یونٹ 11

معلوماتی معاملات

حاصلاتِ تعلم

اس یونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- مجموعی تعددی جدول اور مجموعی تعددی کثیر الاضلاع یا ترسیم کو تشکیل دے سکیں۔
- مجموعی تعددی خط سے وسطانیہ، چہارمی حصہ، دسواں حصہ، سوواں حصہ اور اندرونی چہارمی حصہ کی وضاحت کر سکیں۔
- باکس اور وسکر پلاٹ کی وضاحت اور تجزیہ کر سکیں۔
- انتشاری خاکہ سے مواد کی وضاحت اور تجزیہ کر سکیں اور موزوں ترین خطوط بھی کھینچ سکیں۔
- انتشاری خاکہ کا استعمال کرتے ہوئے ارتباط کی پیمائش کر سکیں۔
- گروہی مواد کے لیے سعت، معیاری انحراف اور تغیریت معلوم کر سکیں۔
- دو سیٹوں کے مواد کا موازنہ کرنے کے لیے اوسط اور معیاری انحراف کا استعمال کر سکیں۔
- گروہی مواد کے لیے تغیریت اور معیاری انحراف سے حقیقی زندگی کے سوالات کو حل کر سکیں۔
- انتشاری پیمانوں کے تصورات سے حقیقی زندگی کے سوالات حل کرنے کے لیے (جیسے مواد کی مستقل مزاجی کا تعین کرنا، پیشن گوئی میں تفسیر کی جانچ کرنا، مینوفیکچرنگ، مالیات اور معاشیات) لاگو کر سکیں۔

11.1 مجموعی تعددات کی تشکیل (Construction of Cumulative Frequencies)

مجموعی تعدد، تعددات کا مسلسل بڑھتا ہوا مجموعہ ہوتا ہے، جہاں ہر تعدد کو اس سے پہلے کے تمام تعددات کے مجموعہ میں شامل کیا جاتا ہے۔ مجموعی تعددات کا جدول جسے مجموعی تعددی تقسیم بھی کہا جاتا ہے، ہر مواد کے نقطہ یا جماعتی وقفہ کے لیے معلوم تعددات کا بڑھتا ہوا مجموعہ دیتا ہے۔ جو ظاہر کرتا ہے کہ ایک مخصوص قدر یا اس سے کم کتنی قدریں پائی گئیں۔

مثال 1: کالج کے 50 طلبہ کے 100 میں سے حاصل کردہ مارکس نیچے دیئے گئے ہیں۔ مجموعی تعددی جدول بنائیے۔

85	66	76	45	66	91	77	64	71	74
47	78	76	42	70	58	71	67	80	78
73	48	68	87	81	72	65	69	78	84
75	53	58	87	56	72	62	92	73	83
97	81	51	61	58	72	62	79	88	74

حل: سب سے زیادہ مارکس = 97، سب سے کم مارکس = 42

انہیں 50 طلبہ کا تعددی تقسیم کا جدول بنایا گیا ہے۔

مجموعی تعددی جدول

جماعتی وقفے	ٹیلی نشان	تعددات (f)	مجموعی تعددات
40 - 44	I	1	1
45 - 49	III	3	1 + 3 = 4

www.ilmkidunya.com

50 - 54	𝍷𝍷	2	4 + 2 = 6
55 - 59	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	6 + 4 = 10
60 - 64	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	10 + 4 = 14
65 - 69	𝍸 𝍷	6	14 + 6 = 20
70 - 74	𝍸 𝍸	10	20 + 10 = 30
75 - 79	𝍸 𝍷𝍷𝍷	8	30 + 8 = 38
80 - 84	𝍸	5	38 + 5 = 43
85 - 89	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	43 + 4 = 47
90 - 94	𝍷𝍷	2	47 + 2 = 49
95 - 99	𝍷	1	49 + 1 = 50
کل تعداد		$n = \sum f = 50$	

مجموعی تعددی کثیر الاضلاع یا ترسیم (Cumulative Frequency Polygon or Ogive)

ایک مجموعی تعددی کثیر الاضلاع جسے ترسیم بھی کہا جاتا ہے، ایک ترسیمی اظہار ہے کسی تعددی تقسیم میں ہر حقیقی جماعتی حد کی مجموعی تعددات کو ظاہر کرتا ہے۔

مرحلہ I: دیے گئے مواد سے مجموعی تعددی جدول تیار کیجیے۔

مرحلہ II: کمی کے طریقہ کے لیے x- محور پر بالائی جماعتی حدود کو ظاہر کیجیے۔ زیادہ کے طریقہ کے لیے x- محور پر زیریں جماعتی حدود کو ظاہر کیجیے۔

مرحلہ III: y- محور پر متعلقہ مجموعی تعددات کو ظاہر کیجیے۔

مرحلہ IV: x- محور پر متعلقہ بالائی جماعتی حدود یا زیریں جماعتی حدود کے ہر نقطے اور y- محور پر اس کے مجموعی تعدد کو ظاہر کیجیے۔

مرحلہ V: ظاہر کیے گئے نقاط کو خط کی مدد سے جوڑیں یا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع یا ترسیم کو بنانے کے لیے خط مستقیم کے قطعوں کا استعمال کیجیے۔

اہم تعریفیں (Important Definition)

وسطانیہ (Median)

وسطانیہ مواد کے سیٹ میں درمیانی قدر ہوتی ہے جب قدروں کو ترتیب صعودی یا نزولی میں ترتیب دیا گیا ہو۔ یہ مواد کو دو برابر نصف حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

چہارمی حصہ (Quartiles)

چہارمی حصہ ایک ترتیب شدہ مواد کے سیٹ کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے، ہر ایک میں 25% مواد شامل ہوتا ہے۔

Q_1 (پہلا چہارمی حصہ)

25% مواد اس قدر سے نیچے ہوتا ہے۔

Q_2 (دوسرا چہارمی حصہ)

50% مواد اس قدر (اسے وسطانیہ بھی کہتے ہیں) سے نیچے ہوتا ہے۔

Q_3 (تیسرا چہارمی حصہ)

75% مواد اس قدر سے نیچے ہوتا ہے۔

یاد رکھیے!
Q_1 زیریں چہارمی حصہ، Q_2 وسطانیہ اور Q_3 بالائی چہارمی حصہ ہے۔

www.ilmkidunya.com

دسواں حصہ (Deciles)

دسواں حصہ ایک ترتیب شدہ مواد کے سیٹ کو دس برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے، ہر حصہ 10% مواد کو ظاہر کرتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں، D_1 سے D_9 تک نو دسویں قدریں ہوتی ہیں۔

> **یاد رکھیے!**
> P_{25} پہلے چہارمی حصہ (Q_1) کے برابر، P_{50} وسطانیہ (Q_2) کے برابر اور P_{75} تیسرے چہارمی حصہ (Q_3) کے برابر ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر، D_3 وہ قدر ہے جس سے 30% مواد نیچے ہوتا ہے اور D_7 وہ قدر ہے۔ جس سے 70% مواد نیچے ہوتا ہے۔

سوواں حصہ (Percentiles)

سوواں حصہ ایک ترتیب شدہ مواد کے سیٹ کو 100 برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ہر حصہ 1% مواد پر مشتمل ہوتا ہے۔ P_1 سے P_{99} تک ننانوے سوویں قدریں ہوتی ہیں۔

اندرونی چہارمی حصہ کی سعت (Interquartile Range)

اندرونی چہارمی حصہ کی سعت ایک ایسا پھیلاؤ کا پیمانہ ہے جو پہلے چہارمی حصہ (Q_1) اور تیسرے چہارمی حصہ (Q_3) کے درمیان فاصلے کو ظاہر کرتا ہے۔ اس کو اس طرح معلوم کیا جاتا ہے:

$$\text{اندرونی چہارمی حصہ کی سعت (IQR)} = Q_3 - Q_1$$

مثال 2: جدول ایک سپیڈ چیک پوائنٹ سے گزرنے والی 90 گاڑیوں کی رفتار (کلومیٹر فی گھنٹہ میں) کے بارے میں معلومات فراہم کرتا ہے۔ کمی کے طریقہ سے مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کی تشکیل کریں اور وسطانیہ، Q_1، Q_3، D_4، P_{95} اور اندرونی چہارمی حصہ کی سعت (IQR) کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

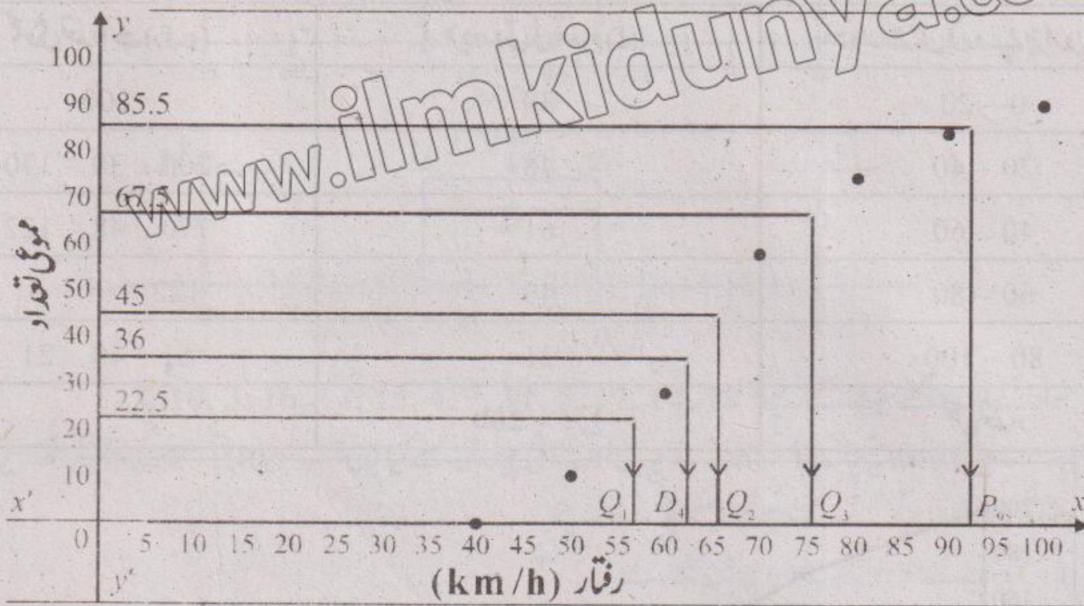
رفتار (کلومیٹر فی گھنٹہ)	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100-
f	10	18	30	17	9	6

حل:

مجموعی تعددات (f)	تعددات (f)	رفتار (کلومیٹر فی گھنٹہ)
10	10	40 – 50
10 + 18 = 28	18	50 – 60
28 + 30 = 58	30	60 – 70
58 + 17 = 75	17	70 – 80
75 + 9 = 84	9	80 – 90
84 + 6 = 90	6	90 – 100
	$n = \sum f = 90$	کل

www.ilmkidunya.com

مجموعی تعددی کثیر الاضلاع



شکل 11.1

وسطانیہ کی پوزیشن $\frac{n}{2}=\frac{90}{2}=45$ ہے۔ y- محور پر 45 سے ایک افقی خط کھینچیں جو کہ منحنی خط تک ملے۔ اور پھر اس نقطہ سے x- محور پر عمود کھینچیں۔ اب x- محور پر اس قدر کو نوٹ کیجیے جہاں عمودی خط نے x- محور کو قطع کیا ہے۔

لہٰذا، وسطانیہ = 65.7

اس طرح ہم P_{95}, D_4, Q_3, Q_1 اور اندرونی چہارمی حصہ کی سعت معلوم کر سکتے ہیں۔

$Q1$ کی پوزیشن $\frac{n}{4}=\frac{90}{4}=22.5$ لہٰذا، منحنی خط سے $Q_1 = 56.9$ ہے۔

Q_3 کی پوزیشن $\frac{3n}{4}=\frac{3(90)}{4}=67.5$ لہٰذا، منحنی خط سے $Q_3 = 75.6$ ہے۔

D_4 کی پوزیشن $\frac{4}{10}=\frac{4(90)}{10}=36$ لہٰذا، منحنی خط سے $D_4 = 62.7$ ہے۔

P_{95} کی پوزیشن $\frac{95n}{100}=\frac{95(90)}{100}=85.5$ لہٰذا، منحنی خط سے $P_{95} = 92.5$ ہے۔

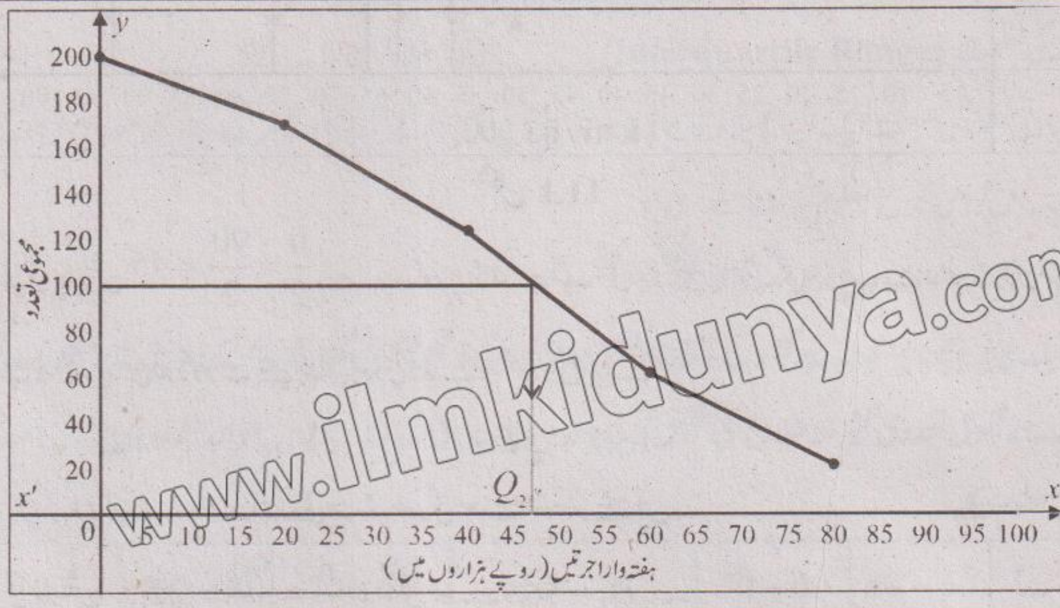
اندرونی چہارمی حصہ کی سعت $(IQR) = Q_3 - Q_1 = 75.6 - 56.9 = 18.7$

مثال 3: درج ذیل تعددی تقسیم کے لیے مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کو زیادہ کے طریقے سے کھینچیں۔ جو مزدوروں کی تعداد کی ہفتہ وار اُجرتیں (روپے ہزاروں میں) ظاہر کرتا ہے اور اسی گراف کی مدد سے Q_2 بھی معلوم کریں۔

ہفتہ وار اجرتیں (روپے ہزاروں میں)	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
مزدوروں کی تعداد	30	48	61	40	21

حل:

ہفتہ وار اجرتیں (روپے ہزاروں میں)	مزدوروں کی تعداد (f)	مجموعی تعددات (c.f.)
0 – 20	30	200
20 – 40	48	200 – 30 = 170
40 – 60	61	170 – 48 = 122
60 – 80	40	122 – 61 = 61
80 – 100	21	61 – 40 = 21
کل تعداد	$\sum f = 200$	



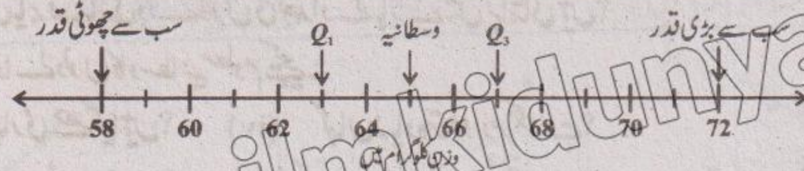
Q_2 کی پوزیشن $\frac{n}{2} = \frac{200}{2} = 100$ ہے۔ لہٰذا، منحنی خط سے $Q_2 = 47.2$ ہے۔

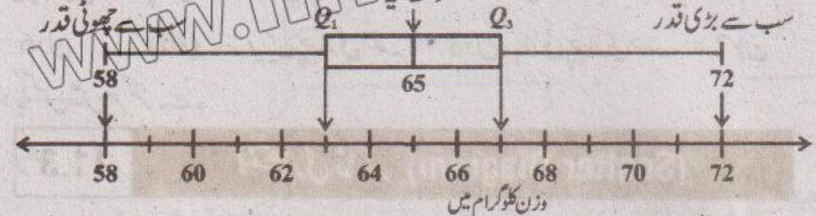
11.2 باکس اور وسکر پلاٹ (Complex Numbers)

باکس اور وسکر پلاٹ یا باکس پلاٹ مواد کے سیٹ کے پانچ عادی خلاصوں (سب سے چھوٹا عدد، پہلا چہارمی حصہ، وسطانیہ، تیسرا چہارمی حصہ اور سب سے بڑا عدد) کو گراف کے ذریعے ظاہر کرتا ہے۔ یہ مواد کی تقسیم کا مشاہدہ اور مواد کے سیٹوں کا موازنہ کرنے کے لیے کارآمد ہے۔ باکس پلاٹ کے کلیدی اجزاء درج ذیل ہیں:

- **باکس:** یہ اندرونی چہارمی حصہ کی سعت کو ظاہر کرتا ہے۔ جو 50% مواد پر مشتمل ہے۔ جسے باکس کے کناروں پر پہلے چہارمی حصہ (Q_1) اور تیسرے چہارمی حصہ (Q_3) سے ظاہر کرتے ہیں۔
- **وسطانیہ:** باکس کے اندر ایک خط جو دوسرے چہارمی حصہ یا مواد کے سیٹ کے درمیانی حصے کو ظاہر کرتا ہے۔
- **وسکر:** باکس سے سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی قدروں تک پھیلے ہوئے خطوط، جو مواد کے مجموعی پھیلاؤ کو ظاہر کرتے ہیں۔

ہم ان معلومات کو باکس اور وسکر پلاٹ پر دکھا سکتے ہیں۔ آغاز میں ہم ایک مناسب سکیل کا استعمال کرتے ہوئے ایک افقی خط کھینچتے ہیں عددی خط پر سب سے چھوٹی قدر، سب سے بڑی قدر اور چہارمی حصوں پر نشان لگاتے ہیں جیسا کہ نیچے دی گئی شکل میں دکھایا گیا ہے۔





مثال 4: مواد کے دیے گئے سیٹ کے لیے: 2, 10, 3, 16, 14, 13, 4, 7, 11, 5, 17, 14, 18

(i) مواد کا وسطانیہ کیا ہے؟ (ii) زیریں اور بالائی چہارمی حصے کیا ہیں؟ (iii) مواد کی انتہائی قدریں کیا ہیں؟

(iv) مواد کو ظاہر کرنے کے لیے اور وسکر پلاٹ بنائیے۔

حل: (i) دیے گئے مواد کو ترتیب صعودی میں لکھنے سے

2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 14, 16, 17, 18

یہاں، n = 13

$$\text{وسطانیہ} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th} \text{ویں قدر} = \left(\frac{13+1}{2}\right)^{th} \text{ویں قدر} = 7 \text{ویں قدر}$$

(ii) زیریں چہارمی حصہ = $\left(\frac{n+1}{4}\right)^{th}$ ویں قدر = $\left(\frac{13+1}{4}\right)^{th}$ ویں قدر = 3.5ویں قدر چوں کہ زیریں چہارمی حصہ کی 3.5ویں قدر ہے، اس لیے ہم تیسری اور چوتھی قدر کا اوسط لیتے ہیں۔

$$\text{زیریں چہارمی حصہ} = \frac{4+5}{2} = 4.5$$

(iii) بالائی چہارمی حصہ = 3$\left(\frac{n+1}{4}\right)^{th}$ ویں قدر = 3$\left(\frac{13+1}{4}\right)^{th}$ ویں قدر = 10.5ویں قدر چوں کہ بالائی چہارمی حصہ کی 10.5 ویں قدر ہے، اس لیے 10ویں اور 11ویں قدر کا اوسط لیتے ہیں۔

$$\text{بالائی چہارمی حصہ} = \frac{14+6}{2} = 15$$

(iii) سب سے چھوٹی قدر = 2، سب سے بڑی قدر = 18 (iv) باکس اور سکر پلاٹ نیچے بنایا گیا ہے۔

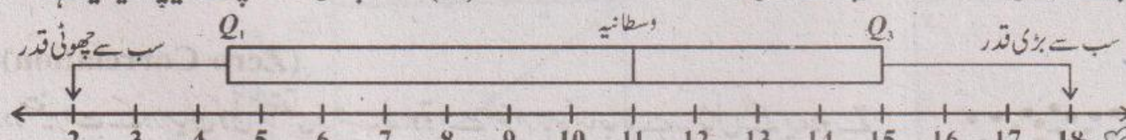
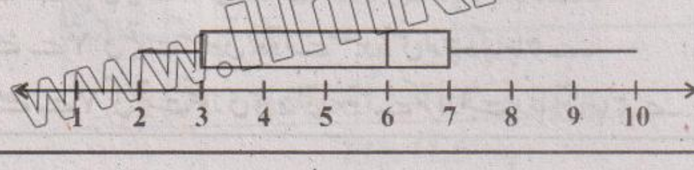


Fig. 11.4

مثال 5: کرن نے پچھلے سال کے دوران ہر ماہ بارش یا برف باری والے دنوں کی تعداد ریکارڈ کی۔ درج ذیل باکس اور وسکر پلاٹ اس کے مواد کو ظاہر کرتا ہے۔



www.ilmkidunya.com

(i) انتہائی قدریں بارش یا برف باری والے دنوں کی تعداد کے بارے میں کیا بتاتی ہیں؟

(ii) بارش یا برف باری والے دنوں کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

(iii) زیریں اور بالائی چہارمی حصے کیا ہیں؟ (iv) کہاں زیادہ تر مواد مرتکز ہے؟

حل: (i) ایک مہینے میں بارش یا برف باری والے دنوں کی سب سے کم تعداد 2 تھی اور سب سے زیادہ تعداد 10 تھی۔

(ii) وسطانیہ = 6 دن (iii) زیریں چہارمی حصہ = 3 دن، بالائی چہارمی حصہ = 7 دن

(iv) زیادہ تر مواد باکس میں مرتکز ہے۔

11.3 انتشاری خاکہ (Scatter Diagram)

انتشاری خاکہ (یا انتشاری پلاٹ) ایک گرافیکل طریقہ ہے جو دو عددی متغیرات کے درمیان تعلق کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ گراف پر ہر نقطہ قدروں کے ایک جوڑے کو ظاہر کرتا ہے۔ ایک متغیر کو افقی محور اور دوسرے کو عمودی محور پر مرتسم کیا جاتا ہے۔

موزوں ترین خط (A Line of Best Fit)

کیا آپ جانتے ہیں؟
انتشاری خاکہ دو متغیرات کے درمیان ارتباط کو ظاہر کرتا ہے۔

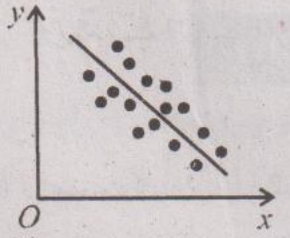
موزوں ترین خط (رجحان کا خط بھی کہا جاتا ہے) ایک خط مستقیم ہے جو انتشاری خاکے کے ذریعے کھینچا جاتا ہے جو مواد کے رجحان کی سمت کو بہترین طریقے سے ظاہر کرتا ہے۔ اسے اندازاً موزوں ترین خط کہا جاتا ہے کیونکہ یہ بصری طور پر، مواد کے مجموعی رجحان کی بہترین نمائندگی کرنے کے لیے عام رہنما اصولوں کی بنیاد پر کھینچا جاتا ہے۔ مثال طور پر خط کے اوپر اور نیچے نقاط کی تعداد برابر ہونی چاہیے۔

ارتباط (Correlation)

یہ دو متغیرات کے درمیان تعلق ہے، جہاں ایک متغیر میں تبدیلی دوسرے میں تبدیلی سے وابستہ ہوتی ہے۔ ارتباط کے مطابق انتشاری خاکے کو درج ذیل تین اقسام میں تقسیم کیا گیا ہے:

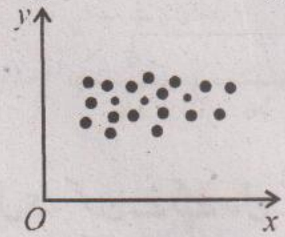
مثبت ارتباط (Positive Correlation)

اگر ایک متغیر بڑھنے سے دوسرا بھی بڑھے، تو اسے مثبت ارتباط کہا جاتا ہے۔ اگر آپ مواد کے نقاط کے ساتھ ایک خط مستقیم کھینچیں تو خط کی ڈھلوان اوپر کی طرف جائے گی۔ مثال کے طور پر، قد اور وزن۔



منفی ارتباط (Negative Correlation)

اگر ایک متغیر بڑھنے سے دوسرا بھی کم ہو تو اسے منفی ارتباط کہا جاتا ہے۔ اگر آپ مواد کے نقاط کے ساتھ ایک خط مستقیم کھینچیں تو خط کی ڈھلوان نیچے کی طرف جائے گی۔ مثال کے طور پر، رفتار اور سفری وقت۔



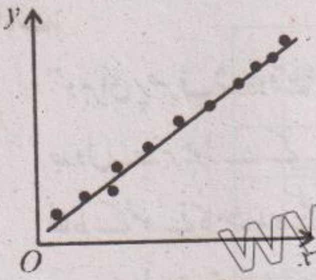
صفر ارتباط (Zero Correlation)

اگر دو متغیرات کے درمیان کوئی مستقل ترتیب نہ ہو تو اسے صفر ارتباط کہا جاتا ہے۔ مثال کے پر، جوتے کا سائز اور ٹیسٹ میں حاصل کردہ نمبر۔

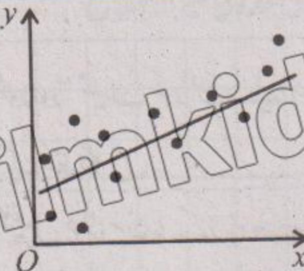
انتشاری خاکے کا ارتباطی نمونہ (Correlation Pattern of Scatters Diagram)

- جب X کی قیمت بڑھنے سے Y کی قیمت بڑھتی ہو تو اسے مضبوط مثبت ارتباط کہا جاتا ہے۔
- جب X کی قیمت بڑھنے سے Y کی قیمت کم ہوتی ہو تو اسے مضبوط منفی ارتباط کہا جاتا ہے۔
- جب X کی قیمت بڑھنے سے Y کی قیمت تھوڑی سی بڑھتی ہو تو اسے کمزور مثبت ارتباط کہا جاتا ہے۔

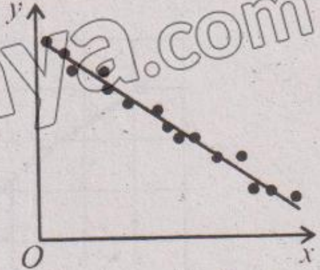
www.ilmkidunya.com



مضبوط مثبت ارتباط

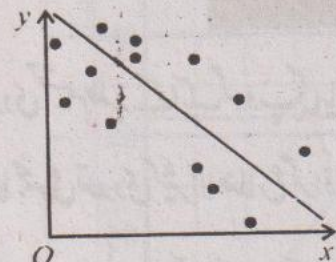


کمزور مثبت ارتباط

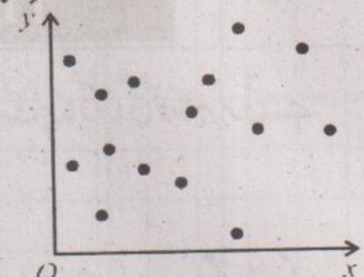


مضبوط منفی ارتباط

- جب X کی قیمت بڑھنے سے Y کی قیمت تھوڑی سی کم ہوتی ہو تو اسے کمزور منفی ارتباط کہا جاتا ہے۔
- جب دو متغیرات کے درمیان کوئی تعلق نہ ہو، تو اسے صفر ارتباط کہا جاتا ہے۔



کمزور منفی ارتباط



صفر ارتباط

مثال 6: نیچے دیا گیا جدول دس طلبہ کے دہرائی میں صرف شدہ وقت اور اس کے متعلقہ ٹیسٹ سکور کو ظاہر کرتا ہے۔

دہرائی پر صرف کیا گیا وقت (گھنٹوں میں)	0.5	1	4	6	2	3	7	5	8	9
ٹیسٹ سکور (%)	22	38	62	68	30	46	70	60	86	90

(i) انتشاری خاکہ بنائیں اور موزوں ترین خط کھینچیں۔ (ii) انتشاری خاکے میں دکھائی گئی ارتباط کی وضاحت کیجیے۔

(iii) سلیم نے دہرائی ٹیسٹ پر 5.5 گھنٹے صرف کیے۔ موزوں ترین خط کا استعمال کرتے ہوئے ٹیسٹ سکور معلوم کیجیے۔

حل:

(i)

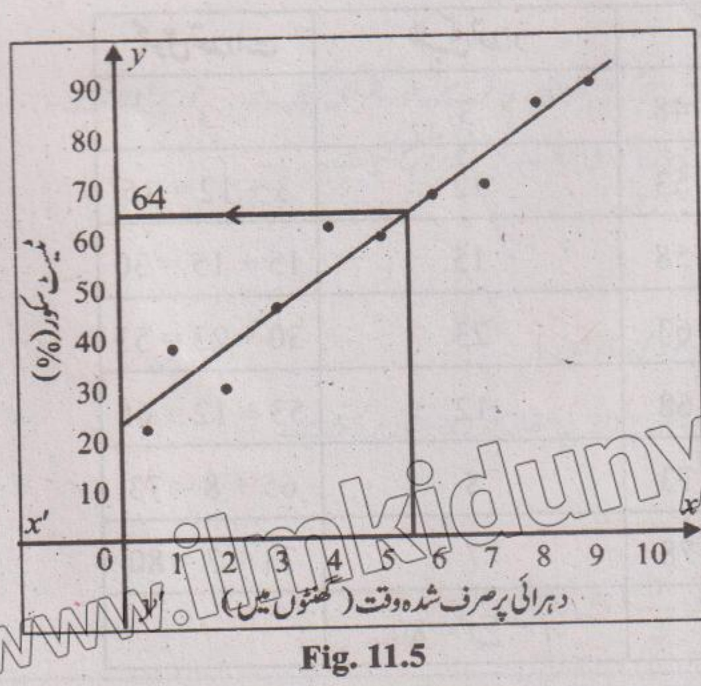


Fig. 11.5

اقدامات:

- "دہرائی پر صرف شدہ وقت" کے لیے x- محور اور "ٹیسٹ سکور" کے لیے y- محور کھینچیں۔
- جدول سے ہر جوڑے کے لیے، گراف پر ایک نقطہ لگائیں۔
- نقاط کے نمونے کا مشاہدہ کیجیے اور ایک خط کھینچیں جو تمام نقاط کے زیادہ سے زیادہ قریب ہو۔

(ii) جب دہرائی پر صرف کیا وقت بڑھتا ہے تو ٹیسٹ سکور بھی بڑھتا ہے۔ اس لیے، دو متغیرات کے درمیان مضبوط مثبت ارتباط ہے۔

(iii) 5.5 گھنٹوں میں، سلیم کا ٹیسٹ سکور 64% ہوگا۔

حل مشق 11.1

1- درج ذیل تعددی تقسیم طلبہ کے ایک گروپ کی یادداشت کے ٹیسٹ پر کارکردگی کو ظاہر کرتی ہے:

(i) گروپ سکور کا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع گراف بنائیے۔

(ii) وسطانیہ، زیریں اور بالائی چہارمی حصے، P_{90}, D_3 اور اندرونی چہارمی حصے کی سعت گراف کی مدد سے معلوم کیجیے۔

نوٹ: تمام جوابات مکمل اعداد میں لکھیں۔

سکور	44 – 48	49 – 53	54 – 58	59 – 63	64 – 68	69 – 73	74 – 78
طلبہ کی تعداد	3	12	15	23	12	8	7

(i) گروپ سکور کا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع گراف بنائیے۔

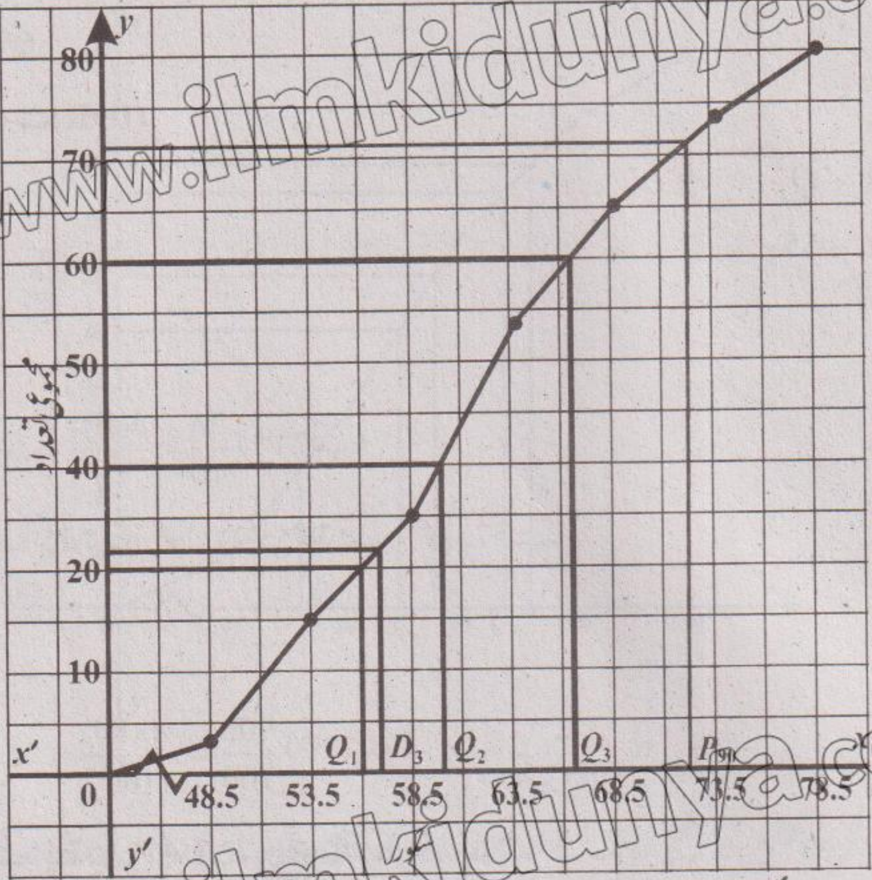
جواب:

مجموعی تعددات

سکور	طلبہ کی تعداد	مجموعی تعددات
44 – 48	3	3
49 – 53	12	3 + 12 = 15
54 – 58	15	15 + 15 = 30
59 – 63	23	30 + 23 = 53
64 – 68	12	53 + 12 = 65
69 – 73	8	65 + 8 = 73
74 – 78	7	73 + 7 = 80
کل	$n = \sum f = 80$	

www.ilmkidunya.com

مجموعی تعددی کثیر الاضلاع



(ii) وسطانیہ، زیریں اور بالائی چہارمی حصے، P_{90}, D_3 اور اندرونی چہارمی حصے کی سعت گراف کی مدد سے معلوم کیجیے۔

سکور	44 – 48	49 – 53	54 – 58	59 – 63	64 – 68	69 – 73	74 – 78
طلبہ کی تعداد	3	12	15	23	12	8	7

حل: وسطانیہ کی پوزیشن $\frac{n}{2} = \frac{80}{2} = 40$

y- محور پر 40 سے ایک افقی خط کھینچیں جو کہ مختی خط تک جا کر ملے۔ اور پھر اس نقطہ سے x- محور پر عمود کھینچیں۔

اب x- محور پر اس قدر کو نوٹ کیجیے جہاں عمودی خط نے x- محور کو قطع کیا ہے۔

لہٰذا وسطانیہ = 61

زیریں چہارمی (Q_1)

Q_1 کی پوزیشن $\frac{n}{4} = \frac{80}{4} = 20$ (ویں 20 قدر)

اب ہم گراف سے دیکھتے ہیں کہ y- محور پر 20 کی متعلقہ قدر x- محور پر 55 ہے۔

لہٰذا = 55

Q_3 کی پوزیشن

Q_3 کی پوزیشن $\frac{3n}{4} = \frac{3(80)}{4} = 60$ (ویں 60 قدر)

اب ہم گراف سے دیکھتے ہیں y- محور پر 60 کی متعلقہ قدر x- محور پر 66 ہے۔

لہٰذا $Q_1 = 66$

اندرونی چہارمی حصہ کی سعت (IQR)

$$\therefore IQR = Q_3 - Q_1$$
$$= 66 - 55$$
$$= IQR = 11$$

تیسرا دسواں حصہ (D_3)

D_3 کی پوزیشن $24 = \frac{3(80)}{10} = \frac{3n}{10}$ (24^{th} قدر)

اب ہم گراف سے دیکھتے ہیں y- محور پر 24 کی متعلقہ قدر x- محور پر 57 ہے۔

لہٰذا $Q_3 = 57$

90^{th} کا سوواں حصہ

P_{90} کی پوزیشن $72 = \frac{90(80)}{100} = \frac{90n}{100}$ (72^{th} قدر)

اب ہم گراف سے دیکھتے ہیں y- محور پر 72 کی متعلقہ قدر x- محور پر 73 ہے۔

لہٰذا $P_{90} = 73$

2- درج ذیل سکور کی تقسیم کے لیے ترسیم بنائیے:

109 – 119	99 – 109	89 – 99	79 – 89	69 - 79	سکور
5	8	13	10	4	*f*

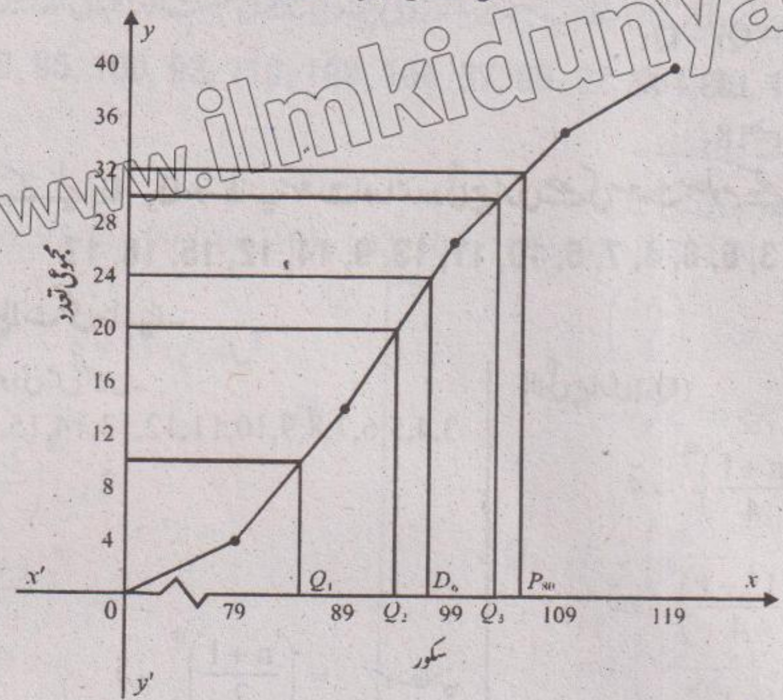
وسطانیہ، زیریں اور بالائی چہارمی حصے، P_{80}، D_6 اور اندرونی چہارمی حصہ کی سعت گراف کی مدد سے معلوم کیجیے۔

حل:

سکور	*f*	*cf*
69 – 79	4	4
79 – 89	10	4 + 10 = 14
89 – 99	13	14 + 13 = 27
99 – 109	8	27 + 8 = 35
109 – 119	5	35 + 5 = 40
کل	n-∑f = 40	

www.ilmkidunya.com

مجموعی تعددی کثیر الاضلاع



وسطانیہ: وسطانیہ کی پوزیشن $20 = \frac{n}{2} = \frac{40}{2}$ (20 ویں قدر)

y- محور پر 20 سے ایک افقی خط کھینچیں جو کہ منحنی خط تک ملے اور پھر x- محور پر عمود کھینچیں۔ اب x- محور پر اس قدر کو نوٹ کیجیے جہاں خط نے x- محور کو قدر کیا ہے۔ لہٰذا۔

وسطانیہ $= 94$

زیریں چھارمی حصہ (Q_1): Q_1 کی پوزیشن $10 = \frac{n}{4} = \frac{40}{2}$ (10 ویں قدر)

اب ہم گراف سے دیکھتے ہیں y- محور پر 10 کی متعلقہ قدر x- محور پر 85 ہے۔

لہٰذا $Q_1 = 85$

بالائی چھارمی (Q_3): Q_3 کی پوزیشن $\frac{3n}{4} = \frac{3(40)}{4}$ (30 ویں قدر)

اب ہم گراف سے دیکھتے ہیں کہ y- محور پر 30 کی متعلقہ قدر x- محور پر 103 ہے۔

لہٰذا $Q_3 = 103$

چھٹا دسواں حصہ (D_6): D_6 کی پوزیشن $24 = \frac{6n}{10} = \frac{6(40)}{10}$ (24 ویں قدر)

اب ہم گراف سے دیکھتے ہیں کہ y- محور پر 24 کی متعلقہ قدر x- محور پر 97 ہے۔

لہٰذا $D_6 = 97$

80^{th} کا سواں حصہ: P_{80} کی پوزیشن $32 = \frac{80n}{100} = \frac{80(40)}{100}$ (32 ویں قدر)

اب ہم گراف سے دیکھتے ہیں کہ y- محور پر 32 کی متعلقہ قدر x- محور پر 105 ہے۔

لہٰذا $P_{80} = 105$

www.ilmkidunya.com

$\therefore$ IQR $= Q_3 - Q_1$

$= 103 - 85$

IQR $= 18$

-3 دیے گئے مواد کے لیے Q_1، Q_3، وسطانیہ، سعت اور اندرونی چہارمی حصے کی سعت معلوم کیجیے۔

3, 6, 8, 4, 7, 5, 10, 11, 13, 9, 14, 12, 15, 16, 17

باکس اور وسکر پلاٹ بھی بنائیے۔

حل: دیے گئے مواد کو صعودی میں لکھیں۔

3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17

یہاں

کل قیمتیں $= n = 15$

وسطانیہ

وسطانیہ $= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ قدر

$= \left(\frac{15+1}{2}\right)^{th}$ قدر

$= \left(\frac{16}{2}\right)^{th}$ قدر

$=$ آٹھویں قدر $\Rightarrow$ وسطانیہ $= 10$

زیریں حصہ (Q_1)

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)^{th}$

$= \left(\frac{15+1}{4}\right)^{th}$ قدر

$= \left(\frac{16}{4}\right)^{th}$ قدر

$=$ چوتھی قدر $\Rightarrow Q_1 = 6$

بالائی چہارمی (Q_3)

$Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)^{th}$ قدر

$= 3\left(\frac{15+1}{4}\right)^{th}$ قدر

$= 3\left(\frac{16}{4}\right)^{th}$ قدر

$= [3(4)]^{th}$ قدر

$= 12^{th}$ قدر $\Rightarrow Q_3 = 14$

سعت

سعت = سب سے بڑی قدر − سب سے چھوٹی قدر

سعت $= 17 - 3 = 14$

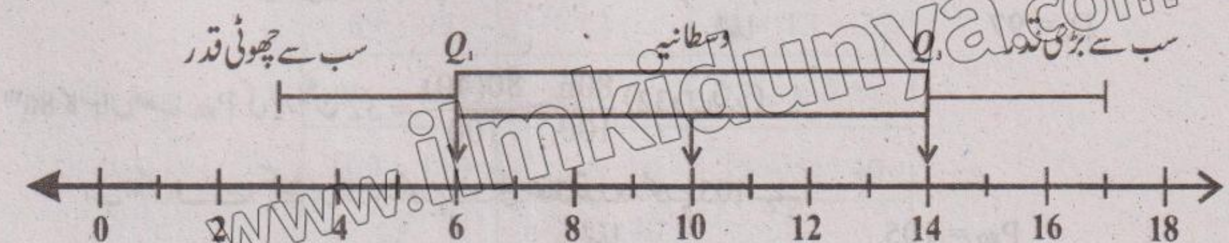
Interquartile Range (IQR)

IQR $= Q_3 - Q_1$

$= 14 - 6$

IQR $= 8$

باکس اور وسکر پلاٹ



www.ilmkidunya.com

4- درج ذیل مواد کے لیے Q_1، Q_3، وسطانیہ، سعت، اندرونی چہارمی حصے کی سعت اور انتہائی قدروں کو معلوم کیجیے۔

102, 98, 95, 100, 93, 110, 108, 104, 97, 96, 92, 101, 99, 105, 107

باکس اور وسکر پلاٹ بھی بنائیے۔

حل: دیے گئے مواد کو ترتیبِ صعودی میں لکھیں۔

92, 93, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 104, 105, 107, 108, 110

یہاں

کل قدریں $n = 15$

وسطانیہ

$$\text{وسطانیہ} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th} \text{قدر}$$

$$= \left(\frac{15+1}{2}\right)^{th} \text{قدر}$$

$$= \left(\frac{16}{2}\right)^{th} \text{قدر}$$

= آٹھویں قدر $\Rightarrow$ وسطانیہ = 100

زیریں چہارمی (Q_1)

$$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)^{th} \text{قدر}$$

$$= \left(\frac{15+1}{4}\right)^{th} \text{قدر}$$

$$= \left(\frac{16}{4}\right)^{th} \text{قدر}$$

= چوتھی قدر $\Rightarrow Q_1 = 96$

بالائی قدر (Q_3)

$$Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)^{th} \text{قدر}$$

$$= 3\left(\frac{15+1}{4}\right)^{th} \text{قدر}$$

$$= 3\left(\frac{16}{4}\right)^{th} \text{قدر}$$

$$= [3(4)]^{th} \text{قدر}$$

$= 12^{th}$ قدر $\Rightarrow Q_3 = 105$

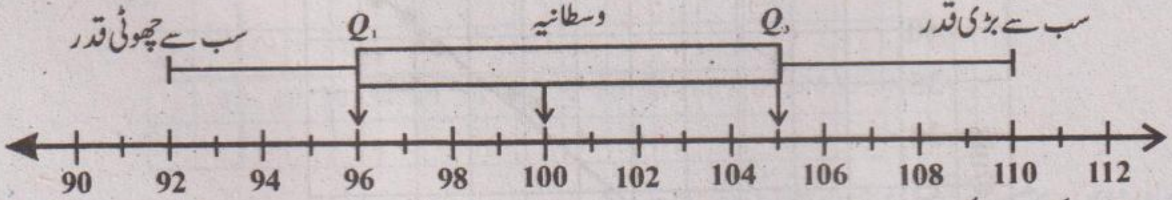
سعت

سعت = بڑی قدر - چھوٹی قدر

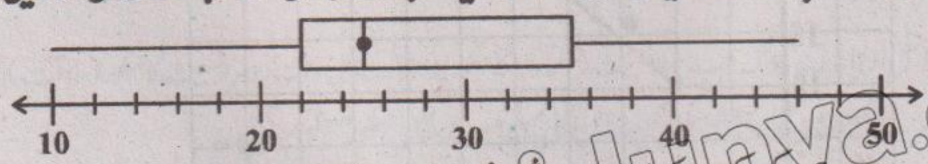
$92 - 110 =$

سعت $= 18$

باکس اور وسکر پلاٹ



5- درج ذیل باکس اور سکر پلاٹ کے لیے Q_1, Q_3، وسطانیہ، سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی قدریں معلوم کیجیے:



حل: زیریں چہارمی حصہ (Q_1): ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ڈبہ 22 سے شروع ہو رہا ہے۔ لہٰذا

$Q_1 = 22$

زیریں چہارمی حصہ (Q_3): ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ڈبہ 35 سے ختم ہوتا ہے۔ لہٰذا

$Q_3 = 35$

www.ilmkidunya.com

وسطانیہ: باکس کے اندر نقطے سے دکھائی گئی عمودی لکیر 25 پر ہے۔

وسطانیہ = 25

سب سے چھوٹی قدر: بائیں جانب کی وسکر بالکل 10 پر ختم ہوا ہے۔ لہٰذا

سب سے چھوٹی قدر = 10

سب سے بڑی قدر: دائیں جانب وسکر بالکل 46 پر ختم ہوتا ہے۔

سب سے بڑی قدر: = 46

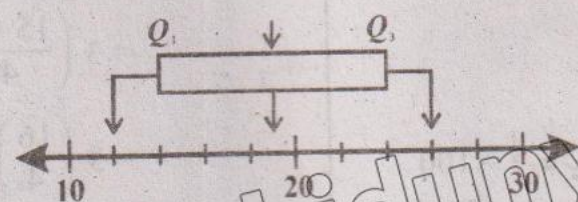
-6 باکس اور وسکر پلاٹ بنائیے اگر 12 = سب سے چھوٹی قدر، 26 = سب سے بڑی قدر، 19 = وسطانیہ، $Q_1 = 14$ اور $Q_3 = 24$ ہوں۔

حل: دیا گیا ہے

26 = بڑی قدر ,12 = چھوٹی قدر

$= 19$ وسطانیہ, $Q_1 = 14$ اور $Q_3 = 24$

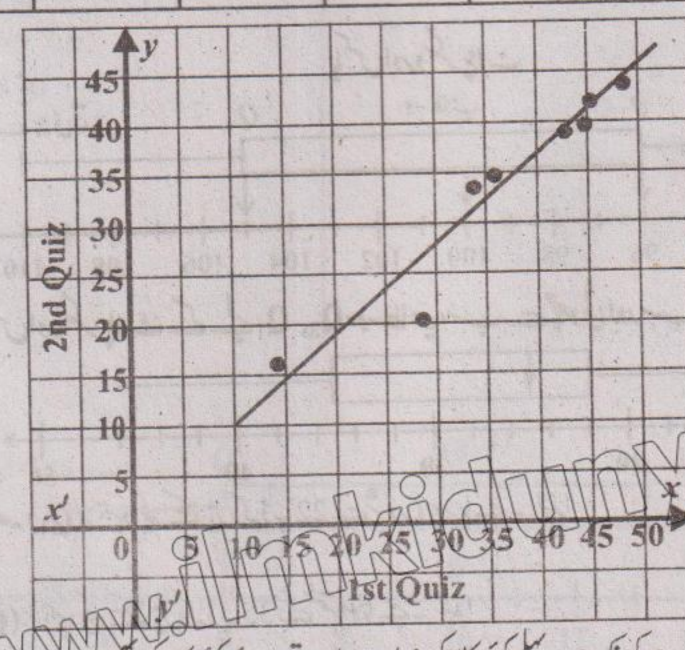
باکس اور وسکر پلاٹ



-7 طلبہ کے کوئز سکور کے لیے ایک انتشاری خاکہ بنائیے اور موزوں ترین خط کھینچیں۔ پہلے اور دوسرے کوئز کے درمیان ارتباط کی بھی وضاحت کیجیے۔

پہلا کوئز	14	28	34	36	43	45	46	49
دوسرا کوئز	16	20	33	35	38	39	42	43

حل:



ارتباط: یہ ایک مضبوط مثبت ارتباط ہے کیونکہ جب پہلی کوئز کا سکور زیادہ ہوتا ہے تو دوسری کوئز کا سکور بھی زیادہ ہو جاتا ہے۔

www.ilmkidunya.com

8- درج ذیل جدول میں فٹ بال کھلاڑیوں کے 200 میں سے ٹیسٹ سکورز دیے گئے ہیں (ایک رفتار کی پیمائش اور دوسرا مضبوطی کی پیمائش)

80	150	136	50	110	100	40	70	38	20	پہلا ٹیسٹ
100	36	44	140	50	170	120	130	142	160	دوسرا ٹیسٹ

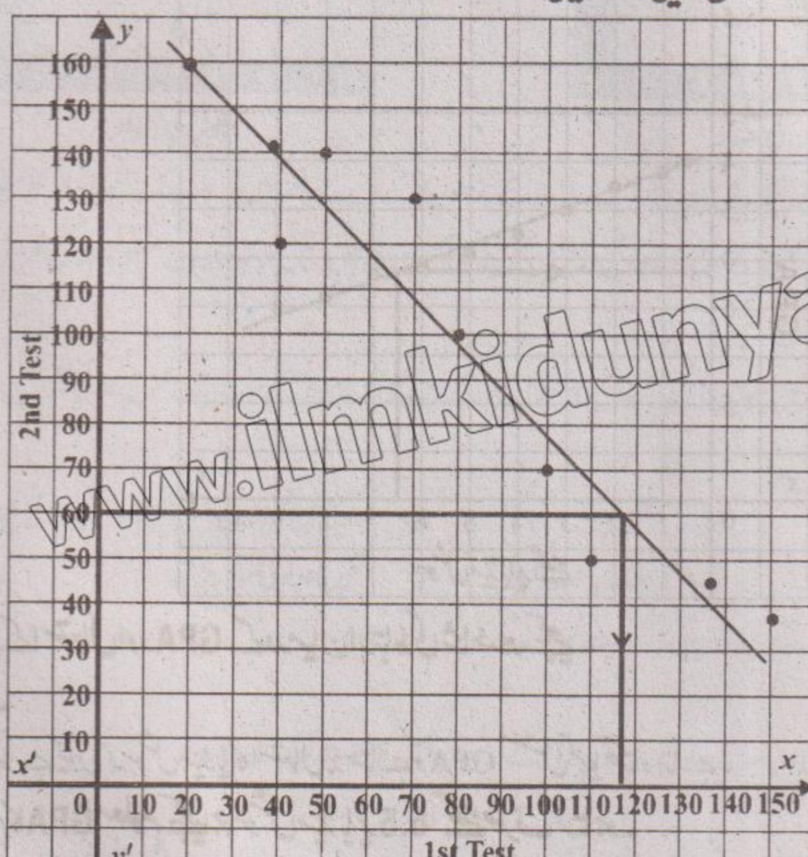
(i) انتشاری خاکہ بنائیے اور موزوں ترین خط کھینچیں۔

(ii) پہلے اور دوسرے ٹیسٹ کے درمیان ارتباط کی وضاحت کیجیے۔

(iii) عبداللہ نے دوسرے ٹیسٹ میں 60 سکور کیا۔ اس کا پہلے ٹیسٹ میں سکور معلوم کیجیے۔

(i) انتشاری خاکہ بنائیے اور موزوں ترین خط کھینچیں۔

حل:



(ii) پہلے اور دوسرے ٹیسٹ کے درمیان ارتباط کی وضاحت کیجیے۔

حل: ارتباط

اس کا ارتباط مضبوط منفی ارتباط ہے کیونکہ جب پہلا ٹیسٹ (رفتار) کا سکور بڑھتا ہے اس وقت دوسرا ٹیسٹ کا سکور (طاقت) کا سکور کم ہوتا ہے۔

(iii) عبداللہ نے دوسرے ٹیسٹ میں 60 سکور کیا۔ اس کا پہلے ٹیسٹ میں سکور معلوم کیجیے۔

حل: تخمینہ

اگر عبداللہ نے 60 سکور دوسرے ٹیسٹ میں لیے ہیں تو y- محور میں 60 سے ایک افقی خط کھینچے لائن آف بیسٹ پر ملے اور نیچے کی طرف عمود خط x- محور کی بنیاد کی طرف ٹیسٹ 1 کی طرف جائے گا جو تقریباً 110 سے 120 کے درمیان ہوگا۔

لہٰذا 110 سے 120 $\cong$ 115.5

www.ilmkidunya.com

9- درج ذیل جدول میں یونیورسٹی کے طلبہ کے روزانہ سوشل میڈیا کے استعمال کے گھنٹے اور GPA دیے گئے ہیں:

سوشل میڈیا کے گھنٹے	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
GPA	4.0	3.9	3.7	3.5	3.3	3.1	2.9	2.8	2.6	2.5

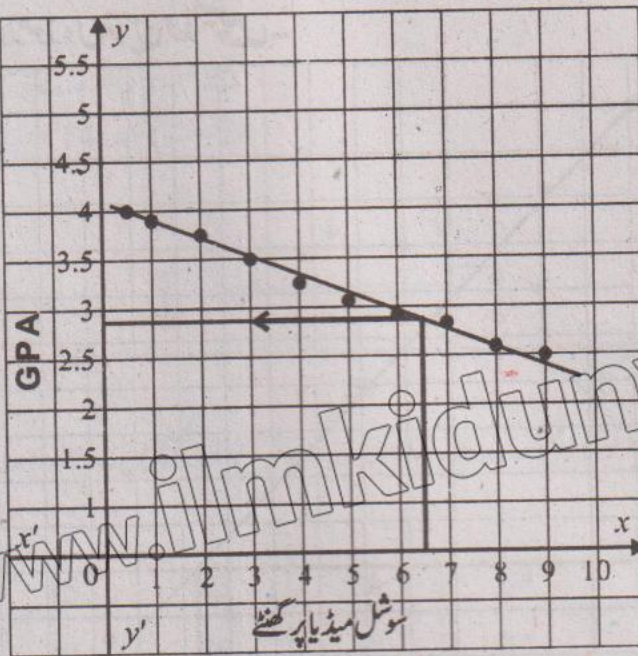
(i) انتشاری خاکہ بنائیے اور موزوں ترین خط کھینچیں۔

(ii) سوشل میڈیا کے استعمال اور GPA کے درمیان ارتباط کی شناخت کیجیے۔

(iii) اس طالب علم کا GPA معلوم کیجیے جو سوشل میڈیا پر 6.5 گھنٹے صرف کرتا ہو۔

(i) انتشاری خاکہ بنائیے اور موزوں ترین خط کھینچیں۔

حل:



(ii) سوشل میڈیا کے استعمال اور GPA کے درمیان ارتباط کی شناخت کیجیے۔

حل: ارتباط کی فطرت:

یہ ایک منفی ارتباط ہے کیوں کہ سوشل میڈیا کا استعمال بڑھتا ہے تو GPA مسلسل کم یا گھٹتا رہتا ہے۔

(iii) اس طالب علم کا GPA معلوم کیجیے جو سوشل میڈیا پر 6.5 گھنٹے صرف کرتا ہو۔

6.5 گھنٹوں کا تخمینہ:

جیسا کہ مواد میں GPA مسلسل گھٹتا ہے 0.2 سے 0.1 پر گھنٹے میں ہم دیکھ سکتے ہیں 6 گھنٹے میں (2.9) ہے اور 65 گھنٹے کی قیمت بلکل درمیان میں ہوگی۔

$2.85 \cong 2.9$

11.4 انتشار کے پیمانے (Measeres of Dispersion)

درج ذیل مواد دو بلے بازوں کے پچھلے دس میچوں میں بنائے گئے رنز کو ظاہر کرتا ہے۔

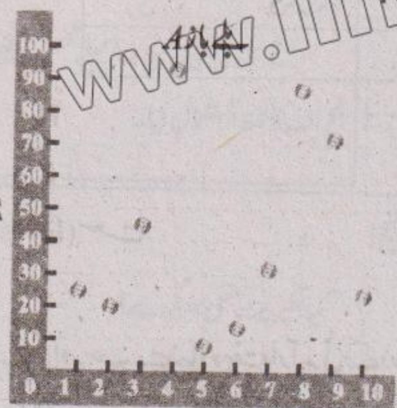
بلے باز *A*: 25, 20, 45, 93, 8, 14, 32, 87, 72, 24

بلے باز *B*: 33, 50, 47, 38, 45, 40, 36, 48, 37, 46

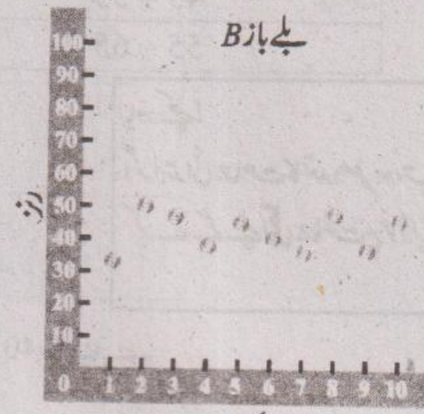
www.ilmkidunya.com

$$\text{بلے باز } A \text{ کا اوسط} = \frac{25+20+45+93+8+14+32+87+72+24}{10} = \frac{420}{10} = 42$$

$$\text{بلے باز } A \text{ کا اوسط} = \frac{33+50+47+38+45+40+36+48+37+46}{10} = \frac{420}{10} = 42$$



میچوں کی تعداد



میچوں کی تعداد

اگرچہ دونوں بلے بازوں کا اوسط سکور ایک ہی ہے، لیکن بلے باز B کے رنز اوسط کے قریب مرتکز ہیں، جب کہ بلے باز A کا سکور 0 سے 100 تک وسیع پیمانے پر پھیلا ہوا ہے۔ اس لیے یہ سمجھنے کے لیے کہ مواد کی قدریں کس قدر پھیلی ہوئی ہیں ہمیں مزید شماریاتی معلومات کی ضرورت ہے۔ اس مقصد کے لیے، ہم انتشار کے پیمانوں کا استعمال کریں گے۔

انتشار کے پیمانے شماریاتی آلات ہیں جو یہ بتانے کے لیے استعمال ہوتے ہیں کہ ایک مواد کے سیٹ میں بکھری ہوئی قدریں ایک مرکزی قدر کے گرد کس طرح پھیلی ہوئی ہیں۔

1- سعت   2- تغیریت   3- معیاری انحراف   4- اندرونی چہارمی حصے کی سعت
5- اوسط انحراف   6- چہارمی حصہ انحراف   7- تغیر کا عددی سر

اس یونٹ میں ہم صرف چند انتشار کے پیمانوں کی وضاحت کریں گے۔

سعت (Range)

سب سے بڑی قدر (H) اور سب سے چھوٹی قدر (L) کے درمیان فرق کو سعت کہا جاتا ہے۔

$$\text{سعت } (R) = H - L$$

جہاں H سب سے بڑی قدر اور L سب سے چھوٹی قدر ہے۔

مثال 7: درج مواد کی سعت معلوم کیجیے:

15, 22, 18, 30, 17, 25

$H = 30;\ L = 15$

$$\text{سعت } (R) = H - L$$
$$= 30 - 15 = 15$$

مثال 8: نیچے دیا گیا جدول ملازمین کے ایک گروپ کی ہفتہ وار آمدنی (روپے ہزاروں میں) کو ظاہر کرتا ہے۔ ہفتہ وار آمدنی کی سعت معلوم کیجیے۔

خود آزمائی

پہلے 20 مفرد اعداد کی سعت کیا ہے؟

پہلے 20 مفرد اعداد ہیں۔

2, 3, 5, 7, 11, 13, …, 61, 67, 71

یہاں

سب سے بڑی قدر (H) = 71

سب سے چھوٹی قدر (L) = 2

سعت (R) = H − L

= 71 − 2

سعت (R) = 69

www.ilmkidunya.com

ملازمین کی تعداد	(ہزار روپے) ہفتہ وار آمدنی
4	25 – 35
6	35 – 45
5	45 – 55
3	55 – 65

حل: یہاں $H = 65$

$L = 25$

سعت $(R) = H - L$

$= 65 - 25 = 40$

یاد رکھیے!
اگر ابتدائی جماعت کا تعدد صفر ہو، تب بھی سعت معلوم کرنے کے لیے اگلی جماعت پر غور کیا جائے گا۔

لہٰذا، ملازمین کی سب سے کم اور سب سے زیادہ ہفتہ وار آمدنی کے درمیان فرق 40,000 روپے ہے۔

تغیریت (Variance)

قدروں کی اوسط سے ان کے انحرافات کے مربعوں کی اوسط تغیریت کہلاتی ہے۔ اسے σ^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے (جسے سگما سکوائر پڑھا جاتا ہے)۔

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ قدریں ہوں تو تغیریت کے درج ذیل کلیے ہیں:

غیر گروہی مواد کے لیے
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

غیر گروہی مواد کے لیے
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_1^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_1}{n}\right)^2$$

فرض کیا $x_1, x_2, \ldots, x_n$ قدریں ہیں جن کے تعددات بالترتیب $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ ہیں۔

گروہی مواد کے لیے
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

یا گروہی مواد کے لیے
$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_1^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}\right)^2}$$

نوٹ:
تغیریت جتنی زیادہ ہوگی، مواد اتنا ہی پھیلا ہوا ہوگا۔ اور تغیریت جتنی کم ہوگی، مواد اتنا ہی زیادہ یکساں یا اوسط کے قریب ترین مرتکز ہوگا۔

معیاری انحراف (Standard Deviation)

معیاری انحراف قدروں کی اوسط سے ان کے انحرافات کے مربعوں کی اوسط کا مثبت جذر المربع ہوتا ہے۔ اسے σ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

معیاری انحراف ہمیں یہ سمجھنے میں مدد کرتا ہے کہ قدریں اوسط سے کس حد تک مختلف ہیں۔

www.ilmkidunya.com

غیر گروہی مواد کے لیے

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

گروہی مواد کے لیے

$$\text{یا} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

تاریخ:
کارل پیئرسن وہ پہلے شخص تھے جنھوں نے معیاری انحراف کا لفظ استعمال کیا۔

گروہی مواد کے لیے

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

چیلنج!
کیا تغیریت منفی ہوگی ہے؟
جواب: جی نہیں تغیریت منفی نہیں ہوسکتا کیونکہ اس کے حل میں اعداد کا مربع لیا جاتا ہے اور صرف صفر یا مثبت قدروں کا جمع کیا جاتا ہے۔

گروہی مواد کے لیے

$$\text{یا} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}\right]^2}$$

مثال 9: ایک فیکٹری درج ذیل لمبائیوں (سینٹی میٹر میں) کی سلاخیں تیار کرتی ہے۔

50.1, 49.9, 50.0, 50.2, 49.8

معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہوئے یکسانیت کی جانچ کیجیے۔

حل:

$$\overline{x} = \frac{50.1 + 49.9 + 50.0 + 50.2 + 49.8}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

x	$x - \overline{x}$	$(x - \overline{x})^2$
50.1	0.1	0.01
49.9	–0.1	0.01
50.0	0	0.00
50.2	0.2	0.04
49.8	–0.2	0.04
		$\sum(x - \overline{x})^2 = 0.10$

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x - \overline{x})^2}{n} = \frac{0.10}{5} = 0.02 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0.02} = 0.141\text{cm}$$

چوں کہ معیاری انحراف بہت کم ہے، یہ سلاخوں کی لمبائیوں میں یکسانیت کو ظاہر کرتا ہے۔

www.ilmkidunya.com

مثال 10: ہفتے کے ہر دن بیچے جانے والے قالینوں کی تعداد 13, 8, 4, 9, 7, 12, 10 ہے۔ اس کی تغیریت معلوم کیجیے۔

x	13	8	4	9	7	12	10	$\Sigma x = 63$
x^2	169	64	16	81	49	144	100	$\Sigma x^2 = 623$

گروہی مواد کے لیے

$$\sigma = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$= \frac{623}{7} - \left(\frac{63}{7}\right)^2 = 89 - 81 = 8$$

چیلنج!
کیا معیاری انحراف تغیریت سے زیادہ ہو سکتا ہے؟
جواب: جی ہاں، یہ تغیریت سے زیادہ ہو سکتا ہے جب تغیریت 0 اور 1 کے درمیان مثلاً $1 > \sigma^2 > 0$ اس کی وجہ یہ ہے کہ 0 اور 1 کے درمیان کسی بھی اعشاری عدد کا جزر ہمیشہ اصل عدد سے بڑا ہوتا ہے۔

مثال 11: ایک مالیاتی تجزیہ کار نے ایک مخصوص دن چند کمپنیوں کے حصص کی قیمتوں کے اختتامی سکورز کو درج ذیل طریقے سے گروہوں میں ترتیب دیا:

حصص کی قیمتیں (روپے)	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
تعددات	2	3	6	4	2	1

اوسط، تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔ آپ حصص کی قیمتوں کے اتار چڑھاؤ کے بارے میں کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

حل:

قیمت کی حد (روپے)	تعددات f	x	fx	fx^2
40–50	2	45	90	4050
50–60	3	55	165	9075
60–70	6	65	390	25350
70–80	4	75	300	22500
80–90	2	85	170	14450
90–100	1	95	95	9025
	$\Sigma f = 18$		$\Sigma fx = 1210$	$\Sigma fx^2 = 84450$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1210}{18} = 67.22$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{84450}{18} - (67.22)^2$$

$$= 4691.67 - 4518.52 = 173.15$$

$$\sigma = \sqrt{173.15} = 13.16$$

13.16 روپے کا معیاری انحراف قیمت کے اتار چڑھاؤ میں اعتدال کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 12: دو طلبہ، علی اور روما نے ریاضی کے 5 ٹیسٹوں میں حصہ لیا۔ ان کے سکورز (100 میں سے) درج ذیل تھے:

علی: 72, 68, 74, 70, 76

روما: 72, 65, 80, 68, 75

(i) اوسطاً کس نے بہتر کارکردگی دکھائی؟ (ii) کون زیادہ مستقل مزاج تھا۔

یاد رکھیے!
جب دو مواد وں کا موازنہ کر رہے ہوں:
- اوسط ہمیں اوسط کارکردگی کے بارے میں بتاتی ہے۔
- معیاری انحراف ہمیں یکسانیت کے بارے میں بتاتا ہے۔

حل:

$$\bar{x}\,(\text{علی}) = \frac{\sum x}{n} = \frac{72+68+74+70+76}{5} = \frac{360}{5} = 72$$

$$\sigma^2 = (\text{علی}) = \frac{\sum(x-x)^2}{n}$$

$$= \frac{(72-72)^2+(68-72)^2+(74-72)^2+(70-72)^2+(76-72)^2}{5}$$

$$= \frac{(0)^2+(-4)^2+(2)^2+(-2)^2+(4)^2}{5}$$

$$= \frac{0+16+4+4+16}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\sigma = (\text{علی}) = \sqrt{8} = 2.83$$

$$\bar{x}\,(\text{روما}) = \frac{\sum x}{n} = \frac{72+65+80+68+75}{5}$$

$$= \frac{360}{5} = 72$$

$$\bar{x}\,(\text{روما}) = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{(72-72)^2+(65-72)^2+(80-72)^2+(68-72)^2+(75-72)^2}{5}$$

$$= \frac{(0)^2+(-7)^2+(8)^2+(-4)^2+(3)^2}{5}$$

$$= \frac{0+49+64+16+9}{5} = \frac{138}{5} = 27.6$$

$$\bar{x}\,(\text{روما}) = \sqrt{27.6} = 5.25$$

(i) چوں کہ $72 = (\text{علی})\,x$ اور $72 = (\text{روما})\,\bar{x}$ ہے۔

اوسطاً دونوں نے برابر کارکردگی کا مظاہرہ کیا۔

(ii) $\sigma\,(\text{علی}) = 2.83$, $\sigma\,(\text{روما}) = 5.25$ لہٰذا، علی زیادہ مستقل مزاج ہے۔

حل مشق 11.2

-1 درج ذیل مواد کی سعت معلوم کیجیے:

(i) 63, 89, 98, 125, 79, 108, 117, 60 **(ii) 43. 5, 13. 6, 18. 9, 38. 4, 61. 4, 29. 4**

(i) 63, 89, 98, 125, 79, 108, 117, 60

حل: دیا گیا مواد

63, 89, 98, 125, 79, 108, 117, 60

سب سے بڑی قدر (H) = 125

سب سے چھوٹی قدر (L) = 60

یہاں

سعت (R) = H − L

= 125 − 60

سعت (R) = 65

(ii) 43. 5, 13. 6, 18. 9, 38. 4, 61. 4, 29. 4

حل: دیا گیا مواد

43.5, 13.6, 18.9, 38.4, 61.4, 29.4

یہاں

سب سے بڑی قدر (H) = 61.4

سب سے چھوٹی قدر (L) = 13.6

سعت (R) = H − L

= 61.4 − 13.6

سعت (R) = 47.8

-2 اگر مواد کے ایک سیٹ کی سعت اور سب سے چھوٹی قدر بالترتیب 46.7 اور 13.4 ہو تو سب سے بڑی قدر معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا مواد

سعت (R) = 46.7

سب سے چھوٹی قدر (L) = 13.4

سعت (R) = H − L

46.7 = H − 13.4

46.7+13.4 = H

H = 60.1

-3 درج ذیل مواد کی سعت معلوم کیجیے:

آمدنی	4000 − 4500	4500 − 5000	5000 − 5500	5500 − 6000	6000 − 6500
ملازموں کی تعداد	8	12	350	21	6

حل:

سب سے بڑی آمدنی (H) = 6500

سب سے چھوٹی آمدنی (L) = 4000

∵ سعت (R) = H − L

= 6500−4000

سعت (R) = 2500

-4 7 کارکنوں کے ایک گروہ نے ایک دن میں تیار کی جانے والی اشیا کی تعداد بتائی:

52, 55, 50, 53, 54, 56, 52

تیار کی گئی اشیا کا معیاری انحراف اور تغیریت معلوم کیجیے۔

حل:

$$\bar{x} = \frac{52+55+50+53+54+56+52}{7} = \frac{372}{7} = 53.14$$

www.ilmkidunya.com

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
52	52–53.14 = –1.14	$(-1.14)^2 = 1.30$
55	55–53.14 = 1.86	$(1.86)^2 = 3.46$
50	50–53.14 = –3.14	$(-3.14)^2 = 9.86$
53	53–53.14 = –0.14	$(-0.14)^2 = 0.02$
54	54–53.14 = 0.86	$(0.86)^2 = 0.74$
56	56–53.14 = 2.86	$(2.86)^2 = 8.18$
52	52–53.14 = –1.14	$(-1.14)^2 = 1.30$
		$\Sigma(x-\bar{x})^2 = 24.86$

∵ تغیریت $(\sigma^2) = \frac{\sum(x-\bar{x})}{n} = \frac{24.86}{7}$

$\boxed{\sigma^2 = 3.55}$

∵ معیاری انحراف $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{24.86}{7}}$

$= \sqrt{3.55}$

$\boxed{\sigma = 1.88}$

-5 ایک لائبریرین نے ہفتے کے 5 دنوں میں آنے والے افراد کی تعداد ریکارڈ کی:

120, 135, 130, 125, 140

آنے والے افراد کی تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

حل:

$\bar{x} = \frac{120+135+130+125+140}{5}$

$\bar{x} = \frac{650}{5}$

$\boxed{\bar{x} = 130}$

x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
120	120–130 = –10	$(-10)^2 = 100$
135	135–130 = 5	$5^2 = 25$
130	130–130 = 0	$0^2 = 0$
125	125–130 = –5	$(-5)^2 = 25$
140	140–130 = 10	$10^2 = 100$
		$\Sigma(x-x)^2 = 250$

تغیریت $(\sigma^2) = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$

$$= \frac{250}{5}$$

$$\boxed{\sigma^2 = 50}$$

معیاری انحراف $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n}}$

$$= \sqrt{\frac{250}{5}}$$

$$= \sqrt{50}$$

$$\boxed{\sigma = 7.07}$$

-6 پہلے 23 طاق اعداد کی سعت، تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

حل: پہلے 23 طاق اعداد ہیں۔

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45

سعت

$\because$ سعت (R) = سب سے بڑی قدر (H) – سب سے چھوٹی قدر (L)

$= 45 - 1$

سعت (R) = 44

$n = 23$

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\overline{x} = \frac{1+3+5+...+45}{23}$$

$$\overline{x} = \frac{529}{23}$$

$$\boxed{\overline{x} = 23}$$

x	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$
1	$1-23=-22$	$(-22)^2 = 484$
3	$3-23=-20$	$(-20)^2 = 400$
5	$5-23=-18$	$(-18)^2 = 324$
7	$7-23=-16$	$(-16)^2 = 256$
9	$9-23=-14$	$(-14)^2 = 196$
11	$11-23=-12$	$(-12)^2 = 144$
13	$13-23=-10$	$(-10)^2 = 100$
15	$15-23=-8$	$(-8)^2 = 64$
17	$17-23=-6$	$(-6)^2 = 36$
19	$19-23=-4$	$(-4)^2 = 16$

www.ilmkidunya.com

21	$21-23=-2$	$(-2)^2=4$
23	$23-23=0$	$0^2=0$
25	$25-23=2$	$2^2=4$
27	$27-23=4$	$4^2=16$
29	$29-23=6$	$6^2=36$
31	$31-23=8$	$8^2=64$
33	$33-23=10$	$10^2=100$
35	$35-23=12$	$12^2=144$
37	$37-23=14$	$14^2=196$
39	$39-23=16$	$16^2=256$
41	$41-23=18$	$18^2=324$
43	$43-23=20$	$20^2=400$
45	$45-23=22$	$22^2=484$
		$\Sigma(x-x)^2=4048$

تغیریت $(\sigma^2) = \frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n}$

$= \frac{4048}{23}$

جواب: $\boxed{\sigma^2 = 176}$

$S.D(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{4048}{23}}$

$= \sqrt{176}$

جواب: $\boxed{\sigma = 13.27}$

-7 ایک ہفتے میں پانچ اضلاع کے مختلف مقامات پر بارش کا ریکارڈ درج ذیل ہے اس کی تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

بارش (ملی میٹر)	42	51	54	61	63	71
مقامات کی تعداد	5	13	4	9	5	4

حل:

بارش (ملی میٹر میں) x	مقامات کی تعداد f	$f.x$	x^2	$f.x^2$
42	5	210	1764	8820
51	13	663	2601	33813
54	4	216	2916	11664
61	9	549	3721	33489
63	5	315	3969	19845
71	4	284	5041	20164
	$\sum f = 40$	$\sum fx = 2237$		$\sum fx^2 = 127795$

www.ilmkidunya.com

$$\text{تغیریت}\ (\sigma^2) = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2$$

$$= \frac{127795}{40} - \left(\frac{2237}{40}\right)^2$$

$$= 3194.875 - (55.925)^2$$

$$= 3194.875 - 3127.605$$

$$\boxed{\sigma^2 = 67.27\text{mm}}$$

$$\text{S.D}(\sigma) = \sqrt{\text{تغیریت}}$$

$$= \sqrt{67.27}$$

$$\boxed{\sigma = 8.2\text{mm}}$$

-8 مشین A کی آؤٹ پٹ (یونٹس): **98, 100, 102, 101, 99**

مشین B کی آؤٹ پٹ (یونٹس) **95, 100, 105, 90, 110**

(i) کس مشین نے بہتر کارکردگی دکھائی؟ (ii) کون سی مشین کا تسلسل برقرار رہا؟

(i) کس مشین نے بہتر کارکردگی دکھائی؟

حل:

98, 100, 102, 101, 99

$$\text{اوسط}\ (\bar{x}_A) = \frac{\sum x}{n}$$

$$\text{اوسط}\ (\bar{x}_A) = \frac{98+100+102+101+99}{5} = \frac{500}{5}$$

$$\boxed{\bar{x}_A = 100}$$

اور

$$\sigma^2\ (\text{مشین}\ A) = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{(98-100)^2+(100-100)^2+(102-100)^2+(101-100)^2+(99-100)^2}{5}$$

$$= \frac{(-2)^2+0^2+2^2+1^2+(-1)^2}{5}$$

$$= \frac{4+0+4+1+1}{5}$$

$$= \frac{10}{5}$$

$$\sigma^2\ (\text{مشین}\ A) = 2$$

www.ilmkidunya.com

$$\boxed{S.D\ (\sigma_A) = \sqrt{2} \approx 1.41}$$

(ii) کون سی مشین کا تسلسل برقرار رہا؟

حل:

95, 100, 105, 90, 110

$$\text{اب اوسط}\ (\bar{x}_B) = \frac{\sum x}{n}$$

$$\text{اوسط}\ (\bar{x}_B) = \frac{95+100+105+90+110}{5}$$

$$= \frac{500}{5} = 100$$

$$\sigma^2\ (\text{B مشین}) = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(95-100)^2 + (100-100)^2 + (105-100)^2 + (90-100)^2 + (110-100)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{(-5)^2 + (0)^2 + (5)^2 + (-10)^2 + (10)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{25+0+25+100+100}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

$$\sigma^2 = 50$$

$$\sigma_B = \sqrt{50}$$

$$S.D(\sigma_B) = \sqrt{50} \approx 7.07$$

(i) ہم اوسط سے اندازا لگا سکتے ہیں کہ دونوں مشینوں کی کارکردگی ایک جیسی ہے۔

(ii) مشین A تسلسل برقرار رکھی ہوئی ہے۔

9- دو سیلز پرسز (اشخاص) کی ماہانہ فروخت (روپے لاکھوں میں) 6 مہینوں کے دوران درج ذیل ہے:

شخص A: 5.5, 5.7, 5.4, 5.6, 5.8, 5.6 شخص B: 5.5, 6.5, 4.5, 6.0, 5.0, 6.0

ان کی کارکردگی اور مستقل مزاج کا موازنہ کیجیے۔

حل:

- **شخص A**

5.5, 5.7, 5.4, 5.6, 5.8, 5.6

$$\text{اب اوسط}\ (P_A) = \bar{x}_A = \frac{\sum x}{n} = \frac{5.5+5.7+5.4+5.6+5.8+5.6}{6}$$

$$= \frac{33.6}{6}$$

www.ilmkidunya.com

$$\boxed{\bar{x}_A = 5.6}$$

اور

$$\sigma^2(P_A) = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2(P_A) = \frac{(5.5-5.6)^2 + (5.7-5.6)^2 + (5.4-5.6)^2 + (5.6-5.6)^2 + (5.8-5.6)^2 + (5.6-5.6)^2}{6}$$

$$= \frac{(-0.1)^2 + (0.1)^2 + (-0.2)^2 + 0^2 + (0.2)^2 + 0^2}{6}$$

$$= \frac{0.01 + 0.01 + 0.04 + 0 + 0.04 + 0}{6} = \frac{0.1}{6}$$

$$\boxed{\sigma^2(P_A) \approx 0.0167}$$

$$\Rightarrow \text{S.D}(\sigma_A) = \sqrt{0.0167}$$
$$\approx 0.129$$

$$\boxed{\text{S.D}(\sigma_A) \approx 0.13}$$

- شخص B

5.5, 6.5, 4.5, 6.0, 5.0, 6.0

$$\text{اب اوسط}\ (P_B) = \bar{x}_B = \frac{5.5 + 6.5 + 4.5 + 6.0 + 5.0 + 6.0}{6} = \frac{33.5}{6}$$

$$\boxed{\bar{x}_B = 5.58}$$

اور

$$\sigma^2(P_B) = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{(5.5-5.58)^2 + (6.5-5.58)^2 + (4.5-5.58)^2 + (6-5.58)^2 + (5-5.58)^2 + (6-5.58)^2}{6}$$

$$= \frac{(-0.08)^2 + (0.92)^2 + (-1.08)^2 + (0.42)^2 + (-0.58)^2 + (0.42)^2}{6}$$

$$= \frac{0.0064 + 0.8464 + 1.1664 + 0.1764 + 0.3364 + 0.1764}{6}$$

$$= \frac{2.7084}{6}$$

$$\sigma^2(P_B) = 0.4514$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{S.D}(\sigma_B) = \sqrt{0.4514}}$$

$$\boxed{\text{S.D}(\sigma_B) \approx 0.672}$$

www.ilmkidunya.com

ہم دیکھتے ہیں کہ شخص A کی اوسط زیادہ ہے شخص B سے لہٰذا A شخص کی کارکردگی زیادہ بہتر ہے۔

اور

شخص A کا معاری انحراف کم ہے لہٰذا شخص A زیادہ مستقل مزاج ہے۔

10- نیچے دیا گیا جدول ایک ٹیکسٹائل مل کے کارکنوں کی یومیہ اجرتوں کو ظاہر کرتا ہے جسے چھ آمدنی کے گروہوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

یومیہ اجرت (روپے)	800-1000	1000–1200	1200-1400	1400-1600	1600-1800	1800-2000
تعدد	2	4	6	8	2	1

حل:

یومیہ اجرت (روپے) (Rs)	تعدد (f)	وسطانیہ (x)	$f.x$	x^2	$f.x^2$
800 – 1000	2	$\frac{1800}{2}=900$	1800	810000	1620000
1000 – 1200	4	$\frac{2200}{2}=1100$	4400	1210000	4840000
1200 – 1400	6	$\frac{2600}{2}=1300$	7800	1690000	10140000
1400 – 1600	8	$\frac{3000}{2}=1500$	12000	225000000	18000000
1600 – 1800	2	$\frac{3400}{2}=1700$	3400	2890000	5780000
1800 – 2000	1	$\frac{3800}{2}=1900$	1900	3610000	3610000
	$\Sigma f=23$		$\Sigma fx=31300$		$\Sigma fx^2 = 43990000$

- **اوسط**

$$\bar{x}=\frac{\sum fx}{\sum f}=\frac{31300}{23}$$

$$\boxed{\bar{x}=1360.87}$$

- **تغیریت**

$$\sigma^2=\frac{\sum fx^2}{\sum f}-\left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2$$

$$=\frac{43990000}{23}-\left(\frac{31300}{23}\right)^2$$

$$=1912608.70-(1360.87)^2$$

$$=1912608.70-1851967.16$$

$$\boxed{\sigma^2=60642.72}$$

- **معیاری انحراف**

$$S.D=\sqrt{\text{تغیریت}}$$

$$=\sqrt{60642.72}$$

$$\boxed{S.D=246.26}$$

www.ilmkidunya.com

11- ایک کمپنی کی ماہانہ فروخت کا تخمینہ (ملین میں) درج ذیل ہے: 13,20,14,18,15 فروخت کے تخمینوں میں تغیر معلوم کیجیے۔

حل: ماہانہ فروخت (روپے ملین میں)

15, 18, 14, 20, 13

فروخت کے تخمینوں میں تغیر معلوم کرنے کے لیے پہلے ہم اوسط تغیریت اور معیاری انحراف مواد معلوم کریں گے۔

- اوسط

$$\bar{x} = \frac{15+18+14+20+13}{5} \quad \because \text{ قدروں کی کل تعداد } = n = 5$$

$$\bar{x} = \frac{80}{5}$$

$$\boxed{\bar{x} = 16}$$

- تغیریت

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{(15-16)^2+(18-16)^2+(14-16)^2+(20-16)^2+(13-16)^2}{5}$$

$$= \frac{(-1)^2+2^2+(-2)^2+(4)^2+(-3)^2}{5}$$

$$= \frac{1+4+4+16+9}{5} = \frac{34}{5}$$

$$\boxed{2 = 6.8}$$

- معیاری انحراف

$$SD = \sqrt{\text{تغیریت}}$$

$$= \sqrt{6.8}$$

$$\boxed{\sigma = 2.61}$$

نتیجہ: 2.61 = معیاری انحراف 16 = اوسط کے لحاظ

فروخت کی پیش گوئی معتدل تغیر کو ظاہر کرتی ہے۔

12- پانچ صوبوں میں بے روزگاری کی شرح (فیصد میں) 5.2, 6.0, 4.8, 5.5 اور 6.2 ہیں۔ معیاری انحراف معلوم کیجیے اور بیان کیجیے کہ کیا بے روزگاری کی شرح متوازن ہے؟

حل: بے روزگاری کی شرح (%) میں

5.2, 6.0, 4.8, 5.5, 6.2

ہم اوسط، تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کرتے ہیں

www.ilmkidunya.com

اوسط •

$$\overline{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{5.2+6.0+4.8+5.5+6.2}{5}$$ ∵ قدروں کی تعداد $= n = 5$

$$\overline{x}=\frac{27.7}{5}$$

$\boxed{\overline{x}=5.54}$ (% میں)

تغیریت •

$$\sigma^2=\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n}$$

$$=\frac{(5.2-5.54)^2+(6.0-5.54)^2+(4.8-5.54)^2+(5.5-5.54)^2+(6.2-5.54)^2}{5}$$

$$=\frac{(-0.34)^2+(0.46)^2+(-0.74)^2+(-0.04)^2+(0.66)^2}{5}$$

$$=\frac{0.1156+0.2116+0.5476+0.0016+0.4356}{5}=\frac{1.312}{5}$$

$\boxed{\sigma^2=0.2624}$ (% میں)

• **S.D:**

S.D = $\sqrt{\text{تغیریت}}$

$\sigma=\sqrt{0.2624}$

$\boxed{\sigma=0.51\%}$

بے روزگاری کی شرح نسبتاً متوازن ہے کیونکہ صوبوں کے درمیان کم فرق ہے۔

13- تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

(i) $n=5, \Sigma x^2=421, \Sigma x=45$ **(ii)** $\Sigma f=6, \Sigma fx^2=7560, \Sigma fx=210$

(iii) $\Sigma fx^2=1670, =1670, \overline{x}=18$

(i) $n=5, \Sigma x^2=421, \Sigma x=45$

حل: دیا گیا مواد

$\Sigma x=45, \Sigma x^2=421, n=5$

$$\text{تغیریت}\ (\sigma^2)=\frac{\sum x^2}{n}-\left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$=\frac{421}{5}-\left(\frac{45}{5}\right)^2$$

www.ilmkidunya.com

$= 84.2 - 9^2$

$= 84.2 - 81$

$\boxed{\sigma^2 = 3.2}$

S.D $(\sigma) = \sqrt{\text{تغیریت}} \Rightarrow \sigma = \sqrt{3.2}$

$\boxed{\sigma = 1.79}$

(ii) $\Sigma f = 6, \Sigma fx^2 = 7560, \Sigma fx = 210$

حل: دیا گیا مواد

$\Sigma fx = 210, \Sigma fx^2 = 7560, \Sigma f = 6$

تغیریت $(\sigma^2) = \frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}\right)^2$

$= \frac{7560}{6} - \left(\frac{210}{6}\right)^2$

$\sigma^2 = 1260 - 35^2$

$\sigma^2 = 1260 - 1225$

$\boxed{\sigma^2 = 35}$

$\because$ S.D $(\sigma) = \sqrt{\text{تغیریت}} \Rightarrow \sigma = \sqrt{35}$

$\boxed{\sigma = 5.92}$

(iii) $\Sigma fx^2 = 1670, = 1670, \overline{x} = 18$

حل: دیا گیا ہے

$\overline{x} = 18, \Sigma fx^2 = 1670, \Sigma f = 5$

$\because$ تغیریت $(\sigma^2) = \frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}\right)^2$

$= \frac{1670}{5} - (\overline{x})^2$

$= \frac{1670}{5} - (18)^2$

$= 334 - 324$

$\boxed{\sigma^2 = 10}$

$\because$ S.D $(\sigma) = \sqrt{\text{تغیریت}}$

$= \sqrt{10}$

$\boxed{\sigma = 3.16}$

www.ilmkidunya.com

حل اعادہ مشق 11

-1 درج ذیل سوالات کے دیے گئے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) مجموعی تعددات معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

(a) جمع (b) جذرالمربع (c) ضرب (d) تقسیم

(ii) دوسرا چہارمی حصہ ظاہر کرتا ہے:

(a) اوسط (b) عادہ (c) وسطانیہ (d) تغیریت

(iii) پہلا چہارمی حصہ مواد کو.................. برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

(a) دو (b) تین (c) چار (d) دس

(iv) سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی قدر کے درمیان فرق کہلاتا ہے:

(a) اوسط (b) تغیریت (c) سعت (d) معیاری انحراف

(v) انتشاری خاکہ.................. متغیرات کے درمیان تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔

(a) پانچ (b) دو (c) تین (d) چار

(vi) انتشار کا پیمانہ ہے:

(a) اوسط (b) وسطانیہ (c) عادہ (d) تغیریت

(vii) تغیریت کا مثبت جذرالمربع کہلاتا ہے:

(a) اوسط (b) وسطانیہ (c) معیاری انحراف (d) سعت

(viii) .... انتشار کا پیمانہ نہیں ہے۔

(a) سعت (b) حسابی اوسط (c) تغیریت (d) معیاری انحراف

(ix) مواد 8, 8, 8, 8, 8, 8 کی تغیریت ہے:

(a) 0 (b) 16 (c) 8 (d) 48

(x) پہلے 20 قدرتی اعداد کی سعت ہے:

(a) 20 (b) 10 (c) 19 (d) 30

جوابات

(i)	جمع	(ii)	وسطانیہ	(iii)	چار	(iv)	سعت	(v)	دو
(vi)	تغیریت	(vii)	معیاری انحراف	(viii)	حسابی اوسط	(ix)	0	(x)	19

-2 لمبی چھلانگ کے لیے درج ذیل نتائج ریکارڈ کیے گئے:

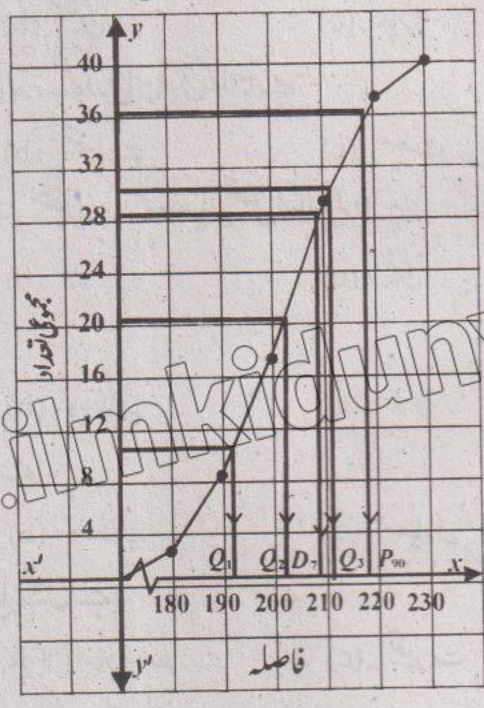
فاصلہ (سینٹی میٹروں میں)	170–180	180 – 190	190 – 200	200 – 210	210 – 220	220 – 230
f	2	6	9	12	8	3

www.ilmkidunya.com
www.ilmkidunya.com
www.ilmkidunya.com

حل: مجموعی تعدادی کثیر الاضلاع بنائیں اور وسطانیہ Q_1, Q_3, D_7, P_{90} اور اندرونی چہارمی حصہ کی سعت بھی معلوم کیجیے۔

فاصلہ (سینٹی میٹروں میں)	f	cf
170 – 180	2	2
180 – 190	6	2 + 6 = 8
190 – 200	9	8 + 9 = 17
200 – 210	12	17 + 12 = 29
210 – 220	8	29 + 8 = 37
220 – 230	3	37 + 3 = 40
	$\sum f = 40$	

مجموعی تعداد کثیر الاضلاع



وسطانیہ: وسطانیہ کی پوزیشن $\frac{n}{2}=\frac{40}{2}=20$ (20 ویں قدر) y- محور پر 20 سے ایک افقی خط کھینچیں جو کہ منحنی خط تک ملے اور پھر اس نقطہ سے x- محور سے عمود کھینچیں۔ اب x- محور پر اس کی قدر کو نوٹ کیجیے جہاں عمودی خط نے x- محور کو قطع کیا ہے۔

اوسط = 202.5

زیریں چہارمی (Q_1):

Q_1 کی پوزیشن ہے $\frac{n}{4}=\frac{40}{4}=20$ (10 ویں قدر)

اب ہم گراف سے دیکھتے ہیں y- محور 10 کی متعلقہ قدر x- محور پر 192.2 بنتی ہے۔

$Q_1 = 192.2$

بالائی چہارمی Q_3:

Q_3 کی پوزیشن $\frac{3n}{4}=\frac{3(40)}{4}=30$ (10 ویں قدر)

www.ilmkidunya.com

اب ہم گراف سے y- محور 30 کی متعلقہ قدر x- محور 211.3 بنتی ہے۔

$Q_3 = 211.3$

ساتواں دسواں حصہ (D_7):

D_7 کی پوزیشن $= \frac{7n}{10} = \frac{7(40)}{10} = 28$ (28ویں قدر)

اب ہم گراف سے دیکھتے ہیں کہ y- محور پر 28 کی متعلقہ قدر x- محور پر 209.2 بنتی ہے۔

$D_7 = 209.2$

90th کا سواں حصہ (P_{90}):

P_{90} کی پوزیشن $= \frac{90n}{100} = \frac{90(40)}{100} = 36$ (36ویں قدر)

اب ہم گراف سے دیکھتے ہیں کہ y- محور پر 36 کی متعلقہ قدر x- محور پر 218.8 بنتی ہے۔

$P_{90} = 218.8$

اندرونی چہارمی حصہ کی سعت (IQR)

$\because \quad IQR = Q_3 - Q_1$

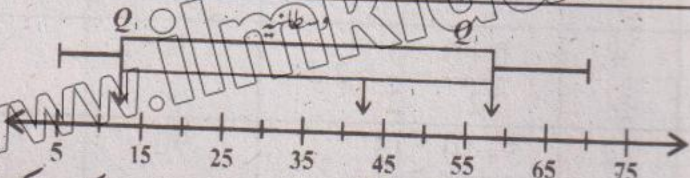
$= 211.3 - 192.2$

$IQR = 19.1$

3- مواد کے ایک سیٹ کے لیے درج ذیل شماریات دیے گئے ہیں اسے باکس اور وسکر پلاٹ پر ظاہر کیجیے۔

سب سے چھوٹی قدر	سب سے بڑی قدر	Q_1	وسطانیہ	Q_3
5	70	12.6	43	55.6

حل:



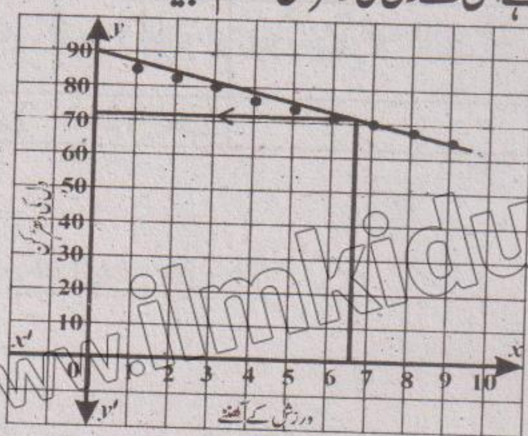
4- درج ذیل جدول دس افراد کے لیے ہفتہ وار ورزش کے گھنٹے اور آرام کے وقت دل کی دھڑکن فی منٹ کو ظاہر کرتا ہے:

ورزش کے گھنٹے	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
دل کی دھڑکن	90	85	83	80	76	74	72	70	68	65

(i) مواد کا انتشاری خاکہ بنائیے اور موزوں ترین خط کھینچیں۔ (ii) مشاہدہ کیے گئے ارتباط کی قسم بیان کیجیے۔

(iii) سکینہ ہر ہفتے 6.5 گھنٹے ورزش کرتی ہے اس کے دل کی دھڑکن معلوم کیجیے۔

حل:



(ii) ایک مضبوط منفی ارتباط ہے۔

(iii) سکینہ ہر ہفتے 6.5 گھنٹے ورزش کرتی ہے اس کے دل کی دھڑکن 71 ہے۔

-5 مواد 25, 30, 35, 40, 50, 60, 65, 75 کی سعت معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا مواد

25, 30, 35, 40, 50, 60, 65, 75

سب سے بڑی قدر (H) = 75

سب سے چھوٹی قدر (L) = 25

سعت (R) = H – L

R = 75 – 25

R = 50

-6 درج ذیل مواد کی سعت، تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

جماعتی وقفہ	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
f	4	12	20	24	16	4

حل:

جماعتی وقفہ	f	x	fx	fx^2
0 – 5	4	$\frac{0+5}{2}=\frac{5}{2}=2.5$	10	25
5 – 10	12	$\frac{5+10}{2}=\frac{15}{2}=7.5$	90	675
10 – 15	20	$\frac{10+15}{2}=\frac{25}{2}=12.5$	250	3125
15 – 20	24	$\frac{15+20}{2}=\frac{35}{2}=17.5$	420	7350
20 – 25	16	$\frac{20+25}{2}=\frac{45}{2}=22.5$	360	8100
25 – 30	4	$\frac{25+30}{2}=\frac{55}{2}=27.5$	110	3025
	$\sum f=80$		$\sum fx=1240$	$\sum fx^2=22300$

سب سے بڑی رقم (H) = 30

سب سے چھوٹی رقم (L) = 0

سعت (R) = H – L

R = 30 – 0

R = 30

- تغیریت $(\sigma^2) = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left[\frac{\sum fx}{\sum f}\right]^2$

$= \frac{22300}{80} - \left(\frac{1240}{80}\right)^2$

$= 278.75 - (15.5)^2$

$= 278.75 - 240.25$

تغیریت $(\sigma^2) = 38.5$

- معیاری انحراف $(\sigma) = \sqrt{\text{تغیریت}}$

$= \sqrt{38.5}$

$\because$ S.D $(\sigma) = 6.20$

-7 5اعداد کا مجموعہ 45 ہے اور ان کے مربعوں کا مجموعہ 421 ہے۔ مواد کے سیٹ کا اوسط اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا x اعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

تو

اعدد کا مجموعہ $= \sum x = 45$

مربع کا مجموعہ $= \sum x^2 = 421$

کل اعداد $= n = 5$

$\because$ اوسط $(\bar{x}) = \frac{\sum x}{n}$

$\bar{x} = \frac{45}{n}$

$\boxed{\bar{x} = 9}$

$\because$ S.D $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{421}{5} - \left(\frac{45}{5}\right)^2}$

$= \sqrt{84.2 - 9^2}$

$= \sqrt{84.2 - 81}$

$= \sqrt{3.2}$

$\boxed{\text{S.D } (\sigma) = 1.7889}$

-8 6 مہینوں کے لیے دو خاندانوں کے ماہانہ گھریلو اخراجات (روپے ہزاروں میں) درج ذیل تھے:

خاندان A: 45, 47, 46, 48, 46, 47 خاندان B: 49, 42, 50, 40, 52, 38

ماہانہ اخراجات کا اوسط اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔ کون سا خاندان اوسطاً زیادہ خرچ کرتا ہے؟ کس خاندان کے اخراجات زیادہ مستحکم ہیں؟

- خاندان A: 45, 47, 46, 48, 46, 47

حل: اب

اوسط $(\bar{x}_A) = \frac{45+47+46+48+46+47}{6}$

$= \frac{279}{6}$

$$\boxed{\bar{x}_A = 46.5}$$

اور معیاری انحراف

$$\sigma^2_A = \frac{(45-46.5)^2+(47-46.5)^2+(46-46.5)^2+(48-46.5)^2+(46-46.5)^2+(47-46.5)^2}{6}$$

$$= \frac{(-1.5)^2+(0.5)^2+(-0.5)^2+(1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2}{6}$$

$$\sigma^2_A = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25+0.25+0.25}{6}$$

$$= \frac{5.5}{6}$$

$$\sigma^2_A = 0.9167$$

$$\Rightarrow \quad S.D\ \sigma_A = \sqrt{0.9167}$$

$$\boxed{S.D\ (\sigma_A) = 0.96}$$

• خاندان B: 38, 52, 40, 50, 42, 49

اب

$$\text{اوسط } (\bar{x}_B) = \frac{38+52+40+50+42+49}{6}$$

$$= \frac{271}{6}$$

$$\boxed{\bar{x}_B = 45.17}$$

اور معیاری انحراف

$$\sigma^2_B = \frac{(38-45.17)^2+(52-45.17)^2+(40-45.17)^2+(50-45.17)^2+(42-45.17)^2+(49-45.17)^2}{6}$$

$$= \frac{(-7.17)^2+(6.83)^2+(-5.17)^2+(4.83)^2+(-3.17)^2+(3.83)^2}{6}$$

$$= \frac{51.41+46.65+26.73+23.33+10.05+14.67}{6}$$

$$= \frac{271}{6}$$

$$\sigma^2_B = 28.81$$

$$\Rightarrow S.D\ (\sigma_B) = \sqrt{28.81}$$

$$\boxed{S.D\ (\sigma_B) = 5.37}$$

نتیجہ: خاندان A کی اوسط زیادہ ہے لیکن خاندان B زیادہ مستحکم ہے۔

www.ilmkidunya.com

9- ایک فیکٹری میں 40 ملازموں کی یومیہ اجرتیں درج ذیل جدول میں دی گئی ہیں:

یومیہ اجرت (روپے)	1000 – 1200	1200 – 1400	1400 – 1600	1600 – 1800	1800 – 2000
ملازموں کی تعداد	6	10	12	8	4

یومیہ اجرت کا اوسط، تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

حل:

Daily Wages	f	x	fx	x^2	fx^2
1000 – 1200	6	1100	6600	1210000	7260000
1200 – 1400	10	1300	13000	1690000	16900000
1400 – 1600	12	1500	18000	2250000	27000000
1600 – 1800	8	1700	13600	2890000	23120000
1800 – 2000	4	1900	7600	3610000	14440000
	$\sum f = 40$		$\sum fx = 58800$		$\sum fx^2 = 88720000$

- اوسط $(\bar{x}) = \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{58800}{40} = 1470$

- تغیریت $(\sigma^2) = \dfrac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fx}{\sum f}\right)^2$

$$= \frac{88720000}{40} - \left(\frac{58800}{40}\right)^2$$

$$= 2218000 - 2160900$$

تغیریت $(\sigma^2) = 57100$

- $\text{S.D}\ (\sigma) = \sqrt{57100}$

$\text{S.D}\ (\sigma) = 238.96$

معروضی طرز سوالات

اضافی کثیر الانتخابی سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے کثیر الانتخابی سوالات

11.1 مجموعی تعددات کی تشکیل

درست جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

1- مجموعی تعددات کے جدول کو ________ بھی کہا جاتا ہے۔

(a) ترسیم (b) مجموعی تعددی کثیر الاضلاع (c) مجموعی تعددی تقسیم (d) تعددی تقسیم

www.ilmkidunya.com

-2 ایک مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کو ______ بھی کہا جاتا ہے۔

(a) ترسیم (b) مجموعہ تعددات (c) مجموعہ تعددی تقسیم (d) تعددی تقسیم

-3 ترسیم کی تشکیل کے طریقے ہیں:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

-4 ترسیم اندازہ لگانے میں مدد کرتا ہے۔

(a) وسطانیہ کا (b) چہارمی حصہ کا (c) دسویں حصہ کا (d) یہ تمام

-5 ترتیب صعودی یا ترتیب نزولی میں ترتیب دیئے گئے مواد کی درمیانی قدر ______ کہلاتی ہے۔

(a) عادہ (b) وسطانیہ (c) چہارمی حصہ (d) دسواں حصہ

-6 چہارمی حصہ جسے زیریں چہارمی حصہ کہا جاتا ہے۔

(a) Q_1 (b) Q_2 (c) Q_3 (d) Q_4

-7 چہارمی حصہ جسے بالائی چہارمی حصہ کہا جاتا ہے۔

(a) Q_1 (b) Q_2 (c) Q_3 (d) Q_4

-8 وسطانیہ کسی مواد کو ______ برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

-9 دسواں حصہ کسی ترتیب دیئے گئے مواد کو ______ برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

(a) 2 (b) 4 (c) 10 (d) 100

-10 سوواں حصہ کسی ترتیب دیے گئے مواد کو ______ برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

(a) 2 (b) 4 (c) 10 (d) 100

-11 IQR = ______?

(a) $Q_3 - Q_1$ (b) $Q_2 - Q_1$ (c) $Q_1 - Q_3$ (d) $Q_1 - Q_2$

-12 پہلے چہارمی حصہ Q_1 اور تیسرے چہارمی حصہ Q_3 کے درمیان فاصلہ کو کہا جاتا ہے:

(a) اندرونی چہارمی حصہ کی سعت (b) وسطانیہ (c) عادہ (d) حسابی اوسط

11.2 باکس اور وسکر پلاٹ

-13 باکس اور وسکر پلاٹ میں باکس نمائندگی کرتا ہے:

(a) Q_1 کی (b) Q_2 کی (c) Q_3 کی (d) IQR کی

-14 باکس میں ایک خط نمائندگی کرتا ہے:

(a) Q_1 کی (b) وسطانیہ کی (c) Q_3 کی (d) IQR کی

-15 باکس سے سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی قدروں تک پھیلے ہوئے خطوط نمائندگی کرتے ہیں۔

(a) باکس کی (b) وسطانیہ کی (c) وسکرز کی (d) IQR کی

-16 مواد 6 ,5 ,4 ,3 ,2 کا وسطانیہ ہے۔

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

www.ilmkidunya.com

-17 $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ ویں قدر = وسطانیہ، اگر n ___ ہو۔

(a) جفت (b) طاق (c) مفرد (d) ناطق

11.3 انتشاری خاکہ

-18 انتشاری خاکہ ایک گرافیکل طریقہ ہے جو ______ عددی متغیرات کے درمیان تعلق کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

-19 ارتباط کی اقسام کی تعداد ہے۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

-20 اگر دو متغیرات کے درمیان کوئی مستقل ترتیب نہ ہو تو اسے _____ کہا جاتا ہے۔

(a) صفر ارتباط (b) مثبت ارتباط (c) منفی ارتباط (d) کوئی نہیں

-21 اگر ایک متغیر بڑھنے سے دوسرا بھی بڑھے تو ______ کہلاتا ہے۔

(a) صفر ارتباط (b) مثبت ارتباط (c) منفی ارتباط (d) کوئی نہیں

-22 اگر ایک متغیر کے بڑھنے سے دوسرا کم ہو تو ______ کہلاتا ہے۔

(a) صفر ارتباط (b) مثبت ارتباط (c) منفی ارتباط (d) کوئی نہیں

-23 اگر $Q_3 = 75$ اور $Q_1 = 25$ ہو تو ______ = IQR؟

(a) 75 (b) 25 (c) 100 (d) 50

-24 اگر $IQR = 200$، $Q_1 = 25$ ہو تو ______ = Q_3 برابر ہوگا۔

(a) 25 (b) 200 (c) 225 (d) 250

11.4 انتشار کے پیمانے

-25 درج ذیل میں سے انتشار کا پیمانہ ہے۔

(a) سعت (b) ارتباط (c) حسابی اوسط (d) وسطانیہ

-26 پہلے 10 طاق اعداد کی سعت ہے۔

(a) 1 (b) 9 (c) 18 (d) 27

-27 کسی مواد کی سب سے بڑی قدر اور سب سے چھوٹی قدر کے ______ کو سعت کہتے ہیں۔

(a) حاصل ضرب (b) مجموعہ (c) فرق (d) حسابی اوسط

-28 اگر (R) = 50 سعت، (H) = 80 سب سے بڑی قدر ہو تو (L) سب سے چھوٹی قدر برابر ہوگی:

(a) 30 (b) 50 (c) 80 (d) 130

-29 ______ = (R) سعت؟

(a) $H \times L$ (b) $\frac{H}{L}$ (c) $H + L$ (d) $H - L$

-30 ایک مواد کی سعت ______ نہیں ہو سکتی۔

(a) مفرد عدد (b) جفت عدد (c) منفی عدد (d) صحیح عدد

11.4.2 تغیریت

31- تغیریت کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہونے والی علامت ہے۔

(a) σ (b) σ^2 (c) x (d) $\tilde{x}$

32- غیر گروہی مواد کی تغیریت معلوم کرنے کا فارمولا ہے۔

(a) $\frac{\sum x}{n}$ (b) $\frac{\sum fx}{\sum f}$ (c) $\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$ (d) $\frac{\sum(x-\bar{x})}{n}$

33- فارمولا $\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$ ______ معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

(a) حسابی اوسط (b) وسطانیہ (c) تغیریت (d) معیاری انحراف

34- اگر $\sum(x-x)^2 = 35$ اور $n = 7$ ہوتو ? = σ^2 برابر ہوگا۔

(a) 7 (b) 35 (c) 42 (d) 5

35- اگر $n = 20$، $\sum x^2 = 100$ اور $\bar{x} = 2$ ہوتو ? = σ^2 برابر ہوگا۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

36- اگر $\sum x = 54$ اور $n = 9$ تو $\bar{x}$ برابر ہوگا۔

(a) 6 (b) 45 (c) 63 (d) 75

37- حسابی اوسط معلوم کرنے کا فارمولا ہے۔

(a) $\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$ (b) $\frac{\sum x^2}{n}$ (c) $\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$ (d) $\frac{\sum x}{n}$

38- گروہی مواد کے لیے حسابی اوسط معلوم کرنے کا فارمولا ہے۔

(a) $\frac{\sum x}{n}$ (b) $\frac{\sum fx}{\sum f}$ (c) $\frac{\sum x^2}{n}$ (d) $\frac{\sum fx^2}{\sum f}$

39- ایک مواد کی اوسط ______ نہیں ہوسکتی۔

(a) منفی (b) مثبت (c) صحیح (d) کوئی نہیں

40- ایک مواد کی تغیریت ______ نہیں ہوسکتی۔

(a) منفی (b) مثبت (c) جفت (d) طاق

41- فارمولا $\frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2$ ______ معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

(a) حسابی اوسط (b) وسطانیہ (c) تغیریت (d) معیاری انحراف

42- تغیریت معلوم کرنے کے لیے استعمال ہونے والا فارمولا ہے۔

(a) $\frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$ (b) $\frac{\sum fx}{\sum f}$ (c) $\sqrt{\frac{\sum fx}{\sum f} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$ (d) $\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$

43- اگر $\sum fx^2 = 1670$، $\sum fx = 90$ اور $\sum f = 5$ ہوتو σ^2 برابر ہوگا۔

(a) 5 (b) 10 (c) 15 (d) 20

www.ilmkidunya.com

11.4.3 معیاری انحراف

-44 معیاری انحراف کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہونے والی علامت ہے۔

(a) σ (b) σ^2 (c) $\bar{x}$ (d) $\tilde{x}$

-45 معیاری انحراف ______ کا مثبت جذر ہے۔

(a) حسابی اوسط (b) وسطانیہ (c) تغیریت (d) چہارمی حصہ

-46 اگر 225 = (σ^2) تغیریت ہو تو معیاری انحراف (σ) برابر ہوگا۔

(a) 5 (b) 10 (c) 15 (d) 20

-47 غیر گروہی مواد کے لیے معیاری انحراف معلوم کرنے کا فارمولا ہے۔

(a) $\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$ (b) $\frac{\sum fx}{\sum f}$ (c) $\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$ (d) $\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$

-48 دو مواودوں کا موازنہ کرتے وقت، حسابی اوسط ہمیں بتاتی ہے۔

(a) اوسط کارکردگی (b) یکسانیت (c) درمیانی قدر (d) مواودوں کا پھیلاؤ

-49 دو مواودوں کا موازنہ کرتے وقت، معیاری انحراف ہمیں بتاتا ہے۔

(a) اوسط کارکردگی (b) یکسانیت (c) درمیانی قدر (d) سب سے بڑی قدر

-50 پہلے دس قدرتی اعداد کی تغیریت ہے۔

(a) 5 (b) 7.5 (c) 8.25 (d) 9.5

جوابات

-1 مجموعی تعددی تقسیم -2 ترسیم -3 2 -4 یہ تمام -5 وسطانیہ

-6 Q_1 -7 Q_3 -8 2 -9 10 -10 100

-11 Q_3 Q_1 -12 اندرونی چہارمی حصہ -13 IQR -14 وسطانیہ کی -15 وسکرز کی

-16 4 -17 طاق -18 2 -19 3 -20 صفر ارتباط

-21 مثبت ارتباط -22 منفی ارتباط -23 50 -24 225 -25 سعت

-26 18 -27 فرق -28 30 -29 H − L -30 منفی عدد

-31 σ^2 -32 $\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$ -33 تغیریت -34 5 -35 1

-36 6 -37 $\frac{\sum x}{n}$ -38 $\frac{\sum fx}{\sum f}$ -39 کوئی نہیں -40 منفی -41 تغیریت

-42 $\frac{\sum fx^2}{\sum f}-\left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$ -43 10 -44 σ -45 تغیریت -46 15

-47 $\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$ -48 اوسط کارکردگی -49 یکسانیت -50 8.25

www.ilmkidunya.com

اضافی مختصر سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے مختصر جوابی سوالات

11.1 مجموعی تعددات کی تشکیل

-1 **مجموعی تعدد کی تعریف کریں۔**

جواب: مجموعی تعدد، تعددات کا مسلسل بڑھتا ہوا مجموعہ ہوتا ہے جہاں ہر تعدد کو اس سے پہلے کے تمام تعددات کے مجموعہ میں شامل کیا جاتا ہے۔

-2 **مجموعی تعددی کثیرالاضلاع کیا ہوتی ہے؟**

جواب: ایک مجموعی تعددی کثیرالاضلاع ایک ترسیمی اظہار ہے جو کسی تعددی تقسیم میں ہر حقیقی جماعتی حد کی مجموعی تعددات کو ظاہر کرتا ہے۔

-3 **مجموعی تعددی کثیرالاضلاع کی تشکیل کے طریقوں کے نام لکھیں۔**

جواب: مجموعی تعددی کثیرالاضلاع کی تشکیل کے دو طریقوں کے نام درج ذیل ہیں۔

(a) کمی کا طریقہ (b) زیادہ کا طریقہ

-4 **وسطانیہ کی تعریف کریں۔**

جواب: وسطانیہ مواد میں درمیانی قدر ہوتی ہے جب قدروں کو ترتیب صعودی یا ترتیب نزولی میں ترتیب دیا گیا ہو۔

-5 **مواد کے سیٹ 7 ,1 ,12 ,10 ,9 ,4 ,5 کا وسطانیہ معلوم کریں**

حل: دیا گیا مواد کا سیٹ ترتیب صعودی میں

1, 4, 5, 7, 9, 10, 12

یہاں $n = 7$

$\because$ وسطانیہ = $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ ویں قدر

= $\left(\frac{7+1}{2}\right)^{th}$ ویں قدر

= $\left(\frac{8}{2}\right)^{th}$ ویں قدر

= چوتھی مقدار

وسطانیہ = 7

-6 **غیر گروہی مواد کا وسطانیہ معلوم کرنے کا فارمولا لکھیں جب 'n' ایک طاق عدد ہو۔**

جواب: وسطانیہ = $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ ویں قدر

-7 **پہلے گیارہ مکمل اعداد کا وسطانیہ معلوم کریں۔**

حل: پہلے گیارہ مکمل اعداد

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

www.ilmkidunya.com

یہاں $n = 11$

وسطانیہ $= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ ویں قدر

$= \left(\frac{11+1}{2}\right)$ ویں قدر

$= \left(\frac{12}{2}\right)$ ویں قدر

وسطانیہ = 6 ویں قدر $\Rightarrow$ **وسطانیہ = 5**

8- **اگر کسی مواد کے سیٹ کے لیے $n = 19$ ہو تو وسطانیہ کی پوزیشن معلوم کریں۔**

حل: $n = 19$

کیونکہ 'n' ایک طاق عدد ہے اس لیے

$\because$ وسطانیہ $= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ ویں قدر

$= \left(\frac{19+1}{2}\right)$ ویں قدر

وسطانیہ $= \left(\frac{20}{2}\right)$ ویں قدر $\Rightarrow$ **وسطانیہ = 10 ویں قدر**

9- **مواد کے سیٹ $6.5, 5.5, 4.5, 3.5, 2.5$ کا وسطانیہ معلوم کریں۔**

حل: دیا گیا مواد کا ترتیب صعودی میں $2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5$

$n = 5$

وسطانیہ $= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ ویں قدر

$= \left(\frac{5+1}{2}\right)^{th}$ ویں قدر

$= \left(\frac{6}{2}\right)^{th}$ ویں قدر

وسطانیہ = تیسری مقدار $\Rightarrow$ **وسطانیہ = 4.5**

10- **چہارمی حصہ کیا ہے؟**

جواب: چہارمی حصہ ایک ترتیب شدہ مواد کے سیٹ کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے، ہر ایک میں 25% مواد شامل ہوتا ہے۔

11- **کسی مواد کے سیٹ کے تین اہم چہارمی حصے لکھیں۔**

حل: تین اہم چہارمی حصے درج ذیل ہیں۔

a) پہلا چہارمی حصہ (Q_1) b) دوسرا چہارمی حصہ (Q_2) c) تیسرا چہارمی حصہ (Q_3)

www.ilmkidunya.com

-12 ہم چہارمی حصے کیوں استعمال کرتے ہیں؟

جواب: چہارمی حصے ہمیں ڈیٹا کے پھیلاؤ اور اس کے جھکاؤ کو ایک سادہ وسط کے مقابلے میں زیادہ بہتر طور پر سمجھنے میں مدد دیتے ہیں۔

-13 مواد کے سیٹ 2, 5, 8, 10, 12, 15, 20, 22 کا پہلا اور تیسرا چہارمی حصہ معلوم کریں۔

حل: $n = 8$

- <u>پہلا چہارمی حصہ (Q_1)</u>

حل: Q_1 کی پوزیشن = ویں قدر $\left(\frac{n+1}{4}\right)$

= ویں قدر $\left(\frac{8+1}{4}\right)$

= ویں قدر $\left(\frac{9}{4}\right)$

= 2.25 ویں قدر

اب $Q_1 =$ دوسری قدر + 0.25 (تیسری قدر — دوسری قدر)

$= 5 + 0.25\,(8 - 5)$

$= 5 + 0.25\,(3)$

$= 5 + 0.75 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_1 = 5.75}$

- <u>تیسرا چہارمی حصہ (Q_3)</u>

Q_3 کی پوزیشن = ویں قدر $\left(\frac{3(n+1)}{4}\right)$

= ویں قدر $\left(\frac{3(4+1)}{4}\right)$

= ویں قدر $\left(\frac{27}{4}\right)$

Q_3 کی پوزیشن = 6.75 ویں قدر

اب $Q_3 =$ چھٹی قدر + 0.75 (ساتویں قدر — چھٹی قدر)

$= 15 + 0.75\,(20 - 15) = 15 + 0.75\,(5) \Rightarrow Q_3 = 15 + 3.75$

$\boxed{Q_3 = 18.75}$

-14 مواد کے سیٹ 2, 5, 8, 10, 12, 15, 20, 22 کی اندرونی چہارمی حصے کی سعت (IQR) معلوم کریں۔

حل: دیے گئے مواد سے

$Q_1 = 5$ اور $Q_3 = 15$

$\Rightarrow \quad IQR = Q_3 - Q_1$

$= 15 - 5$

$\boxed{IQR = 10}$

www.ilmkidunya.com

11.2 باکس اور وسکر پلاٹ

15- باکس اور وسکر پلاٹ کیا ہے؟

جواب: باکس اور وسکر پلاٹ مواد کے سیٹ کے پانچ عددی خلاصوں (سب سے چھوٹا عدد، پہلا چہارمی حصہ، وسطانیہ، تیسرا چہارمی حصہ اور سب سے بڑا عدد) کو گراف کے ذریعے ظاہر کرتا ہے۔

16- ہم باکس اور وسکر پلاٹ کیوں استعمال کرتے ہیں؟

جواب: یہ مواد کی تقسیم کا مشاہدہ اور مواد کے سیٹوں کا موازنہ کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

17- باکس اور وسکر پلاٹ میں وسکرز کیا ہیں؟

جواب: باکس سے سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی قدروں تک پھیلے ہوئے خطوط، جو مواد کے مجموعی پھیلاؤ کو ظاہر کرتے ہیں، وسکرز کہلاتے ہیں۔

18- باکس اور سکر پلاٹ میں، باکس کس کو ظاہر کرتا ہے؟

جواب: یہ اندرونی چہارمی حصے کی سعت (IQR) کو ظاہر کرتا ہے جو مواد کا 50% ہے۔ جسے باکس کے کناروں پر پہلے چہارمی حصہ (Q_1) اور تیسرے چہارمی حصہ (Q_3)

19- دیئے گئے باکس اور وسکر پلاٹ سے Q_1 اور Q_3 معلوم کریں۔

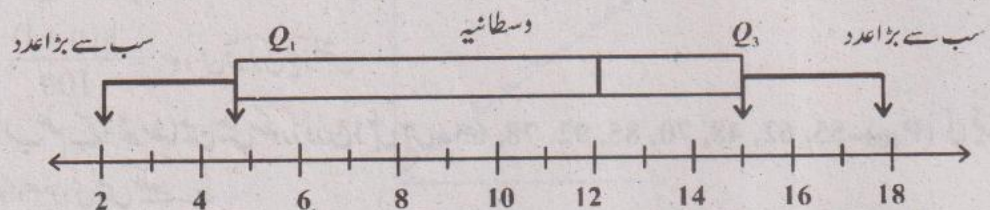
حل: باکس اور وسکر پلاٹ کی مدد سے

باکس کا پہلا کنارہ = $Q_1 = 12$

باکس کا دوسرا کنارہ = $Q_3 = 18$

20- باکس اور وسکر پلاٹ بنائیں اگر 18 = سب سے بڑا عدد، 2 = سب سے چھوٹا عدد $Q_3 = 15$ اور $Q_1 = 4.5$ 11 = وسطانیہ

حل:



21- اندرونی چہارمی حصہ کی سعت (IQR) معلوم کریں اگر $Q_1 = 73$, $Q_3 = 80$ دیا گیا مواد

حل:

$Q_1 = 73$, $Q_3 = 80$

$\Rightarrow IQR = Q_3 - Q_1$

$= 80 - 73$

$\boxed{IQR = 7}$

22- دسواں حصہ کیا ہوتا ہے؟

جواب: دسواں حصہ ایک ترتیب شدہ مواد کے سیٹ دس برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے، ہر حصہ 10% مواد کو ظاہر کرتا ہے۔

دسویں حصے کی 9 قدریں ہوتی ہیں D_1 سے D_9۔

-23 K-واں یا دسویں حصے کی پوزیشن کا فارمولا لکھیں۔

جواب: $\text{K} = \frac{K(n+1)}{10}$ - ویں دسویں حصے کی پوزیشن

-24 درج ذیل ٹیسٹ اسکورز کے لیے D_3 اور D_7 معلوم کریں۔ 12, 15, 20, 22, 25, 28, 30, 32, 35, 40

حل: یہاں $n = 10$

اب $D_3 = \frac{3(10+1)}{10} = \frac{33}{10} = 3.3$

$D_3 =$ تیسری قدر + 0.3 × (تیسری قدر۔ چوتھی قدر)

$= 20 + 0.3 \times (22 - 20)$

$= 20 + 0.3 \times 2$

$D_3 = 20 + 0.6$

$\boxed{D_3 = 20.6}$

اور

$D_7 = \frac{7(10+1)}{10} = \frac{77}{10} = 7.7$

$D_7 =$ ساتویں قدر + 0.7 × (ساتویں قدر۔ آٹھویں قدر)

$= 30 + 0.7 \times (32 - 30)$

$D_7 = 30 + 0.7 \times 2 = 30 + 1.4$

$\Rightarrow \boxed{Q_7 = 31.4}$

-25 سوواں حصہ کیا ہے؟

جواب: سوواں حصہ ایک ترتیب شدہ مواد کے سیٹ کو 100 برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ہر حصہ 1% مواد پر مشتمل ہوتا ہے۔ P_1 سے P_{99} تک ننانوے سوویں قدریں ہوتی ہیں۔

-26 کسی بھی سوویں قدر کی پوزیشن معلوم کرنے کا فارمولا لکھیں۔

جواب: سوویں قدر کی پوزیشن $= \frac{k(n+1)}{100}$

-27 ایک طالب علم کے آٹھ مضامین میں سکورز درج ذیل ہیں۔ 55, 62, 48, 70, 85, 92, 78, 65-(P_{40}) کی قیمت معلوم کریں۔

جواب: دیا گیا مواد صعودی میں لکھنے سے

48, 55, 62, 65, 70, 78, 85, 92

یہاں $n = 8$

اب $P_{40} = \frac{40(8+1)}{100} = \frac{40(9)}{100} = \frac{360}{100} = 3.6$ (تیسری قدر۔ چوتھی قدر)

$P_{40} =$ تیسری قدر + 0.6 (تیسری قدر۔ چوتھی قدر)

$P_{40} = 62 + 0.6 \times (65 - 62)$

$= 62 + 0.6 \times 3$

$= 62 + 1.8$

$\boxed{P_{40} = 63.8}$

www.ilmkidunya.com

28- **انتشاری خاکہ کیا ہوتا ہے؟**

جواب: انتشاری خاکہ ایک گرافیکل طریقہ ہے جو دو عددی متغیرات کے درمیان تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔

29- **موزوں ترین خط کیا ہے؟**

جواب: موزوں ترین خط (رجحان کا خط بھی کہا جاتا ہے) ایک خطِ مستقیم ہے جو انتشاری خاکہ کے ذریعے کھینچا جاتا ہے جو مواد کے رجحان کی سمت کو بہترین طریقے سے ظاہر کرتا ہے۔

30- **ارتباط کیا ہے؟**

جواب: یہ دو متغیرات کے درمیان تعلق ہے، جہاں ایک متغیر میں تبدیلی دوسرے میں تبدیلی سے وابستہ ہوتی ہے۔

31- **ارتباط کی تین اقسام لکھیں۔**

جواب: a) مثبت ارتباط b) منفی ارتباط c) صفر ارتباط

32- **مثبت ارتباط کیا ہوتا ہے؟**

جواب: اگر ایک متغیر بڑھنے سے دوسرا بھی بڑھے تو اسے مثبت ارتباط کہا جاتا ہے۔

33- **منفی ارتباط کیا ہوتا ہے؟**

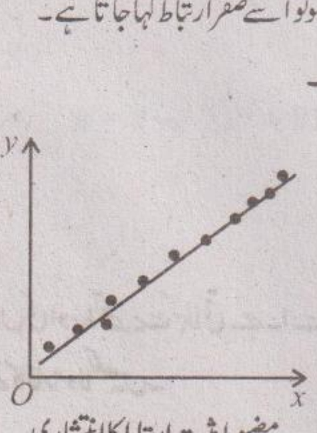
جواب: اگر ایک متغیر بڑھنے سے دوسرا کم ہو تو اسے منفی ارتباط کہتے ہیں۔

34- **صفر ارتباط کیا ہوتا ہے؟**

جواب: اگر دو متغیرات کے درمیان کوئی مستقل ترتیب نہ ہو تو اسے صفر ارتباط کہا جاتا ہے۔

35- **مضبوط مثبت ارتباط کا انتشاری خاکہ تشکیل دیں۔**

حل:

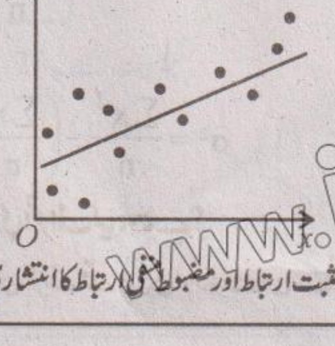


مضبوط مثبت ارتباط کا انتشاری

36- **کمزور مثبت ارتباط اور مضبوط منفی ارتباط کا انتشاری خاکہ تشکیل دیں۔**

حل:

کمزور منفی ارتباط اور صفر ارتباط

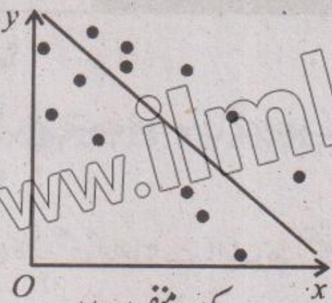


کمزور مثبت ارتباط اور مضبوط منفی ارتباط کا انتشاری

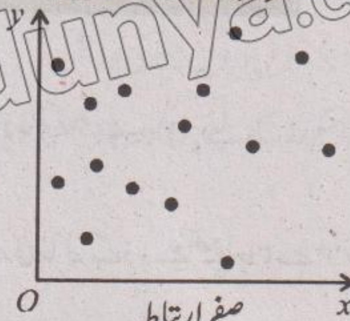
www.ilmkidunya.com

-37 کمزور منفی ارتباط اور صفر ارتباط کا خاکہ تشکیل دیں۔

حل:



کمزور منفی ارتباط



صفر ارتباط

11.4 انتشار کے پیمانے

-38 کوئی سے چار انتشار کے پیمانوں کے نام تحریر کریں۔

جواب: چار انتشار کے پیمانے درج ذیل ہیں۔

(a سعت
(b اندرونی چہارمی حصے کی سعت
(c معیاری انحراف
(d تغیریت

-39 سعت کی تعریف کریں اور اس کا فارمولا لکھیں۔

جواب: سب سے بڑی قدر (H) اور سب سے چھوٹی قدر (L) کے فرق کو سعت کہا جاتا ہے۔

سعت $(R) = H - L$

-40 دیئے گئے مواد کی سعت معلوم کریں: 5, 10, 15, 20, 25, 30

جواب: یہاں

$H = 30,\ L = 5$

$\Rightarrow$ سعت $(R) = H - L$

$= 30 - 5$

سعت $(R) = 25$

-41 تغیریت کیا ہے؟

جواب: قدروں کی اوسط سے ان کے انحرافات کے مربعوں کی اوسط تغیریت کہلاتی ہے۔ اسے σ^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

-42 غیر گروہی اور گروہی مواد کی تغیریت معلوم کرنے کا فارمولا لکھیں۔

جواب: غیر گروہی مواد کے لیے

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n}$$

یا

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

گروہی مواد کے لیے

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\overline{x})^2}{\sum f}$$

یا

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2$$

-43 معیاری انحراف کیا ہوتا ہے؟

جواب: معیاری انحراف قدروں کی اوسط سے ان کے انحرافات کے مربعوں کی اوسط کا مثبت جذر المربع ہوتا ہے۔ اسے σ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

www.ilmkidunya.com

44- غیر گروہی اور گروہی مواد کے لیے معیاری انحراف معلوم کرنے کا فارمولا لکھیں۔

جواب: غیر گروہی مواد کے لیے

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$$

یا

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$$

گروہی مواد کے لیے

$$\sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{\sum f}}$$

یا

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{n}\right)^2}$$

45- تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کریں اگر

$\sum x = 63, \sum x^2 = 63, n = 8$

حل:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{623}{7} - \left(\frac{63}{7}\right)^2$$

$$= 89 - 81$$

$$\boxed{\sigma^2 = 8}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 8$$

$$\boxed{\sigma^2 = 2.89}$$

2.89 = معیاری انحراف اور 8 = تغیریت

46- تغیریت معلوم کریں اگر $\bar{x} = 9.5$، $\sum x^2 = 912$ اور $n = 8$

حل:

$$\because \sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$= \frac{912}{8} - (\bar{x})^2 \qquad \because \frac{\sum x}{n} = \bar{x}$$

$$= 114 - (9.5)^2$$

$$= 114 - 90.25$$

$$\boxed{\sigma^2 = 23.75}$$

پس 23.75 = تغیریت ہے۔

47- تغیریت معلوم کریں اگر $\sum fx = 867$، $\sum fx^2 = 23805$ اور $\sum f = 32$ ہو۔

جواب:

$$\because \sigma^2 = \frac{\sum x^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2$$

www.ilmkidunya.com
www.ilmkidunya.com
www.ilmkidunya.com

$$= \frac{23805}{32} - \left(\frac{867}{32}\right)^2$$

$$= 743.90 - (27.093)^2$$

$$= 743.90 - 734.03065$$

$$= 114 - 90.25$$

$$\boxed{\sigma^2 = 9.86935}$$

پس، تغیریت ہے۔ $= 9.86935$

48- معیاری انحراف معلوم کریں اگر $\sum fx^2 = 52690$ ، $\sum f = 40$ اور $\sum fx = 1300$ ہو۔

حل:

$$\because \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{n} - \left(\frac{\sum fx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{52690}{40} - \left(\frac{1300}{40}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1317.25 - (32.5)^2}$$

$$= \sqrt{1317.25 - 1056.25}$$

$$\sigma = \sqrt{261}$$

$$\boxed{\sigma = 16.155}$$

پس، تغیریت ہے۔ $= 9.86935$

49- انتشار سے آپ کیا سمجھتے ہیں؟

جواب: شماریاتی طور، انتشار سے مراد کسی ڈیٹا سیٹ میں مشاہدات کا پھیلاؤ یا بکھراؤ ہے۔

50- آپ انتشار کے پیمانوں کی تعریف کیسے کرتے ہیں؟

جواب: وہ پیمانے یا طریقے جو کسی ڈیٹا سیٹ میں تبدیلی کی حد یا درجے کا تعین کرنے کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔

www.ilmkidunya.com