یونٹ 06

مستوی میں ویکٹرز

حاصلاتِ تعلم

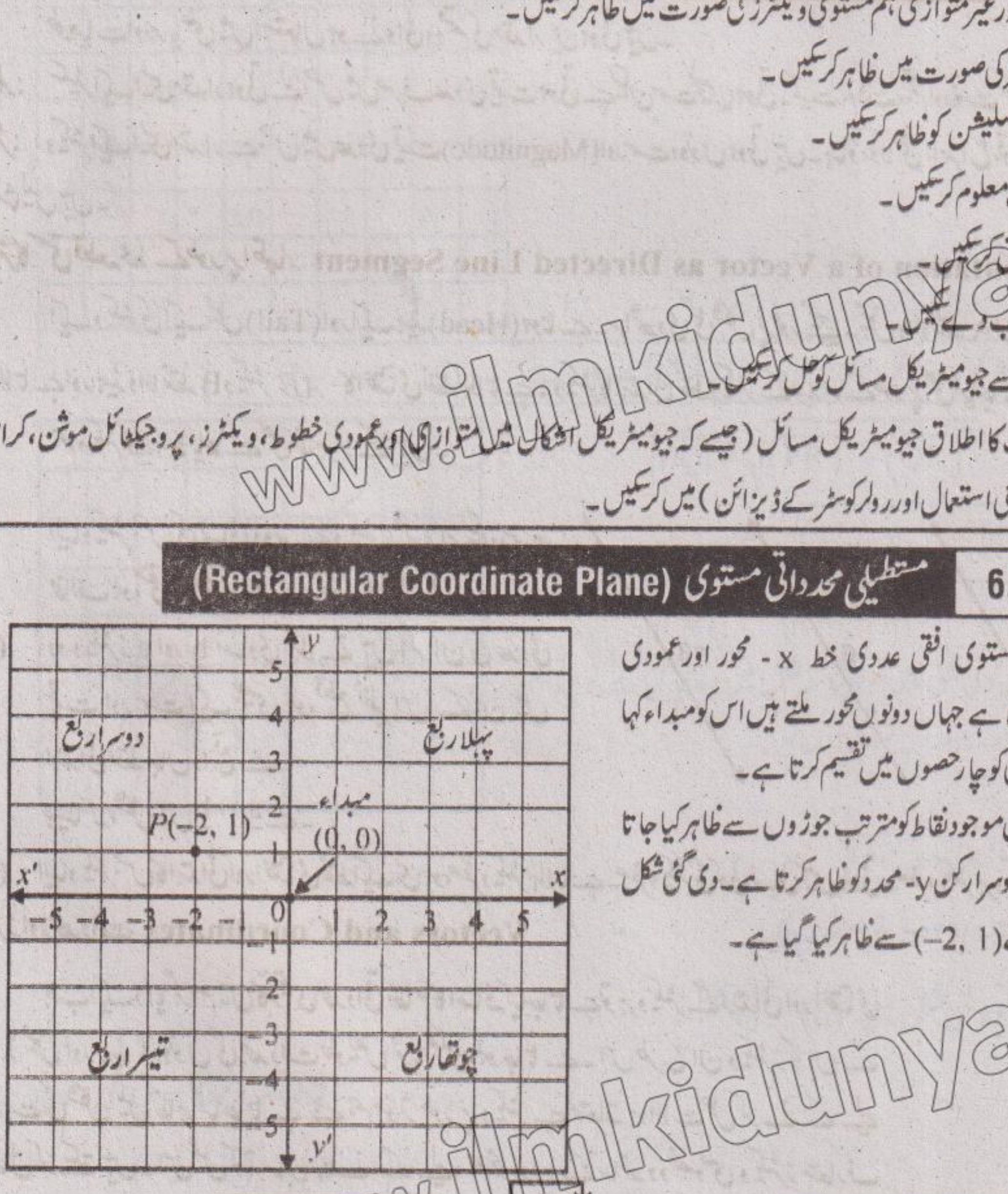
اس یونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- مستوی میں مستطیلی محدداتی نظام کو متعارف کرا سکیں۔
- ویکٹرز کو سمتی قطعہ خط کے طور پر ظاہر کر سکیں۔
- ویکٹر کو دو غیر صفری اور غیر متوازی ہم مستوی ویکٹرز کی صورت میں ظاہر کر سکیں۔
- ویکٹر کو پوزیشن ویکٹر کی صورت میں ظاہر کر سکیں۔
- ویکٹر کے ذریعے ٹرانسلیشن کو ظاہر کر سکیں۔
- ویکٹر کی عددی قیمت معلوم کر سکیں۔
- ویکٹرز کو جمع اور تفریق کر سکیں۔
- ویکٹر کو سکیلر سے ضرب دے سکیں۔
- ویکٹر کے استعمال سے جیومیٹریکل مسائل کو حل کر سکیں۔
- ویکٹرز کے تصورات کا اطلاق جیومیٹریکل مسائل (جیسے کہ جیومیٹریکل اشکال میں متوازی اور عمودی خطوط، ویکٹرز، پروجیکٹائل موشن، کراس ونڈز زاویوی ایشن، فوجی استعمال اور رولر کوسٹر کے ڈیزائن) میں کر سکیں۔

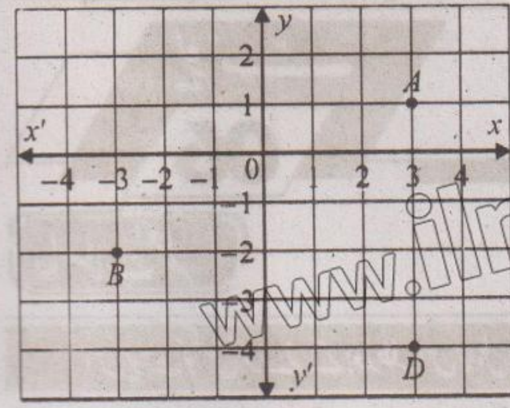
6.1 مستطیلی محدداتی مستوی (Rectangular Coordinate Plane)

مستطیلی محدداتی مستوی افقی عددی خط x - محور اور عمودی خط y- محور کے تقاطع سے بنتی ہے جہاں دونوں محور ملتے ہیں اس کو مبداء کہا جاتا ہے اور یہ محدداتی مستوی کو چار حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

محدداتی مستوی میں موجود نقاط کو مترتب جوڑوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ پہلا رکن x- محدد اور دوسرا رکن y- محدد کو ظاہر کرتا ہے۔ دی گئی شکل میں نقطہ P کو مترتب جوڑے (1 ,2–) سے ظاہر کیا گیا ہے۔



www.ilmkidunya.com



مثال 1: دی گئی شکل سے درج ذیل نقاط کے محددات لکھیے:

(i) A (ii) B (iii) D

حل:

(i) نقطہ A مبداء سے 3 اکائیاں دائیں جانب اور 1 اکائی اوپر ہے۔ لہٰذا x- محدد 3 اور y- محدد 1 ہے۔ A کے محددات (3, 1) ہیں۔

(ii) نقطہ B مبداء سے 3 اکائیاں بائیں جانب اور 2 اکائیاں نیچے ہے۔ لہٰذا x- محدد 3 اور y- محدد 2 ہے۔ B کے محددات (−3, −2) ہیں۔

(iii) نقطہ D مبداء سے 3 اکائیاں دائیں جانب اور 4 اکائیاں نیچے ہے۔ لہٰذا x- محدد 3 اور y- محدد 4 ہے۔ D کے محددات (3, −4) ہیں۔

6.2 سکیلرز اور ویکٹرز (Scalars and Vectors)

طبعیات اور ریاضی میں استعمال ہونے والی دو قسم کی مقداریں ہوتی ہیں۔

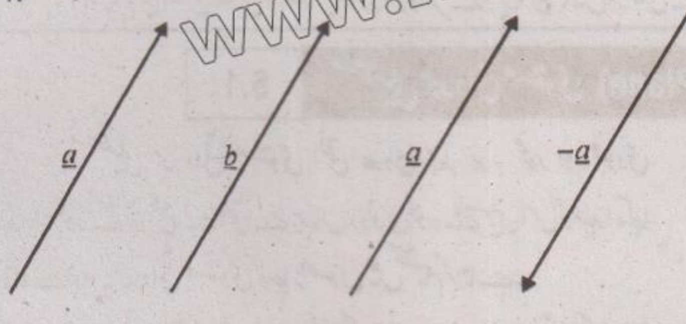
سکیلر: سکیلر ایک ایسی مقدار ہوتی ہے جس میں صرف عددی قیمت ہوتی ہے لیکن سمت نہیں ہوتی۔ کمیت، وقت، حجم اور قوت سکیلر مقداروں کی مثالیں ہیں۔

ویکٹر: ویکٹر ایک ایسی مقدار ہے جس میں عددی قیمت (Magnitude) اور سمت دونوں ہوتی ہیں۔ ہٹاؤ، ولاسٹی، اسراع، قوت اور مومینٹم ویکٹر مقداروں کی مثالیں ہیں۔

ویکٹر کا سمتی قطعہ خط کے طور پر اظہار Representation of a Vector as Directed Line Segment

ایک ویکٹر کی ایک ٹیل (Tail) اور ایک ہیڈ (Head) ہوتا ہے۔ ساتھ دی گئی شکل پر غور کیجیے۔ ٹیل والا نقطہ A ابتدائی نقطہ کہلاتا ہے اور ہیڈ والا نقطہ B ویکٹر $\overrightarrow{AB}$ کا اختتامی نقطہ کہلاتا ہے۔ ویکٹر کا ابتدائی نقطہ ویکٹر کے مبداء کے طور پر بھی لیا جاتا ہے۔

ہم ویکٹر کو $\underline{a}$، $\vec{a}$ یا **a** سے بھی ظاہر کر سکتے ہیں۔

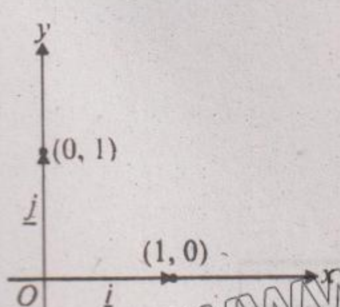


(i) ایسا ویکٹر جس کی لمبائی دوسرے ویکٹر کے برابر لیکن سمت مخالف ہو، منفی ویکٹر کہلاتا ہے۔ جیسا کہ شکل میں ہے۔

(ii) دو ویکٹرز $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ مساوی کہلاتے ہیں اگر ان کی عددی قیمت اور سمت ایک جیسی ہو، قطع نظر اس کے ان میں ابتدائی نقطہ کہاں واقع ہے۔
جیسا کہ شکل میں $\underline{a} = \underline{b}$ ہے۔

(iii) ایسا ویکٹر جس کا ابتدائی اور اختتامی نقطہ ایک ہی ہو، صفر ویکٹر کہلاتا ہے۔ صفر ویکٹر کی کوئی لمبائی نہیں ہوتی۔ صفر ویکٹر ہر ویکٹر کے متوازی ہوتا ہے۔

ویکٹرز اور محددات Vectors and Coordinates

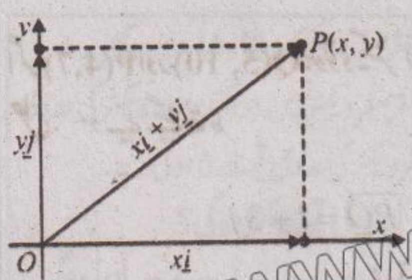


جب ایک ڈایا گرام میں کارتیسی محدداتی نظام کا اضافہ کیا جاتا ہے تو ہر ویکٹر کے ابتدائی اور اختتامی نقاط (ٹیل اور ہیڈ) دونوں کی محددات تفویض کرنا ممکن ہو جاتا ہے۔ اس طرح ان ویکٹرز کو ان کے محددات کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے جسے ہم مؤثر طور پر ویکٹر سے متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ اس عمل کو آسان بنانے کے لیے، ہم محوروں کے ساتھ دو خصوصی ویکٹرز متعارف کراتے ہیں: x- محور کے $\underline{i}$ اور y- محور کے ساتھ $\underline{j}$، یہ دونوں ویکٹرز مبداء سے شروع ہوتے ہیں اور اپنے

www.ilmkidunya.com

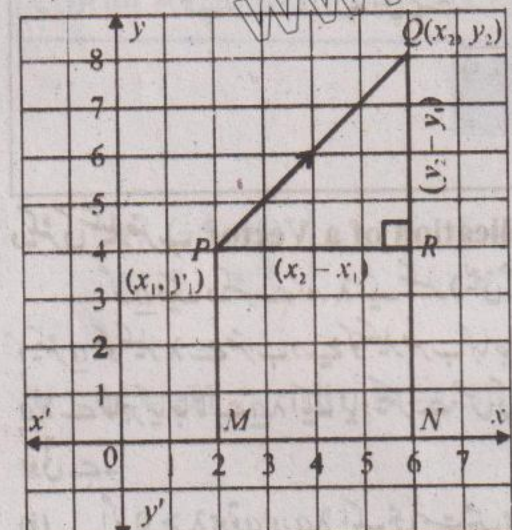
متعلقہ محوروں کی مثبت سمت کی طرف اشارہ کرتے ہیں۔

پوزیشن ویکٹرز Position Vectors



فرض کریں $O(0, 0)$ مبداء ہے اور $P(x, y)$ مستوی میں کوئی نقطہ ہے تب ویکٹر $\overrightarrow{OP} = (x - 0)\underline{i} + (y - 0)\underline{j} = x\underline{i} + y\underline{j}$ نقطہ P کے مبداء O کے لحاظ سے پوزیشن ویکٹر کہلاتا ہے۔ x اور y بالترتیب افقی اور عمودی جزو ہیں۔

ویکٹرز کی عددی قیمت Magnitude of a Vector



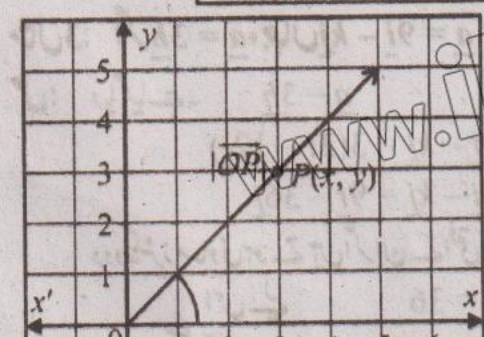
فرض کیا $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ دیے گئے نقاط ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ x- محور پر $\overline{PM}$ اور $\overline{QN}$ عمود کھینچیں۔

$\overline{PR} \perp \overline{QN}$ کھینچیں

اب
$$\left|\overline{PR}\right| = \left|x_2 - x_1\right|$$
$$\left|\overline{QR}\right| = \left|y_2 - y_1\right|$$

PRQ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

> نوٹ: ویکٹر کی عددی قیمت کو اس کا نورم یا لمبائی بھی کہا جاتا ہے۔



اس لیے
$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\left(\overline{PR}\right)^2 + \left(\overline{QR}\right)^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

اگر $P(x, y)$ مستوی میں کوئی بھی نقطہ ہو جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے، تو پوزیشن ویکٹرز $\overrightarrow{OP} = x\underline{i} + y\underline{j}$ کی مبداء سے عددی قیمت یوں ہوگی۔

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال 2: اگر $P(2, 4)$ اور $Q(-5, 3)$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(i) $\overrightarrow{PQ}$ کو $x\underline{i} + y\underline{j}$ کی شکل میں (ii) $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$

حل:

(i) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$= (-5 - 2)\underline{i} + (3 - 4)\underline{j} = -7\underline{i} - \underline{j}$

(ii) $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

خود آزمائی!

اگر $P(4,7)$ اور $Q(5, 10)$ ہو تو ویکٹر $\overrightarrow{PQ}$ کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: دیے گئے نقاط

$P(4, 7),\ Q(5, 10)$

$$\overrightarrow{PQ} = (5-4)\underline{i} + (10-7)\underline{j} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \underline{i} + 3\underline{j}$$

اب عددی قیمت

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9}$$

جواب: $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{10}$

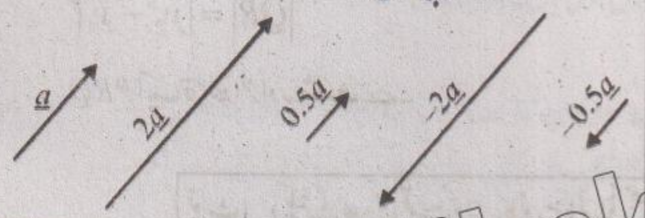
ویکٹر کی سکیلر ضرب Scalar Multiplication of a Vector

اگر $\underline{a}$ ایک ویکٹر ہے اور λ ایک سکیلر (یعنی حقیقی عدد) ہے، تو ویکٹر $\underline{a}$ کو سکیلر λ سے ضرب دینے کو سکیلر ضرب کہا جاتا ہے۔ اور اسے $\lambda\underline{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے $\lambda\underline{a}$ ایک نیا ویکٹر ہے جس کی عددی قیمت $|\lambda|$ ہوتی ہے۔

(i) اگر $\lambda > 0$ ہو تو $\underline{a}$ اور $\lambda\underline{a}$ ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔

(ii) اگر $\lambda < 0$ ہو تو $\underline{a}$ اور $\lambda\underline{a}$ مخالف سمت میں ہوتے ہیں۔

نوٹ: دو ویکٹرز کو متوازی کہا جاتا ہے اگر وہ ایک دوسرے کے غیر صفر سکیلر جز وضربی ہوں۔



مثال 3: اگر $\underline{a} = 3\underline{b}$، جہاں $\underline{a} = 9\underline{i} - k\underline{j}$ اور $\underline{b} = 3\underline{i} - 12\underline{j}$ ہوں تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے۔ $\underline{a} = 3\underline{b}$

$$9\underline{i} - k\underline{j} = 3(3\underline{i} - 12\underline{j})$$

$$9\underline{i} - k\underline{j} = 9\underline{i} - 36\underline{j}$$

دو ویکٹرز مساوی ہوتے ہیں اگر ان کے افقی اور عمودی اجزاء مساوی ہوں۔

اس لیے $k = 36$

مثال 4: ثابت کیجیے کہ $\underline{a} = 5\underline{i} - 2\underline{j}$ اور $\underline{b} = -10\underline{i} + 4\underline{j}$ متوازی ہیں۔

حل: دیا گیا ہے۔

$$\underline{a} = 5\underline{i} - 2\underline{j}$$
$$\underline{b} = -10\underline{i} + 4\underline{j}$$
$$\underline{b} = -2(5\underline{i} - 2\underline{j})$$
$$\underline{b} = -2\underline{a}$$

جو ثابت کرتا ہے کہ $\lambda = -2$ کے ساتھ $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ متوازی ہیں۔

نوٹ:

(i) اگر $\underline{a} = \underline{b}$، ہو تو $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ کی ایک جیسی سمت ہوتی ہے اور $|\underline{a}| = |\underline{b}|$

(ii) اگر $\underline{a}$ ایک صفری ویکٹر ہو تو $|\underline{a}| = 0$

یونٹ ویکٹر Unit Vector

یونٹ ویکٹر وہ ہوتا ہے جس کی عددی قیمت 1 ہو۔ اگر $\underline{a}$ کوئی ویکٹر ہے، تو اس کے یونٹ ویکٹر کو $\hat{\underline{a}}$ (a ہیٹ پڑھا جاتا ہے) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اور اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے: $\hat{\underline{a}} = \dfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$

مثال 5: $\underline{a} = -5\underline{i} + 2\underline{j}$ کی سمت میں یونٹ ویکٹر معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے۔ $\underline{a} = -5\underline{i} + 2\underline{j}$

$$|\underline{a}| = \sqrt{(-5)^2 + (2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$$\hat{a} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{-5\underline{i} + 2\underline{j}}{\sqrt{29}}$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{29}}\underline{i} + \frac{2}{\sqrt{29}}\underline{j}$$

چیلنج (i) کیا یونٹ ویکٹر صفر ہو سکتا ہے؟ وضاحت کیجیے۔

جواب: جی نہیں ایک یونٹ ویکٹر صفر ویکٹر نہیں ہو سکتا یونٹ ویکٹر کی عددی قیمت 1 ہوتی ہے اور صفر ویکٹر کی عددی قیمت 0 ہوتی ہے۔

(ii) اگر $\underline{a}$ یونٹ ویکٹر ہو تو $|\underline{a}|$ کی قیمت کیا ہوگی؟

جواب: اگر $\underline{a}$ ایک یونٹ ویکٹر ہے تو اس کی عددی قیمت $1 = |\underline{a}|$ ہوگی۔

حل مشق 6.1

-1 ربع بتائیے جن میں دیا گیا ہر ایک نقطہ واقع ہے۔

(i) (4, 3) حل: ربع-I

(ii) (5, –4) حل: ربع-IV

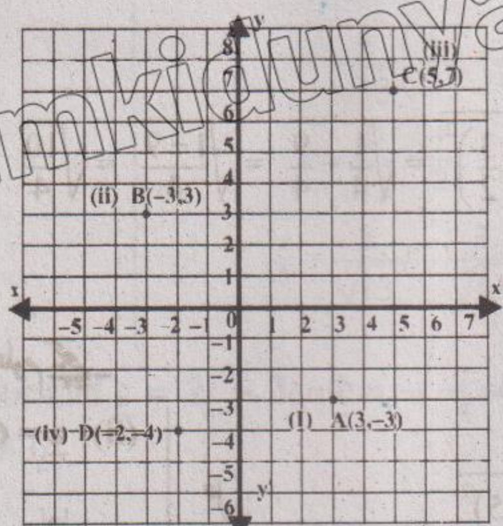
(iii) (–6, 2) حل: ربع-II

(iv) (–4, –4) حل: ربع-III

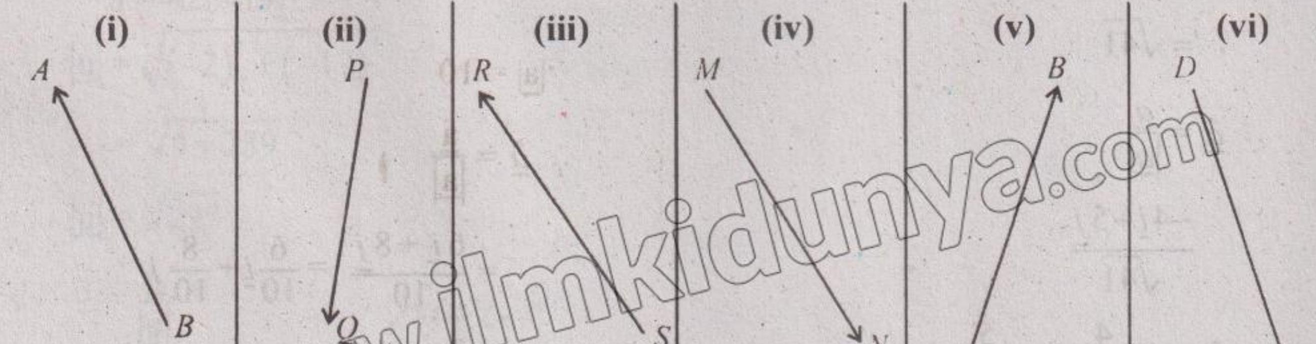
-2 محدداتی مستوی پر درج ذیل نقاط کو مرتسم کیجیے۔

(i) A(3, –3) (ii) B(–3, 3) (iii) C(5, 7) (iv) D(–2, –4)

حل:



-3 درج ذیل ویکٹرز کی ٹیل اور ہیڈ کے نام بتائیے۔



(i) ہیڈ: A، ٹیل: B

(ii) ہیڈ: Q، ٹیل: P

(iii) ہیڈ: R، ٹیل: S

(iv) ٹیل: M، ہیڈ: N

(v) ٹیل: A، ہیڈ: B

(vi) ٹیل: D، ہیڈ: C

www.ilmkidunya.com

4- ویکٹر $\overrightarrow{AB}$ کو $x\underline{i} + y\underline{j}$ کی شکل میں لکھیے۔

(i) A(1, −7), B(−2, 4)

حل:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\underline{i} + (y_2 - y_1)\underline{j}$$

$$= (-2 - 1)\,i + [4 - (-7)]\,\underline{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = -3\underline{i} + 11\underline{j}$$

(ii) A(8, 9), B(12, 3)

حل:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\underline{i} + (y_2 - y_1)\underline{j}$$

$$= (12 - 8)\,\underline{i} + (3 - 9)\,\underline{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 4\underline{i} - 6\underline{j}$$

5- $\underline{a}$ کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\underline{a} = -3\underline{i} + 2\underline{j}$

حل:

$$|\underline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 4}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{13}$$

(ii) $\underline{a} = 4\underline{i} - 3\underline{j}$

حل:

$$|\underline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9}$$

$$= \sqrt{25} \Rightarrow |\underline{a}| = 5$$

(iii) $\underline{a} = \frac{1}{2}\underline{i} + \frac{3}{2}\underline{j}$

حل:

$$|\underline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{1+9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}}$$

$$|\underline{a}| = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

6- دیے گئے ویکٹر کی سمت میں یونٹ ویکٹر معلوم کیجیے۔

(i) $\underline{a} = -4\underline{i} + 5\underline{j}$

حل:

$$|\underline{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 25}$$

$$= \sqrt{41}$$

$$\because \hat{\underline{a}} = \frac{a}{|\underline{a}|}$$

$$\frac{-4\underline{i} + 5\underline{j}}{\sqrt{41}}$$

$$\hat{\underline{a}} = -\frac{4}{\sqrt{41}}\underline{i} + \frac{5}{\sqrt{41}}\underline{j}$$

(ii) $\underline{a} = 6\underline{i} + 8\underline{j}$

حل:

$$|\underline{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100}$$

$$|\underline{a}| = 10$$

$$\because \hat{\underline{a}} = \frac{a}{|\underline{a}|}$$

$$= \frac{6\underline{i} + 8\underline{j}}{10} = \frac{6}{10}\underline{i} + \frac{8}{10}\underline{j}$$

$$\hat{\underline{a}} = \frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}$$

(iii) $\underline{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j}$

حل:

$$|\underline{a}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1+1}{6}}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\because \hat{\underline{a}} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\underline{i} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\underline{j}$$
$$= \sqrt{\frac{3}{6}}\underline{i} + \sqrt{\frac{3}{6}}\underline{j}$$
$$\hat{\underline{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}$$

(iv) $\underline{a} = \frac{1}{2}\underline{i} - \frac{3}{4}\underline{j}$

حل:

$$|\underline{a}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{4\times1 + 1\times9}{16}}$$
$$= \sqrt{\frac{4+9}{16}} = \sqrt{\frac{13}{16}}$$
$$= \frac{\sqrt{13}}{4}$$
$$\because \hat{\underline{a}} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\underline{i} - \frac{3}{4}\underline{j}}{\frac{\sqrt{13}}{4}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{13}}\left(\frac{1}{2}\underline{i} - \frac{3}{4}\underline{j}\right)$$
$$= \frac{4}{\sqrt{13}} \times \frac{1}{2}\underline{i} - \frac{4}{\sqrt{13}} \times \frac{3}{4}\underline{j}$$
$$\hat{\underline{a}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\underline{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\underline{j}$$

-7 اگر $\underline{a} = 5\underline{i} - 7\underline{j}$ اور $\underline{b} = -\underline{i} - \underline{j}$ اور $\underline{c} = 2\underline{i} + 3\underline{j}$ and ہوں تو $\underline{a} + \underline{b} - 3\underline{c}$ کے متوازی یونٹ ویکٹر معلوم کیجیے۔

حل:

$$\underline{a} + \underline{b} - 3\underline{c} = 5\underline{i} - 7\underline{j} + (-\underline{i} - \underline{j}) - 3(2\underline{i} + 3\underline{j})$$
$$= 5\underline{i} - 7\underline{j} - \underline{i} - \underline{j} - 6\underline{i} - 9\underline{j}$$
$$= (5 - 1 - 6)\underline{i} - (7 + 1 + 9)\underline{j}$$
$$\underline{a} + \underline{b} - 3\underline{c} = -2\underline{i} - 17\underline{j}$$

فرض کریں

$$\underline{u} = -2\underline{i} - 17\underline{j}$$
$$|\underline{u}| = \sqrt{(-2)^2 + (-17)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 289}$$
$$|\underline{u}| = \sqrt{293}$$
$$\hat{\underline{u}} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$$

مطلوبہ یونٹ ویکٹر

$$= \frac{-2\underline{i} - 17\underline{j}}{\sqrt{293}} = -\frac{2}{\sqrt{293}}\underline{i} - \frac{17}{\sqrt{293}}\underline{j}$$

www.ilmkidunya.com

-8 اگر $\underline{a} = 3\underline{i} - \underline{j}$ ، $\underline{b} = -2\underline{i} + 4\underline{j}$ اور $\underline{c} = \underline{i} + 2\underline{j}$ ہوں تو $3\underline{a} + 2\underline{c} - 4\underline{b}$ کے متوازی یونٹ ویکٹر معلوم کیجیے۔

حل:

$$3\underline{a} + 2\underline{c} - 4\underline{b}$$
$$= 3(3\underline{i} - \underline{j}) + 2(\underline{i} + 2\underline{j}) - 4(-2\underline{i} + 4\underline{j})$$
$$= 9\underline{i} - 3\underline{j} + 2\underline{i} + 4\underline{j} + 8\underline{i} - 16\underline{j}$$
$$= (9 + 2 + 8)\underline{i} - (3 - 4 + 16)\underline{j}$$
$$= 19\underline{i} - 15\underline{j}$$

فرض کریں $u = 19\underline{i} - 15\underline{j}$

$$\Rightarrow |\underline{u}| = \sqrt{(19)^2 + (-15)^2}$$
$$= \sqrt{361 + 225}$$
$$|\underline{u}| = \sqrt{586}$$

مطلوبہ یونٹ ویکٹر $\therefore \quad \hat{\underline{u}} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$

$$= \frac{19\underline{i} - 15\underline{j}}{\sqrt{586}} = \frac{19}{\sqrt{586}}\underline{i} - \frac{15}{\sqrt{586}}\underline{j}$$

-9 درج ذیل میں سے کون سے ویکٹرز متوازی ہیں؟

(i) $\underline{a} = 6\underline{i} + \underline{j}, \underline{b} = 12\underline{i} + 2\underline{j}$

حل: دیا گیا ہے

$$\underline{b} = 12\underline{i} + 2\underline{j}$$
$$\underline{b} = 2(6\underline{i} + \underline{j})$$
$$\underline{b} = 2\underline{a}$$

جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ متوازی ہیں جب $\lambda = 2$

(ii) $\underline{a} = -2\underline{i} + 3\underline{j}, \underline{b} = 6\underline{i} - 9\underline{j}$

حل: دیا گیا ہے

$$\underline{b} = 6\underline{i} - 9\underline{j}$$
$$= -3(-2\underline{i} + 3\underline{j})$$
$$\underline{b} = -3\underline{a}$$

جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ متوازی ہیں جب $\lambda = -3$

(iii) $\underline{a} = 5\underline{i} - 4\underline{j}, \underline{b} = 6\underline{i} - 3\underline{j}$

حل: ہم دیکھتے ہیں کوئی بھی کونسٹنٹ λ نہیں جیسے کہ $\underline{b} = \lambda\,\underline{a}$

لہٰذا یہ غیر متوازی ہیں۔

(iv) $\underline{a} = 3\underline{i} - 7\underline{j}, \underline{b} = 6\underline{i} - 14\underline{j}$

حل: دیا گیا ہے

$$\underline{b} = 6\underline{i} - 14\underline{j}$$
$$= 2(3\underline{i} - 7\underline{j})$$
$$\Rightarrow \underline{b} = 2\underline{a}$$

جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ متوازی ہیں جب $\lambda = 2$

-10 ایک ایسا ویکٹر معلوم کیجیے جو $3\underline{i} - 2\underline{j}$ سے تین گنا بڑا ہو، لیکن اس کی سمت مخالف ہو۔

حل: مطلوبہ ویکٹر $= -3(3i + 2j)$

$$= -9\underline{i} + 6\underline{j}$$

-11 دو ایسے ویکٹرز معلوم کیجیے جو $3\underline{i} - 5\underline{j}$ سے دوگنا ہوں، ان میں سے ایک اس کی سمت میں ہی ہو اور دوسرا اس کی مخالف سمت میں ہو۔

حل: ویکٹر ایک ہی سمت میں لیکن دوگنی عددی قیمت میں

$$2(3\underline{i} - 5\underline{j})$$
$$= 6\underline{i} - 10\underline{j}$$

ویکٹر مخالف سمت میں لیکن دوگنی عددی قیمت میں

$$-2(3\underline{i} - 5\underline{j})$$
$$= -6\underline{i} + 10\underline{j}$$

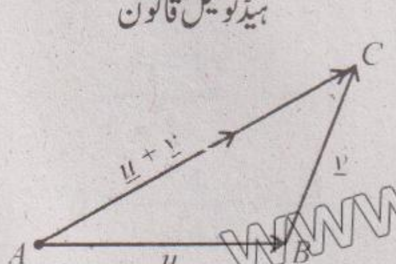
6.3 ویکٹرز کی جمع (Addition of Vectors)

(i) جمع کا مثلثی قانون (Triangle Law of Addition)

اگر دو ویکٹرز $\underline{u}$ اور $\underline{v}$ کو ایک مثلث کے دو ملحقہ اضلاع $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے اس طرح ظاہر کیا جائے کہ $\underline{u}$ اور کا اختتامی نقطہ ویکٹر $\underline{v}$ کے ابتدائی نقطے سے مل جائے تو مثلث کا تیسرا ضلع $\overrightarrow{AC}$ ویکٹر $\underline{v} + \underline{u}$ کا حاصل جمع ویکٹر ہوتا ہے یعنی:

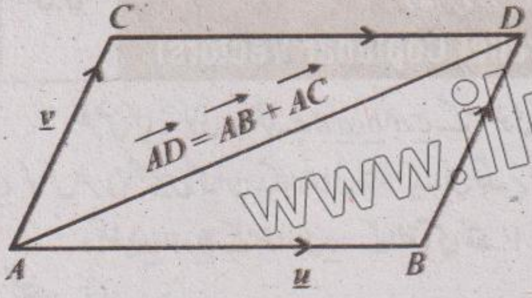
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} + \underline{v} = \overrightarrow{AC}$$

ہیڈٹوٹیل قانون



www.ilmkidunya.com

(ii) جمع کا متوازی الاضلاع کا قانون (Parallelogram Law of Addition)



اگر دو ویکٹرز $\underline{u}$ اور $\underline{v}$ کو ایک متوازی الاضلاع کے دو ملحقہ اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ سے ظاہر کیا جائے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے، تو متوازی الاضلاع کا وتر $\overline{AD}$ ویکٹرز $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کا حاصل جمع ویکٹر ہوتا ہے۔

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$$
$$\overline{AD} = \underline{u} + \underline{v}$$

مثال 6: اگر $\underline{a} = 2\underline{i} + 3\underline{j}$ اور $\underline{b} = 4\underline{i} - 6\underline{j}$ ہوں تو $\underline{a} + \underline{b}$ معلوم کیجیے۔

حل:
$$\underline{a} + \underline{b} = (2\underline{i} + 3\underline{j}) + (4\underline{i} - 6\underline{j})$$
$$= (2+4)\,\underline{i} + (3-6)\underline{j}$$
$$= 6\underline{i} - 3\underline{j}$$

خود آزمائی!

اگر $\underline{a} = 10\underline{i} - \frac{1}{2}\underline{j}, \underline{b} = \frac{3}{4}\underline{i} - \frac{7}{6}\underline{j}$ ہوں تو $\underline{a} + \underline{b}$ معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے

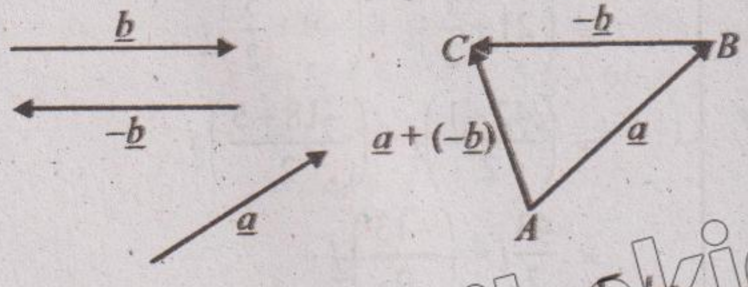
$$\underline{a} = 10\underline{i} - \frac{1}{2}\underline{j}, \quad \underline{b} = \frac{3}{4}\underline{i} - \frac{7}{6}\underline{j}$$

اب،

$$\underline{a} + \underline{b} = \left(10\underline{i} - \frac{1}{2}\underline{j}\right) + \left(\frac{3}{4}\underline{i} - \frac{7}{6}\underline{j}\right)$$
$$= \left(10 + \frac{3}{4}\right)\underline{i} - \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{6}\right)\underline{j} = \left(\frac{40+3}{4}\right)\underline{i} - \left(\frac{3+7}{6}\right)\underline{j}$$
$$= \frac{43}{4}\underline{i} - \frac{10}{6}\underline{j}$$
$$\underline{a} + \underline{b} = \frac{43}{4}\underline{i} - \frac{5}{3}\underline{j}$$

6.4 دو ویکٹرز کا فرق (Difference of Two Vectors)

دو ویکٹرز $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ کی تفریق کو $\underline{a} - \underline{b}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے $\underline{a} + (-\underline{b})$ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔



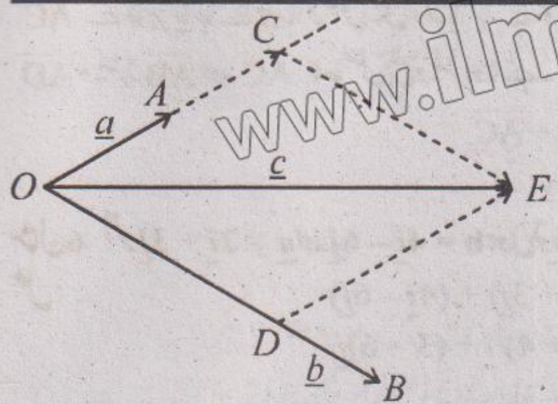
اگر $a = x_1\underline{i} + y_1\underline{j},\ b = x_2\underline{i} + y_2\underline{j}$

ہو تو
$$\underline{a} + (-\underline{b}) = (x_1\underline{i} + y_1\underline{j}) + (-x_2\underline{i} - y_2\underline{j})$$
$$= (x_1 - x_2)\underline{i} + (y_1 - y_2)\underline{j}$$

مثال 7: اگر $\underline{a} = 6\underline{i} + 13\underline{j}$ اور $\underline{b} = -4\underline{i} + 7\underline{j}$ ہوں تو $\underline{a} - \underline{b}$ معلوم کیجیے۔

حل:
$$\underline{a} - \underline{b} = (6\underline{i} + 13\underline{j}) - (-4\underline{i} + 7\underline{j})$$
$$= (6+4)\underline{i} + (13-7)\,\underline{j} = 10\underline{i} + 6\underline{j}$$

6.5 ویکٹرز دو غیر صفری اور غیر متوازی ہم مستوی ویکٹرز کی شکل میں
(Vectors in Terms of Two Non-Zero and Non-Parallel Coplanar Vectors)



فرض کیا $\underline{c}$ کوئی ویکٹر ہے جو $\underline{a}$، $\underline{b}$ اور $\underline{c}$ کے مستوی میں واقع ہے۔ $\underline{a}$، $\underline{b}$ اور $\underline{c}$ کو اس طرح کھینچیں کہ اُن کے ابتدائی نقاط ایک ہی جگہ پر ہوں۔

ویکٹرز $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ کے متوازی $\underline{c}$ کے اختتامی نقطہ E سے گزرتے ہوئے خطوط کھینچیں۔

اگر ضروری ہو تو $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ کو بڑھا کر متوازی الاضلاع ODEC مکمل کیجیے۔

$\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} = m\underline{a}$، جہاں m سکیلر ہے

$\overrightarrow{OD} = n\overrightarrow{OB} = n\underline{b}$، جہاں n سکیلر ہے۔

ویکٹر کی جمع کے متوازی الاضلاع قانون کے مطابق

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ یا $\underline{c} = m\underline{a} + n\underline{b}$

یہاں $m\underline{a}$ اور $n\underline{b}$ ویکٹر $\underline{c}$ کے اجزاء ہیں۔

یاد رکھیے! دو یا دو سے زیادہ ویکٹرز ہم مستوی ویکٹرز کہلاتے ہیں اگر وہ ایک ہی مستوی میں واقع ہوں۔

مثال 8: اگر $\underline{a} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$ اور $\underline{b} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$ ہوں تو $3\underline{a} + 4\underline{b}$ کے ویکٹرز کے اجزاء معلوم کیجیے۔

حل:

$3\underline{a} + 4\underline{b}$

$= 3(2\underline{i} - 3\underline{j}) + 4(3\underline{i} + 4\underline{j})$

$= 6\underline{i} - 9\underline{j} + 12\underline{i} + 16\underline{j} = 18\underline{i} + 7\underline{j}$

$3\underline{a} + 4\underline{b}$ کے اجزاء $18\underline{i}$ اور $7\underline{j}$ ہیں۔

حل مشق 6.2

-1 اگر $\underline{a} = 7\underline{i} - 3\underline{j}$ اور $\underline{b} = \underline{i} + 5\underline{j}$ ہوں تو درج ذیل ویکٹرز معلوم کیجیے۔

(i) $\underline{a} + \underline{b}$

حل:

$= (7\underline{i} - 3\underline{j}) + (\underline{i} + 5\underline{j})$

$= (7 + 1)\underline{i} + (-3 + 5)\underline{j}$

$= 8\underline{i} + 2\underline{j}$

(ii) $\underline{a} + 3\underline{b}$

حل:

$= (7\underline{i} - 3\underline{j}) + 3(\underline{i} + 5\underline{j})$

$= 7\underline{i} - 3\underline{j} + 3\underline{i} + 15\underline{j}$

$= (7 + 3)\underline{i} + (-3 + 15)\underline{j}$

$= 10\underline{i} + 12\underline{j}$

(iii) $3\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b}$

حل:

$= 3(7\underline{i} - 3\underline{j}) + \frac{1}{2}(\underline{i} + 5\underline{j})$

$= 21\underline{i} - 9\underline{j} + \frac{1}{2}\underline{i} + \frac{5}{2}\underline{j}$

$= \left(21 + \frac{1}{2}\right)\underline{i} + \left(-9 + \frac{5}{2}\right)\underline{j}$

$= \left(\frac{42 + 1}{2}\right)\underline{i} + \left(\frac{-18 + 5}{2}\right)\underline{j}$

$= \frac{43}{2}\underline{i} + \left(\frac{-13}{2}\right)\underline{j}$

$= \frac{43}{2}\underline{i} - \frac{13}{2}\underline{j}$

www.ilmkidunya.com

(iv) $\underline{b} - \underline{a}$

حل:

$= \underline{i} + 5\underline{j} - (7\underline{i} - 3\underline{j})$

$= \underline{i} + 5\underline{j} - 7\underline{i} + 3\underline{j}$

$= (1-7)\underline{i} + (5+3)\underline{j}$

$= -6\underline{i} + 8\underline{j}$

(v) $4\underline{b} - 5\underline{a}$

حل:

$= 4(\underline{i} + 5\underline{j}) - 5(7\underline{i} - 3\underline{j})$

$= 4\underline{i} + 20\underline{j} - 35\underline{i} + 15\underline{j}$

$= (4-35)\underline{i} + (20+15)\underline{j}$

$= -31\underline{i} + 35\underline{j}$ جواب

(vi) $\frac{3}{2}\underline{a} - \underline{b}$

حل:

$= \frac{3}{2}(7\underline{i} - 3\underline{j}) - (\underline{i} + 5\underline{j})$

$= \frac{21}{2}\underline{i} - \frac{9}{2}\underline{j} - \underline{i} - 5\underline{j}$

$= \left(\frac{21}{2} - 1\right)\underline{i} - \left(\frac{9}{2} + 5\right)\underline{j}$

$= \left(\frac{21-2}{2}\right)\underline{i} - \left(\frac{9+10}{2}\right)\underline{j}$

$= \frac{19}{2}\underline{i} - \frac{19}{2}\underline{j}$ جواب

-2 اگر $\underline{a} = 6\underline{i} - \underline{j}$، $\underline{b} = \underline{i} + 5\underline{j}$ اور $\underline{c} = 3\underline{i} + 5\underline{j}$ ہوں تو درج ذیل ویکٹرز کی مقداریں معلوم کیجیے۔

(i) $\underline{b} - \underline{c}$

حل:

$\underline{b} - \underline{c} = \underline{i} + 5\underline{j} - (3\underline{i} + 5\underline{j})$

$= \underline{i} + 5\underline{j} - 3\underline{i} - 5\underline{j}$

$= (1-3)\underline{i} + (5-5)\underline{j}$

$= -2\underline{i} + 0\underline{j}$

اب

$|\underline{b} - \underline{c}| = |-2\underline{i} + 0\underline{j}|$

$= \sqrt{(-2)^2 + (0)^2}$

$|\underline{b} - \underline{c}| = \sqrt{4+0}$

$= \sqrt{4}$

$|\underline{b} - \underline{c}| = 2$

(ii) $\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}$

حل:

$= 6\underline{i} - \underline{j} - 2(\underline{i} + 5\underline{j}) + 3\underline{i} + 5\underline{j}$

$= 6\underline{i} - \underline{j} - 2\underline{i} - 10\underline{j} + 3\underline{i} + 5\underline{j}$

$= (6-2+3)\underline{i} - (1+10-5)\underline{j}$

$= 7\underline{i} - 6\underline{j}$

اب

$|\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}| = \sqrt{7^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{49+36}$

$|\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}| = \sqrt{85}$

(iii) $\underline{c} - \underline{b} - \underline{a}$

حل:

$= 3\underline{i} - 5\underline{j} - (\underline{i} + 5\underline{j}) - (6\underline{i} - \underline{j})$

$= 3\underline{i} + 5\underline{j} - \underline{i} - 5\underline{j} - 6\underline{i} + \underline{j}$

$= (3-1-6)\underline{i} + (5-5+1)\underline{j}$

$= -4\underline{i} + \underline{j}$

اب

$|\underline{c} - \underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2}$

$= \sqrt{16+1}$

$|\underline{c} - \underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{17}$

www.ilmkidunya.com

3- درج ذیل مساواتوں میں x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $(x\underline{i} + y\underline{j}) + (2\underline{i} + 3\underline{j}) = 7\underline{i} + 6\underline{j}$

حل:

$(x+2)\underline{i} + (y+3)\underline{j} = 7\underline{i} + 6\underline{j}$

دونوں اطراف $\underline{i}$ اور $\underline{j}$ کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

$x + 2 = 7 \quad , \quad y + 3 = 6$

$x = 7 - 2 \quad , \quad y = 6 - 3.$

$\boxed{x = 5} \quad , \quad \boxed{y = 3}$

(ii) $(x\underline{i} - 5\underline{j}) + (3\underline{i} + 5\underline{j}) = -8\underline{i} + y\underline{j}$

حل:

$(x+3)\underline{i} - (5-5)\underline{j} = -8\underline{i} + y\underline{j}$

$(x+3)\underline{i} - 0\underline{j} = -8\underline{i} + y\underline{j}$

دونوں اطراف $\underline{i}$ اور $\underline{j}$ کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

$x + 3 = -8 \quad , \quad 0 = y$

$x = -8 - 3 \quad , \quad \boxed{y = 0}$

$\boxed{x = -11}$

(iii) $(y\underline{i} + 3\underline{j}) + (-5\underline{i} + 2x\underline{j}) = 9\underline{i} + 7\underline{j}$

حل:

$(y-5)i + (3+2x)\underline{j} = 9i + 7\underline{j}$

دونوں اطراف $\underline{i}$ اور $\underline{j}$ کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

$y - 5 = 9 \quad , \quad 3 + 2x = 7$

$y = 9 + 5 \quad , \quad 2x = 7 - 3$

$\boxed{y = 14} \quad , \quad 2x = 4$

$x = \frac{4}{2}$

$\boxed{x = 2}$

4- اگر $\underline{a} = \underline{i} + 3\underline{j}$ ، $\underline{c} = 2\underline{i} + \underline{j}$ اور $\underline{a} + 2\underline{b} = \underline{c}$ ہوں تو $|\underline{b}|$ معلوم کیجیے۔

حل:

$\underline{a} + 2\underline{b} = \underline{c}$

$\underline{i} + 3\underline{j} + 2\underline{b} = 2\underline{i} + \underline{j}$

$2\underline{b} = 2\underline{i} + \underline{j} - \underline{i} - 3\underline{j}$

$= (2-1)\underline{i} + (1-3)\underline{j}$

$2\underline{b} = \underline{i} - 2\underline{j}$

$\underline{b} = \frac{1}{2}\underline{i} - \frac{2}{2}\underline{j}$

$\underline{b} = \frac{1}{2}\underline{i} - \underline{j}$

$|\underline{b}| = \left|\frac{1}{2}\underline{i} - \underline{j}\right|$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{1+4}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

$|\underline{b}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

www.ilmkidunya.com

-5 اگر $\underline{a} = -2\underline{i} + 7\underline{j}$ اور $\underline{b} = 3\underline{i} - 5\underline{j}$ ہوں تو $\underline{a} + 5\underline{b}$ کے اجزاء معلوم کیجیے۔

حل:

$$\underline{a} + 5\underline{b} = -2\underline{i} + 7\underline{j} + 5(3\underline{i} - 5\underline{j})$$

$$= -2\underline{i} + 7\underline{j} + 15\underline{i} - 25\underline{j}$$

$$= (-2 + 15)\underline{i} + (7 - 25)\underline{j},$$

$$\underline{a} + 5\underline{b} = 13\underline{i} - 18\underline{j}$$

لہٰذا $\underline{a} + 5\underline{b}$ کے اجزاء 18- اور 13 ہے۔

-6 اگر $5\underline{i} - 3\underline{j} = m(\underline{i} - 10\underline{j}) + n(4\underline{i} - 3\underline{j})$ ہو تو m اور n کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے

$$5\underline{i} - 3\underline{j} = m(\underline{i} - 10\underline{j}) + n(4\underline{i} - 3\underline{j})$$

$$5\underline{i} - 3\underline{j} = m\underline{i} - 10m\underline{j} + 4n\underline{i} - 3n\underline{j}$$

$$5\underline{i} - 3\underline{j} = (m + 4n)\underline{i} - (10m + 3n)\underline{j}$$

دونوں اطراف $\underline{j}$ اور $\underline{i}$ کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

$$m + 4n = 5 \quad .....(i) \qquad -(10m + 3n) = -3$$

$$10m + 3n = 3 \quad .....(ii)$$

مساوات (i) کو 10 سے ضرب دیں اور مساوات (ii) سے تفریق کریں۔

$$10m + 3n = 3$$

$$\pm 10m \pm 40n = \pm 50$$

$$-37n = -47$$

$$\boxed{n = \frac{47}{37}}$$

مساوات (i) میں n کی قدر لگائیں۔

$$m + 4\left(\frac{47}{37}\right) = 5$$

$$m + \frac{188}{37} = 5$$

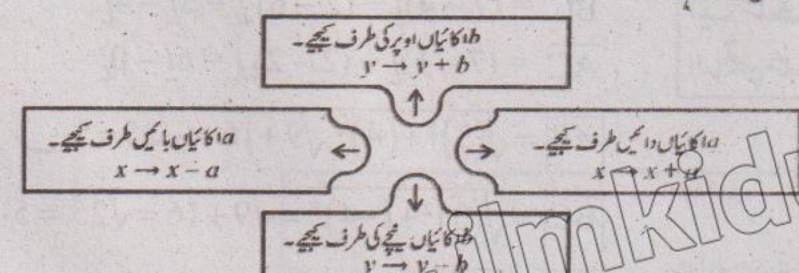
$$m = 5 - \frac{188}{37}$$

$$m = \frac{185 - 188}{37}$$

$$\boxed{m = \frac{-3}{37}}$$

6.6 ویکٹرز کی ٹرانسلیشن (Translation by a Vector)

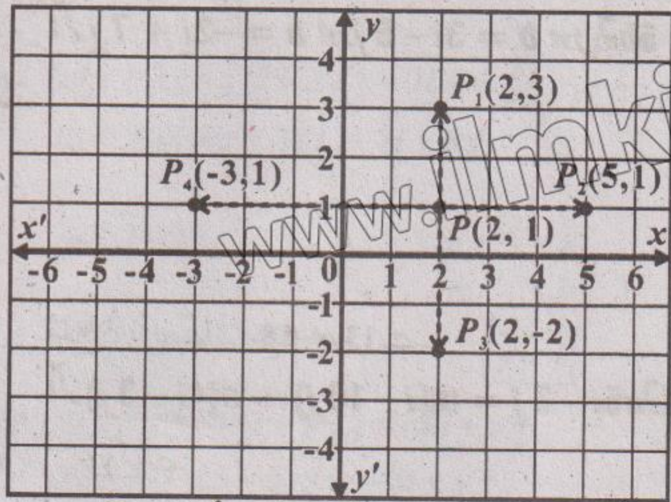
ٹرانسلیشن ویکٹر وہ ویکٹر ہے جو کسی نقطے، جسم یا نظام کی ایک جگہ سے دوسری جگہ حرکت کو بغیر کسی گردش یا بگاڑ کے بیان کرتا ہے۔ ٹرانسلیشن کی گئی شکل کو اصل شکل کا عکس کہا جاتا ہے۔ عکس اصل شکل کے متماثل ہوتا ہے۔



محدداتی مستوی میں کسی شکل کو ٹرانسلیشن ویکٹر کے ذریعے منتقل کرنے کے لیے ہم اس کے محددات کو تبدیل کرتے ہیں۔ اگر $\underline{v} = a\underline{i} + b\underline{j}$ ٹرانسلیشن ویکٹر ہو، جہاں a اور b مستقل مقداریں ہیں، تو ہم درج ذیل اصول استعمال کر سکتے ہیں:

آیئے نقطہ P(2, 1) کو ٹرانسلیشن ویکٹرز $2\underline{j}$، $3\underline{i}$، $-3\underline{j}$ اور $-5\underline{i}$ کی مدد سے منتقل کرتے ہیں۔

www.ilmkidunya.com



$P_1 = (2\underline{i} + \underline{j}) + (0\underline{i} + 2\underline{j})$
$= 2\underline{i} + 3\underline{j}$

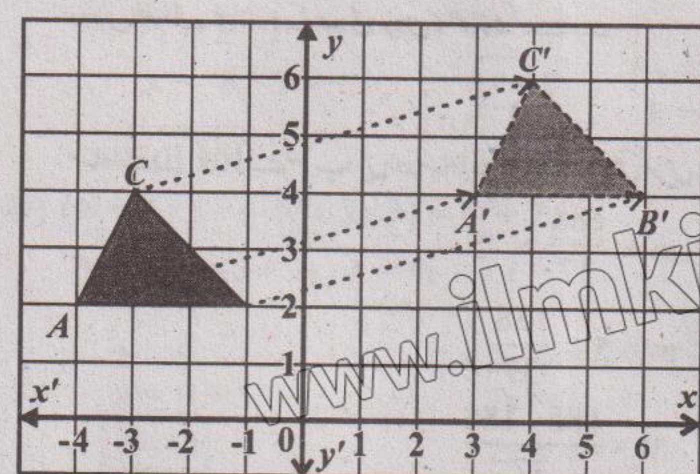
$P_2 = (2\underline{i} + \underline{j}) + (3\underline{i} + 0\underline{j})$
$= 5\underline{i} + \underline{j}$

$P_3 = (2\underline{i} + \underline{j}) + (0\underline{i} - 3\underline{j})$
$= 2\underline{i} - 2\underline{j}$

$P_4 = (2\underline{i} + \underline{j}) + (-5\underline{i} + 0\,\underline{j})$
$= -3\underline{i} + \underline{j}$

مثال 9: نقاط $A(-4, 2)$، $B(-1,2)$ اور $C(-3, 4)$ کو مرتسم کرکے مثلث ABC بنائیے۔ ΔABC کو ٹرانسلیشن ویکٹر $7\underline{i} + 2\underline{j}$ کے ذریعے $\Delta A'B'C'$

حل:



نیا راس $A' = (-4\underline{i} + 2\underline{j}) + (7\underline{i} + 2\underline{j})$
$= 3\underline{i} + 4\underline{j} = (3,4)$

نیا راس $B' = (-\underline{i} + 2\underline{j}) + (7\underline{i} + 2\underline{j})$
$= 6\underline{i} + 4\underline{j} = (6, 4)$

نیا راس $C = (-3\underline{i} + 4\underline{j}) + (7\underline{i} + 2\underline{j})$
$= 4\underline{i} + 6\underline{j} = (4, 6)$

6.7 ویکٹرز پر مشتمل جیومیٹرک مسائل کا حل اور اطلاق
(Solution and Application of Geometric Problems involving Vectors)

مثال 10: اگر $A(1, 2)$، $B(4, 6)$ اور $C(7, 2)$ مثلث کے راس ہوں تو تصدیق کیجیے کہ مثلث ABC ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔

> **یاد رکھیے!**
> ایک مثلث جس کے دو اضلاع لمبائی میں برابر ہوں، متساوی الساقین مثلث کہلاتی ہے۔

حل:

$\overrightarrow{AB} = (4-1)\underline{i} + (6-2)\,\underline{j} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$

$\overrightarrow{BC} = (7-4)\underline{i} + (2-6)\,\underline{j} = 3\underline{i} - 4\underline{j}$

$\overrightarrow{AC} = (7-1)\underline{i} + (2-2)\,\underline{j} = 6\underline{i} - 0\underline{j}$

اب $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}\ \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

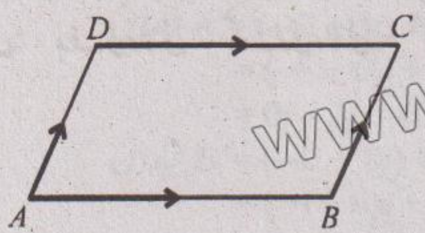
یہاں $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = 5$

پس ΔABC ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔

www.ilmkidunya.com

مثال 11: ویکٹرز کے طریقہ سے ثابت کیجیے کہ نقاط $A(1, 2)$، $B(4, 6)$، $C(7, 4)$ اور $D(4, 0)$ ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

حل:



$$\overrightarrow{AB} = (4-1)\underline{i} + (6-2)\underline{j} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$$

$$\overrightarrow{DC} = (7-4)\underline{i} + (4-0)\underline{j} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = (7-4)\underline{i} + (4-6)\underline{j} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$$

$$\overrightarrow{AD} = (4-1)\underline{i} + (0-2)\underline{j} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$$

$$\therefore\ \overline{AB} \parallel \overline{DC} \text{ and } \overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

پس ثابت ہوا دیے گئے نقاط ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

> **نوٹ:**
>
> حرکت کی مساواتیں وہ کلیے ہیں جو یکساں اسراع کے تحت اجسام کی حرکت کو بیان کرنے کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ یہ ابتدائی ولاسٹی ($\underline{v}_i$) آخری ولاسٹی ($\underline{v}_f$)، اسراع ($\underline{a}$)، وقت (t) اور ہٹاؤ ($\underline{s}$) کے درمیان تعلق کو معلوم کرنے میں ہماری مدد کرتے ہیں۔ یہ ایسے مسائل کے حل میں بہت مفید ہیں جن میں چلتی ہوئی کاریں، گری ہوئی چیزیں یا پھینکی گئی گیندیں شامل ہوں۔
>
> **حرکت کی پہلی مساوات:** $\underline{v}_f = \underline{v}_i + \underline{a}t$
>
> یہ ہمیں وقت (t) کے بعد حتمی ولاسٹی ($\underline{v}_f$) بتاتی ہے جب کوئی جسم ابتدائی ولاسٹی ($\underline{v}_i$) سے شروع ہوتی اور اسراع ($\underline{a}$) سے حرکت کرتا ہے۔
>
> **حرکت کی دوسری مساوات:** $\underline{s} = \underline{v}_i t + \frac{1}{2}\underline{a}t^2$
>
> یہ ہمیں وقت (t) میں جسم کا طے کردہ فاصلہ ($\underline{s}$) بتاتی ہے۔
>
> **حرکت کی تیسری مساوات:** $\underline{v}_f^2 = \underline{v}_i^2 + 2\underline{a}\,\underline{s}$
>
> یہ ابتدائی اور حتمی ولاسٹی، اسراع اور ہٹاؤ کے درمیان تعلق بتاتی ہے۔

مثال 12: ایک پروجیکٹائل کو ابتدائی ولاسٹی ویکٹر $12\underline{i} + 16\underline{j}$ کے ساتھ زمین سے فائر کیا گیا ہے۔ یہ افقی طور پر 24 میٹر دور ہدف سے کتنی دیر بعد ٹکرائے گا؟

حل: $\underline{V}_i = 12\underline{i} + 16\underline{j}$

افقی ولاسٹی $= v_x = 12$

عمودی ولاسٹی $= v_y = 16$

چونکہ افقی ولاسٹی مستقل ہے، اس لیے

$$x = v_x t$$

$$t = \frac{x}{v_x} = \frac{24}{12} = 2s$$

> **نوٹ:**
>
> $\underline{x} = \underline{v}_x t$ افقی حرکت کی مساوات
>
> $\underline{y} = \underline{v}_y t - \frac{1}{2}gt^2$ عمودی حرکت کی مساوات

www.ilmkidunya.com

مثال 13: ایک ٹینک مشرق کی سمت $\underline{v}_1 = 30\underline{i} + 40\underline{j}$ کی ولاسٹی سے حرکت کرتے ہوئے ایک ہدف $\underline{v}_2 = 10\underline{i} + 0\underline{j}$ ولاسٹی سے گولہ فائر کرتا ہے۔ نسبتی ولاسٹی اور اس کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: ہدف کی ولاسٹی - گولے کی ولاسٹی = گولے کی نسبتی ولاسٹی

$$\underline{v}_{rel} = (30 - 10)\underline{i} + (40 - 0)\underline{j}$$
$$= 20\underline{i} + 40\underline{j}$$
$$|\underline{v}_{rel}| = \sqrt{20^2 + 40^2} = \sqrt{400+1600}$$
$$|\underline{v}_{rel}| = \sqrt{2000} = 44.72 \text{ m/s}$$

نوٹ: نسبتی ولاسٹی کسی چیز کی وہ ولاسٹی ہوتی ہے جو دوسری حرکت پذیر چیزوں کے مشاہدے سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ ہمیں بتاتی ہے کہ ایک چیز دوسری کے لحاظ سے کتنی تیزی سے اور کس سمت میں حرکت کر رہی ہے۔

حل مشق 6.3

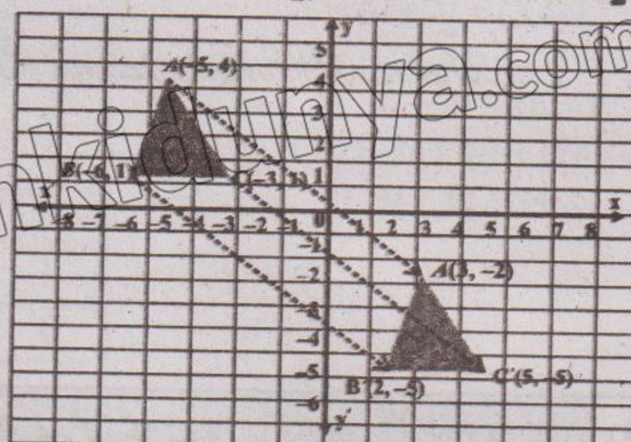
-1 نقاط $A(-5,4)$، $B(-6,1)$ اور $C(-3,1)$ کو مرتسم کر کے مثلث ABC بنائیے۔ ΔABC کو ٹرانسلیشن ویکٹر $8\underline{i} - 6\underline{j}$ کے ذریعے $\Delta A'B'C'$ میں بھی منتقل کیجیے۔

حل:

نیا راس $A' = (-5\underline{i} + 4\underline{j}) + (8\underline{i} - 6\underline{j})$
$= (-5 + 8)\underline{i} + (4 - 6)\underline{j}$
$= 3\underline{i} - 2\underline{j} = (3, -2)$

نیا راس $B' = (-6\underline{i} + \underline{j}) + (8\underline{i} - 6\underline{j})$
$= (-6 + 8)\underline{i} + (1 - 6)\underline{j}$
$= 2\underline{i} - 5\underline{j} = (2, -5)$
$= (-6 + 8)\underline{i} + (2, -5)$

نیا راس $C' = (-3\underline{i} + \underline{j}) + (8\underline{i} - 6\underline{j})$
$= (-3 + 8)\underline{i} + (1 - 6)\underline{j}$
$= 5\underline{i} - 5\underline{j} = (5, -5)$



-2 نقاط $A(-6, -2)$، $B(-6, -5)$، $C(-3, -5)$ اور $D(-3, -2)$ کو مرتسم کر کے مربع ABCD بنائیے۔ مربع ABCD کو ٹرانسلیشن ویکٹر $9\underline{i} + 7\underline{j}$ کے مربع A'B'C'D' میں بھی منتقل کیجیے۔

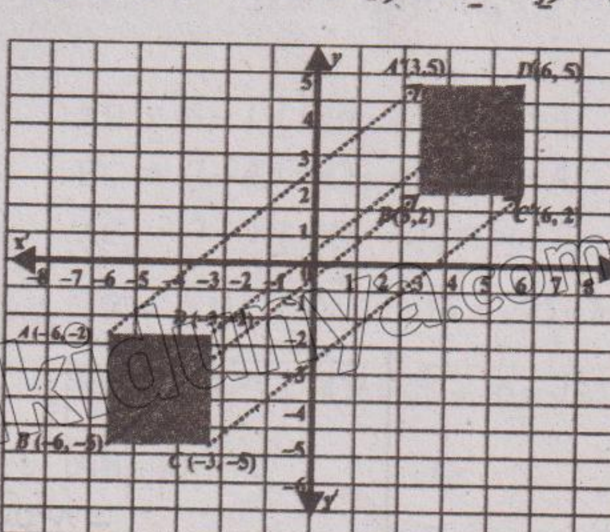
حل:

نیا راس $A' = (-6\underline{i} - 2\underline{j}) + (9\underline{i} + 7\underline{j})$
$= (-6 + 9)\underline{i} + (-2 + 7)\underline{j}$
$= 3\underline{i} - 5\underline{i} = (3, 5)$

نیا راس $B' = (-6\underline{i} - 5\underline{j}) + (9\underline{i} + 7\underline{j})$
$= (-6 + 9)\underline{i} + (-5 + 7)\underline{j}$
$= 3\underline{i} + 2\underline{j} = (3, 2)$

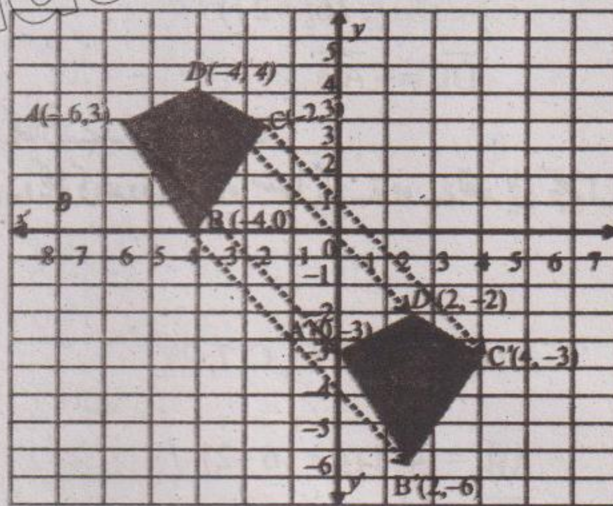
نیا راس $C' = (-3\underline{i} - 5\underline{j}) + (9\underline{i} + 7\underline{j})$
$= (-3 + 9)\underline{i} + (-5 + 7)\underline{j}$
$= 6\underline{i} + 2\underline{j} = (6,2)$

نیا راس $D' = (-3\underline{i} - 2\underline{j}) + (9\underline{i} + 7\underline{j})$
$= (-3 + 9)\underline{i} + (-2 + 7)\underline{j}$
$= 6\underline{i} + 5\underline{j} = (6,5)$



3- نقاط A(−6, 3)، B(−4, 0)، C(−2, 3) اور D(−4, 4) کو مرتسم کر کے پتنگ ABCD بنائیے۔ پتنگ ABCD کو ٹرانسلیشن ویکٹر $6\underline{i} - 6\underline{j}$ کے ذریعے پتنگ A′B′C′D′ میں بھی منتقل کیجیے۔

حل:



نیا راس $A' = (-6\underline{i} + 3\underline{j}) + (6\underline{i} - 6\underline{j})$

$= (-6 + 6)\underline{i} + (3 - 6)\underline{j}$

$= 0\underline{i} - 3\underline{j} = (0, -3)$

نیا راس $B' = (-4\underline{i} + 0\underline{j}) + (6\underline{i} - 6\underline{j})$

$= (-4 + 6)\underline{i} + (0 - 6)\underline{j}$

$= 2\underline{i} - 6\underline{j} = (2, -6)$

نیا راس $C' = (-2\underline{i} + 3\underline{j}) + (6\underline{i} - 6\underline{j})$

$= (-2 + 6)\underline{i} + (3 - 6)\underline{j}$

$= 4\underline{i} - 3\underline{j} = (4, -3)$

نیا راس $D' = (-4\underline{i} + 4\underline{j}) + (6\underline{i} - 6\underline{j})$

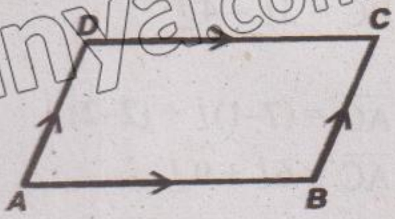
$= (-4 + 6)\underline{i} + (4 - 6)\underline{j}$

$= 2\underline{i} - 2\underline{j} = (2, -2)$

4- A، B اور D کے محددات بالترتیب (1, 2)، (6, 3) اور (2, 8) ہیں۔ اگر ABCD ایک متوازی الاضلاع ہو تو ویکٹر کے طریقہ سے C کے محددات معلوم کیجیے۔

حل: دیئے گئے نقاط ہیں A(1,2), B(6,3), D(2,8)

فرض کیا کہ C(x, y) متوازی الاضلاع ABCD کا چوتھا راس ہے۔



$\overline{AB} = \overline{DC}$

$(6 - 1)\underline{i} + (3 - 2)\underline{j} = (x - 2)\underline{i} + (y - 8)\underline{j}$

$5\underline{i} + \underline{j} = (x - 2)\underline{i} + (y - 8)\underline{j}$

دونوں اطراف میں $\underline{i}$ اور $\underline{j}$ کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے۔

$x - 2 = 5 \quad , \quad y - 8 = 1$

$x = 5 + 2 \quad , \quad y = 1 + 8$

$\boxed{x = 7} \quad , \quad \boxed{y = 9}$

C کے مطلوبہ محددات (7, 9) ہیں۔

5- متوازی الاضلاع ABCD میں، دو مخالف اضلاع ویکٹرز $\overline{AB} = 6\underline{i} + 2\underline{j}$ اور $\overline{DC} = -6\underline{i} - 2\underline{j}$ کو ظاہر کرتے ہیں۔ ویکٹر کے طریقہ سے ثابت کیجیے کہ مخالف اضلاع مقدار میں برابر اور متوازی ہیں۔

حل:

$|\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2} \quad , \quad |\overline{DC}| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{36 + 4} \quad , \quad = \sqrt{36 + 4}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{40} \quad , \quad |\overline{DC}| = \sqrt{40}$

$|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$

جو دیکھاتی ہے کہ مخالف سمتیں عددی قیمت میں برابر ہیں۔

$\overrightarrow{DC}=-6\underline{i}-2\underline{j}$

$=-(6\underline{i}+2\underline{j})$

$\overline{DC}=-\overline{AB}$

جو دیکھاتی ہے کہ $\overline{AB}$ اور $\overline{DC}$ ایک دوسرے کی سکیلر ضرب ہیں جو دیکھاتی ہے کہ یہ متوازی ہیں۔

6- نقاط A(1, 2)، B(4, 6) اور C(7, 2) ایک مثلث بناتے ہیں۔ ویکٹر کی عددی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے تصدیق کیجیے کہ مثلث ABC ایک متساوی الساقین ہے۔

حل: دیے گئے نقاط ہیں

A (1, 2), B(4, 6), C(7, 2)

اب

$\overrightarrow{AB}=(4-1)\underline{i}+(6-2)\underline{j}$

$\overrightarrow{AB}=3\underline{i}+4\underline{j}$

اور

$\overrightarrow{BC}=(7-4)\underline{i}+(2-6)\underline{j}$

$\overrightarrow{BC}=3\underline{i}-4\underline{j}$

جبکہ

$\overrightarrow{AC}=(7-1)\underline{i}+(2-2)\underline{j}$

$\overrightarrow{AC}=6\underline{i}+0\underline{j}$

اب ہم عددی قیمت معلوم کریں گے

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

چونکہ

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$

لہٰذا نقاط A، B اور C متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں۔

7- ویکٹرز کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے، جہاں نقاط P، Q، R اور S کے محددات بالترتیب (1, 2)، (5, 2)، (7, 6) اور (3, 6) ہیں۔

حل: دیے گئے نقاط ہیں

P(1, 2), Q (5,2), R(7, 6), S(3, 6)

$\overrightarrow{PQ}=(5-1)\underline{i}+(2-2)\underline{j}=4\underline{i}+0\underline{j}$

$\overrightarrow{SR}=(7-3)\underline{i}+(6-6)\underline{j}=4\underline{i}+0\underline{j}$

$\overrightarrow{PS}=(3-1)\underline{i}+(6-2)\underline{j}=2\underline{i}+4\underline{j}$

$\overrightarrow{QR}=(7-5)\underline{i}+(6-2)\underline{j}=2\underline{i}+4\underline{j}$

$\therefore\ \overline{PQ}\parallel\overline{QR}$ اور $\overline{PS}\parallel\overline{QR}$

جو ظاہر کرتا ہے کہ دیے گئے نقاط متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

www.ilmkidunya.com

8- ویکٹرز کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ مثلث XYZ ایک متساوی الساقین ہے، جہاں نقاط X، Y اور Z کے محددات بالترتیب (0, 0)، (2, 0) اور (1, 3) ہیں۔

حل: دیے گئے نقاط ہیں

$X(0,0),\ Y(2,0),\ Z(1,3)$

اب

$\overrightarrow{XY} = (2-0)\underline{i} + (0-0)\underline{j}$

$\overrightarrow{XY} = 2\underline{i} + 0\underline{j}$

$|\overrightarrow{XY}| = \sqrt{2^2+0^2} = \sqrt{4+0} = \sqrt{4}$

$|\overrightarrow{XY}| = 2$

اور

$\overrightarrow{YZ} = (1-2)\underline{i} + (3-0)\underline{j}$

$\overrightarrow{YZ} = -\underline{i} + 3\underline{j}$

$|\overrightarrow{YZ}| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

جبکہ

$|\overrightarrow{XZ}| = (1-0)\underline{i} + (3-0)\underline{j}$

$|\overrightarrow{XZ}| = \underline{i} + 3\underline{j}$

$|\overrightarrow{XZ}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$\therefore\ |\overrightarrow{XZ}| = |\overrightarrow{YZ}|$

پس XYZ∠ ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔

9- ایک گیند کو ابتدائی ولاسٹی ویکٹر $\underline{v}_0 = 10\underline{i} + 20\underline{j}$ کے ساتھ پھینکا جاتا ہے افقی جزو x- سمت میں ہے اور ثقلی اسراع $g = 0\underline{i} - 10\underline{j}$ ہے سب سے زیادہ بلندی اور افقی حد معلوم کیجیے۔

حل:

ابتدائی ولاسٹی $= \underline{v}_0 = 10\underline{i} + 20\underline{j}$

$\underline{v}_x = 10,\ \underline{v}_y = 20$

اور $\underline{g} = 0\underline{i} - 10\underline{j}$

$g = 10$

سب سے زیادہ بلندی $(H) = \dfrac{\underline{v}_y^2}{2g}$

$= \dfrac{(20)^2}{2(10)} = \dfrac{400}{20}$

$= 20\text{ m}$

افقی حد $(R) = \underline{v}_x \times T$

$= 10 \times \dfrac{2\underline{v}_y}{g} \quad \therefore T = \dfrac{2Vy}{g}$

$= 10 \times \dfrac{2(20)}{10}$

$= 40\text{m}$

10- ایک کار ولاسٹی ویکٹر $\underline{v} = 30\underline{j}$ کے ساتھ ایک لوپ میں داخل ہوتی ہے اور ولاسٹی $\underline{V}' = 30\underline{i}$ کے ساتھ باہر نکلتی ہے۔ بتائیے ولاسٹی ویکٹر میں کیا تبدیلی آئی؟

حل:

ابتدائی ولاسٹی $\underline{v} = 30\underline{j}$

آخری ولاسٹی $(\underline{v}') = 30\underline{i}$

ولاسٹی میں تبدیلی $= \Delta\underline{v} = \underline{v}' - \underline{v}$

$= 30\underline{i} - 30\underline{j}$

11- ایک ہوائی جہاز کی ہوائی رفتار $\underline{v}_p = 20\underline{i}$ اور کراس ونڈ $\underline{v}_w = 50\underline{j}$ ہے۔ ہوائی جہاز کی مجموعی ولاسٹی اور اس کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

ہوائی رفتار $= (\underline{v}_p) = 20\underline{i}$

کراس ونڈ $(\underline{v}_w) = 50\underline{j}$

مجموعی ولاسٹی $= \underline{v} = 20\underline{i} + 50\underline{j}$

عددی قیمت $= |\underline{v}| = \sqrt{(20)^2 + (50)^2}$

$= \sqrt{400 + 2500}$

$= \sqrt{2900}$

$= 10\sqrt{29}$

$= 53.85$ اکائیاں

حل اعادہ مشق 6

1- درج ذیل سوالات کے دیے گئے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) x- محور اور y- محور محدداتی مستوی کو ________ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

(a) ایک (b) دو (c) تین (d) چار

(ii) نقطہ P(4, −4) ربع میں واقع ہے۔

(a) پہلا (b) دوسرا (c) تیسرا (d) چوتھا

(iii) ایک ویکٹر جس کی عددی قیمت 1 ہو، کہلاتا ہے:

(a) مساوی ویکٹر (b) متوازی ویکٹر (c) یونٹ ویکٹر (d) صفر ویکٹر

(iv) $|3\underline{i} + 4\underline{j}|$ کی قیمت کیا ہے؟

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 7

(v) اگر $\underline{a} = \lambda\underline{b}$ ہو تو $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ ہیں:

(a) مساوی (b) متوازی (c) عمودی (d) غیر متوازی

(vi) اگر $\overline{OA} = \underline{a}, \overline{OB} = \underline{b}$ ہو تو $\overline{AB}$ ہے:

(a) $\underline{b} - \underline{a}$ (b) $\underline{a} - \underline{b}$ (c) $\underline{a} + \underline{b}$ (d) $\underline{b} + \underline{a}$

(vii) ٹرانسلیشن ویکٹر ظاہر کرتا ہے:

(a) بگاڑ (b) گردش (c) حرکت (d) بڑا کرنا

(viii) دو ویکٹرز کا حاصل جمع ہوتا ہے:

(a) ایک مثلث (b) ایک ویکٹر (c) ایک سکیلر (d) ایک لمبائی

(ix) نقطہ P(3, −2) کا O کے لحاظ سے پوزیشن ویکٹر ہے:

(a) $3\underline{i} + 2\underline{j}$ (b) $3\underline{i} - 2\underline{j}$ (c) $-3\underline{i} - 2\underline{j}$ (d) $2i - 3j$

(x) نقطہ P(3, 4) سے مبداء تک ویکٹر ہے:

(a) $3\underline{i} + 4\underline{j}$ (b) $-3\underline{i} + 4\underline{j}$ (c) $-3\underline{i} - 4\underline{j}$ (d) $3\underline{i} - 4\underline{j}$

www.ilmkidunya.com

جوابات

-i چار   -ii چوتھا   -iii یونٹ ویکٹر   -iv 5   -v متوازی

-vi $\underline{b}-\underline{a}$ -vii حرکت   -viii ایک ویکٹر   -ix $3\underline{i}-2\underline{j}$ -x $-3\underline{i}-4\underline{j}$

-2 $\overline{AB}$ کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) A (7,7), B(−12, 0)

حل: دیے گئے نقاط

A(7,7), B(−12,0)

$\overline{AB}=(-12-7)\,\underline{i}+(0-7)\underline{j}$

$\overline{AB}=-19\underline{i}-7\underline{j}$

$|\overline{AB}|=\sqrt{(-19)^2+(-7)^2}=\sqrt{361+49}$

$|\overline{AB}|=\sqrt{410}$

(ii) A (9,3), B(2, 11)

حل: دیے گئے نقاط

A(9,3) , B(2,11)

$\overline{AB}=(2-9)\,\underline{i}+(11-3)\underline{j}$

$\overline{AB}=-7\underline{i}+8\underline{j}$

$|\overline{AB}|\ \sqrt{(-7)^2+(8)^2}=\sqrt{49+64}$

$|\overline{AB}|=\sqrt{113}$

-3 $\underline{a}=\frac{5}{3}\underline{i}+\frac{1}{3}\underline{j}$ کی سمت میں یونٹ ویکٹر معلوم کیجیے۔

حل:

$\underline{a}=\frac{5}{3}\underline{i}+\frac{1}{3}\underline{j}$

$|\underline{a}|=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{25+1}{9}}=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{9}}$

$|\underline{a}|=\frac{\sqrt{26}}{3}$

مطلوبہ یونٹ ویکٹر $=\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}\Rightarrow=\frac{\frac{5}{3}\underline{i}+\frac{1}{3}\underline{j}}{\frac{\sqrt{26}}{3}}$

$=\frac{3}{\sqrt{26}}\times\frac{5}{3}\underline{i}+\frac{3}{\sqrt{26}}\times\frac{1}{3}\underline{j}$

$=\frac{5}{\sqrt{26}}\underline{i}+\frac{1}{\sqrt{26}}\underline{j}$ جواب

-4 اگر $\underline{a}=2\underline{i}-\underline{j}$, $\underline{b}=3\underline{i}+\underline{j}$ اور $\underline{c}=4\underline{i}+\underline{j}$ ہوں تو درج ذیل ویکٹرز معلوم کیجیے۔

(i) $5\underline{b}-\underline{a}+\underline{c}$

حل:

$=5(3\underline{i}+\underline{j})-(2\underline{i}-\underline{j})+(4\underline{i}+\underline{j})$

$=15\underline{i}-2\underline{i}+4\underline{i}+5\underline{j}+\underline{j}+\underline{j}$

$=(15-2+4)\underline{i}+(5+1+1)\underline{j}$

$=17\underline{i}+7\underline{j}$ جواب

(ii) $8\underline{a}+\underline{b}+5\underline{c}$

حل:

$=8(2\underline{i}-\underline{j})+(3i+\underline{j})+5(4\underline{i}+\underline{j})$

$=16\underline{i}+3\underline{i}+20\underline{i}-8\underline{j}+\underline{j}+5\underline{j}$

$=(16+3+20)\underline{i}-(8-1-5)\underline{j}$

$=39\underline{i}-2\underline{j}$ جواب

(iii) $\underline{c}+\underline{b}-4\underline{a}$

حل:

$=4\underline{i}+\underline{j}+3\underline{i}+\underline{j}-4(2\underline{i}-\underline{j})$

$=4\underline{i}+3\underline{i}-8\underline{i}+\underline{j}+\underline{j}+4\underline{j}$

$=(4+3-8)\underline{i}+(1+1+4)\underline{j}$

$=-\underline{i}+6\underline{j}$ جواب

www.ilmkidunya.com

5- درج ذیل مساوات میں x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

$$(2x\underline{i} + y\underline{j}) + (-\underline{i} + 5\underline{j}) = \frac{1}{4}\underline{i} - 8\underline{j}$$

حل:

$$(2x\underline{i} + y\underline{j}) + (-\underline{i} + 5\underline{j}) = \frac{1}{4}\underline{i} - 8\underline{j}$$

$$(2x - 1)\underline{i} + (y + 5)\underline{j} = \frac{1}{4}\underline{i} - 8\underline{j}$$

دونوں اطراف $\underline{i}$ اور $\underline{j}$ کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

$$2x - 1 = \frac{1}{4} \quad , \quad y + 5 = -8$$

$$2x = \frac{1}{4} + 1 \quad , \quad y = -8 - 5$$

$$2x = \frac{1+4}{4} \quad , \quad \boxed{y = -13}$$

$$x = \frac{5}{2 \times 4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{8}}$$

6- نقاط $A(-5, 3)$، $B(-2, 3)$ اور $C(-4,5)$ کو مرتسم کر کے مثلث بنائیے۔ ΔABC کو ٹرانسلیشن ویکٹر $5\underline{i} - 2\underline{j}$ کے ذریعے $\Delta A'B'C'$ میں بھی منتقل کیجیے۔

حل:

A' نیاراس $= (-5\underline{i} + 3\underline{j}) + (5\underline{i} - 2\underline{j})$

$= (-5+5)\underline{i} + (3-2)\underline{j} = 0\underline{i} + \underline{j} = (0,1)$

B' نیاراس $= (-2\underline{i} + 3\underline{j}) + (5\underline{i} - 2\underline{j})$

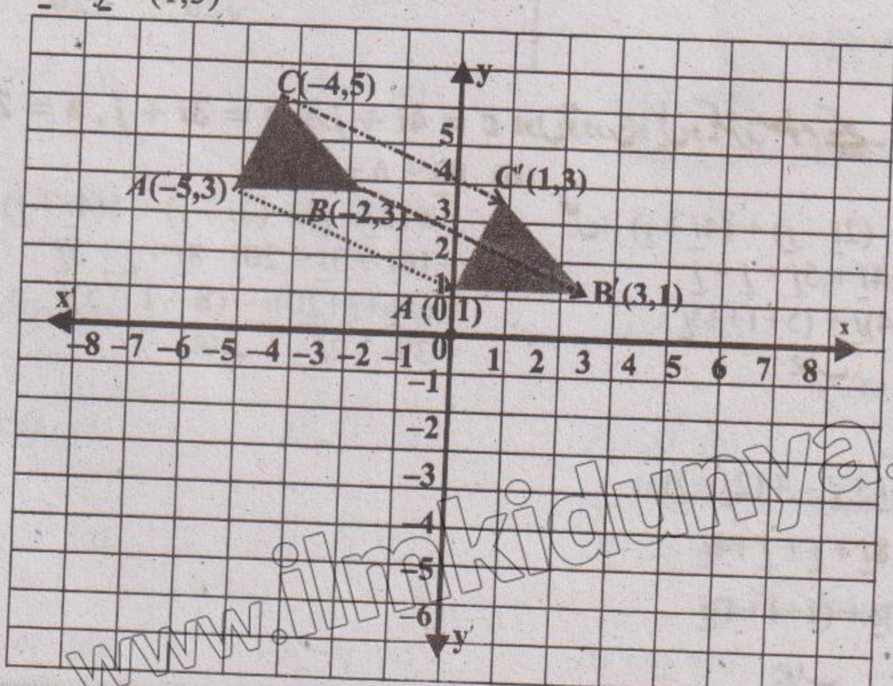
$= (-2+5)\underline{i} + (3-2)\underline{j}$

$= 3\underline{i} + \underline{j} = (3,1)$

C' نیاراس $= (-4\underline{i} + 5\underline{j}) + (5\underline{i} - 2\underline{j})$

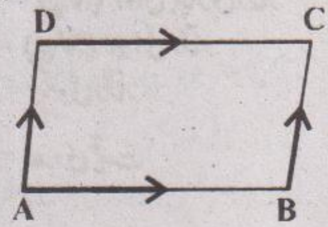
$= (-4+5)\underline{i} + (5-2)\underline{j}$

$= \underline{i} + 3\underline{j} = (1,3)$



7- ویکٹرز کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جہاں نقاط A(2, 3)، B(6, 3)، C(7,6) اور D(3, 6) ہیں۔

حل:



A(2,3), B(6,3), C(7,6), D(3,6)

$\overrightarrow{AB} = (6-2)\underline{i} + (3-3)\underline{j}$

$\overrightarrow{AB} = 4\underline{i} + 0\underline{j}$

$\overrightarrow{DC} = (7-3)\underline{i} + (6-6)\underline{j}$

$\overrightarrow{DC} = 4\underline{i} + 0\underline{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

اور

$\overrightarrow{AD} = (3-2)\underline{i} + (6-3)\underline{j}$

$\overrightarrow{AD} = \underline{i} + 3\underline{j}$

$\overrightarrow{BC} = (7-6)\underline{i} + (6-3)\underline{j}$

$\overrightarrow{BC} = \underline{i} + 3\underline{j} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$

جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ دیے گئے نقاط متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

8- ویکٹرز کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ مثلث ABC ایک متساوی الساقین مثلث ہے، جہاں نقاط A، B اور C کے محددات بالترتیب (1, 2)، (4, 6) اور (7, 2) ہیں۔

حل: دیے گئے نقاط ہیں

A(1,2), B(4,6), C(7,2)

اب

$\overrightarrow{AB} = (4-1)\underline{i} + (6-2)\underline{j}$

$\overrightarrow{AB} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$

اور

$\overrightarrow{BC} = (7-4)\underline{i} + (2-6)\underline{j}$

$\overrightarrow{BC} = 3\underline{i} - 4\underline{j}$

جب کہ

$\overrightarrow{AC} = (7-1)\underline{i} + (2-2)\underline{j}$

$\overrightarrow{AC} = 6\underline{i} + 0\underline{j}$

اب

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\overrightarrow{BC} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$

جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ دیے گئے نقاط متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں۔

9- ایک گیند کو ولاسٹی ویکٹر $\underline{v} = 6\underline{i} + 8\underline{j}$ کے ساتھ پھینکا جاتا ہے۔ ولاسٹی کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: ولاسٹی کی عددی قیمت $= |\underline{v}| = \sqrt{6^2 + 8^2}$

$= \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$

$|\underline{v}| = 10$

www.ilmkidunya.com

10- ایک ہوائی جہاز مشرق کی سمت 200 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے اُڑ رہا ہے۔ وہاں شمال کی سمت میں 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے ہوا چل رہی ہے۔ مجموعی ولاسٹی اور اس کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

ہوائی جہاز کی رفتار $(V_a) = 200\underline{i}$ (مشرق)

ہوا کی رفتار $(V_w) = 60\underline{j}$ (شمال)

مجموعی رفتار $= 200\underline{i} + 60\underline{j}$

عددی قیمت $= |\underline{V}| = \sqrt{(200)^2 + (60)^2} = \sqrt{40000 + 3600}$

$= \sqrt{43600} = 20\sqrt{109}$ km/h

$= 208.8$ کلومیٹر فی گھنٹہ

معروضی طرز سوالات

اضافی کثیرالانتخابی سوالات

مختلف امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے کثیرالانتخابی سوالات

6.1 مستطیلی محدداتی مستوی

درست جواب کا انتخاب کریں۔

1- x- محور اور y- محور ایک نقطہ پر ملتے ہیں جو کہلاتا ہے:

(a) ایبسیسا (b) آرڈینیٹ (c) مبدا (d) راس

2- نقطہ P(-2,1) ربع میں واقع ہے:

(a) پہلا ربع (b) دوسرا ربع (c) تیسرا ربع (d) چوتھا ربع

3- تیسرے ربع میں واقع نقطہ ہے:

(a) (.2,1) (b) (−4,−1) (c) (2,1) (d) (3, −1)

4- x- محور اور y- محور کا نقطہ تقاطع ہے:

(a) (0,0) (b) (0,1) (c) (1,0) (d) (1,1)

6.2 سکیلرز اور ویکٹرز

5- ایک مقدار جس کی صرف عددی قیمت ہوتی ہے کہلاتی ہے:

(a) سکیلر (b) ویکٹر (c) غیر طبعی (d) کوئی نہیں

6- سکیلر مقدار کی ایک مثال ہے:

(a) ماس (b) فورس (c) ایکسلریشن (d) ولاسٹی

7- ایک مقدار جس کی عددی قیمت اور سمت دونوں ہوتی ہیں کہلاتی ہے:

(a) سکیلر (b) ویکٹر (c) غیر طبعی (d) کوئی نہیں

8- ویکٹر مقدار کی ایک مثال ہے:

(a) ولاسٹی (b) ماس (c) وقت (d) حجم

6.2.1 ویکٹر کا سمتی قطعہ خط کے طور پر اظہار

9- ایک ویکٹر جو دیے گئے ویکٹر کی مخالف سمت میں ہو لیکن عددی قیمت میں برابر ہو، کہلاتا ہے:

(a) اکائی ویکٹر (b) صفر ویکٹر (c) منفی ویکٹر (d) پوزیشن ویکٹر

10- ایک ویکٹر جس کی عددی قیمت صفر ہو کہلاتا ہے:

(a) اکائی ویکٹر (b) صفر ویکٹر (c) منفی ویکٹر (d) پوزیشن ویکٹر

11- دو ویکٹرز $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ جن کی لمبائی اور سمت ایک جیسی ہو، کہلاتے ہیں:

(a) مترادف ویکٹرز (b) مساوی ویکٹرز (c) ایک جیسے ویکٹرز (d) متوازی ویکٹرز

12- ایک ویکٹر جس کا ابتدائی نقطہ مبدا $O(0,0)$ ہو، کہلاتا ہے:

(a) صفر ویکٹر (b) یونٹ ویکٹر (c) پوزیشن ویکٹر (d) کوئی نہیں

13- نقطہ $(-1,4)$ کا $O(0,0)$ کے لحاظ سے پوزیشن ویکٹر ہے:

(a) $-\underline{i}+4\underline{j}$ (b) $\underline{i}-4\underline{j}$ (c) $-\underline{i}-4\underline{j}$ (d) $\underline{i}+4\underline{j}$

14- ویکٹر $\underline{a}=x\underline{i}+y\underline{j}$ کی عددی قیمت ہے:

(a) $\sqrt{x^2-y^2}$ (b) $\sqrt{x^2+y^2}$ (c) x^2-y^2 (d) x^2+y^2

15- ایک ویکٹر کی عددی قیمت کو اس کا .... بھی کہا جاتا ہے:

(a) نورم (b) لمبائی (c) A اور B دونوں (d) کوئی نہیں

16- اگر $\underline{b}=3\underline{i}-4\underline{j}$ ہو تو $|\underline{b}|$ ہوگا:

(a) $\sqrt{-25}$ (b) $\sqrt{-7}$ (c) $\sqrt{7}$ (d) 5

17- اکائی ویکٹر کی عددی قیمت ہوتی ہے:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

18- صفر ویکٹر کی عددی قیمت ہوتی ہے:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

6.2.5 ویکٹر کی سکیلر ضرب

19- اگر $\underline{a}=\lambda\underline{b}$ ہو تو $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ ایک ہی سمت میں ہوں گے اگر:

(a) $\lambda<0$ (b) $\lambda>0$ (c) $\lambda<1$ (d) $\lambda<0$

20- اگر $\underline{a}=\lambda\underline{b}$ ہو تو $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ مخالف سمت میں ہوں گے اگر:

(a) $\lambda<0$ (b) $\lambda>0$ (c) $\lambda=1$ (d) $\lambda=0$

6.2.6 یونٹ ویکٹر

21- ایک ویکٹر جس کی عددی قیمت "1" ہو، کہلاتا ہے:

(a) (b) یونٹ ویکٹر (c) پوزیشن ویکٹر (d) منفی ویکٹر

www.ilmkidunya.com

22- اگر $\underline{a}$ ایک غیر صفر ویکٹر ہو تو اس کے یونٹ ویکٹر کو ظاہر کیا جا سکتا ہے:

(a) $\hat{\underline{a}}$ (b) $|\underline{a}|$ (c) $|\hat{\underline{a}}|$ (d) $\vec{a}$

23- اگر $\underline{a}$ ایک غیر صفر ویکٹر ہو تو اس کے یونٹ ویکٹر کی تعریف کی جاتی ہے:

(a) $\underline{a}\ \lambda\ \underline{a}$ (b) $\hat{\underline{a}}$ (c) $\hat{\underline{a}} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ (d) $\hat{\underline{a}} = \frac{|\underline{a}|}{\underline{a}}$

24- اگر $\underline{a}$ ایک اکائی ویکٹر ہو تو $|\underline{a}|$ ہوگا:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

6.3 ویکٹرز کی جمع

25- اگر دو ویکٹرز $\underline{u}$ اور $\underline{v}$ ایک مثلث کے دو ملحقہ اضلاع کو ظاہر کریں تو تیسرا ضلع ہوگا:

(a) $\underline{u}\ \underline{v}$ (b) $\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$ (c) $\underline{u} + \underline{v}$ (d) $|\underline{u} + \underline{v}|$

26- اگر $\underline{a} = -\underline{i} + \underline{j}$ اور $\underline{b} = 2\underline{i} + 2\underline{j}$ تو $a + b$ برابر ہوگا:

(a) $\underline{i} + 3\underline{j}$ (b) $\underline{i} + 3\underline{j}$ (c) $3\underline{i} + 3\underline{j}$ (d) $-3\underline{i} + 3\underline{j}$

27- دو ویکٹرز $\underline{a}$ اور $\underline{b}$ جمع ہو سکتے ہیں:

(a) جمع کے مثلثی قانون سے (b) ہیڈ ٹو ٹیل رول سے

(c) جمع کے متوازی الاضلاع قانون سے (d) یہ تمام

28- اگر دو ویکٹرز $\underline{a}$ اور $-\underline{a}$ جمع کیے جائیں تو نتیجہ ہوگا۔

(a) صفر ویکٹر (b) یونٹ ویکٹر (c) پوزیشن ویکٹر (d) منفی ویکٹر

6.4 دو ویکٹرز کا فرق

29- دو ویکٹرز کا فرق ایک .... ویکٹر ہوتا ہے:

(a) سکیلر (b) ویکٹر (c) مستقل مقدار (d) عددی قیمت

30- اگر دو ویکٹرز جن کے x اور y اجزاء برابر ہوں اور ان کو آپس میں تفریق کیا جاتے تو نتیجہ ہوگا:

(a) سکیلر (b) یونٹ ویکٹر (c) صفر ویکٹر (d) پوزیشن ویکٹر

6.5 ویکٹرز دو غیر صفری اور غیر متوازی ہم مستوی ویکٹرز کی شکل میں

31- دو یا زیادہ ویکٹرز جو ایک ہی مستوی میں ہوں کہلاتے ہیں:

(a) مساوی ویکٹرز (b) ہم مستوی ویکٹرز (c) مترادف ویکٹرز (d) ویکٹرز

32- ایک ویکٹر کی ٹرانسلیشن کا نتیجہ ہوتا ہے:

(a) ویکٹر (b) سکیلر (c) صفر ویکٹر (d) یونٹ ویکٹر

33- ایک نقطہ A(-4,2) کی ٹرانسلیشن ویکٹرز $2 + 7\underline{i}$ سے بننے والا امیج اس ہے:

(a) (3, 4) (b) (3, 4) (c) (-4, 2) (d) (7, 2)

34- ویکٹر کی شکل میں حرکت کی پہلی مساوات ہے:

(a) $\underline{V}_f\ \underline{V}_i + \underline{a}t$ (b) $\underline{a}t = \underline{V}_f + \underline{V}_i$ (c) $\underline{V}_f = \underline{V}_i + \underline{a}t^2$ (d) $\underline{V}_f^2 - \underline{V}_i^2 = 2\underline{a}S$

www.ilmkidunya.com

35- افقی حرکت کی مساوات ہے:

(a) $x = \underline{V}_x t$ (b) $x = \underline{V}_y t$ (c) $y = \underline{V}_y t$ (d) $y = \underline{V}_x t$

36- عمودی حرکت کی مساوات ہے:

(a) $x = \underline{V}_x t$ (b) $y = \underline{V}_y t - \frac{1}{2}\underline{g}t^2$ (c) $y = \underline{V}_x t$ (d) $y = \underline{V}_x t$

جوابات

1- مبدا	2- دوسرا ربع	3- $(-4,-1)$	4- $(0,0)$	5- سکیلر
6- ماس	7- ویکٹر	8- ولاسٹی	9- منفی ویکٹر	10- صفر ویکٹر
11- مساوی ویکٹرز	12- پوزیشن ویکٹر	13- $-\underline{i} + 4\underline{j}$	14- $\sqrt{x^2 + y^2}$	15- A اور B دونوں
16- 5	17- 1	18- 0	19- $\lambda > 0$	20- $\lambda < 0$
21- یونٹ ویکٹر	22- $\hat{\underline{a}}$	23- $\hat{\underline{a}} = \frac{\underline{a}}{\lvert\underline{a}\rvert}$	24- 1	25- $\underline{u} + \underline{v}$
26- $\underline{i} + 3\underline{j}$	27- یہ تمام	28- صفر ویکٹر	29- ویکٹر	30- صفر ویکٹر
31- ہم مستوی ویکٹرز	32- ویکٹر	33- $(3, 4)$	34- $\underline{V}_f = \underline{V}_i + \underline{a}t$	35- $x = \underline{V}_x t$
36- $\underline{V}_y t$				

اضافی مختصر سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے مختصر جوابی سوالات

6.1 مستطیلی محدداتی مستوی

مختصر جواب دیں۔

1- ان ربع کے نام بتایئے جن مین ہر نقطہ واقع ہے۔

(i) $(-4,2)$ (ii) $(-3, -6)$ (iii) $(5,-3)$ (iv) $(1,2)$

حل: (i) دوسرا۔ربع (ii) تیسرا۔ربع (iii) چوتھا۔ربع (iv) پہلا۔ربع

2- ویکٹر $\overline{PQ}$ کو $x\underline{i} + y\underline{j}$ کی شکل میں لکھیے۔اگر $P(-3, -6)$ اور $Q(1,2)$۔

حل:

$$\overline{PQ} = (1-(-3))\underline{i} + (2-(-6))\underline{j}$$

$$\overline{PQ} = 4\underline{i} + 8\underline{j}$$

3- اگر $\underline{u} = \frac{1}{4}\underline{i} + \frac{15}{4}\underline{j}$ ہو تو $|\underline{u}|$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$|\underline{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{225}{16}} = \sqrt{\frac{1 + 225}{16}} = \frac{\sqrt{226}}{\sqrt{16}} \Rightarrow |\underline{u}| = \frac{\sqrt{226}}{4}$$

-4 ویکٹر $\underline{v} = -3\underline{i} + 4\underline{j}$ کی سمت میں اکائی ویکٹر معلوم کیجیے۔

حل:

$$\underline{v} = -3\underline{i} + 4\underline{j}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{9+16}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$|\underline{v}| = 5$$

$$\hat{\underline{v}} = \frac{|\underline{v}|}{\underline{v}} = \frac{-3\underline{i} + 4\underline{j}}{5}$$

$$\hat{\underline{v}} = -\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}$$

یا

$$\hat{\underline{v}} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

$$= \frac{3\underline{i} + 4\underline{j}}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{-3\underline{i} + 4\underline{j}}{\sqrt{9+16}}$$

$$= \frac{-3\underline{i} + 4\underline{j}}{\sqrt{25}} = \frac{-3\underline{i} + 4\underline{j}}{5}$$

$$\hat{\underline{v}} = -\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}$$

-5 معلوم کریں کہ ویکٹرز $\underline{u} = 8\underline{i} + 4\underline{j}$ اور $\underline{v} = 2\underline{i} + \underline{j}$ متوازی ہیں یا نہیں۔

حل:

$$\underline{u} = 8\underline{i} + 4\underline{j}$$

$$= 4(2\underline{i} + \underline{j})$$

$$\underline{u} = 4\underline{v}$$

4 λ جو دیکھاتا ہے کہ $\underline{u}$ متوازی ہے $\underline{v}$ کے

-6 اگر $\underline{u} = -5\underline{v}$، جبکہ $\underline{u} = 10\underline{i} - \lambda\underline{j}$ اور $\underline{v} = 2\underline{i} + 7\underline{j}$، تو k کی قیمت معلوم کریں۔

حل:

$$\underline{u} = -5\underline{v}$$

$$10\underline{i} - \lambda\underline{i} = -5(-2\underline{i} + 7\underline{j}) \qquad \because \underline{u} = 10\underline{i} - \lambda\underline{j}$$

$$10\underline{i} - \lambda\underline{j} = 10\underline{i} - 35\underline{j} \qquad \underline{v} = -2\underline{i} + 7\underline{j}$$

$\underline{j}$ کے عددی سر کا موازنہ

$$-\lambda = -35 \Rightarrow \boxed{\lambda = 35}$$

-7 ویکٹر $\underline{u} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$ کی مخالف سمت میں اکائی ویکٹر معلوم کریں۔

حل:

$$|\underline{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4}$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{13}$$

$$\because \underline{u} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$$

اب ویکٹر $\underline{u}$ کی مخالف سمت اکائی ویکٹر ہے۔

$$\hat{\underline{u}} = -\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$$

مطلوبہ یونٹ ویکٹر

$$= -\frac{3\underline{i} - 2\underline{j}}{\sqrt{13}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{13}}\underline{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\underline{j}$$

جواب

www.ilmkidunya.com

6.3 ویکٹرز کی جمع

-8 اگر $\underline{u} = 5\underline{i} - 4\underline{j}$ اور $\underline{v} = 6\underline{i} - 3\underline{j}$ ہو تو $\underline{u} + \underline{v}$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$\underline{u} + \underline{v} = (5\underline{i} - 4\underline{j}) + (6\underline{i} - 3\underline{j})$$
$$= (5+6)\,\underline{i} - (4+3)\,\underline{j}$$
$$\underline{u} + \underline{v} = 11\underline{i} - 7\underline{j}$$

-9 اگر $\underline{a} = 4\underline{i} - \underline{j}$ اور $\underline{b} = -3\underline{i} + 5\underline{j}$ ہو تو $3\underline{b} + 4\underline{a}$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$3\underline{b} + 4\underline{a}$$
$$= 3(-3\underline{i} + 5\underline{j}) + 4(4\underline{i} - \underline{j})$$
$$= -9\underline{i} + 15\underline{j} + 16\underline{i} - 4\underline{j}$$
$$= (-9+16)\underline{i} + (15-4)\underline{j}$$
$$= 7\underline{i} + 11\underline{j}$$

-10 اگر $\underline{a} = 4\underline{i} - 6\underline{j}$ اور $\underline{b} = 9\underline{i} + 12\underline{j}$ ہو تو $\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b}$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b} = \frac{1}{2}(4\underline{i} - 6\underline{j}) + \frac{2}{3}(9\underline{i} + 12\underline{j})$$
$$= 2\underline{i} - 3\underline{j} + 2(3\underline{i} + 4\underline{j})$$
$$= 2\underline{i} - 3\underline{j} + 6\underline{i} + 8\underline{j}$$
$$= (2+6)\underline{i} - (3-8)\underline{j}$$
$$\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b} = 8\underline{i} + 5\underline{j}$$

-11 اگر $\underline{u} = \underline{i} - 2\underline{j}$, $\underline{w} = 3\underline{i} + 3\underline{j}$ اور $\underline{u} + 4\underline{v} = \underline{w}$ ہو تو $\underline{v}$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$\underline{u} + 4\underline{v} = \underline{w}$$
$$\underline{i} - 2\underline{j} + 4\underline{v} = 3\underline{i} + 3\underline{j}$$
$$4\underline{v} = 3\underline{i} + 3\underline{j} - \underline{i} + 2\underline{j}$$
$$4\underline{v} = (3-1)\underline{i} + (3+2)\underline{j}$$
$$4\underline{v} = 2\underline{i} + 5\underline{j}$$
$$\Rightarrow \underline{v} = \frac{2}{4}\underline{i} + \frac{5}{4}\underline{j} \Rightarrow \underline{v} = \frac{1}{2}\underline{i} + \frac{5}{4}\underline{j}$$

6.4 [illegible] کا [illegible]ق

-12 اگر $\underline{u} = \underline{i} + 5\underline{j}$ اور $\underline{v} = 6\underline{i} - \underline{j}$ ہو تو $\underline{v} - 2\underline{u}$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$\underline{v} - 2\underline{u} = 6\underline{i} - \underline{j} - 2(\underline{i} + 5\underline{j})$$
$$= 6\underline{i} - \underline{j} - 2\underline{i} - 10\underline{j}$$
$$= (6-2)\underline{i} - (1+10)\underline{j}$$
$$\underline{v} - 2\underline{u} = 4\underline{i} - 11\underline{j}$$ جواب

-13 اگر $\underline{a} = 7\underline{i} - 3\underline{j}$, $\underline{b} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$ اور $\underline{c} = 2\underline{i} - \underline{j}$ ہو تو $2\underline{a} - 3\underline{b} - \underline{c}$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$2\underline{a} - 3\underline{b} - \underline{c} = 2(7\underline{i} - 3\underline{j}) - 3(3\underline{i} + 4\underline{j}) - (2\underline{i} - \underline{j})$$
$$= 14\underline{i} - 6\underline{j} - 9\underline{i} - 12\underline{j} - 2\underline{i} + \underline{j}$$
$$= (14-9-2)\underline{i} - (6+12-1)\underline{j}$$

www.ilmkidunya.com

$2\underline{a} - 3\underline{b} - \underline{c} = 3\underline{i} - 17\underline{i}$ جواب

-14 اگر $(x\underline{i} + y\underline{j}) - (2\underline{i} - 4\underline{j}) = -5\underline{i} + 3\underline{j}$ ہو تو x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$(x\underline{i} + y\underline{j}) - (2\underline{i} - 4\underline{j}) = -5\underline{i} + 3\underline{j}$

$(x-2)\underline{i} + (y+4)\underline{j} = -5\underline{i} + 3\underline{j}$

$\underline{i}$ اور $\underline{j}$ کے عددی سروں کا موازنہ

$\Rightarrow \quad x-2 = -5 \quad , \quad y+4 = 3$

$x = -5+2 \quad , \quad y = 3-4$

$\boxed{x = -3} \quad , \quad \boxed{y = -1}$

-15 اگر $(x + 5)\underline{i} + (y - 3)\underline{j} = 2\underline{i} + 7\underline{j}$ ہو تو x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:

$(x + 5)\underline{i} + (y - 3)\underline{j} = 2\underline{i} + 7\underline{j}$

$\underline{i}$ اور $\underline{j}$ کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

$x + 5 = 2 \quad , \quad y - 3 = 7$

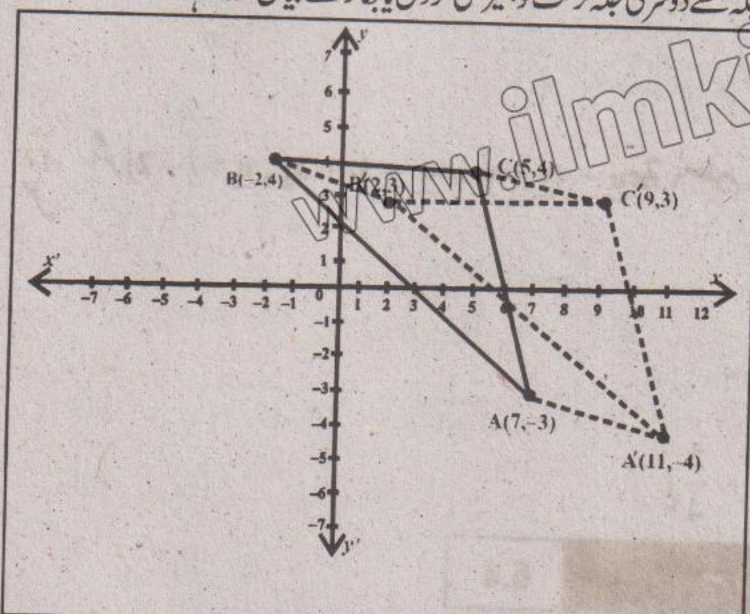
$x = 2 - 5 \quad , \quad y = 7 + 3$

$x = -3 \quad , \quad y = 10$

6.6 ویکٹرز کی ٹرانسلیشن

-16 ٹرانسلیشن ویکٹر کی تعریف کریں۔

جواب: ٹرانسلیشن ویکٹر وہ ویکٹر ہے جو کسی نقطے، جسم یا نظام کی ایک جگہ سے دوسری جگہ حرکت کو بغیر کسی گردش یا بگاڑ کے بیان کرتا ہے۔



-18 اگر $A(7, -3)$, $B(-2,4)$, $C(5,4)$ ایک ΔABC کے راس ہوں تو ٹرانسلیشن ویکٹر $4\underline{i} - \underline{j}$ کی مدد سے نئے راس معلوم کیجیے۔

حل: نیا راس $A' = (7\underline{i} - 3\underline{j}) + (4\underline{i} - \underline{j})$

$= (7+4)\underline{i} - (3+1)\underline{j}$

$= 11\underline{i} - 4\underline{j}$

نیا راس $B' = (-2\underline{i} + 4\underline{j}) + (4\underline{i} - \underline{j})$

$= (-2+4)\underline{i} + (4-1)\underline{j}$

$= 2\underline{i} + 3\underline{j} = (2,3)$

نیا راس $C' = (5\underline{i} + 4\underline{j}) + (4\underline{i} - \underline{j})$

$= (5+4)\underline{i} + (4-1)\underline{j}$

$= 9\underline{i} + 3\underline{j} = (9,3)$

6.7 ویکٹرز پر مشتمل جیومیٹرک مسائل کا حل اور اطلاق

-19 اگر $A(3,1)$, $B(-2,-3)$ اور $C(2,2)$ ایک مثلث کے راس ہوں تو معلوم کریں کہ مثلث ABC متساوی الساقین ہے۔

حل:

$\overrightarrow{AB} = (-2-3)\underline{i} + (-3-1)\underline{j} = -5\underline{i} - 4\underline{j}$

$\overrightarrow{BC} = (2-(-2))\underline{i} + (2-(-3))\underline{j} = 4\underline{i} + 5\underline{j}$

$\overrightarrow{AC} = (2-3)\underline{i} + (2-1)\underline{j} = -\underline{i} + \underline{j}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$

لہٰذا $\triangle ABC$ متساوی الساقین ہے۔

20- اگر $\overrightarrow{AB} = x\underline{i} + 2\underline{j}$ اور $\overrightarrow{DC} = -3\underline{i} + 2\underline{j}$ ایک متوازی الاضلاع کے دو مخالف اضلاع ہوں تو x کی قیمت معلوم کریں۔

حل: چونکہ $\overrightarrow{AB} = x\underline{i} + 2\underline{j}$ اور $\overrightarrow{DC} = -3\underline{i} + 2\underline{j}$ ایک متوازی الاضلاع کے دو مخالف اضلاع ہیں۔

اس لیے

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$x\underline{i} + 2\underline{j} = -3\underline{i} + 2\underline{j}$

i کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

$\boxed{x = -3}$

21- اگر $\overrightarrow{AB} = 4\underline{i} - 5\underline{j}$ اور $\overrightarrow{DC} = 4\underline{i} - y\underline{j}$ ایک متوازی الاضلاع کے دو متوازی اور مخالف اضلاع ہیں تو y کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{DC}$ ایک متوازی الاضلاع کے دو متوازی اور مخالف اضلاع ہیں۔ اس لیے

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$4\underline{i} - 5\underline{j} = 4\underline{i} - y\underline{j}$

j کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

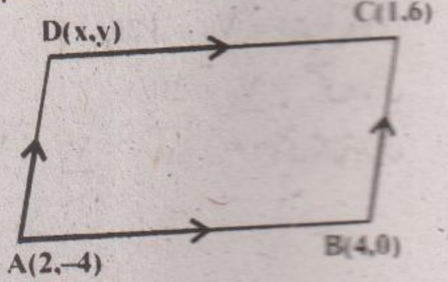
$-5 = -y$

$\boxed{y = 5}$

22- اگر A، B اور C بالترتیب نقاط (2,-4)، (4,0) اور (1,6) ہوں۔ ویکٹرز کا استعمال کرتے ہوئے نقطہ D کے محددات معلوم کریں اگر ABCD ایک متوازی الاضلاع ہو۔

حل: فرض کیا کہ D(x,y) مطلوبہ راس ہے۔

کیونکہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔



لہٰذا

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$(4-2)\underline{i} + (0-(-4))\underline{j} = (1-x)\underline{i} - (6-y)\underline{j}$

$2\underline{i} + 4\underline{j} = (1-x)\underline{i} = (6-y)\underline{j}$

$1-x = 2 \quad , \quad 6-y = 4$

$-x = 2-1 \quad , \quad -6y = 4-6$

$-x = 1 \quad , \quad -y = -2$

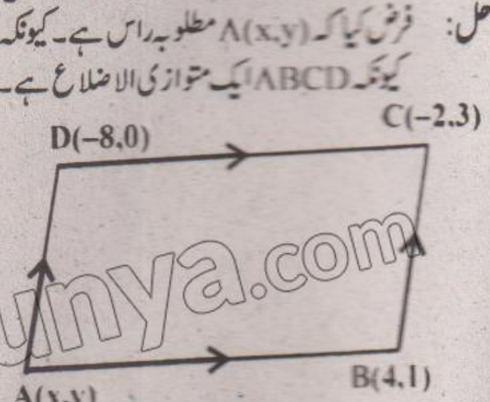
$\boxed{x = -1} \quad , \quad \boxed{y = 2}$

پس نقطہ D کے محددات D(-1,2) ہیں۔

23- اگر B(4,1)، C(-2,3) اور D(-8,0) ایک متوازی الاضلاع ABCD کے راس ہوں تو راس A کے محددات معلوم کریں۔

حل: فرض کیا کہ A(x,y) مطلوبہ راس ہے۔ کیونکہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

کیونکہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔



لہٰذا

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$(4-x)\underline{i} + (1-y)\underline{j} = (-2-(-8))\underline{i} + (3-0)\underline{j}$

$(4-x)\underline{i} + (1-y)\underline{j} = 6\underline{i} + 3\underline{j}$

$4-x = 6 \quad , \quad 1-y = 3$

$-x = 6-4 \quad , \quad -y = 3-1$

$-x = 2 \quad , \quad -y = 2$

$\boxed{x = -2} \quad , \quad \boxed{y = -2}$

پس مطلوبہ راس A(-2, 2) ہے۔

www.ilmkidunya.com

24- ایک پروجیکٹائل زمین سے ابتدائی سمتی رفتار $3\underline{i} + 5\underline{j}$ کے ساتھ پھینکا گیا۔ کتنے وقت کے بعد یہ 15 کلو میٹر دور افقی طور پر موجودہ ہدف سے ٹکرائے گا۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$v_i = 3\underline{i} + 5\underline{j}$

افقی رفتار $= v_x = 3$

عمودی رفتار $= v_y = 5$

فاصلہ $= x = 15m$

$$\therefore x = v_x t$$

$$t = \frac{x}{v_x}$$

$$t = \frac{15}{3}$$

$$\boxed{t = 5\,sec}$$

25- ایک گاڑی ولاسٹی ویکٹر $\underline{V}_i = 17\underline{i}$ کے ساتھ ایک لوپ میں داخل ہوتی ہے اور ولاسٹی ویکٹر $\underline{V}_f = 20\underline{j}$ کے ساتھ باہر نکلتی ہے۔ ولاسٹی میں تبدیلی کی عددی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

ابتدائی ولاسٹی $= \underline{V}_i = 17\underline{i}$

حتمی ولاسٹی $= \underline{V}_f = 20\underline{j}$

$\therefore$ ولاسٹی میں تبدیلی $= \Delta v = \underline{V}_f - \underline{V}_i$

$$\overrightarrow{\Delta v} = 20\underline{j} - 17\underline{i}$$

$$\left|\overrightarrow{\Delta v}\right| = \sqrt{20^2 + (-17)^2}$$

$$= \sqrt{400 + 289}$$

$$\left|\overrightarrow{\Delta v}\right| = \sqrt{689}$$ جواب

www.ilmkidunya.com