 سے کم ہونے کا واقعہ ہے۔

یہاں، تمام 36 نتائج کا مجموعہ 13 سے کم ہے لہٰذا $C = S$ ہے۔ اس لیے، $n(C) = n(S) = 36$

نتائج کے مجموعہ کا 13 سے کم ہونے کا احتمال: $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{36}{36} = 1$

چیلنج!

ایک ناممکن واقعہ کا کمپلیمنٹ واقعہ کیا ہے؟

حل: فرض کیا ناممکن واقعہ ہم جانتے ہیں کہ

$n(A) = 0, P(A) = 0$

$P(A) + P'(A) = 1$

$0 + P'(A) = 1$

$P'(A) = 1$

مثال 5: دو سکے ایک ساتھ اچھالے گئے۔ دونوں سکوں پر مختلف رُخ آنے کا احتمال کیا ہے؟

حل: جب دو سکے اچھالے جاتے ہیں تو سیمپل اسپیس یہ ہے:

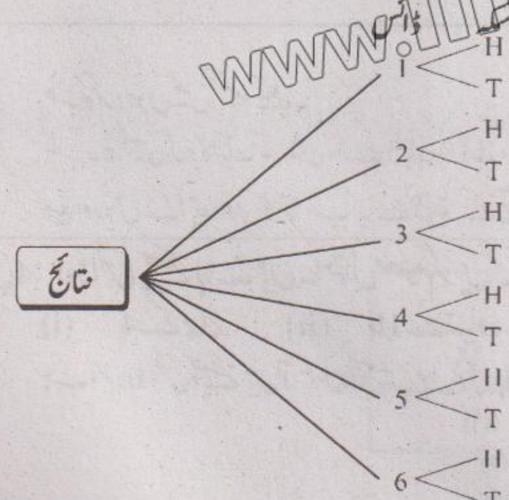
$S = \{HH, HT, TH, TT\}\ ;\ n(S) = 4$

فرض کیجیے A سکوں پر مختلف رُخ آنے کا واقعہ ہے۔

$A = \{HT, TH\} \quad n(A) = 2$

سکوں پر مختلف رُخ آنے کا احتمال: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

مثال 6: اگر ایک ساتھ ایک ڈائس اور ایک سکے کو پھینکا جائے تو احتمال معلوم کریں کہ ڈائس پر طاق عدد اور سکہ پر ہیڈ آئے۔



حل:

$S=\{(1,H),(1,T),(2,H),(2,T),(3,H),(3,T),(4,H), (4,T), (5,H), (5,T),(6,H), (6,T)\};\ n(S) = 12$

فرض کیجیے A طاق عدد اور ہیڈ آنے کا واقعہ ہے۔

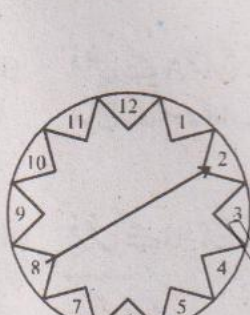
$A = \{(1, H), (3,H), (5,H);\ n(A) = 3$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

مثال 7: امکانیت کا ایک کھیل جو کہ تیر کو گھمانے پر مشتمل ہے۔ جو کہ 1,2,3,........,12 میں سے کسی ایک عدد پر رکنے کا یکساں امکان رکھتا ہے۔ احتمال کیا ہے کہ یہ تیر درج ذیل پر رُکے گا۔

(i) 7 (ii) ایک مفرد عدد (iii) ایک مرکب عدد

حل:



$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\};\ n(S) = 12$

(i) فرض کیجیے کہ A تیر کا 7 پر رکنے کا واقعہ ہے، $n(A) = 1$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{12}$

www.ilmkidunya.com

(ii) فرض کیجیے کہ B تیر کا ایک مفرد عدد پر رکنے کا واقعہ ہے۔

$$B = \{2,3,5,7,11\}\ ;\ n(B) = 5$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

(iii) فرض کیجیے کہ C تیر کا ایک مرکب عدد پر رکنے کا واقعہ ہے۔

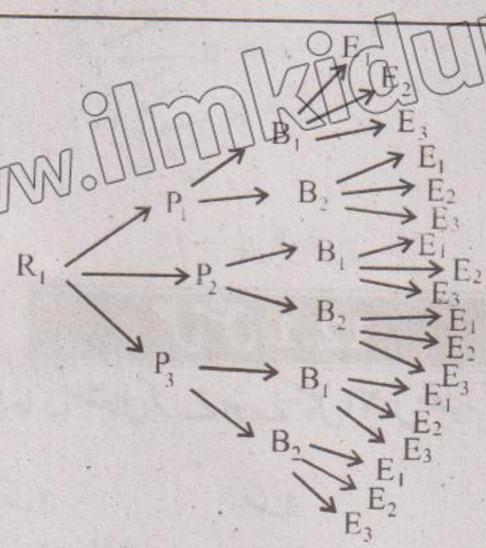
$$C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12\}\ ;\ n(C) = 6$$

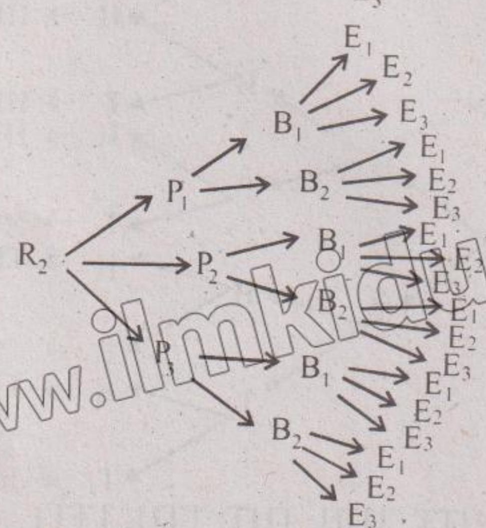
$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

سرگرمی

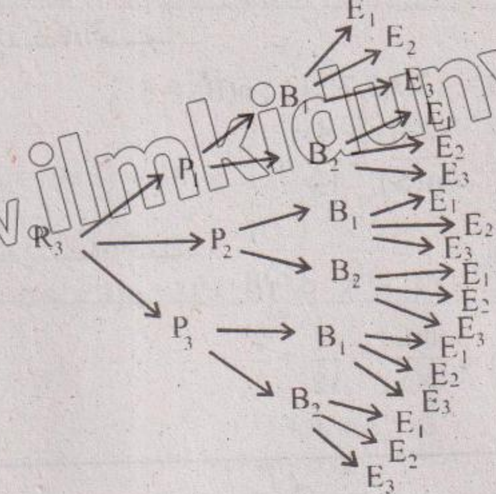
حوریہ کے گھر سے اس کے کام کی جگہ تک جانے کے چار راستے R_1, R_2, R_3 اور R_4 ہیں۔ بلڈنگ میں داخل ہونے کے لیے تین پارکنگ لاٹس P_1، P_2 اور P_3 اور دو داخلی راستے B_1, B_2 ہیں۔ بلڈنگ میں اس کے دفتر کی منزل تک تین لفٹیں E_1, E_2 اور E_3 ہیں۔ شجری خاکہ کا استعمال کرتے ہوئے وضاحت کریں کہ وہ کتنے طریقوں سے اپنے دفتر تک پہنچ سکتی ہے؟

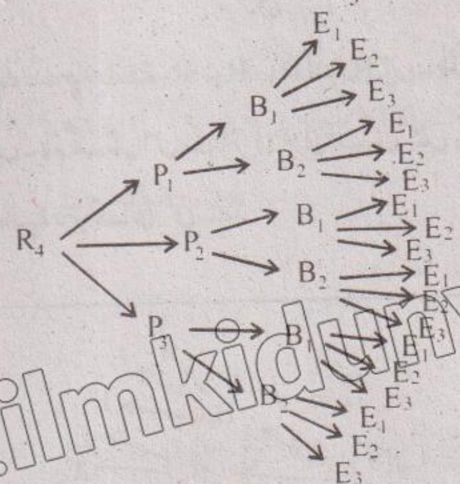
حل:





www.ilmkidunya.com



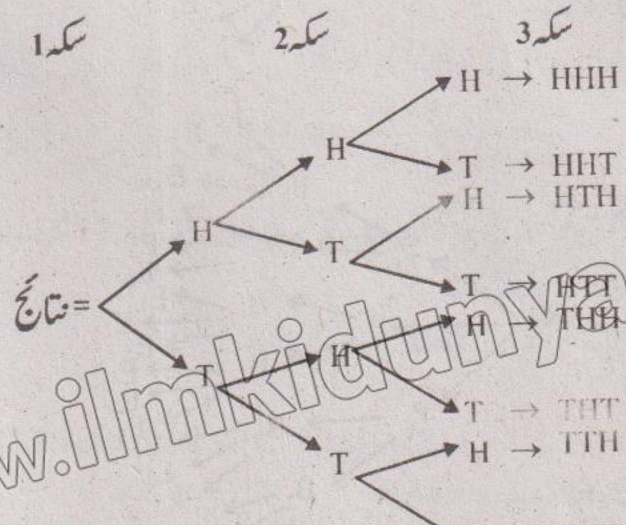


پس کل طریقہ = 72

حل مشق 12.1

-1 تین سکے اچھالنے کے لیے شجری خاکہ استعمال کرتے ہوئے سیمپل اسپیس معلوم کیجیے۔

حل:

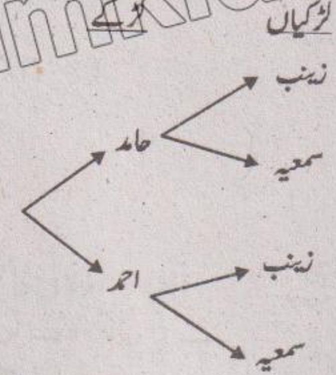


S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

www.ilmkidunya.com

2- ایک استاد بلاترتیب 2 لڑکوں (حامد، احمد) اور دو لڑکیوں (زینب، سمعیہ) کے ایک گروہ سے ایک لڑکا اور ایک لڑکی منتخب کرتا ہے۔ شجری خاکہ بنائیے اور تمام ممکنہ نتائج کے لیے سیمپل اسپیس کی فہرست بنائیے۔

حل:



سیمپل اسپیس = {(حامد، زینب)، (حامد، سمعیہ)، (احمد، زینب)، (احمد، سمعیہ)}

3- اگر ایک بلاترتیب تجربہ کا ایک واقعہ A ہے جب کہ $P(A) : P(\overline{A}) = 17 : 15$ اور $n(S) = 640$ ہے۔ تو معلوم کیجیے۔ (i) $P(\overline{A})$، (ii) $n(A)$

حل:

$P(A) : P(\overline{A}) = 17 : 15$ (معلوم)

فرض کیا $P(A) = 17x$ اور $P(\overline{A}) = 15x$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad \text{_____ (i)}$$

(i) میں قیمت درج کریں

$$17x + 15x = 1$$
$$32x = 1$$
$$x = \frac{1}{32} \quad \text{_____ (ii)}$$
$$P(\overline{A}) = 15 \times \frac{1}{32}$$
$$= \frac{15}{32}$$

(ii) دیا گیا

$\mathbf{n(S) = 640}$

$P(A) = 17x$

(ii) سے $x = \frac{1}{32}$ کی قیمت درج کریں۔

$$P(A) = 17 \times \frac{1}{32}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$
$$\frac{17}{32} = \frac{n(A)}{640}$$
$$n(A) = \frac{17}{32} \times 640 = 340$$

www.ilmkidunya.com

4- ایک سکے کو تین بار پھینکا گیا۔ لگاتار دو ٹیل آنے کا احتمال کیا ہے۔

حل:

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$n(S) = 8$

فرض کیا A سکوں پر لگاتار دو ٹیل آنے کا واقعہ ہے۔

$A = \{HTT, TTH, TTT\}$

$n(A) = 3$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

ایک سکے کو تین بار پھینکا جائے اس پر لگاتار دو ٹیل آنے کا احتمال $\frac{3}{8}$ ہے۔

5- ایک ڈائس اور ایک سکہ کو ایک ساتھ اچھالا گیا۔

(i) امکانی خاکہ بنا کر سیمپل اسپیس معلوم کیجیے۔ (ii) شجری خاکہ کے ذریعے سیمپل اسپیس معلوم کیجیے۔

(iii) ایک ٹیل اور ایک جفت عدد آنے کا احتمال کیا ہے؟

(i) امکانی خاکہ بنا کر سیمپل اسپیس

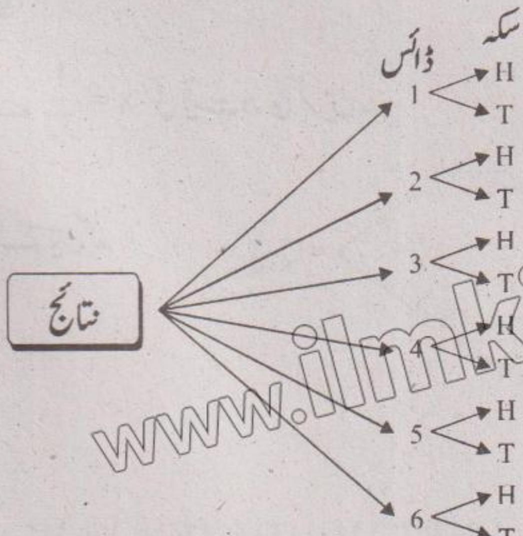
حل:

		سکہ	
		H	T
ڈائس	1	(1,H)	(1,T)
	2	(2,H)	(2,T)
	3	(3,H)	(3,T)
	4	(4,H)	(4,T)
	5	(5,H)	(5,T)
	6	(6,H)	(6,T)

S = {(1, H),(1,T), (2,H), (2, T)
(3,H), (3,T), (4,H), (4,T)
(5,H), (5,T), (6,H), (6,T)}

(ii) شجری خاکہ کے ذریعے سیمپل اسپیس معلوم کیجیے۔

حل:



S = {(1, H), (1,T), (2, H), (2, T)
(3, H), (3,T), (4, H), (4, T)
(15, H), (5,T),(6, H), (6, T)}

www.ilmkidunya.com

(iii) ایک ٹیل اور ایک جفت عدد آنے کا احتمال کیا ہے؟

حل:

$n(S) = 12$

$S = \{(1, H), (1, T), (2, H), (2, T), (3, H), (3, T), (4, H) (4, T), (5, H) (5, T), (6, H), (6, T)\}$

فرض کیا B ایک ٹیل اور ایک حقیقت آنے کا واقعہ ہے۔

$B = \{(T,2), (T,4), (T, 6)\}, n(B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

-6 دو غیر جانبدار ڈائس کو ایک بار اچھالا گیا۔

(i) شجری خاکہ کے ذریعے سیمپل اسپیس معلوم کیجیے۔ (ii) امکانی خاکہ کے ذریعے سیمپل اسپیس معلوم کیجیے۔

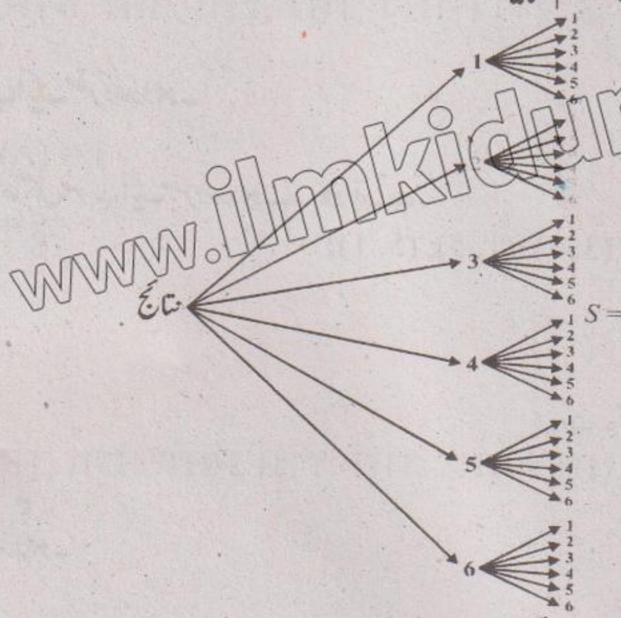
(iii) درج ذیل حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

(a) دونوں ڈائس پر ایک ہی عدد ہو (b) ان کا حاصل ضرب ایک مفرد عدد ہو۔

(c) مجموعہ ایک جفت عدد ہو۔ (d) مجموعہ 13 ہو۔

(i) شجری خاکہ کے ذریعے سیمپل اسپیس معلوم کیجیے۔

حل:



S =
(1, 1), (1, 2), (1, 3)
(1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3)
(2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3)
(3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3)
(4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3)
(5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3)
(6, 4), (6, 5), (6, 6)

(ii) امکانی خاکہ کے ذریعے سیمپل اسپیس معلوم کیجیے۔

حل:

ڈائس 1 \ ڈائس 2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

www.ilmkidunya.com

(iii) درج ذیل حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

(a) دونوں ڈائس پر ایک ہی عدد ہو

حل:

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$$
$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$$
$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$$
$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)$$
$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)$$
$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

فرض کیا A نتائج دونوں ڈائس پر ایک ہی عدد آنے والا واقعہ ہے۔

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$
$$n(A) = 6$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$
$$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) ان کا حاصل ضرب ایک مفرد عدد ہو۔

حل:

$$n(S) = 36$$

فرض کیا B نتائج کا حاصل ضرب ایک مفرد عدد ہونے کا واقعہ ہے۔

$$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1)\}$$
$$n(B) = 6$$
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$
$$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(c) مجموعہ ایک جفت عدد ہو۔

حل:

$$n(S) = 36$$

فرض کیا C نتائج کا مجموعہ ایک جفت عدد ہونے کا واقعہ ہے

$$C = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6)$$
$$= (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6)$$
$$= (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$
$$n(C) = 18$$
$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$$
$$= \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

www.ilmkidunya.com

(d) مجموعہ 13 ہو۔

حل: فرض کیا D نتائج کا مجموعہ 13 ہونے کا واقعہ ہے زیادہ سے زیادہ مجموعہ 12 = 6 + 6 ہے۔

لہٰذا مجموعہ 13 ناممکن ہے۔

$n(D) = 0$

$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)}$

$= \frac{0}{36} = 0$

-7 تین غیر جانبدار سکوں کو ایک ساتھ اچھالا گیا۔ درج ذیل حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے:

(i) تمام ٹیل (ii) کم از کم ایک ہیڈ (iii) زیادہ سے زیادہ دو ٹیل (iv) دو ہیڈز

(v) زیادہ سے زیادہ دو ہیڈز (vi) کوئی ہیڈ نہیں

(i) تمام ٹیل

حل: {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

$n(s) = 8$

فرض کیا A تمام ٹیل آنے کا واقعہ ہے۔

$A = \{TTT\}, n(A) = 1$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}$

(ii) کم از کم ایک ہیڈ

حل:

$n(S) = 8$

فرض کیا B کم از کم ایک ہیڈ آنے کا واقعہ ہے۔

B = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, THT, TTH}, n(B) = 7

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}$

(iii) زیادہ سے زیادہ دو ٹیل

حل:

$n(S) = 8$

فرض کیا زیادہ سے زیادہ دو ٹیل آنے کا واقعہ ہے۔

C = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH} n(c) = 7

$P(c) \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{7}{8}$

(iv) دو ہیڈز

حل: فرض کریں

E = [HHT, HTH, THH}, n(E) = 3

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

www.ilmkidunya.com

(v) زیادہ سے زیادہ دو ہیڈز

حل:

$n(S) = 8$

فرض کیا E دو ہیڈز آنے کا واقعہ ہے

$D = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$n(D) = 7$

$$p(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

(vi) کوئی ہیڈ نہیں

حل:

$n(S) = 8$

فرض کیا F کوئی ہیڈ نہیں آنے کا واقعہ ہے۔

$F = \{TTT\}, n(F) = 1$

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

-8 ایک تھیلے میں 4 سرخ گیندیں، 5 سفید گیندیں، 6 سبز گیندیں اور 3 سیاہ گیندیں ہیں۔ علی تھیلے میں سے بلا ترتیب ایک گیند نکالتا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ نکالی گئی گیند:

(i) سفید ہو۔ (ii) سرخ ہو۔ (iii) سفید نہ ہو۔ (iv) سیاہ نہ ہو

حل:

گیندوں کی کل تعداد $= 4+5+6+3 = 18$

$n(S) = 18$

(i) سفید ہو۔

حل: فرض کیا W سفید گیند ہونے کا واقعہ ہے۔

$n(W) = 5$

$$p(W) = \frac{n(W)}{n(S)} = \frac{5}{18}$$

(ii) سرخ ہو۔

حل: فرض کیا B سرخ گیند ہونے کا واقعہ ہے۔

$n(B) = 4$, $n(S) = 18$ (گیندوں کی کل تعداد)

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

(iii) سفید نہ ہو۔

حل:

$n(S) = 18$ (گیندوں کی کل تعداد)

فرض کیا W سفید گیند ہونے کا واقعہ ہے۔

$n(W) = 5$

$$P(W) = \frac{n(W)}{n(S)} = \frac{5}{18}$$

فرض کیا $\overline{W}$ سفید گیند نہ ہونے کا واقعہ ہے۔

$$P(\overline{W}) = 1 - P(W)$$

$$= 1 - \frac{5}{18}$$

$$= \frac{18-5}{18} = \frac{13}{18}$$

(iv) سیاہ نہ ہو۔

حل:

$n(S) = 18$ (گیندوں کی کل تعداد)

فرض کیا C سیاہ گیند ہونے کا واقعہ ہے۔

$$n(C) = 3$$

$$P(C) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

فرض کیا $\overline{C}$ سیاہ گیند نہ ہونے کا واقعہ ہے۔

$$P(\overline{C}) + P(C) = 1$$

$$P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

9- ایک عدد کو 1 سے لے کر 15 تک کے مکمل اعداد کے سیٹ سے ایک عدد بلا ترتیب منتخب کیا گیا۔ احتمال معلوم کیجیے کہ منتخب عدد ہو۔

(i) طاق عدد (ii) 3 کا جزو ضربی (iii) 2 کا مربع (iv) مفرد عدد (v) 20

حل:

$S = \{1,2,3,4,...., 15\}$

$n(S) = 15$

(i) طاق عدد

حل:

$n(S) = 15$

فرض کیا A تمام طاق عدد ہونے کا واقعہ ہے۔

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, $n(A) = 8$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{15}$$

(ii) 3 کا جزو ضربی

حل:

$n(S) = 15$

فرض کیا B کا جزو ضربی ہونے کا واقعہ ہے۔

$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $n(B) = 5$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(iii) 2 کا مربع

حل:

$n(S) = 15$

www.ilmkidunya.com

فرض کیا C 20 کا مربع ہونے کا واقعہ ہے۔

$C = \{4\}, n(C) = 1$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{15}$$

(iv) مفرد عدد

حل:

$n(S) = 15$

فرض کیا D مفرد عدد ہونے کا واقعہ ہے۔

$D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}, n(D) = 6$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

(v) 20

حل:

$n(S) = 15$

فرض کیا N 20 ہونے کا واقعہ ہے۔
چونکہ 20 سے لے کر 15 کے سیٹ میں موجود نہیں

$N = \{\ \}, n(N) = 0$

$$P(N) = \frac{n(N)}{n(S)} = \frac{0}{15} = 0$$

-10 اگر ایک واقعہ A کا احتمال $\frac{7}{10}$ ہو تو واقعہ "A نہیں" کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل:

$P(A) = \frac{7}{10}$ (معلوم)

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$= 1 - \frac{7}{10}$

$= \frac{10-7}{10} = \frac{3}{10}$

-11 ایک ڈائس کو دوبارہ پھینکا گیا۔ ہر بار پھینکنے پر 4 سے بڑا عدد حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ n, $n(S) = 6$

ایک ہی ڈائس پر 4 سے بڑا عدد حاصل ہونے کا واقعہ

P (پہلی باری > 4) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

P(دوسری باری > 4) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

P(دونوں باریوں میں > 4) $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

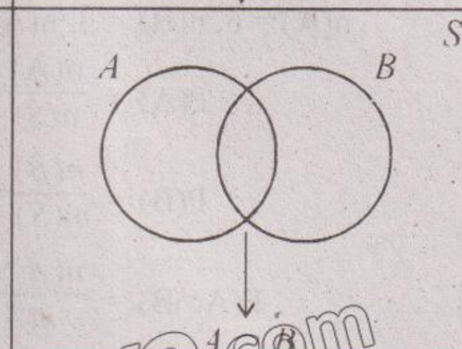
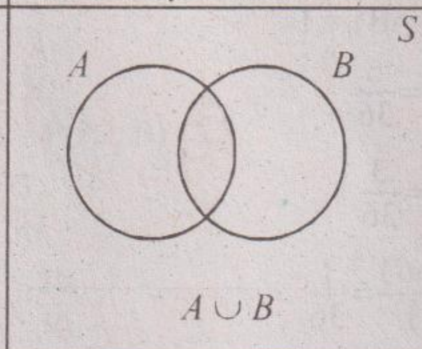
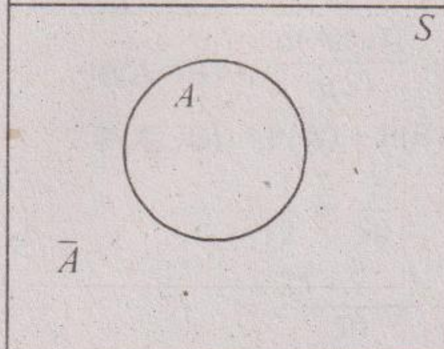
12.2 احتمال کا قانون جمع (Addition Law of Probability)

(i) اگر A اور B کوئی غیر باہمی متنافی واقعات ہوں تو (ii) اگر A اور B کوئی دو باہمی متنافی واقعات ہوں تو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad\qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

وین شکل (Venn Diagram)

ایک بلاترتیب تجربے میں، فرض کریں S سیمپل اسپیس ہے اور فرض کریں $A \subseteq S$ اور $B \subseteq S$ وہ واقعات ہیں جو S میں ہیں، ہم کہتے ہیں کہ

(i) $(A \cap B)$ ایک ایسا واقعہ ہے جو صرف اس وقت وقوع پذیر ہوتا ہے جب A اور B دونوں وقوع پذیر ہوں۔	(ii) $(A \cup B)$ ایک ایسا واقعہ ہے جو صرف اس وقت وقوع پذیر ہوتا ہے جب A یا B وقوع پذیر ہوں۔	(iii) $\overline{A}$ ایک ایسا واقعہ ہے جو صرف اس وقت وقوع پذیر ہوتا ہے جب A وقوع پذیر نہ ہو۔
		

مثال 8: اگر $P(A) = 0.37$, $P(B) = 0.42$, $P(A \cap B) = 0.09$ ہو تو $P(A \cup B)$ معلوم کیجیے۔

حل:

$P(A) = 0.37,\ P(B) = 0.42,\ P(A \cap B) = 0.09$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = 0.37 + 0.42 - 0.09 = 0.7$

> چیلنج!
>
> **$P(A \cap B)$ and $P(A \cup B)$ کا مجموعہ کیا ہے؟**
>
> حل:
>
> $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
>
> دونوں اطراف $P(A \cap B)$ کا جمع کریں۔
>
> $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)$
>
> $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

مثال 9: پھولوں کی ایک ٹوکری میں 50 پیلے، 70 سرخ اور 80 سفید پھول ہیں۔ ان میں سے ایک پھول بلاترتیب منتخب کیا جاتا ہے۔ پیلے یا سرخ پھول کے منتخب ہونے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: پھولوں کی تعداد، $n(S) = 50 + 70 + 80 = 200$

پیلے پھولوں کی تعداد $n(Y) = 50$

$$\therefore P(Y) = \frac{n(Y)}{n(S)} = \frac{50}{200}$$

سرخ پھولوں کی تعداد $n(R) = 70$

$$\therefore P(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{70}{200}$$

Y اور R باہمی متنافی واقعات ہیں لہٰذا، پیلے یا سرخ پھول کو منتخب کرنے کا احتمال ہے:

$$P(Y \cup R) = P(Y) + P(R)$$

$$\therefore P(Y \cup R) = \frac{50}{200} + \frac{70}{200} = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$$

مثال 10: دو ڈائس ایک ساتھ پھینکے گئے۔ دونوں ڈائس پر ایک جیسے ہی اعداد ہوں یا اعداد کا مجموعہ 10 حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں S سیمپل اسپیس ہے، تو $n(S) = 36$

فرض کیجیے A دونوں ڈائس پر ایک جیسے ہی اعداد حاصل کرنے کا واقعہ ہے اور B اعداد کا مجموعہ 10 حاصل کرنے کا واقعہ ہے۔

تو

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$$

$$\therefore A \cap B = \{(5, 5)\}$$

$$n(A) = 6,\ n(B) = 3,\ n(A \cap B) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

$\therefore$ P(دونوں ڈائس پر ایک جیسے ہی اعداد یا اعداد کا مجموعہ ہو) $= P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

لہٰذا، مطلوبہ احتمال $\frac{2}{9}$ ہے۔

حل مشق 12.2

1- اگر A اور B دو ایسے واقعات ہوں کہ $P(A) = \frac{1}{4}$، $P(B) = \frac{1}{2}$ اور $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$، ہوں تو $P(A \cup B)$ معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے

$$P(A) = \frac{1}{4},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

$P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2 + 4 - 1}{8} = \frac{5}{8}$$

2- ایک اپارٹمنٹ میں گھر کے دروازوں کے نمبر 1 سے 50 تک ہیں۔ ان میں سے ایک گھر کا دروازہ نمبر جفت عدد یا مکمل مربع ہونے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل:

$$S = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, 50\},\ n(S) = 50$$

www.ilmkidunya.com

فرض کیا A جفت عدد آنے کا اور B مکمل مربع آنے کا واقعہ ہے۔

$$A = \{2, 4, 6, ..., 50\}, n(A) = 25$$

$$B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}, n(B) = 7$$

$$A \cap B = \{4, 16, 36\}, n(A \cap B) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{50}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{3}{50}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{7}{50} - \frac{3}{50}$$

$$= \frac{25 + 7 - 3}{50} = \frac{29}{50}$$

-3 ایک ٹیم کے کسی میچ کو جیتنے کا احتمال $\frac{3}{10}$ ہے اور کسی میچ کو ہارنے کا احتمال $\frac{2}{10}$ ہے۔ اس بات کا کیا احتمال ہے کہ:

(i) ٹیم ایک خاص میچ جیت جائے یا ہار جائے۔ (ii) ٹیم نہ ہی کوئی میچ جیتے نہ ہارے۔

حل: فرض کیا W جیتنے کا اور L ہارنے کا واقعہ ہے۔

$P(W) = \frac{3}{10}, P(L) = \frac{2}{10}$ دیا گیا ہے

(i) ٹیم ایک خاص میچ جیت جائے یا ہار جائے۔

جیت اور ہار ایک باہمی متناہی واقعات ہیں۔

$$P(W \cup L) = P(W) + P(L)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

(ii) ٹیم نہ ہی کوئی میچ جیتے نہ ہارے۔

نہ ہی کوئی جیتے یا ہارے $= P(\overline{W \cup L})$

$$P(\overline{W \cup L}) = 1 - P(W \cup L)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

-4 دو ڈائس کے ایک ہی بار پھینکنے پر، مجموعہ 7 یا 11 حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: کل نتائج $n(S) = 6 \times 6 = 36$

فرض کیا A اعداد کا مجموعہ 7 آنے کا واقعہ ہے اور B اعداد کا مجموعہ 11 آنے کا واقعہ ہے۔

$A = \{(1,6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6,1)\}, n(A) = 6$
$B = \{(5, 6), (6, 5)\}, n(B) = 2$
$A \cap B = \phi$

لہٰذا A اور B باہمی متناہی واقعات ہیں۔

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$
$$= \frac{3+1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

-5 دو ڈائس کے ایک بار پھینکنے پر مجموعہ 5 یا 7 حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: کل نتائج $n(S) = 6 \times 6 = 36$

فرض کیا A، 5 کا مجموعہ آنے کا واقعہ ہے اور B، 7 کا مجموعہ آنے کا واقعہ ہے۔

$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}, n(A) = 4$
$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}, n(B) = 6$
$A \cap B = \phi$

لہٰذا A اور B باہمی متناہی واقعات ہیں۔

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{6}$$
$$= \frac{2+3}{18} = \frac{5}{18}$$

-6 52 تاش کی گڈی کے پتوں سے بلا ترتیب ایک پتا نکالا گیا۔ نکالے گئے پتے کا احتمال معلوم کیجیے کہ وہ:

(i) ایک بادشاہ یا ایک غلام ہو۔ (ii) نہ بادشاہ اور نہ ہی غلام ہو۔

(i) ایک بادشاہ یا ایک غلام ہو۔

حل: کل پتے $= 52, n(s) = 52$
بادشاہ کے نمبر $= 4$، غلام کے نمبر $= 4$

فرض کیا A بادشاہ نکلنے کا واقعہ ہے اور B غلام نکلنے کا واقعہ ہے۔

$n(A) = 4, n(B) = 4$

www.ilmkidunya.com

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

(ii) نہ بادشاہ اور نہ ہی غلام ہو۔

حل:

$(P(\overline{A \cup B})$ =نہ بادشاہ نہ ہی غلام ہو

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{2}{13} = \frac{13-2}{13} = \frac{11}{13}$$

-7 ایک ڈائس کو دو بار پھینکا گیا۔ کیا احتمال ہے کہ دو میں سے کم از کم ایک بار پھینکنے پر عدد 3 آئے؟

حل:

کل نتیجہ $n(S) = 6 \times 6 = 36$

فرض کیا C کم از کم ایک بار پھینکنے پر عدد 3 آنے کا واقعہ ہے۔

$C = \{(3, 1), (3,2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (1, 3), (2, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$

$n(C) = 11$

$$p(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{11}{36}$$

-8 ایک تھیلے میں 1 سے لے کر 15 تک اعداد لکھے ہوئے 15 کارڈ ہیں۔ ایک کارڈ بلا ترتیب نکالا گیا، احتمال معلوم کیجیے کہ اس پر 5 کے جز و ضربی یا 7 کے جز و ضربی والا عدد لکھا ہو۔

حل:

$S = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 15\}, n(S) = 15$

فرض کیا A 5 کے جز و ضربی اٹھانے کے پتے کا واقعہ ہے اور B 1 کا جز و ضروبی کے پتے اٹھانے کا واقعہ ہے۔

$A = \{5, 10, 15\}, n(A) = 3$

$B = \{7, 14\}, n(B) = 2$

$A \cap B = \phi$

پس A اور B باہمی متناہی واقعات ہیں۔

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{15}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}$$

$$= \frac{3+2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

9- دو غیر جانبدار سکے اچھالے گئے۔ کم از کم ایک ہیڈ یا دو ہیڈ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہے؟

حل: $S = \{HH, HT, TH, TT\}, n(S) = 4$

فرض کیا A کم از کم ایک ہیڈ آنے کا واقعہ ہے اور B کم از کم دو بار ہیڈ آنے کا واقعہ ہے۔

$$A = \{HH, HT, TH\}, n(A) = 3$$
$$B = \{HH\}, n(B) = 1$$
$$A \cap B = \{HH\}, n(A \cap B) = 1$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$
$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3+1-1}{4} = \frac{3}{4}$$

10- ایک مصروف چوراہے پر 50% گاڑیاں دائیں مڑتی ہیں۔ 30% بائیں مڑتی ہیں اور 20% سیدھی چلی جاتی ہیں۔ بلا ترتیب منتخب کی گئی گاڑی کے بائیں یا دائیں مڑنے کا احتمال کیا ہے؟

حل: فرض کیا R دائیں طرف جانے کا واقعہ ہے۔ L بائیں طرف جانے کا اور T سیدھا جانے کا واقعہ ہے۔

$$P(R) = 50\% = \frac{50}{100} = 0.50$$
$$P(L) = 30\% = \frac{30}{100} = 0.30$$
$$P(T) = 20\% = \frac{20}{100} = 0.20$$

پس دائیں اور بائیں باہمی متناہی واقعات ہیں۔

$$P(R \cup L) = P(R) + P(L)$$
$$= 0.50 + 0.30 = 0.80$$

11- دو غیر جانبدار سکے اچھالے گئے۔ دو ہیڈ یا دو ٹیل حاصل کرنے کا کیا احتمال کیا ہے؟

حل: $S = \{HH, HT, TH, TT\}, n(S) = 4$

پس واقعات باہمی اور متنافی ہیں۔

فرض کیا A دو بار ہیڈ آنے کا واقعہ اور B دو بار ٹیل آنے کا واقعہ ہے۔

$A = \{HH\}, n(A) = 1$

$B = \{TT\}, n(B) = 1$

$A \cap B = \phi$

پس واقعات باہمی اور متنافی ہیں۔

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

-12 اگر A اور B ایک بلاترتیب تجربے کے دو باہمی متنافی واقعات ہوں اور $P(\text{نہیں } A) = 0.45$ اور $P(A \cup B) = 0.65$ ہو تو P(B) معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا

$$P(\text{نہیں } A) = 0.45,$$

$$P(A) = 1 - P(\text{نہیں } A)$$

$$= 1 - 0.45 = 0.55$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$0.65 = 0.55 + P(B)$$

$$P(B) = 0.65 - 0.55$$

$$P(B) = 0.10$$

-13 اگر $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ ہو تو $P(A \cap B)$ معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا

$$P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{2}{5}, P(A \cup B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{10+6-5}{15}$$

$$= \frac{11}{15}$$

www.ilmkidunya.com

14- A اور B دو ایسے واقعات ہیں کہ $P(A) = 0.42$، $P(B) = 0.48$ اور $P(A \cap B) = 0.16$ تو معلوم کیجیے:

(i) $P(\overline{A})$ (ii) $P(\overline{B})$ (iii) $P(A \cup B)$

حل: دیا گیا ہے $P(A) = 0.42,\ P(B) = 0.48,\ P(A \cap B) = 0.16$

(i) $P(\overline{A})$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.42 = 0.58$$

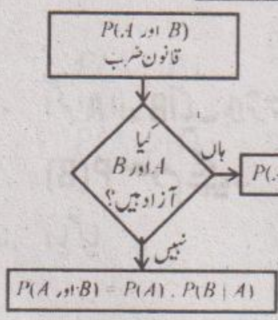
(ii) $P(\overline{B})$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.48 = 0.52$$

(iii) $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.42 + 0.48 - 0.16 = 0.74$$

12.3 احتمال کا قانون ضرب (Multiplication Law of Probability)



(i) اگر A اور B دو آزاد واقعات ہوں تو

$$P(A \text{ اور } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

(ii) مشروط احتمال

اگر A اور B منحصر واقعات ہوں تو $P(A \text{ اور } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$

جہاں $P(B|A)$ واقعہ B کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال کو ظاہر کرتا ہے جب کہ یہ فرض کیا جاتا ہے کہ واقعہ A پہلے ہی وقوع پذیر ہو چکا ہے (اسے B جب A دیا گیا ہو پڑھا جاتا ہے)۔

مثال 11: ایک تھیلے میں 4 سرخ اور 3 سبز گیندیں ہیں۔ کیے بعد دیگرے ایک کر کے دو گیندیں نکالی جاتی ہیں (پہلی گیند واپس رکھنے کے بعد دوسری نکالی جاتی ہے)۔ احتمال معلوم کیجیے کہ پہلی گیند سرخ ہو اور دوسری گیند بھی سرخ ہو۔

حل: فرض کریں A واقعہ ہے کہ پہلی گیند سرخ ہو اور B واقع ہے کہ دوسری گیند بھی سرخ ہو۔

تب $P(A) = \frac{4}{7}$ اور $P(B) = \frac{4}{7}$ (چونکہ گیند واپس رکھ دی گئی ہے اس لیے سیمپل اسپیس متاثر نہیں ہوتی)

$$P(A \text{ اور } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$$

مثال 12: ایک تھیلے میں 3 سفید اور 2 سیاہ گولیاں ہیں۔ واپس رکھے بغیر یکے بعد دیگرے دو گولیاں نکالی جاتی ہیں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ پہلی گولی سفید ہو اور دوسری گولی بھی سفید ہو۔

حل: فرض کریں A واقعہ ہے کہ پہلی گولی سفید ہو اور B واقعہ ہے کہ دوسری گولی بھی سفید ہو۔

گولیوں کی کل تعداد $= 3 + 2 = 5$

تب $P(A) = \frac{3}{5}$ اور $P(B|A) = \frac{2}{4}$ (چونکہ گولیاں واپس نہیں رکھی گئیں، اس لیے سیمپل اسپیس متاثر ہوتی ہے)

$$P(A \text{ اور } B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

www.ilmkidunya.com

مثال 13: ماجد 52 تاش کے پتوں سے مسلسل (بغیر واپسی کے) دو پتے نکالتا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ پہلا پتا بادشاہ ہو اور دوسرا پتا ملکہ ہو۔

حل: فرض کریں A واقعہ ہے کہ نکالا گیا پتا بادشاہ ہو اور B واقعہ ہے کہ نکالا گیا پتا ملکہ ہو۔ ہمیں یاد رکھنا چاہیے کہ واقعہ B کے احتمال کے لیے سیمپل اسپیس کا خیال رکھنا ہوگا۔ کیونکہ واقع A پہلے ہی وقوع پذیر ہو چکا ہے۔

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13};\ P(B|A) = \frac{4}{51}$$

$$P(A \text{ اور } B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$= \frac{1}{13} \times \frac{4}{51} = \frac{4}{663}$$

حل مشق 12.3

-1 1 سے 10 تک کے اعداد میں سے دو اعداد کو واپس رکھنے کے ساتھ بلا ترتیب منتخب کیا گیا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ:

(i) دونوں مفرد ہوں۔ (ii) ان کا حاصل ضرب جفت ہو۔

حل:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5. 6, 7, 8, 9, 10\}, n(s) = 10$

(i) دونوں مفرد ہوں۔

فرض کیا A پہلے جفت عدد نکالنے کا واقعہ ہے اور B دوسری بار جفت عدد نکالنے کا واقعہ ہے۔

$A = \{2, 3, 5, 7\}, n(A) = 4$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

چونکہ اعداد واپس رکھیں گئے ہیں سیمپل اسپیس پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

$B = \{2, 3, 5, 7\} = n(B) = 4$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(s)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(A \text{ اور } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

(ii) ان کا حاصل ضرب جفت ہو۔

جب اعداد کا حاصل ضرب جفت ہو تو حاصل ضرب تب ہی جفت ہوگا اگر اس میں کوئی جفت عدد ہو۔

فرض کیا A طاق اعداد نکالنے کا واقعہ ہے اور B طاق عدد نکالنے کا واقعہ ہے۔

$A = \{1, 3, 5, 7, 9,\} = n(A) = 5$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

حاصل ضرب اس وقت ہی جفت عدد ہوگا اگر اس میں کوئی بھی جفت عدد ہو۔

پس اعداد کو واپس رکھا گیا ہے تو سیمپل اسپیس پر کوئی اثر نہیں ہوگا۔

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}\ n(B) = 5$

www.ilmkidunya.com

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

اب ہم $1 - P(A \cap B)$ احتمالی ہوگا کہ حاصل ضرب ایک جفت اعداد ہیں۔

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

-2 لفظ PUNJAB سے ایک حرف اور لفظ LAHORE سے ایک اور حرف منتخب کیا گیا۔ احتمال کیا ہے کہ:

(i) دونوں حروف واؤول ہوں۔ (ii) ایک حرف کانسوئٹ اور دوسرا واؤول ہو۔

حل:

$$S = \{P, U, N, J, A, B\}, n(S) = 6$$

(i) دونوں حروف واؤول ہوں۔

فرض کیا A واؤول حروف آنے کا واقعہ ہے۔

$$A = \{U, A\}, n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$S = \{L, A, H, O, R, E\}, n(S) = 6$$

فرض کیا B واؤول حروف آنے کا واقعہ ہے۔

$$B = \{A, O, E\}, n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

(ii) ایک حرف کانسوئٹ اور دوسرا واؤول ہو۔

A صورتِ حال کا حساب لگانا

فرض کیا C کانسوننٹ PUNJAB سے منتخب ہوگا واقعہ ہے۔

$$C = \{P, N, J, B\}, n(C) = 4$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

فرض کیا D واؤول LAHORE سے منتخب ہونے کا واقعہ ہے۔

$$D = \{A, O, E\} = n, (D) = 3$$

www.ilmkidunya.com

$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(C \cap D) = P(C) \times P(D)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

B صورتِ حال کا حساب لگانا

فرض کیا E واوؤل حرف PUNJAB سے منتخب ہونے کا واقعہ ہے اور F کانسوننٹ حرف LAHORE سے منتخب ہونے کا واقعہ ہے۔

$n(E) = 2, n(F) = 3$

$P(F) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(D) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

P (کل) = P (A صورتِ حال) + P (B صورتِ حال)

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

$= \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

آخری جواب $= \frac{1}{2}$

-3 ایک ڈائس کو دو بار اچھالا گیا۔ احتمال معلوم کیجیے کہ ایک اچھال 3 کا جز وضربی اور دوسرا 5 ہو۔

حل: کل نتائج $= 6 \times 6 = 36, n(s) = 36$

فرض کیا A ایک باری میں 3 کا جز وضربی اور دوسری بار 5 ہونے کا واقعہ ہے۔

$A = \{(3,5), (6,5), (5,3), (5,6)\}, n(A) = 4$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

-4 دو ڈائس پھینکی گئیں۔ ایک پر طاق اور دوسرے پر 2 کا جز وضربی حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: کل نتائج $n(s) = 6 \times 6 = 36$

فرض کیا A پہلے پر طاق اور دوسرے پر 2 کا جز وضربی آنے کا واقعہ ہے۔

$A = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6), (5,2), (5,4), (5,6), (2,1), (4,1), (6,1), (2,3), (4,3), (6,3), (2,5), (4,5), (6,5)\}$

$n(A) = 18$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

-5 تاش کے پتوں میں سے دو پتے بلا ترتیب یکے بعد دیگرے بغیر واپسی کے نکالے گئے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ پہلا پتا پان ہو اور دوسرا پتا بادشاہ ہو۔

حل:

کل پتوں کی تعداد = 52

$n(S) = 52$

صورت 1 (پہلا پتہ پان کا ہو لیکن بادشاہ نہ ہو۔)

فرض کیا A پہلا پتہ پان کا آنے کا واقعہ ہے (جس میں بادشاہ نہ ہو)

$n(A) = 13 - 1 = 12$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

فرض کیا B دوسرا پتہ بادشاہ آنے کا واقعہ ہے۔

چونکہ پہلا پتہ واپس نہیں رکھا تو کل پتے بچے 51

$n(S) = 51$

$$P(B|A) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{51}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$= \frac{3}{13} \times \frac{4}{51} = \frac{4}{221}$$

صورت 2 (پہلا پتہ پان کا ہو لیکن بادشاہ ہو۔)

فرض کیا C پہلا پتہ پان کے بادشاہ آنے کا واقعہ ہے۔

$n(C) = 1$, $n(S) = 52$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$$

$$P(C) = \frac{1}{52}$$

فرض کیا D دوسرا پتہ بادشاہ آنے کا واقعہ ہے۔

چونکہ پہلا پتہ واپس نہیں رکھا تو کل پتے بچے 51

$n(D) = 3$, $n(S) = 51$

$$P(D|C) = \frac{3}{51}$$

$$P(C \cap D) = P(C) + P(D|C)$$

$$P(C \cap D) = \frac{1}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{884}$$

$P(\text{کل احتمال}) = P(A \cap B) + P(C \cap D)$

$$= \frac{4}{221} + \frac{1}{884}$$

www.ilmkidunya.com

$$= \frac{16+1}{884}$$

$$= \frac{17}{884} = \frac{1}{52}$$

6- تاش کے 52 پتوں سے بغیر واپسی کے دو پتے منتخب کیے گئے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ:

(i) دونوں سیاہ ہوں۔ (ii) وہ ملکہ ہوں۔ (iii) دونوں حکم ہوں۔ (iv) دونوں اینٹیں ہوں۔

حل:

کل پتے $n(S) = 52$

(i) دونوں سیاہ ہوں۔

فرض کیا A پہلا پتہ سیاہ آنے کا واقعہ اور B دوسرا پتہ سیاہ آنے کے واقعہ ہیں۔

$n(A) = 26$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

پتوں کو واپس نہیں رکھا گیا لہٰذا سیمپل اسپیس بدلے گی

$n(B|A) = 25$

$$P(B|A) = \frac{25}{51}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{25}{51} = \frac{25}{102}$$

(ii) وہ ملکہ ہوں۔

حل:

$n(s) = 52$

فرض کیا A پہلے ملکہ آنے کا واقعہ ہے اور B دوسرا ملکہ آنے کا واقعہ ہے۔

$n(A) = 4$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

پتوں کو واپس نہیں رکھا گیا لہٰذا سیمپل اسپیس بدلے گی

$n(S) = 51$

$n(B|A) = 3$

$$P(B|A) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$= \frac{1}{13} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$$

www.ilmkidunya.com

(iii) دونوں حکم ہوں۔

حل:

$n(s) = 52$

فرض کیا A حکم کا پتہ آنے کا واقعہ ہے اور B دوسری مرتبہ حکم کا پتہ آنے کا واقعہ ہے۔

$n(A) = 13$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

پتوں کو تبدیل نہیں کیا گیا سیمپل اسپیس بدل جائے گی۔

$n(s) = 51$

$n(B|A) = 12$

$$P(B|A) = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{17} = \frac{1}{17}$$

(iv) دونوں اینٹیں ہوں۔

$n(s) = 52$

فرض کیا A پہلے اینٹ آنے کا واقعہ ہے اور B دوسری اینٹ آنے کا واقعہ ہے۔

$n(A) = 13$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

پتوں کو تبدیل نہیں کیا گیا سیمپل اسپیس بدل جائے گی۔

$n(s) = 51$

$n(B|A) = 12$

$$P(B|A) = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{17} = \frac{1}{17}$$

-7 سلیم اچھی طرح پھینٹے ہوئے تاش کے 52 پتوں میں سے بغیر واپسی کے یکے بعد دیگرے دو پتے نکالتا ہے۔ احتمال کیا ہے کہ پہلا پتا غلام ہو اور دوسرا پتا ملکہ ہو۔

حل:

کل پتے $n(s) = 52$

فرض کیا A غلام آنے کا واقعہ ہے اور B ملکہ آنے کا واقعہ ہے

$n(A) = 4$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

پتوں کو واپس نہیں رکھا گیا سیمپل اسپیس بدلے گی۔

$n(s) = 51$

www.ilmkidunya.com

$n(B|A) = 4$

$$P(B|A) = \frac{n(B|A)}{n(s)} = \frac{4}{51}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$= \frac{1}{13} \times \frac{4}{51} = \frac{4}{663}$$

حل اعادہ مشق 12

-1 درج ذیل سوالات کے دیے گئے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) ناممکن واقعہ کا احتمال ہے:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) −1

(ii) ایک سکے کو ایک بار اچھالنے پر ہیڈ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہے؟

(a) 0 (b) 0.25 (c) 0.5 (d) 1

(iii) کسی تجربہ میں تمام ممکنہ نتائج کے احتمالات کا مجموعہ ہوتا ہے:

(a) 0.5 (b) 0.25 (c) 1 (d) 0.4

(iv) اگر $P(A) = 0.6$، ہو تو واقعہ A وقوع پذیر نہ ہونے کا احتمال ہے:

(a) 0.4 (b) 0.6 (c) 1 (d) 1.6

(v) دو واقعات باہمی متنافی کہلاتے ہیں اگر:

(a) وہ ایک ہی وقت میں وقوع پذیر ہو سکتے ہوں۔ (b) ایک دوسرے کو متاثر کرتے ہوں۔

(c) وہ ایک ساتھ وقوع پذیر نہ ہو سکتے ہوں۔ (d) وہ ہمیشہ برابر ہوں۔

(vi) اگر ایک سکہ اچھالا جائے اور ایک ڈائس کو پھینکا جائے تو سیمپل پوائنٹس کی تعداد ہے:

(a) 3 (b) 6 (c) 2 (d) 12

(vii) یقینی واقعہ کا احتمال کیا ہوتا ہے؟

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{4}{5}$

(viii) ایک ڈائس پر 6 سے بڑا عدد حاصل کرنے کا احتمال ہے:

(a) 0.33 (b) 1 (c) 0 (d) 0.5

(ix) تاش کی گڈی کے پتوں میں سے ایک پتا نکالنے کے .... ممکنہ نتائج ہوتے ہیں۔

(a) 13 (b) 1 (c) 52 (d) 26

(x) اگر $P(E) = 0.07$، ہو تو E نا ہونے کا احتمال ہے:

(a) 0.95 (b) 0.89 (c) 0.93 (d) 0.90

جوابات

(i) 0 (ii) 0.5 (iii) 1 (iv) 0.4 (v) وہ ایک ساتھ وقوع پذیر نہ ہو سکتے ہیں

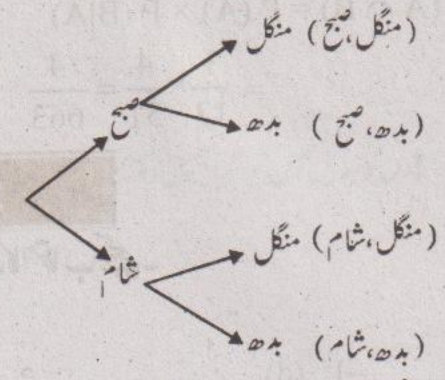
(vi) 12 (vii) 1 (viii) 0 (ix) 52 (x) 0.93

www.ilmkidunya.com

2- عرشیہ منگل اور بدھ میں سے ایک دن اور صبح، شام میں سے ایک وقت منتخب کرتی ہے۔ امکانہ خاکہ بنایئے۔ شجری خاکہ بھی بنایئے۔

حل:

شجری خاکہ



امکانہ خاکہ

	منگل	بدھ
صبح	(منگل، صبح)	(بدھ، صبح)
شام	(منگل، شام)	(بدھ، شام)

3- تاش کے پتوں میں سے ایک پتا نکالا گیا ہے۔ ایک اکا اور ایک حکم حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل:

کل پتے $n(S) = 52$,

فرض کیا A اکا کا آنے کا واقعہ ہے اور B ایک حکم آنے کا واقعہ ہیں۔

$n(A) = 4$

$n(B) = 13$

$n(A \cap B) = 1$ (اکا دونوں پتوں میں آئے گا)

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{52}$$

$$p(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{4+13-1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

4- فاطمہ تاش کے پتوں سے یکے بعد دیگرے (بغیر واپسی کے) دو پتے نکالتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ دونوں پتے سیاہ ہوں۔

حل:

کل پتہ $n(S) = 52$,

فرض کیا A پہلا پتا سیاہ ہے آنے کا واقعہ اور B دوسرا پتا سیاہ آنے کا واقعہ ہے۔

$n(A) = 26$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

پتوں کو واپس نہیں رکھا گیا تو سیمپل اسپیس تبدیل ہوگی۔

$n(S) = 51$

$n(B|A) = 25$

www.ilmkidunya.com

$$p(B|A) = \frac{n(B|A)}{n(S)} = \frac{25}{51}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{25}{51} = \frac{25}{102}$$

-5 اگر دو ڈائس پھینکے جائیں تو ان کے اوپری رُخ اعداد کی حاصل ضرب 6 یا اوپری رُخ اعداد کا فرق 5 حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: کل نتائج $n(S) = 6 \times 6 = 36$

فرض کیا A حاصل ضرب 6 آنے کا واقعہ ہے اور B 5 کا فرق آنے کا واقعہ ہے۔

$$A = \{(1,6), (2,3), (3,2), (6,1)\}, n(A) = 4$$

$$B = \{(1,6), (6,1)\}, n(B) = 2$$

$$A \cap B = \{(1,6), (6,1)\}, n(A \cap B) = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{18} - \frac{1}{18}$$

$$= \frac{2+1-1}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

-6 ایک تھیلے میں 7 نارنجی اور 5 جامنی گولیاں ہیں۔ دو گولیاں یکے بعد دیگرے بغیر واپسی کے نکالی گئیں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ پہلی گولی نارنجی اور دوسری گولی بھی نارنجی ہو۔

حل: کل گولیاں = نارنجی 7 + جامنی 5 = 12, $n(S) = 12$

فرض کیا A نارنجی گولیاں آنے کا واقع ہے اور B جامنی گولیا آنے کا واقع ہے۔

$$n(A) = 7$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{12}$$

چونکہ گولیاں تبدیل نہیں ہوئی سیمپل اسپیس تبدیل ہوگی۔

$$n(S) = 11$$

$$n(B|A) = 6$$

$$p(B|A) = \frac{n(B|A)}{n(S)} = \frac{6}{11}$$

$$P(A \cap B) = p(A) \times P(B|A)$$

$$= \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{42}{132} = \frac{7}{22}$$

www.ilmkidunya.com

معروضی طرز سوالات

اضافی کثیرالانتخابی سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے کثیرالانتخابی سوالات

12.1 احتمال

درست جواب کا انتخاب کریں۔

-1 ان میں سے کون سا ہمیں یہ سمجھنے میں مدد کرتا ہے کہ کسی چیز کے رونما ہونے کا کتنا امکان ہے:
(a) نتیجہ (b) احتمال (c) واقعہ (d) مربع

-2 ایک بلاترتیب تجربے میں تمام ممکنہ نتائج کا مجموعہ کہلاتا ہے:
(a) سیمپل اسپیس (b) آزمائش (c) سکہ (d) نقطہ

-3 ایک ڈائس پھینکنے کی سیمپل اسپیس ہے:
(a) $\{2, 4, 6\}$ (b) $1 - P(A)$ (c) $\{4, 5, 6\}$ (d) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

-4 سیمپل اسپیس کا ہر رکن کہلاتا ہے:
(a) واقعہ (b) سیمپل پوائنٹ (c) نتیجہ (d) بلاترتیب

12.1.3 واقعہ

-5 ایک بلاترتیب تجربے میں ہر ممکنہ نتیجہ کہلاتا ہے:
(a) ایک واقعہ (b) سیمپل اسپیس (c) احتمال (d) ڈائس پھینکنا

-6 واقعات A اور B باہمی منافی واقعات کہلاتے ہیں اگر:
(a) $A \cup B = B$ (b) $A \cap B = A$ (c) $A \cap B = \phi$ (d) $A \cap B = U$

-7 ایک سکہ اچھالنے میں واقعہ "دو ہیڈ" اور واقعہ "ٹیل" ہیں:
(a) ایک جیسے واقعات (b) تکمیلی واقعات (c) حقیقی واقعات (d) ناممکن واقعات

-8 اگر کوئی واقعہ صرف ایک نتیجہ پر مشتمل ہو تو اسے کہا جاتا ہے:
(a) واحد واقعہ (b) ابتدائی واقعہ (c) جامع واقعہ (d) باہمی واقعہ

-9 ایک سکے کا متعدد بار اچھالنا ہر بار کا اچھالنا ایک دوسرے سے ______ ہوتا ہے۔
(a) منحصر (b) باہمی (c) آزاد (d) ممکن

-10 واقعات کے تمام ممکنہ نتائج کو ظاہر کرنے کے لیے بصری اظہار کہلاتا ہے:
(a) ایک آزاد خاکہ (b) ایک ٹیل خاکہ (c) سادہ خاکہ (d) شجری خاکہ

www.ilmkidunya.com

www.ilmkidunya.com

-11 احتمال کی قدر ہمیشہ ہوتی ہے:

(a) 0 سے لے کر 1 تک (b) 1 سے لے کر 2 تک (c) 1- سے لے کر 1 تک (d) 2 سے لے کر 6 تک

-12 E کا کمپلیمنٹ ہوتا ہے:

(a) $\underline{E}$ (b) P(E) (c) $\overline{E}$ (d) $f^{-1}E$

-13 کوئی واقعہ یقینی ہوتا ہے جب:

(a) P(E) = 1 (b) P(E) = 0 (c) P(E) > 1 (d) P(E) < 0

-14 ایک ناممکن واقعہ کا کمپلیمنٹ ہوتا ہے:

(a) یقینی واقعہ (b) بڑا واقعہ (c) باہمی واقعہ (d) کوئی واقعہ نہیں

-15 اگر آپ ایک سکے کو دو بار اچھالتے ہیں۔ سیمپل اسپیس S میں کتنے سیمپل پوائنٹ ہوں گے:

(a) 2 (b) 8 (c) 4 (d) 6

-16 کون سی مساوات ہمیشہ درست ہوتی ہے:

(a) $P(A) = P(A')$ (b) $P(A) + P(A') = 0$ (c) $P(A) \times P(B) = 1$ (d) $P(A) + P(A') = 1$

-17 ایک ڈائس پھینکنے سے 4 سے بڑا عدد آنے کا احتمال ہے:

(a) $\frac{3}{6}$ (b) $\frac{2}{6}$ (c) $\frac{4}{6}$ (d) $\frac{1}{6}$

-18 اگر بارش ہونے کا احتمال 0.3 ہو تو بارش نہ ہونے کا احتمال ہوگا۔

(a) 0.7 (b) 0.0 (c) 0.1 (d) 1

-19 کون سی قدر احتمال کے لیے درست نہیں ہے:

(a) $\frac{2}{3}$ (b) 2.3 (c) 0.3 (d) 0.5

-20 دو ڈائس پھینکے گئے نتائج کا مجموعہ 17 آنے کا احتمال ہوگا:

(a) 1 (b) $\frac{17}{36}$ (c) 0.17 (d) 0

-21 دو ڈائس پھینکے گئے۔ دونوں پر مجموعہ 13 سے کم آنے کا احتمال ہوگا۔

(a) 1 (b) $\frac{12}{36}$ (c) $\frac{13}{36}$ (d) 0

-22 دو ڈائس پھینکے گئے۔ اگر A دونوں پر ایک جیسے ہندسوں کا واقعہ ہو تو n(A) ہوگی۔

(a) 36 (b) 6 (c) $\frac{1}{36}$ (d) $\frac{18}{36}$

-23 اگر $P(A) = \frac{1}{6}$ تب $P(A')$ ہوگی:

(a) 1.6 (b) 0.6 (c) $\frac{5}{6}$ (d) $\frac{6}{5}$

12.2 احتمال کا قانون جمع

24- احتمال کے قانون جمع کا درست کلیہ ہے:

(a) $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$ (b) $P(A\cup B) = P(A) \times P(B)$

(c) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ (d) $P(A\cup B) = P(A) - P(B) + P(A\cap B)$

25- اگر $P(A) = 0.3$ اور $P(B) = 0.4$ ہو اور A اور B باہمی متنافی ہوں تو $P(A \cup B)$ ہوگی:

(a) 0.2 (b) 0.7 (c) 1 + 0.3 (d) 1 – 0.4

26- اگر $P(A) = 0.5$ اور $P(B) = 0.3$ اور $P(A \cap B) = 0.1$ ہو تو $P(A \cup B)$ ہوگی:

(a) 0.7 (b) 0.2 (c) 0.5 (d) 0.9

27- تاش کی ایک گڈی سے ایک پتہ نکالا گیا اس کا احتمال کیا ہوگا اگر یہ بادشاہ یا ملکہ ہو۔

(a) $\frac{4}{52}$ (b) $\frac{1}{13}$ (c) $\frac{2}{13}$ (d) $\frac{8}{51}$

28- 100 طلباء میں سے 60 ریاضی کو پسند کرتے ہیں۔ 40 سائنس کو اور 20 دونوں کو پسند کرتے ہیں۔ ایک طالب علم بلا ترتیب سائنس یا ریاضی کو پسند کرتا ہے اس کا احتمال ہوگا:

(a) 0.8 (b) 0.6 (c) 0.4 (d) 0.2

29- ایک ڈائس پھینکیں احتمال کیا ہوگا اگر ہندسہ جفت عدد یا 4 سے بڑا ہو۔

(a) $\frac{3}{6}$ (b) $\frac{4}{6}$ (c) $\frac{5}{6}$ (d) $\frac{6}{6}$

30- اگر $P(A \cup B) = 0.9$، $P(A) = 0.6$، $P(B) = 0.5$ ہو تو $P(A \cap B)$ ہوگی:

(a) 1.1 (b) 0.3 (c) 0.4 (d) 0.2

31- واقعات کا کونسا جوڑا باہمی متنافی ہے:

(a) ایک سرخ پتہ اور ایک یکہ نکالنا (b) بارش ہو رہی ہے اور چھتری اٹھائی ہے

(c) ڈائس پر 3 اور ایک جفت عدد آنا (d) طالب ہونا اور ریاضی کا چاہنے والا ہونا

32- ایک باکس 5 سرخ، 3 نیلی اور 2 سبز گیندوں پر مشتمل ہے۔ ایک سرخ یا نیلی گیند نکالنے کا احتمال ہوگا۔

(a) 0.6 (b) 0.2 (c) 0.17 (d) 0.19

33- اگر $P(A) = 0.4$ اور $P(B) = 0.5$ اور A اور B آزاد ہیں تو $P(A \cup B)$ کا احتمال ہوگا:

(a) 0.2 (b) 0.1 (c) 0.7 (d) 0.9

34- اگر $P(A) = 0.6$ اور $P(B) = 0.7$ تو ممکنہ زیادہ سے زیادہ $P(A \cap B)$ کی قدر ہوگی۔

(a) 0.3 (b) 0.1 (c) 0 (d) 0.6

35- کونسا نقطہ عام طور پر احتمال کی جمع کے قانون سے متعلقہ ہے:

(a) معلوم (b) اور (c) نہیں (d) یا

www.ilmkidunya.com

12.3 احتمال کا قانون ضرب

36- اگر A اور B دو آزاد واقعات ہوں تو کونسا کلیہ احتمال کے قانون ضرب کا ہے:

(a) $P(A\cup B) = P(A) \times P(B)$ (b) $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$
(c) $P(A\cap B) = P(A) + P(B)$ (d) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

37- اگر A اور B دو منحصر واقعات ہو تو درست قانون ضرب ہے:

(a) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B|A)$ (b) $P(A\cap B) = \frac{P(A)}{P(B)}$
(c) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$ (d) $P(A|B)\ P = (A) \times P(B)$

38- اگر ایک ہموار سکہ دو بار اچھالا گیا تو پہلی مرتبہ ہیڈ اور دوسری مرتبہ بھی ہیڈ آنے کا احتمال ہوگا:

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

39- $P(A) = 0.6$ اور $P(B) = 0.5$ ہو تو $P(A \cap B)$ ہوگی:

(a) 0.3 (b) 0.83 (c) 0.1 (d) 1.1

40- دو ہموار ڈائس پھینکے گئے۔ تو پہلی ڈائس پر 6 اور دوسروں پر بھی 6 آنے کا احتمال ہوگا:

(a) $\frac{2}{6}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{36}$ (d) $\frac{1}{6}$

41- تاش کے 52 پتوں کی ڈگی سے آپ دو پتے بغیر دوبارہ رکھے نکالتے ہیں۔ اگر دونوں یکے ہوں تو احتمال ہوگا:

(a) $\frac{4}{52} \times \frac{3}{52}$ (b) $\frac{4}{52} \times \frac{3}{52}$ (c) $\frac{4}{52} \times \frac{3}{51}$ (d) $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13}$

42- اگر $P(A \cap B) = 0.2$ ہو اور $P(A) = 0.5$ ہو تو $P(B/A)$ ہوگی:

(a) 2.5 (b) 0.4 (c) 0.7 (d) 0.1

جوابات

1- احتمال 2- سیمپل اسپیس 3- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 4- سیمپل پوائنٹ

5- ایک واقعہ 6- $A \cap B = \phi$ 7- تکمیلی واقعات 8- ابتدائی واقعہ 9- آزاد

10- شجری خاکہ 11- 0 سے لے کر 1 تک 12- $\overline{E}$ 13- $P(E) = 1$ 14- یقینی واقعہ

15- 4 16- $P(A) + P(A') = 1$ 17- $\frac{2}{6}$ 18- 0.7

19- 2.3 20- 0 21- 1. 22- 6 23- $\frac{5}{6}$

24- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ 25- 0.7 26- 0.7

27- $\frac{2}{3}$ 28- 0.8 29- $\frac{4}{6}$ 30- 0.2

31- ڈائس پر 3 اور ایک جفت عدد کا آنا 32- 0.8 33- 0.9 34- 0.3

35- یا 36- $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$ 37- $P(A\cap B) = P(A) \times P(B|A)$

38- $\frac{1}{4}$ 39- 0.3 40- $\frac{1}{36}$ 41- $\frac{4}{52} \times \frac{3}{51}$ 42- 0.4

www.ilmkidunya.com

اضافی مختصر سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے مختصر جوابی سوالات

12.1 احتمال

مختصر جواب دیں۔

-1 احتمال کی بنیادی تعریف کیا ہے؟

جواب: احتمال ہمیں یہ سمجھنے میں مدد دیتا ہے کہ کسی چیز کے رونما ہونے کا کتنا امکان ہے خاص طور پر جب ہم غیر یقینی صورت حال سے نمٹتے ہیں۔

-2 بلاترتیب تجربہ کی دو اہم خصوصیات کیا ہیں؟

جواب: بلاترتیب تجربہ وہ تجربہ ہے جس میں:

(i) تمام ممکنہ نتائج کا سیٹ معلوم ہوتا ہے۔ (ii) درست نتیجہ معلوم نہیں ہوتا

-3 احتمال میں نتیجہ کیا ہوتا ہے؟

جواب: ایک بلاترتیب تجربے کے ممکنہ حاصل کو نتیجہ کہتے ہیں۔

-4 سیمپل اسپیس کی تعریف کیا ہے؟

جواب: ایک بلاترتیب تجربے میں تمام ممکنہ نتائج کا مجموعہ سیمپل اسپیس کہلاتا ہے۔ اسے S سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

-5 سیمپل پوائنٹ کی تعریف کریں۔

جواب: سیمپل اسپیس کا ہر رکن سیمپل پوائنٹ کہلاتا ہے۔

12.1.3 واقعہ

-6 واقعہ کی تعریف کریں۔

جواب: ایک بلاترتیب تجربے میں ہر ممکنہ نتیجہ ایک واقعہ (Event) کہلاتا ہے۔

-7 مساوی امکانی واقعات کی تعریف کریں۔

جواب: دو یا دو سے زیادہ واقعات کو مساوی امکانی واقعات کہا جاتا ہے۔

-8 ایک ناممکن واقعہ کیا ہوتا ہے؟

جواب: ایک ناممکن واقعہ وہ واقعہ ہے جو کسی بھی صورتِ حال میں رونما نہیں ہوسکتا۔

-9 تکمیل واقعہ کی تعریف کریں۔

جواب: کسی واقعہ A کا تکمیل واقعہ وہ ہے جو ان تمام سیمپل پوائنٹس کے مجموعہ کی نمائندگی کرتا ہے۔ جو A میں شامل نہ ہوں۔

-10 ابتدائی واقعہ کی تعریف کریں۔

جواب: اگر کوئی واقعہ کسی ایک نتیجہ پر مشتمل ہو تو اسے ابتدائی واقعہ کہا جاتا ہے۔

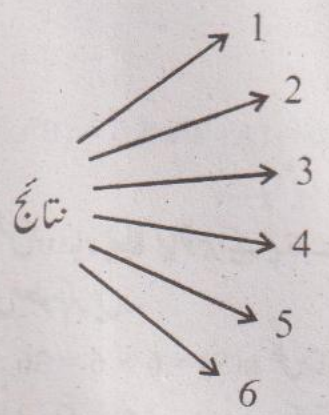
-11 باہمی متنافی واقعات کیا ہوتے ہیں؟

جواب: دو یا دو سے زیادہ واقعات کو باہمی متنافی واقعات کہا جاتا ہے۔ اگر وہ ایک ہی وقت میں رونما نا ہوسکیں۔

www.ilmkidunya.com

-12 شجری خاکہ استعمال کرتے ہوئے ایک ڈائس پھینکنے کی سیمپل اسپیس معلوم کریں۔

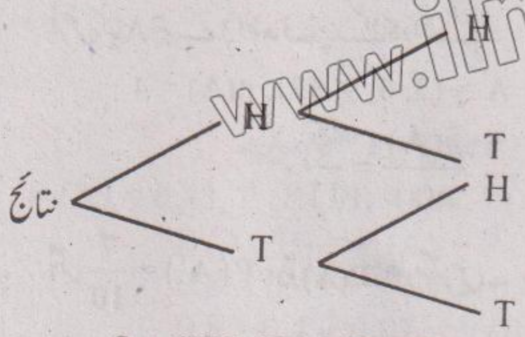
حل:



$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

-13 شجری خاکہ استعمال کرتے ہوئے دو سکے اچھالنے کی سیمپل اسپیس معلوم کریں۔

حل:



$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

12.1.9 واقعہ کا احتمال

-14 تین ہموار سکے اچھالے گئے کم از کم ایک ٹیل آنے کا احتمال معلوم کریں۔

حل: $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$n(S) = 8$

فرض کریں A کم از کم ایک ٹیل آنے کا واقعہ ہے

$A = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

-15 ایک تھیلے میں 5 سفید گیندیں، اور تین سبز گیندیں ہیں۔ حنظلہ اسد تھیلے میں سے ایک گیند بلا ترتیب نکالتا ہے احتمال معلوم کریں کہ نکالی گئی گیند سبز ہو۔

حل: کل گیندیں = 5 سفید + 3 سبز = 8

$n(S) = 8$

فرض کیا A نکالی گیند کے سبز ہونے کا واقعہ ہے۔

$n(A) = 3$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{3}{8}$$

-16 اگر $P(A) = \frac{5}{9}$ ہو تو 'A کا احتمال معلوم کریں۔

حل:

$$P(A) = \frac{5}{9}$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$1 - = \frac{5}{9}$$

$$= \frac{9-5}{9} = \frac{4}{9}$$

-17 تاش کے 52 پتوں کی ایک گڈی سے حکم کا ایک پتہ نکالنے کا احتمال معلوم کریں۔

حل:

$n(S) = 52$

فرض کیا B حکم کے پتے کے نکالنے جانے کا واقعہ ہے

$n(B) = 13$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

18- اتفاق کے ایک کھیل میں ایک تیر کو گھمایا جاتا ہے جس کا کسی ایک عدد 13 , . . . , 5 , 4 , 3 پر آ کر رکنے کا امکان برابر ہے۔ اس بات کا کیا احتمال ہے کہ تیر 3 کے کسی اضعاف پر آ کر رکے۔

حل: $S = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}, n(s) = 11$

فرض کیا A تیر کے 3 اضعاف پر رکنے کا واقعہ ہے۔

$A = \{3, 6, 9, 12\}, n(A) = 4$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{4}{11}$$

19- اگر $P(A') = \frac{7}{10}$ ہو تو P(A) معلوم کریں۔

حل: $P(A') = \frac{7}{10}$ (معلوم)

ہم جانتے ہیں کہ

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$\frac{7}{10} = 1 - P(A)$$

$$P(A) = 1 - \frac{7}{10}$$

$$= \frac{10-7}{10} = \frac{3}{10}$$

20- ایک ڈائس کو دو بار پھینکا گیا تو ہر ایک پر 6 سے بڑے عدد آنے کا احتمال معلوم کریں۔

حل: $n(S) = 6 \times 6 = 36$ کل نتائج

فرض کیا A ہر ایک پر 6 سے بڑے عدد کے آنے کا واقعہ ہے۔

$A = \{\}, n(A) = 0$

کیونکہ سیمپل اسپیس میں کوئی بھی سیمپل پوائنٹ ہر ایک پر 6 سے بڑا نہیں ہے۔

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{36} = 0$$

12.2 احتمال کا قانون جمع

21- دو کوئی سے غیر باہمی متنافی واقعات کے لیے احتمال کا قانون جمع لکھیں۔

حل: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

22- کوئی سے دو باہمی متنافی واقعات کے لیے احتمال کا قانون جمع لکھیں۔

حل: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

23- اگر $P(A) = 0.3$ اور $P(B) = 0.4$ ہو اور وہ باہمی متنافی ہیں تو $P(A \cup B)$ کیا ہوگی۔

حل: دیا گیا

$P(A) = 0.3, P(B) = 0.4$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= 0.3 + 0.4 = 0.7$$

24- اگر $P(A) = \frac{7}{10}$، $P(B) = \frac{5}{10}$ اور $P(A \cup B) = \frac{8}{10}$ ہو تو $(A \cap B)$ کیا ہوگا۔

حل: دیا گیا

$P(A) = \frac{7}{10}, P(B) = \frac{5}{10}$ اور $P(A \cup B) = \frac{8}{10}$

ہم جانتے ہیں

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

www.ilmkidunya.com

$$\frac{8}{10} = \frac{7}{10} + \frac{5}{10} - P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B) = \frac{7}{10} + \frac{5}{10} - \frac{8}{10}$$

$$= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

-25 اگر $P(A) = 0.43$ اور $P(A \cup B) = 0.8$ اور $P(A \cap B) = 0.07$ ہو تو $P(B)$ معلوم کریں۔

حل: دیا گیا ہے $P(A) = 0.43, P(A\cup B) = 0.8, P(A\cap B) = 0.07$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$0.8 = 0.43 + P(B) - 0.07$$
$$0.8 - 0.43 + 0.07 = P(B)$$
$$0.44 = P(B)$$
$$P(B) = 0.44$$

-26 اگر $P(A \cup B) = 0.9$ اور $P(B) = 0.4$ ہو تو $P(A)$ معلوم کریں۔

حل: دیا گیا ہے $(A\cup B) = 0.9, P(B) = 0.4$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$
$$0.9 = P(A) + 0.4$$
$$0.9 - 0.4 = P(A)$$
$$0.5 = P(A)$$
$$P(A) = 0.5$$

-27 اگر $P(A \cup B) = 0.6$ ہو تو اس بات کا کیا احتمال ہے کہ نہ تو A وقوع پذیر ہو یا نہ ہی B۔

حل: (معلوم) $P(A \cup B) = 0.6$

$$P((A\cup B)\text{نہ ہی}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - 0.6 = 0.4$$

12.3 احتمال کا قانون ضرب

-28 دو آزاد واقعات کے لیے احتمال کا قانون ضرب لکھیں۔

حل: $P(A \text{ and } B) = P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

-29 دو منحصر واقعات کے لیے احتمال کا قانون ضرب لکھیں۔

حل: $P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B|A)$

-30 عرشمان نے ایک ہموار ڈائس پھینکی۔ دونوں بار 4 آنے کا احتمال معلوم کریں۔

حل: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,\}, n(S) = 6$

فرض کیا A پہلی بار پھینکنے پر 4 آنے کا واقعہ ہے

اور B دوسری بار بھی 4 آنے کا واقعہ ہے۔

$$n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{1}{6}$$

$n(B) = 1$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(s)} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

-31 ایک تھیلے میں 5 سرخ اور 3 سیاہ گولیاں ہیں، منحہ ایک کے ایک کر کے دو گولیاں نکالتی ہے۔ (پہلی گولی واپس رکھنے کے بعد دوسری گولی نکالی جاتی ہے۔ احتمال معلوم کریں کہ دونوں بار گولی سرخ ہو۔

حل: (گولیوں کی کل تعداد) $n(S) = 8$

فرض کیا A پہلی بار گولی نکالنے کا واقعہ ہے اور B دوسری بار گولی نکالنے کا واقعہ ہے۔

$$n(A) = 5, \ n(B) = 5$$

$$P(A) = \frac{5}{8}, \ P(B) = \frac{5}{8}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(P)$$

$$= \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$$

-32 ایک باکس میں 6 سیاہ اور 4 سفید گیندیں ہیں۔ مجوہ بلا ترتیب دو گیندیں نکالتی ہے (پہلی گیند واپس رکھے بغیر) احتمال معلوم کریں کہ دونوں بار گیند سفید ہی ہو۔

حل: (گیندوں کی کل تعداد) $n(S) = 10$

فرض کیا A پہلی بار سفید گیند نکالنے کا واقعہ ہے اور B دوسری بار سفید گیند نکالنے کا واقعہ ہے۔

کیونکہ پہلی گیند کو واپس نہیں رکھا اس لیے سیمپل اسپیس متاثر ہوگی۔

$$n(A) = 4, \ n(B) = 3$$

$$P(A) = \frac{4}{10}, \ P(B|A) = \frac{3}{9}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

-33 افضل کے ریاضی میں پاس ہونے کا احتمال 0.7 ہے اور اُردو میں پاس ہونے کا احتمال 0.6 ہے۔ دونوں واقعات آزاد ہیں اس بات کا احتمال بیان کریں کہ وہ مضامین میں پاس ہوجائے۔

حل: $P(\text{ریاضی}) = 0.7, \quad P(\text{اُردو}) = 0.6$

$$P(\text{ریاضی} \cap \text{اُردو}) = P(\text{ریاضی}) \times P(\text{اُردو})$$

$$= 0.7 \times 0.6$$

$$= 0.42$$

www.ilmkidunya.com

امتحانی پرچہ ریاضی کی تیاری کے لیے ہدایات برائے جماعت دہم

◀ جماعت دہم کے لیے ریاضی کا پرچہ 75 نمبروں پر مشتمل ہوگا۔ ◀ معروضی طرز =15 نمبر + انشائیہ طرز =60 نمبر۔ ◀ پرچے کا دورانیہ 2 گھنٹے 30 منٹ ہوگا۔

◀ معروضی طرز =20 منٹ + انشائیہ طرز =2 گھنٹے 10 منٹ۔ ◀ پرچہ درج ذیل تفصیلات کے مطابق تیار کیا جائے گا۔

معروضی طرز	سوال 1: پورے نصاب کتاب سے کل 15 کثیرالانتخابی سوالات (MCQs) لیے جائیں گے۔ تقسیم درج ذیل ہے۔ ابواب 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 اور 10 میں سے ایک ایک سوال: اور ابواب 9، 11 اور 12 میں سے دو دو سوالات لیے جائیں گے۔	$1\times15=15$
حصہ اوّل انشائیہ طرز	یہ حصہ تین مختصر سوالات پر مشتمل ہے۔ تفصیل درج ذیل ہے۔ سوال 2: طلبہ کو 9 مختصر جوابی سوالات میں سے کوئی بھی 6 سوالات حل کرنے ہوں گے۔ تفصیلی درج ذیل ہے: • ابواب 1، 2، 3 اور 4 میں سے کم از کم دو دو مختصر سوالات لیے جائیں گے۔	$2\times6=12$
	سوال 3: طلبہ کو 9 مختصر سوالات میں سے کوئی بھی 6 سوالات حل کرنے ہوں گے۔ تفصیلی درج ذیل ہے: • ابواب 5، 6، 7 اور 8 میں سے کم از کم دو دو مختصر سوالات لیے جائیں گے۔	$2\times6=12$
	سوال 4: طلبہ کو 9 مختصر سوالات میں سے کوئی بھی 6 سوالات حل کرنے ہوں گے۔ تفصیلی درج ذیل ہے: • ابواب 9، 10، 11 اور 12 میں سے کم از کم دو دو مختصر سوالات لیے جائیں گے۔	$2\times6=12$
حصہ دوم انشائیہ طرز	یہ حصہ تین تفصیلی سوالات پر مشتمل ہوگا جو دو حصوں (الف اور ب) میں تقسیم ہوں گے، ہر حصہ 4 نمبروں کا ہوگا۔ طلبہ کو ان میں سے کوئی بھی دو سوالات حل کرنا ہوں گے۔ تفصیل درج ذیل ہے: سوال 5: (الف) ایک تفصیلی سوال باب 1 میں سے لیا جائے گا۔ (ب) ایک تفصیلی سوال باب 2 میں سے لیا جائے گا۔ سوال 6: (الف) ایک تفصیلی سوال باب 3 میں سے لیا جائے گا۔ (ب) ایک تفصیلی سوال باب 4 میں سے لیا جائے گا۔ سوال 7: (الف) ایک تفصیلی سوال باب 5 میں سے کسی ایک سے لیا جائے گا۔ (ب) ایک تفصیلی سوال باب 7 میں سے لیا جائے گا۔	$2\times8=16$
حصہ سوم انشائیہ طرز	یہ حصہ دو تفصیلی سوالات پر مشتمل ہوگا جو دو حصوں (الف اور ب) میں تقسیم ہوں گے، ہر حصہ 4 نمبروں کا ہوگا۔ طلبہ کو ان میں سے ایک سوال کو حل کرنا ہوگا۔ تفصیلی درج ذیل ہے: سوال 8: (الف) ایک تفصیلی سوال باب 6 میں سے کسی ایک سے لیا جائے گا۔ (ب) ایک تفصیلی سوال باب 8 یا باب 11 میں سے کسی ایک سے لیا جائے گا۔ سوال 9: (الف) ایک تفصیلی سوال باب 10 میں سے لیا جائے گا۔ (ب) ایک تفصیلی باب 9 یا باب 12 میں سے کسی ایک سے لیا جائے گا۔	$1\times8=8$

www.ilmkidunya.com

ماڈل پیپر ریاضی برائے جماعت دہم

معروضی طرز

کل نمبر: 15 وقت: 20 منٹ

نوٹ: ہر سوال کے چار ممکنہ جوابات A، B، C اور D دیئے گئے ہیں۔ جوابی کاپی پر ہر سوال کے سامنے دیئے گئے دائروں میں سے درست جواب کے مطابق متعلقہ دائرہ کو مارکر یا پین سے بھر دیجیے۔ ایک سے زیادہ دائروں کو پُر کرنے یا کاٹ کر پُر کرنے کی صورت میں مذکورہ جواب غلط تصور ہوگا۔

D	C	B	A	سوالات	نمبر شمار
2	1	0✓	−1	$i^2 + i^4$	(i)
45✓	25	20	−20	$x^2 + 5x - 5 = 0$ کا فرق کنندہ ہے:	(ii)
✓سکیو سیمیٹرک	مستطیلی	قطاری	سیمیٹرک	اگر $A' = -A$ ہو تو A ____ قالب ہے:	(iii)
$f: \frac{X}{Y}$	$f: X \to Y$✓	$f: Y \to X$	$f: XY$	X سے Y تفاعل f کو ____ سے ظاہر کیا جاتا ہے:	(iv)
$\frac{xyz}{2}$	xyz	$\frac{3}{2}$	$\frac{3xyz}{2}$✓	$\frac{15xyz}{10}$ کی مختصر ترین شکل ہے:	(v)
✓چوتھا	تیسرا	دوسرا	پہلا	P(4,−4) ____ ربع میں واقع ہے:	(vi)
$-\cos\theta$	$\cos\theta$✓	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sin(90° + \theta) =$	(vii)
360° ✓	270°	180°	90°	ایک دائرہ کے مرکزی زاویوں کا مجموعہ ہوتا ہے:	(viii)
بہت سے	تین	✓دو	ایک	دائرہ کے بیرونی نقطہ سے دائرہ پر ____ مماس کھینچے جاسکتے ہیں:	(ix)
3 cm	6 cm	8 cm	12 cm✓	اگر r = 6cm، ریڈین 2 = θ ہو تو قوس کی لمبائی ہے:	(x)
4	3	2✓	1	دائرہ کا مرکز معلوم کرنے کے لیے کم از کم کتنے وتروں کی ضرورت ہوتی ہے؟	(xi)
تغیریت	عادہ	✓وسطانیہ	اوسط	دوسرا چہارمی حصہ ظاہر کرتا ہے:	(xii)
سعت	✓معیاری انحراف	وسطانیہ	اوسط	تغیریت کا مثبت جذرالمربع کہلاتا ہے:	(xiii)
1.6	1	0.6	0.4✓	اگر P(A) = 0.6 ہو تو واقعہ A واقع پذیر نہ ہونے کا احتمال ہے:	(xiv)
26	52✓	1	13	تاش کی گڈی میں سے ایک پتا نکالنے کے ____ ممکنہ نتائج ہوتے ہیں:	(xv)

www.ilmkidunya.com

انشائیہ طرز

(حصہ اوّل)

وقت :2:10 گھنٹے

کل نمبر:60

سوال 2: کوئی سے چھ (6) سوالات کے مختصر جوابات لکھیے۔ **$(2 \times 6 = 12)$**

(i) مختصر کیجیے۔ i^{17} (ii) ماڈیولس معلوم کیجیے۔ $-5-4i$

(iii) دو درجی مساوات کی مثال کے ساتھ تعریف کیجیے۔

(iv) دو درجی مساوات کو معیاری شکل میں لکھیے۔ $2x(x+1) = 4(2x+3)$

(v) مساوات کے روٹس کی نوعیت کا جائزہ لیجیے۔ $3x^2 - 9x - 2 = 0$

(vi) $A - B$ اور $B - A$ معلوم کیجیے۔ $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(vii) ضربی معکوس معلوم کیجیے۔ $\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

(viii) $g(f(x))$ معلوم کیجیے، اگر: $f(x) = x + 1, g(x) = 2x - 3$

(ix) حل کیجیے اور حل کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔ $|4x - 9| = 3$

سوال 3: کوئی سے چھ (6) سوالات کے مختصر جوابات لکھیے۔ **$(2 \times 6 = 12)$**

(i) مختصر کیجیے۔ $\frac{3}{x-y} + \frac{1}{y-x}$

(ii) معکوس مساوات کی مثال کے ساتھ تعریف کیجیے۔

(iii) مختصر ترین شکل میں تبدیل کیجیے۔ $\frac{x^2-5x}{x^2-4x-5}$

(iv) ثابت کیجیے کہ $\underline{a} = 5\underline{i} - 2\underline{j}$ اور $\underline{b} = -10\underline{i} + 4\underline{j}$ متوازی ہیں۔

(v) $\underline{a} = \frac{5}{3}\underline{i} + \frac{1}{3}\underline{j}$ کی سمت میں یونٹ ویکٹر معلوم کیجیے۔ (vi) سائن کا قانون بیان کیجیے۔

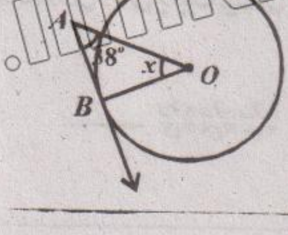
(vii) ΔABC کا رقبہ معلوم کیجیے جس میں: $a = 6.12\text{cm}, b = 8.34\text{ cm}, c = 7.12\text{ cm}$

(viii) قاطع خط کی تعریف کیجیے اور اس کی شکل بھی بنائیے۔

(ix) ثابت کیجیے کہ نقاط $A(1, 1)$، $B(4, 2)$ اور $C(3, 5)$ میں سے ایک منفرد دائرہ گزر سکتا ہے۔

سوال 4: کوئی سے چھ (6) سوالات کے مختصر جوابات لکھیے۔ **$(2 \times 6 = 12)$**

(i) شکل کے ساتھ دائرہ کے مماس کی تعریف کیجیے۔



(ii) x کی قیمت معلوم کیجیے۔

www.ilmkidunya.com

(iii) دائرہ کے سیکٹر کا رقبہ معلوم کیجیے جس کا مرکزی زاویہ 60° اور رداس 7cm ہے، قوس کی لمبائی بھی معلوم کیجیے۔

(iv) 2cm رداس کی مدد سے دائرہ بنائیے اور بناوٹ سے مرکز کی تصدیق کیجیے۔

(v) 1.3cm رداس کا ایک دائرہ بنائیے اور نقطہ P پر ایک مماس کھینچیں، جبکہ P دائرے کے محیط پر واقع ہو۔

(vi) دیے گئے مواد کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔ 102, 98, 95, 100, 93, 110, 108, 104, 97, 96, 92, 101, 99, 105, 107

(vii) دیے گئے مواد کی سعت معلوم کیجیے۔ 15, 22, 18, 30, 17, 25

(viii) دو سکے ایک ساتھ اُچھالے گئے۔ دونوں سکوں پر مختلف رُخ آنے کا احتمال کیا ہے؟

(ix) 1 سے 10 تک کے اعداد میں سے دو اعداد کو واپس رکھنے کے ساتھ بلا ترتیب منتخب کیا گیا، احتمال معلوم کیجیے کہ دونوں اعداد مفرد ہوں۔

(حصہ۔دوم)

کوئی سے دو (02) سوالات کے جوابات لکھیے۔ $(2 \times 8 = 16)$

سوال 5: (الف) کمپلیکس عددی سروں z اور w کے لیے $3z + (2 + i)w = 11 - i,\ (2 - i)z - w = -1 + i$

(ب) اگر مساوات $x^2 + 2(1 + k)x + k^2 = 0$ کے روٹس مساوی ہوں تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

سوال 6: (الف) معکوس قالب کے طریقہ سے حل کیجیے۔
$$3x + 2y = 2$$
$$x - 2y = -2$$

(ب) تصدیق کیجیے۔ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$، جہاں $f(x) = \frac{x-4}{x+2},\ x \neq -2$

سوال 7: (الف) حل کیجیے۔ $4 \cdot 2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 1 = 0$

(ب) مثلث ABC کو حل کیجیے۔ $c = 7\text{cm},\ \beta = 34^\circ,\ \gamma = 64^\circ$

(حصہ۔سوم)

نوٹ: کوئی سے ایک سوال کا جواب لکھیے۔ $(1 \times 8 = 8)$

سوال 8: (الف) B، A اور D کے محددات بالترتیب (1,2)، (6,3) اور (2, 8) ہیں۔ اگر ABCD متوازی الاضلاع ہو تو ویکٹر کے طریقہ سے C کے محددات معلوم کیجیے۔

(ب) ایک فیکٹری درج ذیل لمبائیوں (سینٹی میٹر میں) کی سلاخیں تیار کرتی ہے۔ 50.1, 49.9, 50.0, 50.2, 49.8
معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہوئے یکسانیت کی جانچ کیجیے۔

سوال 9: (الف) 1.5 cm رداس کا دائرہ بنائیے اور دو مماس کھینچیں جو 30° کے زاویہ پر ملتے ہوں۔

(ب) دو ڈائس ایک ساتھ پھینکے گئے۔ دونوں ڈائس پر ایک جیسے ہی اعداد یا اعداد کا مجموعہ 10 حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

www.ilmkidunya.com