یونٹ 04
تفاعل اور گراف

حاصلاتِ تعلّم

اس یونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- تفاعل پر ہونے والے عوامل اور تفاعل کی ترکیب کی وضاحت کر سکیں۔
- معکوس تفاعل کی تعریف کر سکیں اور مثالوں کے ساتھ ان کی ڈومین اور رینج کو بیان کر سکیں۔
- ترکیبی تفاعل کو بیان کر سکیں جیسا کہ $(fog)(x) = f(g(x))$۔
- تفاعل کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل (مثلاً مالیات، نقل و حمل اور فروخت) پر لاگو کر سکیں۔
- مطلق قدر والے تفاعل کا گراف بنا سکیں۔
- ایک متغیر میں مطلق قدر والی ایک درجی مساواتوں اور غیر مساواتوں کو حل کر سکیں اور قدر کی رینج کے طور پر حل کو عددی خط پر ظاہر کر سکیں۔
- مطلق قدر والے تفاعل کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل (مثلاً توانائی کی لہر، وسعت اور فاصلہ کا حساب لگانے کے لیے) پر لاگو کر سکیں۔

4.1 تفاعل (Function)

اگر X اور Y دو غیر خالی سیٹ ہوں، تو سیٹ X سے سیٹ Y تک ایک تفاعل ایسا ربط ہے جو سیٹ X کے ہر رکن کا سیٹ Y کے صرف ایک رکن سے تعلق جوڑتا ہے۔ اسے $f:X \rightarrow Y$ لکھا جاتا ہے۔ جہاں سیٹ X کو ڈومین اور سیٹ Y کو تفاعل f کی کوڈومین (co-domain) کہا جاتا ہے۔ جبکہ رینج کوڈومین کا وہ تحتی سیٹ ہے جس میں صرف وہ اصل آؤٹ پٹ قدریں شامل ہوتی ہیں جو تفاعل f سے بنائی جاتی ہیں۔

> **تاریخ!**
> گوٹفرائیڈ ولیم لبنز ریاضی میں تفاعل کے لفظ کو سب سے پہلے متعارف کروایا۔ انہوں نے 1673ء میں اس اصطلاح کو کسی منحنی خط سے متعلق ایک مقدار کو بیان کرنے کے لیے استعمال کیا جیسے کے محددات یا جھکاؤ۔

مثال 1: اگر $f(x) = x^2 + 3x + 1$ ہو تو معلوم کیجیے۔

(i) $f(0)$ (ii) $f(-2)$ (iii) $f(a)$ (iv) $f(x+1)$

> **یاد رکھیے!**
> رینج ہمیشہ کوڈومین کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

حل: $f(x) = x^2 + 3x + 1$

(i) $f(0) = (0)^2 + 3(0) + 1 = 1$

(ii) $f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) + 1$
$= 4 - 6 + 1 = -1$

(iii) $f(a) = a^2 + 3a + 1.$

(iv) $f(x+1) = (x+1)^2 + 3(x+1) + 1$
$= x^2 + 2x + 1 + 3x + 3 + 1$
$= x^2 + 5x + 5$

www.ilmkidunya.com

خود آزمائی

اگر $f(x) = 2x^2 + 5x$ ہو تو $f(x+2)$ معلوم کیجیے۔

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 + 5x \\
f(x+2)^2 &= 2(x+2)^2 + 5(x+2) \\
&= 2[x^2 + 4x + 4] + 5x + 10 \\
&= 2x^2 + 8x + 8 + 5x + 10 \\
&= 2x^2 + 13x + 18
\end{aligned}
$$

مثال 2: $f(x) = (x+1)^2$ کی ڈومین اور رینج معلوم کیجیے۔

حل:

$$f(0) = (0+1)^2 = 1;\ f(4) = (4+1)^2 = 25;\ f(-10) = (-10+1)^2 = 81;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+1\right)^2 = \frac{9}{4};\ f\left(\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 7.46;\ f(-1) = 0;\ \cdots\cdots$$

ہر حقیقی عدد x کے لیے، $f(x) = (x+1)^2$ ایک غیر منفی حقیقی عدد ہوتا ہے۔ پس

تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سیٹ = f کی رینج ؛ تمام حقیقی اعداد کا سیٹ = f کی ڈومین

تفاعل کے عوامل

تفاعل کے عوامل پر الجبری عوامل (جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم) لاگو ہوتے ہیں۔

a تفاعل کی جمع

اگر $f(x)$ اور $g(x)$ دو تفاعل ہوں تو ان کے مجموعے کو یوں لکھا جاتا ہے:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

مثال 3: فرض کریں $f(x) = 2x + 3$ اور $g(x) = x^2 + x + 1$ ہوں تو $f(x)$ اور $g(x)$ کو جمع کیجیے۔

حل:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x + 3 \\
g(x) &= x^2 + x + 1 \\
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
&= (2x+3) + (x^2 + x + 1) = x^2 + 3x + 4
\end{aligned}
$$

b تفاعل کی تفریق

اگر $f(x)$ اور $g(x)$ دو تفاعل ہوں تو ان میں فرق کو یوں لکھا جاتا ہے:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

مثال 4: فرض کریں $f(x) = 5x + 2$ اور $g(x) = x^2 - 3$ تو $f(x) - g(x)$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 5x + 2 \\
g(x) &= x^2 - 3 \\
(f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\
&= (5x+2) - (x^2 - 3) \\
&= 5x + 2 - x^2 + 3 = -x^2 + 5x + 5
\end{aligned}
$$

c تفاعل کی ضرب

اگر $f(x)$ اور $g(x)$ دو تفاعل ہوں تو ان کے حاصل ضرب کو یوں لکھا جاتا ہے:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

www.ilmkidunya.com

مثال 5: فرض کریں $f(x) = x + 1$ اور $g(x) = 2x - 3$ ہوں تو $f(x).g(x)$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$f(x) = x + 1$$
$$g(x) = 2x - 3$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= (x + 1)(2x - 3)$$
$$= 2x^2 - 3x + 2x - 3$$
$$= 2x^2 - x - 3$$

d تفاعل کی تقسیم

اگر $f(x)$ اور $g(x)$ دو تفاعل ہوں تو ان کی حاصل تقسیم کو یوں لکھا جاتا ہے:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{جہاں} \quad g(x) \neq 0$$

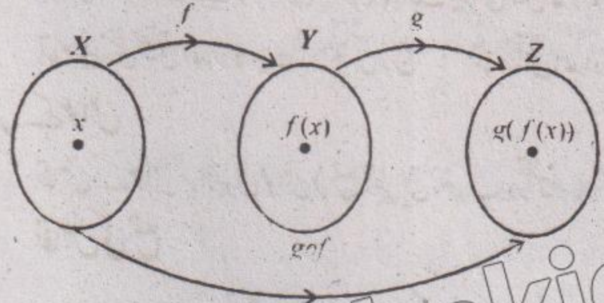
مثال 6: فرض کریں $f(x) = x^2 - 4$ اور $g(x) = x + 2$ ہوں تو $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ معلوم کیجیے جہاں $x \neq -2$۔

حل:

$$f(x) = x^2 - 4$$
$$g(x) = x + 2$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$= \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$
$$= \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}$$
$$= x - 2$$

تفاعل کی ترکیب

تفاعل کی ترکیب دو یا دو سے زیادہ تفاعلوں کو ملا کر ایک نیا واحد تفاعل بنانے کا عمل ہے ترکیب کا عمل کنندہ ''o'' دو تفاعلات کو لیتا ہے اور اس کے نتیجے میں ایک نیا تفاعل بنتا ہے۔ آیئے شکل سے تعریف کی وضاحت کرتے ہیں۔



مثال 7: اگر $f(x) = 2x + 3$ اور $g(x) = x^2$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(i) $(fog)(x)$ (ii) $(gof)(x)$ (iii) $(fof)(x)$ (iv) $(gog)(x)$

حل: $f(x) = 2x + 3,\ g(x) = x^2$

(i)
$$(fog)(x) = f(g(x))$$
$$= f(x^2)$$
$$= 2x^2 + 3$$

(ii)
$$(gof)(x) = g(f(x))$$
$$= g(2x + 3)^2$$
$$(gof)(x) = (2x + 3)^2$$
$$= 4x^2 + 12x + 9$$

(iii)
$$(fof)(x) = f(f(x))$$
$$= f(2x + 3)$$
$$= 2(2x + 3) + 3$$
$$= 4x + 9$$

(iv)
$$(gog)(x) = g(g(x))$$
$$= g(x^2)$$
$$(gog)(x) = (x^2)^2 = x^4$$

یاد رکھیے!

عمومی طور پر

$(fog)(x) \neq (gof)(x)$

ون۔ٹو۔ون تفاعل:

ایک تفاعل ون۔ٹو۔ون (یا انجیکٹو) کہلاتا ہے اگر ہر ان پٹ ایک منفرد آؤٹ پٹ سے ملتا ہو۔

آن ٹو تفاعل:

ایک تفاعل آن ٹو (یا سرجیکٹو) کہلاتا ہے اگر کوڈومین کا ہر رکن ڈومین میں کم از کم ایک ماقبل عکس رکھتا ہو۔

بائی جیکٹیو تفاعل:

ایک تفاعل بائی جیکٹیو کہلاتا ہے اگر وہ ون۔ٹو۔ون بھی ہو اور آن ٹو بھی۔

www.ilmkidunya.com

معکوس تفاعل

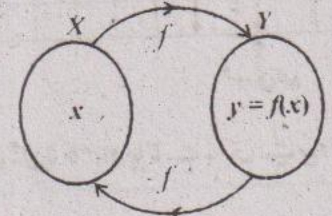
تفاعل f سیٹ X سے ان پٹ x لیتا ہے اور اسے سیٹ Y کے آؤٹ پٹ y سے ملاتا ہے یعنی:

f کا معکوس تفاعل جس کو f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے اس عمل کو پلٹ دیتا ہے یہ y کو ان پٹ اور x کو آؤٹ پٹ کے طور پر لیتا ہے:

$$f^{-1}, Y \to X, \; f^{-1}(y) = x$$

نوٹ:

اگر $y = f(x)$ ہو تو $x = f^{-1}(y)$ کو $f(x)$ کا معکوس تفاعل کہتے ہیں۔



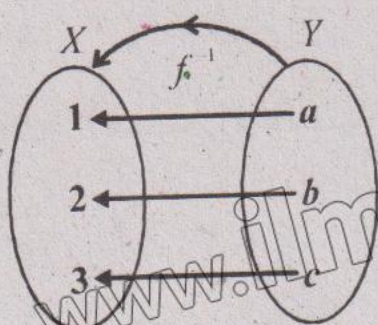
f کی ڈومین = f^{-1} کی رینج

f کی رینج = f^{-1} کی ڈومین

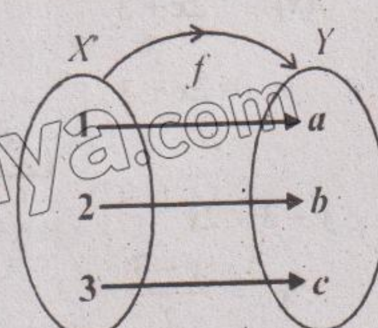
آیئے اس کو ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں:

فرض کریں $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c\}$

$f: \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ ہو تو $f^{-1}: \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$



$f^{-1}(a) = 1$
$f^{-1}(b) = 2$
$f^{-1}(c) = 3$

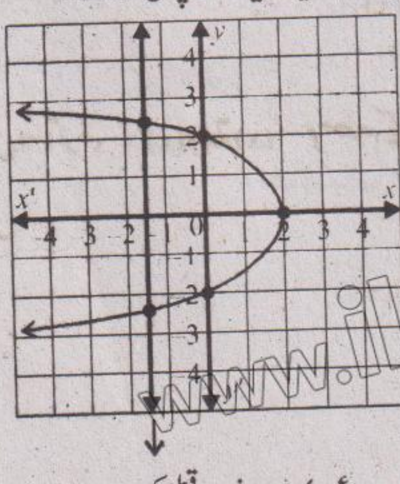


$f(1) = a$
$f(2) = b$
$f(3) = c$

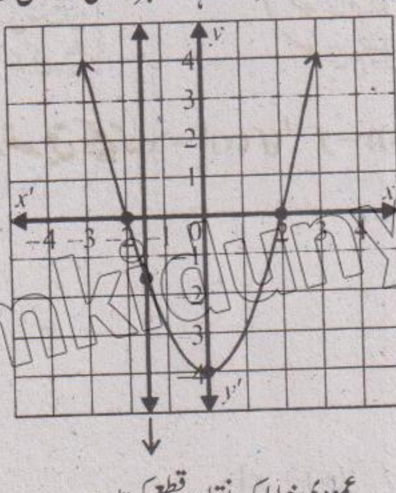
یہ نوٹ کرنا اہم ہے کہ کسی تفاعل کا معکوس صرف اس وقت ممکن ہوتا ہے جب وہ ون ۔ ٹو ۔ ون اور آن ٹو (بائی جیکٹو) ہو۔

عمودی خط کا ٹیسٹ:

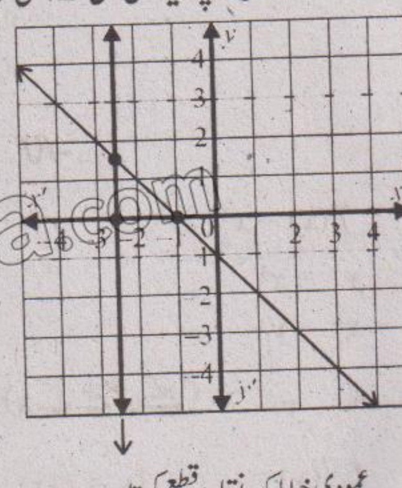
گراف میں کھینچا گیا کوئی بھی خط/منحنی خط ایک تفاعل کو ظاہر کرتا ہے اگر ہر عمودی خط اس خط کو زیادہ سے زیادہ ایک نقطہ پر قطع کرے۔



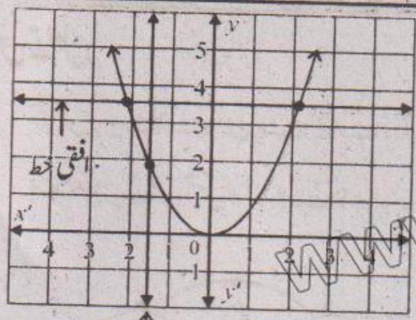
عمودی خط دو نقاط پر قطع کرتا ہے۔



عمودی خط ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے۔



عمودی خط ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے۔



شکل 4.8 اور شکل 4.9 کے گراف تفاعل کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ شکل 4.10 کا گراف تفاعل کو ظاہر نہیں کرتا۔

افقی خط کا ٹیسٹ

اگر ہر افقی خط دیے گئے منحنی خط کو زیادہ سے زیادہ ایک نقطہ پر قطع کرے، تو گراف ون۔ٹو۔ون تفاعل کہلاتا ہے۔

عمودی خط تفاعل $f(x) = x^2$ کے گراف کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے لہٰذا یہ افقی ٹیسٹ میں ناکام ہو جاتا ہے۔ اس لیے یہ ون۔ٹو۔ون تفاعل نہیں ہے۔

مثال 8: $f(x) = 2x + 3$ کا معکوس تفاعل معلوم کیجیے۔ $f^{-1}(x)$ کی ڈومین اور رینج بھی معلوم کیجیے۔

حل:

$f(x) = 2x + 3$

$y = 2x + 3$

($f(x)$ کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے)

$y - 3 = 2x$

$\therefore x = \dfrac{y-3}{2}$ (x کے لیے حل کیجیے)

$f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$ $[\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$ y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے

$f(x)$ کی ڈومین: تمام حقیقی اعداد

$f(x)$ کی رینج: تمام حقیقی اعداد

$f^{-1}(x)$ کی ڈومین: تمام حقیقی اعداد

$f^{-1}(x)$ کی رینج: تمام حقیقی اعداد

مثال 9: اگر $f(x) = x^3$ ہو تو $f^{-1}(x)$ معلوم کیجیے اور تصدیق کیجیے کہ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$۔

حل:

$f(x) = x^3$

$y = x^3$

$x^3 = y$

$x = y^{\frac{1}{3}}$ (x کے لیے حل کیجیے)

$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$ $[y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$

www.ilmkidunya.com

$f^{-1}(x) = (x)^{\frac{1}{3}}$ (y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے)

$f(f^{-1}(x)) = f(x)^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x$

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = \left(x^3\right)^{\frac{1}{3}} = x$

پس، $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

چیلنج!

اگر $f(x) = \frac{-1}{4}x + 2$ ہو تو تصدیق کیجیے کہ $f(f^{-1}(x)) = x$، $f^{-1}(f(x)) = x$

حل:

$f(f^{-1}(x)) = f(-4x + 8)$

$= \frac{-1}{4}(-4x + 8) + 2$

$= \frac{-1}{4} \times (-4x) + \left(\frac{-1}{4} \times 8\right) + 2$

$= x - 2 + 2 = x$ ...... (i)

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{-1}{4}x + 2\right)$

$= -4\left(\frac{-1}{4}x + 2\right) + 8$

$= -4 \times \left(\frac{-1}{4}x\right) - 4 \times 2 + 8$

$= x - 8 + 8$

$= x$ ...... (ii)

$f(x) = \frac{-1}{4}x + 2$

$y = \frac{-1}{4}x + 2$

(f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے)

$\frac{-1}{4}x + 2 = y$ یا

$\frac{-1}{4}x = y - 2$

$-4\left(\frac{-1}{4}x\right) = -4(y - 2)$

(مساوات کے دونوں طرف سے 4- ضرب دینے سے)

$x = -4y + 8$

(x کے لیے حل کرنے سے)

$f^{-1}(x) = -4x + 8$

(y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے)

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ

$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

www.ilmkidunya.com

حل مشق 4.1

1- اگر $f(x)=2x+5$ اور $g(x)=3x-2$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(i) $f(x)+g(x)$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x)=2x+5$ اور $g(x)=3x-2$

$$f(x)+g(x)$$
$$=(2x+5)+(3x-2)$$
$$=2x+5+3x-2=2x+3x+5-2$$
$$=5x+3$$

(ii) $f(x)-g(x)$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x)=2x+5$ اور $g(x)=3x-2$

$$f(x)-g(x)$$
$$=(2x+5)-(3x-2)$$
$$=2x+5-3x+2=2x-3x+5+2$$
$$=-x+7$$

2- اگر $f(x)=x+2$ اور $g(x)=2x+4$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(i) $f(x).g(x)$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x)=x+2$ اور $g(x)=2x+4$

$$f(x).g(x)$$
$$=(x+2)(2x+4)$$
$$=2x^2+4x+4x+8=2x^2+8x+8$$
$$=2(x^2+4x+4)$$

(ii) $g(x).f(x)$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x)=x+2$ اور $g(x)=2x+4$

$$g(x).f(x)$$
$$=(2x+4)(x+2)$$
$$=2x^2+4x+4x+8=2x^2+8x+8$$
$$=2(x^2+4x+4)$$

(iii) $\frac{f(x)}{g(x)}$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x)=x+2$ اور $g(x)=2x+4$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+2}{2x+4}=\frac{x+2}{2(x+2)}=\frac{1}{2}$$

(iv) $\frac{g(x)}{f(x)}$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x)=x+2$ اور $g(x)=2x+4$

حل:
$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{2x+4}{x+2}=\frac{2(x+2)}{(x+2)}=2$$

-3 درج ذیل f اور g تفاعل کے لیے، معلوم کیجیے۔

(a) $(fog)(x)$ (b) $(gof)(x)$ (c) $(fof)(x)$ (d) $(gog)(x)$

(i) $f(x)=2x+3; g(x)=x^3$

(ii) $f(x)=\frac{2}{x}, x\neq 0; g(x)=2x^2-1$

(iii) $f(x)=2x-1\ ;\ g(x)=\frac{x+1}{2}$

(i) $f(x)=2x+3,\ g(x)=x^3$

(a) $(fog)(x)$

حل:
$$(fog)(x)=(f(g(x))$$
$$=f(x^3)$$
$$=2(x^3)+3$$
$$=2x^3+3$$

(b) $(gof)(x)$

حل:
$$(gof)(x)=g(f(x))$$
$$=g(2x+3)$$
$$=(2x+3)^3$$

(c) $(fof)(x)$

حل:
$$(fof)(x)=f(f(x))$$
$$=f(2x+3)$$
$$=2(2x+3)+3$$
$$=4x+6+3$$
$$=4x+9$$

(d) $(gog)(x)$

حل:
$$(gog)(x)=g(g(x))$$
$$=g(x^3)$$
$$=(x^3)^3$$
$$=x^9$$

(ii) $f(x)=\frac{2}{x}, x\neq 0; g(x)=2x^2-1$

(a) $(fog)(x)$

حل:
$$(fog)(x)=f(g(x))$$
$$=f(2x^2-1)$$
$$=\frac{2}{2x^2-1}$$

(b) $(gof)(x)$

حل:
$$(gof)(x)=g(f(x))$$
$$=g\left(\frac{2}{x}\right)=2\left(\frac{2}{x}\right)^2-1$$
$$=2\left(\frac{4}{x^2}\right)-1$$

www.ilmkidunya.com

$= g(2x-1)$

$= \frac{(2x-1)+1}{2}$

$= \frac{2x-1+1}{2}$

$= \frac{2x}{2} = x$

(c) $(fof)(x)$

حل: $(fof)(x) = f(f(x))$

$= f(2x-1)$

$= 2(2x-1)-1$

$= 4x-2-1$

$= 4x-3$

(d) (gog) (x)

حل: $(gog)(x) = g(g(x))$

$= g\left(\frac{x+1}{2}\right)$

$= \frac{\frac{x+1}{2}+1}{2}$

$= \frac{\frac{x+1+2}{2}}{2}$

$= \frac{\frac{x+3}{2}}{2}$

$= \frac{x+3}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{x+3}{4}$

$= \frac{8}{x^2} - 1 = \frac{8-x^2}{x^2}$

(c) $(fof)(x)$

حل: $(fof)(x) = f(f(x))$

$= f\left(\frac{2}{x}\right)$

$= \frac{2}{\frac{2}{x}} = 2 \times \frac{x}{2}$

$= x$

(d)(gog) (x)

حل: $(gog)(x) = g(g)(x))$

$= g(2x^2-1)$

$= 2(2x^2-1)^2-1$

$= 2(4x^4-4x^2+1)-1$

$= 8x^4-8x^2+2-1$

$= 8x^4-8x^2+1$

(iii) $f(x) = 2x-1$; $g(x) = \frac{x+1}{2}$

(a) $(fog)(x)$

حل: $(fog)(x) = f(g(x))$

$= f\left(\frac{x+1}{2}\right)$

$= 2\left(\frac{x+1}{2}\right)-1$

$= x+1-1$

$= x$

(b) $(gof)(x)$

حل: $(gof)(x) = g(f(x))$

-4 **k** کی قیمت معلوم کیجیے، بشرطیکہ $(fog)(x)=(gof)(x)$، جہاں $f(x)=3x+2$ اور $g(x) = 6x - k$

حل: $(fog)(x) = (gof)(x)$

L.H.S	R.H.S
$(fog)(x)$	$(gof)(x)$
$= f(g(x))$	$= g(f(x))$
$= f(6x-k)$	$= g(3x+2)$
$= 3(6x-k)+2$	$= 6(3x+2)-k$
$= 18x-3k+2$ ___ (i)	$= 18x+12-k$ _ (ii)

www.ilmkidunya.com

(i) اور (ii) سے

$$18x - 3k + 2 = 18x + 12 - k$$
$$18x - 18x - 3k + k = 12 - 2$$
$$-2k = 10$$
$$2k = -10$$
$$k = -\frac{10}{2}$$
$$k = -5$$

-5 اگر $f(x) = 3x + 2$ اور $g(x) = 2x + 3$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(i) $g(f(4))$ (ii) $f(f(3))$ (iii) $f(g(-2))$

(i) $g(f(4))$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 3x + 2$ اور $g(x) = 2x + 3$

$f(4) = 3(4) + 2 = 12 + 2 = 14$

$g(14) = 2(14) + 3 = 28 + 3 = 31$

(ii) $f(f(3))$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 3x + 2$ اور $g(x) = 2x + 3$

$f(3) = 3(3) + 2 = 11$

$f(11) = 3(11) + 2 = 33 + 2 = 35$

(iii) $f(g(-2))$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 3x + 2$ اور $g(x) = 2x + 3$

$g(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$

$f(-1) = 3(-1) + 2 = -3 + 2 = -1$

-6 درج ذیل ہر ایک کا $f^{-1}(x)$ معلوم کیجیے۔

(i) $f(x) = 2x - 3$

حل:

$f(x) = 2x - 3$

$y = 2x - 3$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

یا $2x - 3 = y$

$2x = y + 3$

$x = \frac{y+3}{2}$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2} \quad \therefore y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

(ii) $f(x) = 4x^3 - 1$

حل:

$f(x) = 4x^3 - 1$

$y = 4x^3 - 1$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

یا $4x^3 - 1 = y$

$4x^3 = y + 1$

$x^3 = \frac{y+1}{4}$

$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{\frac{y+1}{4}}$ دونوں طرف کا جذر المکعب لینے سے

$x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{4}}$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y+1}{4}} \quad \therefore y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{4}}$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

(iii) $f(x) = \sqrt{x-1}\ x \geq 1, x \geq 1$

حل:

$f(x) = \sqrt{x-1}$

$y = \sqrt{x-1}$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

یا $\sqrt{x-1} = y$

$(\sqrt{x-1})^2 = y^2$ دونوں طرف کا مربع لینے سے

$x - 1 = y^2$

$x = y^2 + 1$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$f^{-1}(y) = y^2 + 1 \therefore y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$f^{-1}(x) = x^2 + 1$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

(iv) $f(x) = \frac{x+1}{3x-2}, x \neq \frac{2}{3}$

حل:

$f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$

$y = \frac{x+1}{3x-2}$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

www.ilmkidunya.com

(ii) اگر $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$ ہو تو x معلوم کیجیے۔

حل:

$f(x) = 4x+2$

$y = 4x+2$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$4x+2 = y$ یا

$4x = y-2$

$x = \frac{y-2}{4}$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{4}$ $[\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$

$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$ _(i)[y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$g(x) = 6x-18$

$y = 6x-18$

$6x-18 = y$ یا

$6x = y+18$

$x = \frac{y+18}{6}$

$g^{-1}(y) = \frac{y+18}{6}$ $[\because y = g(x) \Rightarrow g^{-1}(y) = x]$

$g^{-1}(x) = \frac{x+18}{6}$ _(ii)[y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

دی گئی شرط کے مطابق

$f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$

$\frac{x-2}{4} = \frac{x+18}{6}$ (i) اور (ii) سے

$6(x-2) = 4(x+18)$

$6x-12 = 4x+72$

$6x-4x = 72+12$

$2x = 84$

$x = \frac{84}{2}$

$x = 42$

-8 تصدیق کیجیے $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

(i) $f(x) = x-6$

حل:

$f(x) = x-6$

$y = x-6$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$y(3x-2) = x+1$

$3xy-2y = x+1$

$3xy-x = 2y+1$

$x(3y-1) = 2y+1$

$x = \frac{2y+1}{3y-1}$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$f^{-1}(y) = \frac{2y+1}{3y-1}$ $\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

-7 f اور g دو تفاعل ہیں جب کہ $f(x) = 4x+2$ اور $g(x) = 6x-18$

(i) $f^{-1}(x)$ اور $g^{-1}(x)$ معلوم کیجیے۔

حل:

$f(x) = 4x+2$

$y = 4x+2$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$4x+2 = y$ یا

$4x = y-2$

$x = \frac{y-2}{4}$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{4}$ $[\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$

$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

اب $g(x) = 6x-18$

$y = 6x-18$ [g(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$6x-18 = y$ یا

$6x = y+18$

$x = \frac{y+18}{6}$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$g^{-1}(y) = \frac{y+18}{6}$ $[\because y = g(x) \Rightarrow g^{-1}(y) = x]$

$g^{-1}(x) = \frac{x+18}{6}$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

www.ilmkidunya.com

$x = 4y + 3$ (x کے لیے حل کرنے سے)

$f^{-1}(y) = 4y + 3$ $[\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$

$f^{-1}(x) = 4x + 3$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$f(f^{-1}(x)) = f(4x + 3)$

$= \frac{4x+3-3}{4} = \frac{4x}{4} = x$ ______ (i)

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x-3}{4}\right)$

$= 4\left(\frac{x-3}{4}\right) + 3$

$= x - x + 3 = x$ ______ (ii)

پس، (i) اور (ii) ثابت ہوا کہ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

(iv) $f(x) = \frac{x-4}{x+2}, x \neq -2$

حل: $f(x) = \frac{x-4}{x+2}$

$y = \frac{x-4}{x+2}$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$y(x+2) = x - 4$

$xy + 2y = x - 4$

$xy - x = -2y - 4$

$x(y-1) = -2y - 4$

$x = \frac{-2y-4}{y-1}$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$f^{-1}(y) = \frac{-2y-4}{y-1}$ $[\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$

$f^{-1}(x) = \frac{-2x-4}{x-1}$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{-2x-4}{x-1}\right) = \frac{\frac{-2x-4}{x-1} - 4}{\frac{-2x-4}{x-1} + 2}$

$= \frac{\frac{-2x-4-4(x-1)}{x-1}}{\frac{-2x-4+2(x-1)}{x-1}}$

$x - 6 = y$ یا

$x = y + 6$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$f^{-1}(y) = y + 6$ $[\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$

$f^{-1}(x) = x + 6$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$f(f^{-1}(x)) = f(x+6) = (x+6) - 6$

$= x + 6 - 6 = x$ (i)

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x-6) = (x-6) + 6$

$= x - 6 + 6 = x$ ______ (ii)

پس، (i) اور (ii) ثابت ہوا کہ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

(ii) $f(x) = 7x - 4$

حل: $f(x) = 7x - 4$

$y = 7x - 4$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$7x - 4 = y$ یا

$7x = y + 4$

$x = \frac{y+4}{7}$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$f^{-1}(y) = \frac{y+4}{7}$ $[\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$

$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{7}$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+4}{7}\right) = 7\left(\frac{x+4}{7}\right) - 4$

$= x + 4 - 4 = x$ ______ (i)

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(7x - 4) = \frac{7x-4+4}{7} = \frac{7x}{7}$

$= x$ ______ (ii)

پس، (i) اور (ii) ثابت ہوا کہ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

(iii) $f(x) = \frac{x-3}{4}$

حل: $f(x) = \frac{x-3}{4}$

$y = \frac{x-3}{4}$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$\frac{x-3}{4} = y$

$x - 3 = 4y$

www.ilmkidunya.com

$$= \frac{\frac{-2x-4-4x+4}{x-1}}{\frac{-2x-4+2x-2}{x-1}} = \frac{\frac{-6x}{x-1}}{\frac{-6}{x-1}}$$

$$= \frac{-6x}{x-1}\times\frac{x-1}{-6} = x \qquad \text{(i)}$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x-4}{x+2}\right) = \frac{-2\left(\frac{x-4}{x+2}\right)-4}{\frac{x-4}{x+2}-1}$$

$$= \frac{\frac{-2(x-4)-4(x+2)}{x+2}}{\frac{x-4-(x+2)}{x+2}} = \frac{\frac{-2x+8-4x-8}{x+2}}{\frac{x-4-x-2}{x+2}}$$

$$= \frac{\frac{-6x}{x+2}}{\frac{-6}{x+2}} = \frac{-6x}{x+2}\times\frac{x+2}{-6}$$

$= x$ (ii)

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

-9 $f^{-1}(x)$ کی ڈومین اور رینج معلوم کیجیے۔

(i) $f(x) = 12x - 3$

حل:

$f(x) = 12x - 3$

$f(x)$ کی ڈومین = تمام حقیقی اعداد

$= (-\infty, \infty)$

$f(x)$ کی رینج = تمام حقیقی اعداد

$= (-\infty, \infty)$

$f^{-1}(x)$ کی ڈومین = تمام حقیقی اعداد

$= (-\infty, \infty)$

$f^{-1}(x)$ کی رینج = تمام حقیقی اعداد

$= (-\infty, \infty)$

(ii) $f(x) = \frac{1}{2}x + 8$

حل:

$f(x) = \frac{1}{2}x + 8$

$f(x)$ کی ڈومین = تمام حقیقی اعداد

$= (-\infty, \infty)$

$f(x)$ کی رینج = تمام حقیقی اعداد

$= (-\infty, \infty)$

$f^{-1}(x)$ کی ڈومین = تمام حقیقی اعداد

$= (-\infty, \infty)$

$f^{-1}(x)$ کی رینج = تمام حقیقی اعداد

$= (-\infty, \infty)$

(iii) $f(x) = \frac{x}{1+x}, x \neq -1$

حل:

$f(x) = \frac{x}{1+x}, x \neq -1$

$f(x)$ کی ڈومین = x صفر نہیں ہوسکتا ہے

$= (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

$f(x)$ کی رینج = x صفر نہیں ہوسکتا ہے

$= (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

$f^{-1}(x)$ کی ڈومین $= (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

$f^{-1}(x)$ کی رینج $= (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

(iv) $f(x) = \sqrt{x-2}, x \geq 2$

حل:

$f(x) = \sqrt{x-2}$

$f(x)$ کی ڈومین $= x \geq 2 = [2, \infty)$

$f(x)$ کی رینج $= [0, \infty)$

$f^{-1}(x)$ کی ڈومین $= [0, \infty)$

$f^{-1}(x)$ کی رینج $= [2, \infty)$

-11 اگر $f(x) = x^2 + 9$ اور $g(x) = x + 21$ ہو تو a کی قیمتیں معلوم کیجیے جب کہ $f(a) = g(a)$

حل:

$f(x) = x^2 + 9 \quad , g(x) = x + 21$

$f(a) = a^2 + 9 \quad , g(a) = a + 21$

$f(a) = g(a)$ (معلوم)

$a^2 + 9 = a + 21$

$a^2 - a + 9 - 21 = 0$

$a^2 - a - 12 = 0$

$a^2 - 4a + 3a - 12 = 0$

$a(a-4) + 3(a-4) = 0$

$(a-4)(a+3) = 0$

$a - 4 = 0 \quad | \quad a + 3 = 0$

$a = 4 \quad | \quad a = -3$

پس، $a = 4, -3$

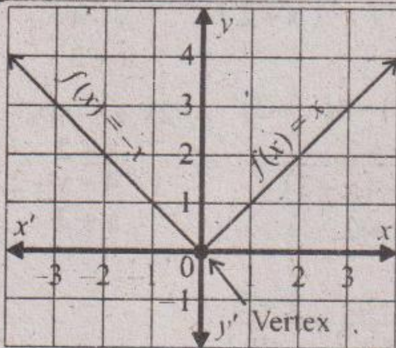
4.2 مطلق قدر والے تفاعل کا گراف (Graphs of Absolute Valued Functions)

ایک مطلق قدر تفاعل ایسا تفاعل ہوتا ہے جس میں الجبری جملے کو مطلق قدر کی لائنوں میں بند کیا جاتا ہے۔ اس کی عمومی شکل $f(x) = |x|$ ہے۔ کسی عدد کی مطلق قدر، عددی خط پر صفر سے اس کا فاصلہ ظاہر کرتی ہے اور یہ ہمیشہ غیر منفی ہوتی ہے۔

تفاعل $f(x) = |x|$ کے گراف کی شکل V جیسی ہے اور یہ y- محور کے لحاظ سے سمیٹرک ہے۔ وہ نقطہ جہاں گراف سمت تبدیل کرتا ہے، راس کہلاتا ہے جو کہ (0,0) ہے۔ ایک مطلق قدر تفاعل کی راسی شکل $f(x) = a|x-h|+k$ ہے جہاں $a \neq 0$ اور (h,k) اس کا راس ہے۔ اس کا گراف $x = h$ کے گرد سمیٹرک ہے۔

یاد رکھیے!
تمام دوسرے مطلق قدر کے تفاعل، اصل تفاعل $f(x)=|x|$ کی مختلف حالتیں ہیں جو تبدیلی کے ساتھ حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



مثال 10: درج ذیل تفاعلوں کے گراف بنائیے۔

(i) $f(x) = |x| + 2$

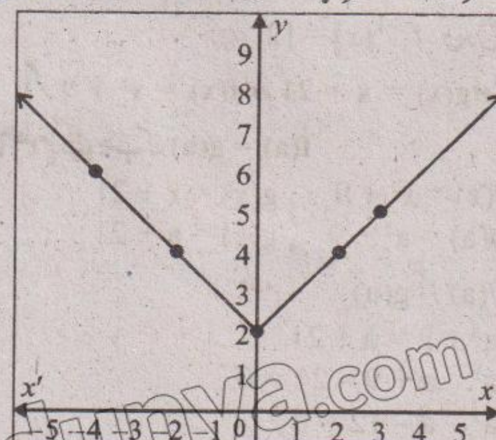
(ii) $g(x) = |x - 3|$

حل: مرحلہ I: قدروں کا جدول بنائیے:

x	−4	−2	0	3	4...
g(x)	6	4	2	5	6...

مرحلہ II: مترتب جوڑوں کو گراف پر ظاہر کیجیے۔

مرحلہ III: مترتب جوڑوں کو ملا کر V شکل کا گراف بنائیے۔

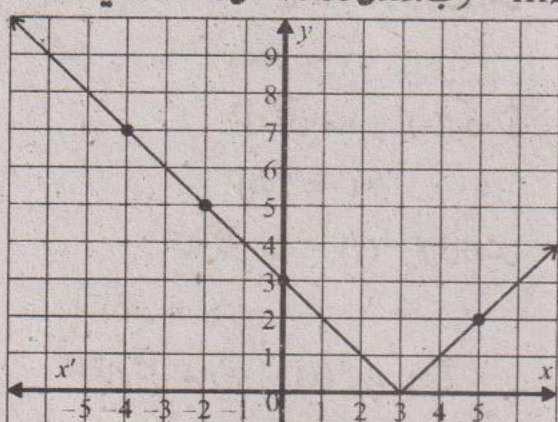


حل: مرحلہ I: قدروں کا جدول بنائیے۔

x	−4	−2	0	3	5...
f(x)	7	5	3	0	2...

مرحلہ II: مترتب جوڑوں کو گراف پر ظاہر کیجیے۔

مرحلہ III: مترتب جوڑوں کو ملا کر V شکل کا گراف بنائیے۔

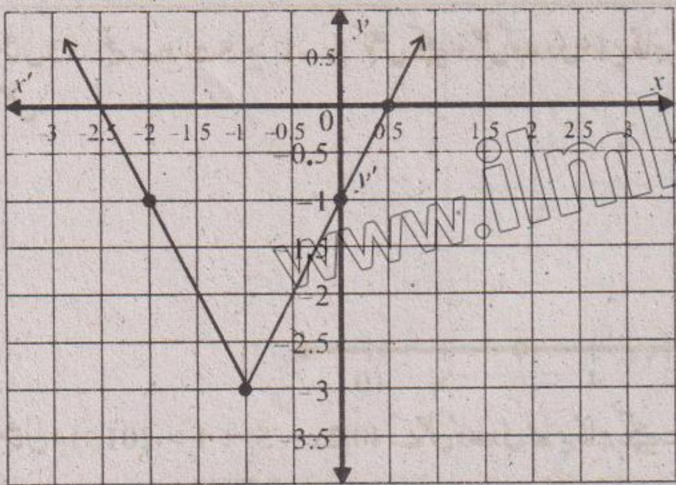


مثال 11: $f(x) = 2|x + 1| - 3$ کا گراف بنائیے۔

حل: $f(x) = 2|x + 1| - 3$

مرحلہ I: قدروں کا جدول بنائیے۔

x	−2	−1	0	0.5
f(x)	−1	−3	−1	0...



مرحلہ II: مترتب جوڑوں کو گراف پر ظاہر کیجیے۔

مرحلہ III: مترتب جوڑوں کو ملا کر تفاعل کا V شکل کا گراف بنائیے۔

نوٹ کریں کہ f کے گراف کا راس $(-1, -3)$ ہے اور گراف خط $x = -1$ کے گرد سمیٹرک ہے۔

4.3 ایک متغیر میں مطلق قدر والی یک درجی مساوات کا حل
(Solution of Absolute Valued Linear Equation in One Variable)

ایک متغیر میں مطلق قدر والی یک درجی مساوات ایسی مساوات ہوتی ہے جس میں مطلق قدر کو کسی یک درجی جملے پر لاگو کیا جاتا ہے۔

مثال 12: $2|x-3| = 16$ **کو حل کیجیے اور عددی خط پر حل کو ظاہر کیجیے۔**

حل:

$2|x-3| = 16$

$|x-3| = 8$

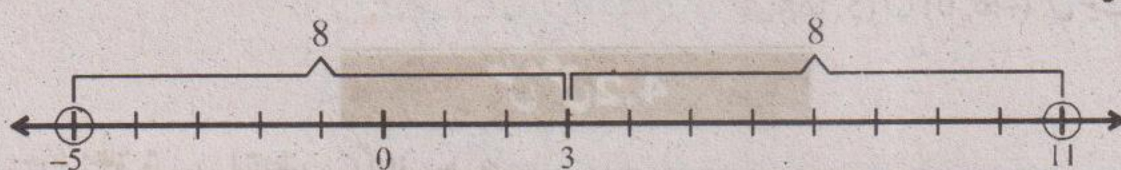
$\pm(x-3) = 8$ یا $x - 3 = \pm 8$

$x - 3 = 8$ یا $x - 3 = -8$ اب

$x = 11$ یا $x = -5$

سیٹ حل $= \{11, -5\}$

عددی خط



4.4 ایک متغیر میں مطلق قدر والی یک درجی غیر مساوات کا حل
(Solution of Absolute Valued Linear Inequality in One Variable)

ایک متغیر میں مطلق والی یک درجی غیر مساوات ایسی غیر مساوات ہوتی ہے جس میں صرف ایک متغیر کے ساتھ یک درجی جملے کی مطلق قدر شامل ہوتی ہے۔

اس کی شکلیں یہ ہو سکتی ہیں: $|ax + b| < 0,\ |ax + b| > 0,\ |ax + b| \geq 0,\ |ax + b| \leq 0$

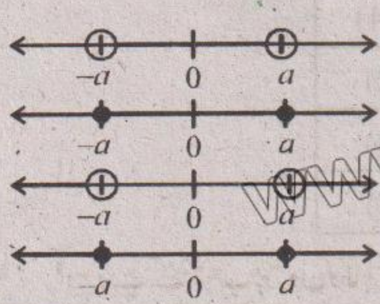
نوٹ:

(i) $-a < x < a$ برابر ہے $(-a, a)$ کے

(ii) $-a \leq x \leq a$ برابر ہے $[-a, a]$ کے

(iii) $x < -a$ یا $x > a$ برابر ہے $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ کے

(iv) $x \leq -a$ یا $x \geq a$ برابر ہے $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

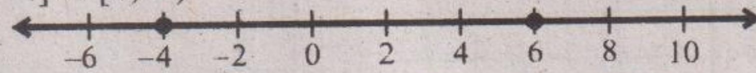


مثال 13: غیر مساوات $|x-1| \geq 5$ کو حل کیجیے اور حل کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

حل:

$$|x-1| \geq 5$$
$$\pm(x-1) \geq 5$$
$$-(x-1) \geq 5 \quad \text{یا} \quad x-1 \geq 5$$
$$x-1 \leq -5 \quad \text{یا} \quad x-1 \geq 5$$
$$x \leq -4 \quad \text{یا} \quad x \geq 6$$

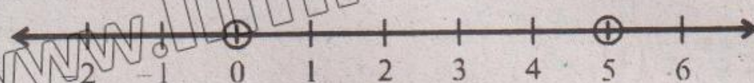
حل سیٹ ہے $(-\infty, -4] \cup [6, \infty)$



مثال 14: $40|2x-5| + 1 > 201$ کے حل کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

حل: سب سے پہلے مطلق قدر والے جملے کو غیر مساوات کے ایک طرف کیجیے۔

$$40|2x-5| + 1 > 201$$
$$40|2x-5| > 200$$
$$\frac{40|2x-5|}{40} > \frac{200}{40} \quad \text{(دونوں اطراف 40 سے تقسیم کرنے سے)}$$
$$|2x-5| > 5$$
$$\pm(2x-5) > 5$$
$$-(2x-5) > 5 \quad \text{یا} \quad 2x-5 > 5$$
$$2x-5 < -5 \quad \text{یا} \quad 2x > 10$$
$$x < 0 \quad \text{یا} \quad x > 5$$



پس، $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$ حل سیٹ ہے۔

حل مشق 4.2

-1 درج ذیل مطلق قدر والے تفاعلوں کے گراف بنایئے۔

(i) $f(x) = |x-2|$

حل:

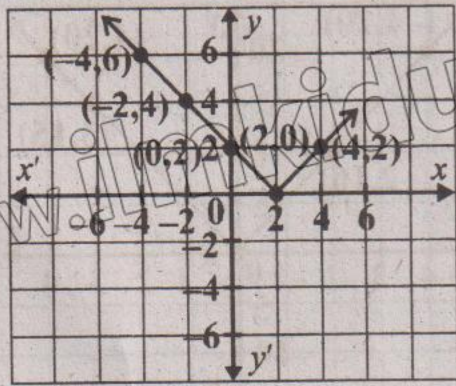
$$f(x) = |x-2|$$

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = \|x-2\|$	$(x, f(x))$
–4	$f(x) = \|-4-2\| = \|-6\| = 6$	(–4, 6)
–2	$f(x) = \|-2-2\| = \|-4\| = 4$	(–2, 4)
0	$f(x) = \|0-2\| = \|-2\| = 2$	(0, 2)
2	$f(x) = \|2-2\| = \|0\| = 0$	(2, 0)
4	$f(x) = \|4-2\| = \|2\| = 2$	(4, 2)

اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف کو بنائیں۔

www.ilmkidunya.com



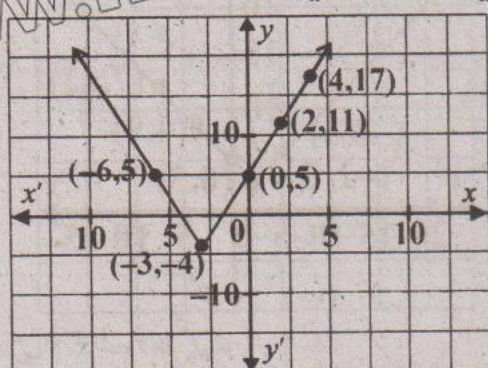
(ii) $f(x) = 3|x + 3| - 4$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 3|x+3|-4$

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = 3\|x + 3\| - 4$	$(x, f(x))$
-6	$f(x) = 3\|-6 + 3\| - 4 = 3\|-3\| - 4 = 3(3) - 4 = 5$	$(-6, 5)$
-3	$f(x) = 3\|-3 + 3\| - 4 = 3\|0\| - 4 = 3(0) - 4 = -4$	$(-3, -4)$
0	$f(x) = 3\|0 + 3\| - 4 = 3(3) - 4 = 9 - 4 = 5$	$(0, 5)$
2	$f(x) = 3\|2 + 3\| - 4 = 3\|5\| - 4 = 3(5) - 4 = 11$	$(2, 11)$
4	$f(x) = 3\|4 + 3\| - 4 = 3\|7\| - 4 = 3(7) - 4 = 17$	$(4, 17)$

اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف کو بنائیں۔



(iii) $f(x) = 5|x|$

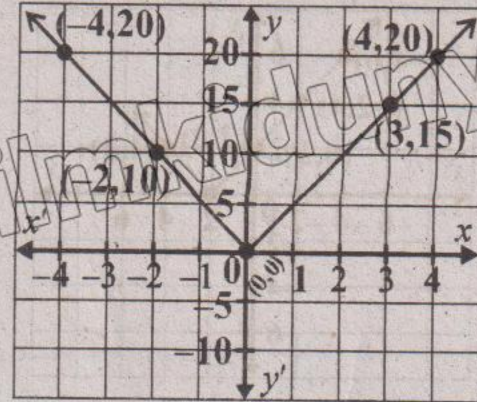
حل: دیا گیا ہے $f(x) = 5|x|$

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = 5\|x\|$	$(x, f(x))$
-4	$f(x) = 5\|-4\| = 5(4) = 20$	$(-4, 20)$
-2	$f(x) = 5\|-2\| = 5(2) = 10$	$(-2, 10)$
0	$f(x) = 5\|0\| = 5(0) = 0$	$(0, 0)$
3	$f(x) = 5\|3\| = 5(3) = 15$	$(3, 15)$
4	$f(x) = 5\|4\| = 5(4) = 20$	$(4, 20)$

اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف کو بنائیں۔

www.ilmkidunya.com

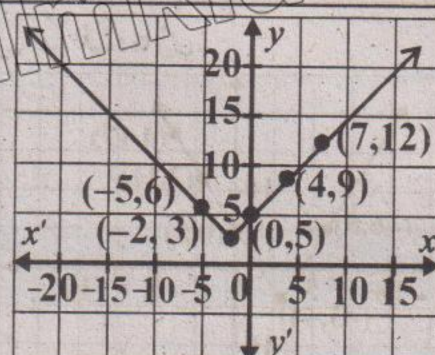


(iv) $f(x) = |x + 2| + 3$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = |x + 2| + 3$

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = \|x + 2\| + 3$	$(x, f(x))$
7	$f(x) = \|7 + 2\| + 3 = \|9\| + 3 = 9 + 3 = 12$	(7, 12)
4	$f(x) = \|4 + 2\| + 3 = \|6\| + 3 = 6 + 3 = 9$	(4, 9)
0	$f(x) = \|0 + 2\| + 3 = \|2\| + 3 = 2 + 3 = 5$	(0, 5)
–2	$f(x) = \|-2 + 2\| + 3 = \|0\| + 3 = 0 + 3 = 3$	(–2, 3)
–5	$f(x) = \|-5 + 2\| + 3 = \|-3\| + 3 = 3 + 3 = 6$	(–5, 6)



اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف کو بنائیں۔

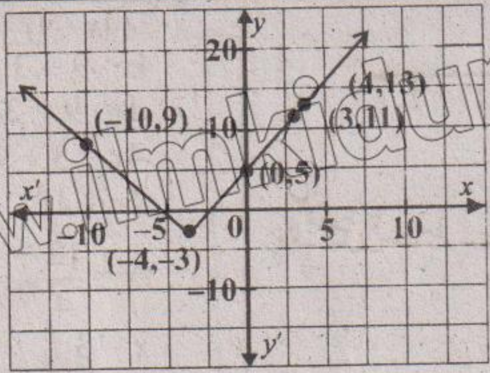
(v) $f(x) = 2|x + 4| - 3$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 2|x + 4| - 3$

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = 2\ \|x + 4\| - 3$	$(x, f(x))$
–10	$f(x) = 2\ \|-10 + 4\| - 3 = 2\ \|-6\| - 3 = 2(6) - 3 = 9$	(–10, 9)
–4	$f(x) = 2\ \|-4 + 4\| - 3 = 2\ \|0\| - 3 = 2(0) - 3 = -3$	(–4, –3)
0	$f(x) = 3\|3 + 4\| - 3 = 2\ \|4\| - 3 = 2(4) - 3 = 5$	(0, 5)
3	$f(x) = 2\ \|3 + 4\| - 3 = 2\ \|7\| - 3 = 2(7) - 3 = 11$	(3, 11)
4	$f(x) = 2\ \|4 + 4\| - 3 = 2\ \|8\| - 3 = 2(8) - 3 = 13$	(4, 13)

اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف کو بنائیں۔



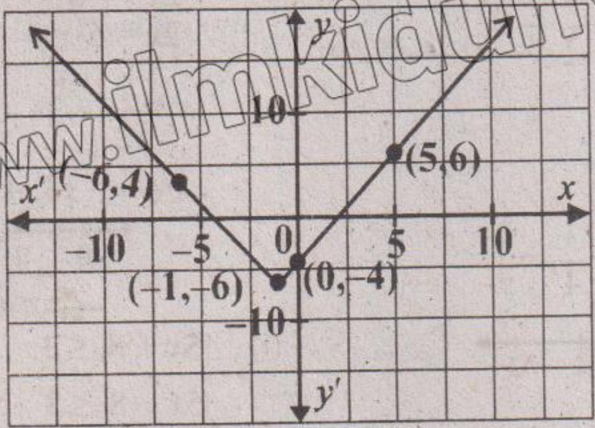
(vi) $f(x) = 2|x + 1| - 6$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 2|x + 1| - 6$

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = 2\|x+1\| - 6$	$(x, f(x))$
-6	$f(x) = 2\|-6 + 1\| - 6 = 2\|-5\| - 6 = 2(5) - 6 = 4$	$(-6, 4)$
-1	$f(x) = 2\|-1 + 1\| - 6 = 2\|-0\| - 6 = 2(0) - 6 = -6$	$(-1, -6)$
0	$f(x) = 2\|0 + 1\| - 6 = 2\|1\| - 6 = 2(1) - 6 = -4$	$(0, -4)$
5	$f(x) = 2\|5 + 1\| - 6 = 2\|6\| - 6 = 6$	$(5, 6)$

اوپر دیے گئے مرتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف کو بنائیں۔



2۔ حل کیجیے اور حل کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

(i) $|x - 2| = 6$

حل:

$|x - 2| = 6$

$x - 2 = \pm 6$

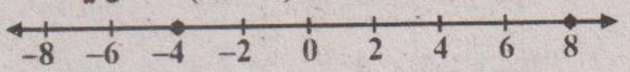
$x - 2 = 6$ یا $x - 2 = -6$

$x - 2 = 6$ یا $x - 2 = -6$

$x = 6 + 2$ یا $x = -6 + 2$

$x = 8$ یا $x = -4$

حل سیٹ $= \{8, -4\}$



(ii) $|2x + 1| = 7$

حل:

$|2x + 1| = 7$

$2x + 1 = \pm 7$

$2x + 1 = 7$ یا $2x + 1 = -7$

$2x = 7 - 1$ یا $2x + 1 = -7$

$2x = 6$ یا $2x = -7 - 1$

یا $2x = -8$

$x = \dfrac{6}{2}$ یا $x = \dfrac{-8}{2}$

$x = 3$ یا $x = -4$

حل سیٹ $= \{3, -4\}$

(iii) $|4x - 9| = 3$

حل:

$|4x - 9| = 3$

www.ilmkidunya.com

$\pm(4x - 9) = 3$

$4x - 9 = 3$ یا $-(4x - 9) = 3$

$4x - 9 = 3$ یا $4x - 9 = -3$

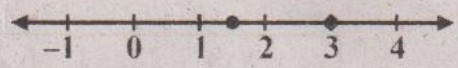
$4x = 3 + 9$ یا $4x = -3 + 9$

$4x = 12$ یا $4x = 6$

$x = \frac{12}{4}$ یا $x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$x = 3$

حل سیٹ $= \left\{3, \frac{3}{2}\right\}$



(iv) $|7 - 2x| = 1$

حل:

$|7 - 2x| = 1$

$\pm(7 - 2x) = 1$

$7 - 2x = 1$ یا $-(7 - 2x) = 1$

$7 - 2x = 1$ یا $7 - 2x = -1$

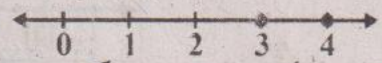
$-2x = 1 - 7$ یا $-2x = -1 - 7$

$-2x = -6$ یا $-2x = -8$

$2x = 6$ یا $2x = 8$

$x = \frac{6}{2} = 3$ یا $x = \frac{8}{2} = 4$

حل سیٹ $= \{3, 4\}$



3۔ حل کیجیے اور حل کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

(i) $|5x + 8| \le 3$

حل:

$|5x + 8| \le 3$

$\pm(5x + 8) \le 3$

$5x + 8 \le 3$ یا $-(5x + 8) \le 3$

$5x + 8 \le 3$ یا $5x + 8 \ge -3$

$5x \le 3 - 8$ یا $5x \ge -3 - 8$

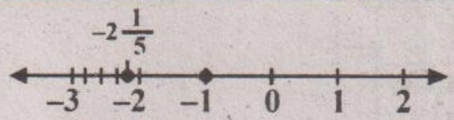
$5x \le -5$ یا $5x \ge -11$

$x \le -\frac{5}{5}$ یا $x \ge -\frac{11}{5}$

$x \le -1$ یا $x \ge -2\frac{1}{5}$

$-2\frac{1}{5} \le x \le -1$

پس، حل سیٹ $= [-2\frac{1}{5}, -1]$



(ii) $|4x - 12| \le 0$

حل:

$|4x - 12| \le 0$

چونکہ مطلق قیمت صفر سے کم نہیں ہو سکتی، اس لیے واحد امکان یہ ہے:

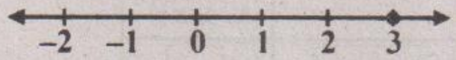
$|4x - 12| = 0$

$4x - 12 = 0$

$4x = 12$

$x = \frac{12}{4}$

$x = 3$



(iii) $|3 - 4x| > 0$

حل:

$|3 - 4x| > 0$

ایک مطلق قیمت ہمیشہ مثبت یا صفر ہوتی ہے۔ واحد قدر جو کام نہیں کرتی جب اندرون صفر کے برابر ہو۔

$3 - 4x \ne 0$

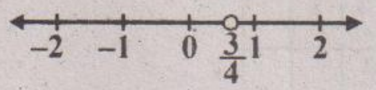
$3 - 3 - 4x \ne 0 - 3$

(دونوں اطراف کو 3 سے تفریق کرنے سے)

$4x \ne 3$

$x \ne \frac{3}{4}$

حل سیٹ $= \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$



(iv) $1 - 2\left|\frac{3}{2}x - 5\right| > -3$

حل:

$1 - 2\left|\frac{3}{2}x - 5\right| > -3$

$1 - 1 - 2\left|\frac{3}{2}x - 5\right| > -3 - 1$

(دونوں اطراف کو 1 سے تفریق کرنے سے)

$-2\left|\frac{3}{2}x - 5\right| > -4$

$2\left|\frac{3}{2}x - 5\right| < 4$

(دونوں اطراف کو 1− سے ضرب دینے اور علامت $<$ کو $>$ میں بدلنے سے)

$\frac{2}{2}\left|\frac{3}{2}x-5\right| < \frac{4}{2}$ (دونوں اطراف کو 2 سے تقسیم کرنے سے)

$\left|\frac{3}{2}x-5\right| < 2$

$\pm\left(\frac{3}{2}x-5\right) < 2$

$\frac{3}{2}x-5<2$ یا $-\left(\frac{3}{2}x-5\right)<2$

$\frac{3}{2}x-5<2$ یا $\frac{3}{2}x-5>-2$

$\frac{3}{2}x<2+5$ یا $\frac{3}{2}x>-2+5$

$\frac{3}{2}x<7$ یا $\frac{3}{2}x>3$

$x<7\times\frac{2}{3}$ یا $x>3\times\frac{2}{3}$

$x<\frac{14}{3}$ یا $x>2$

$x<4\frac{2}{3}$

لہٰذا $2<x<\frac{14}{3}$

پس، حل سیٹ $=\left(2, 4\frac{2}{3}\right)$

(v) $|3x-2| \le 12$

حل:

$|3x-2| \le 12$

$\pm(3x-2) \le 12$

$3x-2 \le 12$ یا $-(3x-2) \le 12$

$3x-2 \le 12$ یا $3x-12 \ge -12$

$3x \le 12+2$ یا $3x \ge -12+2$

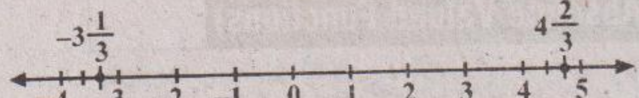
$3x \le 14$ یا $3x \ge -10$

$x \le \frac{14}{3}$ یا $x \ge -\frac{10}{3}$

$x \le 4\frac{2}{3}$ یا $x \ge -3\frac{1}{3}$

لہٰذا، $-3\frac{1}{3} \le x \le 4\frac{2}{3}$

پس، حل سیٹ $=\left[-3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$



(vi) $|1-2x|>5$

حل:

$|1-2x|>5$

$\pm(1-2x)>5$

$1-2x)>5$ یا $-(1-2x)>5$

$1-2x>5$ یا $-1+2x>5$

$-2x>5-1$ یا $-2x<-5-1$

$-2x>4$ یا $-2x<-6$

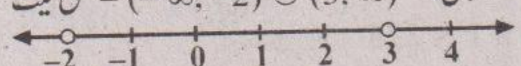
$2x<-4$ یا $2x>6$

$x<\frac{-4}{2}$ یا $x>\frac{6}{2}$

$x<-2$ یا $x>3$

$x<-2$ یا $x>3$

پس، حل سیٹ $=(-\infty,-2)\cup(3,\infty)$



4.5 تفاعل پر مشتمل حقیقی زندگی کے مسائل حل کرنا (Solving Real-Life Problems Involving Function)

تفاعل کا استعمال حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کرنے اور ماڈل بنانے کے لیے بڑے پیمانے پر کیا جاتا ہے جیسے کہ مالیات، نقل وحمل اور فروخت کے شعبوں میں۔ مالیات میں تفاعل آمدنی، اخراجات، سود یا وقت کے ساتھ منافع کو ظاہر کرتے ہیں۔ نقل وحمل میں تفاعل فاصلے، رفتار اور وقت کے درمیان تعلق کو بیان کر سکتے ہیں۔ جس سے سفر کے اوقات یا ایندھن کے استعمال کا حساب لگانے میں مدد ملتی ہے۔ کاروبار میں تفاعل فروخت شدہ اشیاء کی تعداد کی بنیاد پر آمدنی، لاگت اور منافع کے ماڈل بنانے کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ ان مسائل کو حل کرنے میں متعلقہ متغیرات کی شناخت کرنا، ان کے تعلق کو ایک تفاعل یا مساوات کے طور پر ظاہر کرنا اور نامعلوم قدروں کو معلوم کرنا، فیصلے کرنا یا نتائج کی پیش گوئی کرنے کے لیے الجبری طریقے استعمال کرنا شامل ہے۔

www.ilmkidunya.com

مثال 15: فرض کیا $E(n) = 1,500n$ کل آمدنی (روپوں میں) کا تفاعل ہے، جہاں n دنوں کی تعداد ہے۔ اگر ایک مزدور 10 دن کام کرتا ہے تو اس کی آمدنی معلوم کیجیے۔

حل:

$$E(n) = 1,500n$$
$$E(10) = 15000 \times 10$$

اگر مزدور 10 دن کام کرتا ہے تو اس کی آمدنی ہوگی:

$$= \text{Rs. } 15,000$$ روپے

مثال 16: فرض کیا $f(x) = 200 + 15x$ ٹیکسی کے کرائے (روپوں میں) کا تفاعل ہے جہاں x کلومیٹر کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ 50 کلومیٹر کے فاصلے کے لیے مطلوبہ کرایہ معلوم کیجیے۔

حل:

$$f(x) = 200 + 15x$$

مطلوبہ کرایہ $= f(50) = 200 + 15 \times 50$

$$= 200 + 750 = \text{Rs. } 950$$ روپے

4.6 مطلق قدر والے تفاعل پر مشتمل حقیقی زندگی کے مسائل حل کرنا
(Solving Real-Life Problems Involving Absolute Valued Functions)

مطلق قدر والے تفاعل سے متعلقہ حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کرنے کے لیے ضروری ہے جہاں فاصلہ، وسعت یا اتار چڑھاؤ شامل ہوں چاہے سمت کوئی بھی ہو۔ توانائی کی لہروں، جیسے آواز یا زلزلے کی لہروں کے تجزیہ میں مطلق قدر تفاعل لہر کی وسعت یا شدت کے ماڈل بناتے ہیں۔ طبعیات اور انجینیئرنگ میں، وسعت کو اکثر قوت، چارج یا ویکٹر کی مقدار کو بیان کرنے کے لیے مطلق قدروں کا استعمال کرتے ہوئے ظاہر کیا جاتا ہے جو سمت سے آزاد ہوتا ہے۔ فاصلہ سے متعلقہ مسائل میں، کسی حوالہ نقطہ سے کسی چیز کے محل وقوع کی طرح، مطلق قدر تفاعل یہ پیمائش کرتے ہیں کہ ایک مقدار دوسری مقدار سے کتنی دور ہے، اس بات کو یقینی بناتے ہوئے کہ قدر ہمیشہ غیر منفی رہے۔ یہ تفاعل متماثل یا دو طرفہ تبدیلی کے ساتھ حالات کو بیان کرنے میں مدد کرتے ہیں۔

مثال 17: ایک حساس برقی آلہ 220V پر کام کرتا ہے لیکن 5V تک اتار چڑھاؤ کو برداشت کرتا ہے۔ یہ حالت $|V - 220| \le 5$ کے ذریعے ماڈل کی گئی ہے قابلِ قبول وولٹیج کی حد کیا ہے؟

حل:

$$|V - 220| \le 5$$
$$-5 \le V - 220 \le 5$$
$$-5 + 220 \le V \le 5 + 220 \quad \text{یا} \quad 215 \le V \le 225$$

لہٰذا، قابلِ قبول وولٹیج 215V اور 225V کے درمیان ہے۔

مثال 18: ایک زلزلہ سینسر اس وقت انتباہ جاری کرتا ہے جب ریکارڈ شدہ شدت محفوظ سطح 4.5 سے 1.2 یونٹس کے فرق کے ساتھ ہو۔ حالت کو $|M - 4.5| > 1.2$ کے ذریعے ماڈل کیا گیا ہے۔ شدت M کی کن قیمتوں کے لیے سینسر انتباہ جاری کرے گا۔

حل:

$$|M - 4.5| > 1.2$$
$$\pm(M - 4.5) > 1.2$$
$$-(M - 4.5) > 1.2 \quad \text{یا} \quad M - 4.5 > 1.2$$
$$M - 4.5 < -1.2 \quad \text{یا} \quad M - 4.5 > 1.2$$
$$M < 3.3 \quad \text{یا} \quad M > 5.7$$

جب $M < 3.3$ یا $M > 5.7$ ہو تو سینسر انتباہ جاری کرے گا۔

www.ilmkidunya.com

حل مشق 4.3

1- ایک تفاعل $B(t) = 5,000 + 200t$ جو t مہینوں کے بعد کل بیلنس (روپوں میں) ظاہر کرتا ہے۔ 6 مہینوں کے بعد بیلنس کتنا ہوگا؟

حل: دیا گیا تفاعل ہے

$$B(t) = 5,000 + 200t$$

تفاعل میں t = 6 درج کرنے سے

$$B(6) = 5,000 + 200(6)$$
$$B(6) = 5,000 + 1200$$
$$B(6) = 6,200$$

لہٰذا، بیلنس = 6,200 روپے

2- ایک تفاعل $f(k) = 150 + 20k$، جو k کلومیٹر کی مسافت کے لیے کل کرائے (روپوں میں) کو ظاہر کرتا ہے۔ 12 کلومیٹر کی سواری کے لیے کتنا کرایہ ہوگا؟

حل: دیا گیا تفاعل ہے

$$f(k) = 150 + 20k$$

تفاعل میں k = 50 درج کرنے سے

$$f(12) = 150 + 20(12)$$
$$f(12) = 150 + 240$$
$$f(12) = 390$$

پس، 12 کلومیٹر کی سواری کے لیے کرایہ 390 روپے ہوگا۔

3- فینسی صوفہ سیٹ بنانے کی مقررہ لاگت 5500 روپے ہے، جسے $f(n) = 5500n$ کے طور پر ماڈل کیا گیا ہے، جہاں n صوفہ سیٹوں کی تعداد ہے۔ 50 صوفہ سیٹوں کی لاگت معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا تفاعل ہے

$$f(n) = 5500n$$

تفاعل میں n = 50 درج کرنے سے

$$f(50) = 5500(50)$$
$$f(50) = 275,000$$

پس، 50 صوفہ سیٹوں کی کل قیمت 275,000 روپے ہے۔

4- ایک تفاعل $T(d) = \frac{d}{60}$، d کلومیٹر کا فاصلہ T گھنٹوں میں طے کرنے کو ظاہر کرتا ہے۔ 180 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں کتنا وقت لگے گا؟

حل: (دیا گیا تفاعل ہے)

$$T(d) = \frac{d}{60}$$

تفاعل میں d = 180 درج کرنے سے

$$T(180) = \frac{180}{60}$$
$$T(180) = 3$$

پس، 180 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں 3 گھنٹے لگیں گے۔

www.ilmkidunya.com

5- ایک کمپنی انکوڈنگ کے کام کے لیے 100 روپے وصول کرتی ہے اس کے علاوہ کمپنی چھاپے گئے ہر صفحے کے 5 روپے وصول کرتی ہے۔ تفاعل کا ماڈل $f(x) = 100 + 5x$ ہے، جہاں x چھاپے گئے صفحات کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ کمپنی 55 صفحات کی انکوڈنگ اور پرنٹنگ کے کام کے لیے کتنا معاوضہ وصول کرے گی؟

حل: دیا گیا تفاعل ہے
$f(x) = 100 + 5x$

تفاعل میں 55 x درج کرنے سے

$f(55) = 100 + 5(55)$
$f(55) = 100 + 275$
$f(55) = 375$
کل وصولی = Rs. 375 روپے

پس، کمپنی 55 صفحات کی انکوڈنگ اور پرنٹنگ کے کام کے لیے، 375 روپے وصول کرے گی۔

6- ایک کیمیائی تعامل 37°C پر مستحکم ہو جاتا ہے۔ یہ عمل اس وقت ضرور رکنا چاہیے جب درجہ حرارت میں انحراف 2.5°C سے زیادہ ہو جائے۔ اس حالت کو $|T - 37°| > 2.5°$ کے طور پر ماڈل کیا گیا ہے، جہاں T درجہ حرارت ہے۔ درجہ حرارت کی کن قیمتوں کے لیے عمل کو روک دینا چاہیے؟

حل:
$|T - 37°| > 2.5°$
$T - 37 > \pm 2.5°$
$T - 37 > 2.5$ یا $T - 37 < -2.5$
$T > 2.5 + 37$ یا $T < -2.5 + 37$
$T > 39.5$ یا $T < 34.5$

اگر درجہ حرارت 39.5°c سے اوپر یا 34.5°c سے نیچے ہو تو عمل روک دینا چاہیے۔ یعنی

$T < 34.5°C$ یا $T > 39.5°C$

7- ایک فیکٹری دھاتی سلاخیں تیاری کرتی ہے جن کی لمبائی 2.5 میٹر ہونی چاہیے جس میں 0.04± میٹر کا فرق قابل برداشت ہے۔ اس حالت کو مطلق قدر والی غیر مساوات $|x - 2.5| \leq 0.04$ سے ماڈل کیا گیا ہے۔ قابلِ قبول لمبائیوں کی سعت کیا ہے؟

حل:
$|x - 2.5| \leq 0.04$
$x - 2.5 \leq \pm 0.04$
$x - 2.5 \leq 0.04$ یا $x - 2.5 \geq -0.04$
$x \leq 0.04 + 2.5$ یا $x \geq -0.04 + 2.5$
$x \leq 2.54$ یا $x \geq 2.46$
$2.46\text{ m} \leq x \leq 2.54\text{m}$

8- ایک مشین کے پرزے کو اس طرح سیدھ میں کیا جانا چاہیے کہ اس کا مرکز بالکل 0 پر ہو۔ اگر یہ 0.1 ملی میٹر سے زیادہ اپنے مرکز سے ہٹ جائے تو پرزے کو مسترد کر دیا جاتا ہے۔ اس حالت کو $|x| > 0.1$ کے ذریعے ماڈل کیا گیا ہے۔ مرکز کی کون سی حالتیں مسترد ہونے کا سبب بنتی ہیں؟

حل:
$|x| > 0.1$
$x > \pm 0.1$
$x > 0.1$ یا $x < -0.1$

لہٰذا، کسی بھی مقام کے لیے جو 0.1 ملی میٹر سے زیادہ یا 0.1- ملی میٹر سے کم ہو، مسترد کر دیا جاتا ہے۔ یعنی

$x > 0.1\text{mm}$ یا $x < \; 0.1\text{mm}$

حل اعادہ مشق 4

1۔ درج ذیل سوالات کے دیے گئے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) اگر $f(x) = \frac{5x-6}{3}$ ہو تو $f(3)$ کی قیمت کیا ہے؟

(a) -1 (b) 3 (c) 9 (d) 15

(ii) X سے Y تفاعل f کو ________ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(a) $f: XY$ (b) $f: Y \to X$ (c) $f: X \to Y$ (d) $f: \frac{X}{Y}$

(iii) $(fog)(x)$ برابر ہے:

(a) $(f+g)(x)$ (b) $(f-g)(x)$ (c) $f(g(x))$ (d) $f(x) \div g(x)$

(iv) اگر $f(x) = 2x + 3$ اور $g(x) = x + 1$ ہوں تو $f(x) + g(x)$ برابر ہے:

(a) $3x$ (b) $3x + 4$ (c) 4 (d) $2x^2 + 3$

(v) اگر $f(x) = 5x + 2$ اور $h(x) = 2x - 2$ ہوں تو $f(x) - h(x)$ برابر ہے:

(a) $3x$ (b) $5x^2 - 4$ (c) $3x + 4$ (d) $-3x - 4$

(vi) اگر $f(x) = 3x + 1$ اور $g(x) = 2x$ ہوں تو $f(x) \times g(x)$ برابر ہے:

(a) $6x + 2x$ (b) $5x^2 + 1$ (c) $x + 1$ (d) $6x^2 + 2x$

(vii) اگر $f(x) = x^2 - 4$, $x \neq -2$ اور $g(x) = x + 2$ ہوں تو $\frac{f(x)}{g(x)}$ برابر ہے:

(a) $\frac{1}{x-2}$ (b) $\frac{1}{x+2}$ (c) $x + 2$ (d) $x - 2$

(viii) مطلق قدر والے تفاعل کے گراف کی شکل کیا ہوتی ہے؟

(a) U شکل (b) V شکل (c) L شکل (d) M شکل

(ix) اگر گراف تفاعل کو ظاہر کرے تو ہر عمودی خط کو تفاعل کو ________ پر قطع کرنا چاہیے۔

(a) 4 نقاط (b) 3 نقاط (c) 2 نقاط (d) 1 نقطہ

(x) اگر $f(x) = x^3$ ہوں تو $f(-2)$ برابر ہے:

(a) -8 (b) 8 (c) 4 (d) -6

جوابات

(i) 3	(ii) $f: X \to Y$	(iii) $f(g(x))$	(iv) $3x + 4$	(v) $3x + 4$
(vi) $6x^2 + 2x$	(vii) $x - 2$	(viii) V شکل	(ix) 1 نقطہ	(x) -8

2۔ اگر $f(x) = 25 - x^2$ اور $g(x) = 5 + x$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(i) $f(x) + g(x)$

حل: دیا گیا ہے $g(x) = 5 + x$ اور $f(x) = 25 - x^2$

$f(x) + g(x)$ (معلوم)

$= (25 - x^2) + (5 + x)$

$= 25 - x^2 + 5 + x$

$= -x^2 + x + 25 + 5$

$= -x^2 + x + 30$

(ii) $f(x) - g(x)$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 25 - x^2$ اور $g(x) = 5 + x$

$f(x) - g(x)$
$= (25 - x^2) - (5 + x)$
$= 25 - x^2 - 5 - x$
$= -x^2 - x + 25 - 5$
$= -x^2 - x + 20$

(iii) $f(x)\,g(x)$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 25 - x^2$ اور $g(x) = 5 + x$

$f(x)\,g(x)$
$= (25 - x^2)(5 + x)$
$= 25(5 + x) - x^2(5 + x)$
$= 125 + 25x - 5x^2 - x^3$
$= -x^3 - 5x^2 + 25x + 125$

(iv) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 25 - x^2$ اور $g(x) = 5 + x$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$= \dfrac{25 - x^2}{(5+x)} = \dfrac{(5)^2 - (x)^2}{(5+x)}$

$= \dfrac{(5+x)(5-x)}{(5+x)}$

$= 5 - x$

(v) $f(7)$

حل:

$f(x) = 25 - x^2$
$f(7) = 25 - (7)^2$
$= 25 - 49$
$= -24$

(vi) $g(-8)$

حل:

$g(x) = 5 + x$
$g(-8) = 5 + (-8)$
$= 5 - 8 = -3$

3۔ اگر $f(x) = x^3$ اور $g(x) = 14 + 2x$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(i) $(fog)(x)$

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x) = x^3$ اور $g(x) = 14 + 2x$

$(fog)(x) = f(g(x))$
$= f(14 + 2x)$
$= (14 + 2x)^3$

(ii) $(gof)(x)$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = x^3$ اور $g(x) = 14 + 2x$

$(gof)(x) = g(f(x))$
$= g(x^3)$
$= 14 + 2x^3 = 2(7 + x^3)$

(iii) $f(fof)(x)$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = x^3$ اور $g(x) = 14 + 2x$

$f(fof)(x) = f(f(x))$
$= f(x^3)$
$= (x^3)^3$
$= x^9$

(iv) $(gog)(x)$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = x^3$ اور $g(x) = 14 + 2x$

$(gog)(x) = g(g(x))$
$= g(14 + 2x) = 14 + 2(14 + 2x)$
$= 14 + 28 + 4x = 42 + 4x$
$= 2(21 + 2x) = 2(2x + 21)$

4- $f^{-1}(x)$ معلوم کیجیے اگر

(i) $f(x) = 9x - 1$

حل:

$f(x) = 9x - 1$
$y = 9x - 1$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]
یا $9x - 1 = y$
$9x = y + 1$

$x = \dfrac{y+1}{9}$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{9}$ $\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{9}$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

(ii) $f(x) = \dfrac{5}{x-1}, x \neq 1$

حل: یہاں

$f(x) = \dfrac{5}{x-1}, x \neq 1$

$y = \dfrac{5}{x-1}$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$y(x - 1) = 5$

$(x - 1) = \dfrac{5}{y}$

www.ilmkidunya.com

$$x = \frac{5}{y} + 1$$

$$x = \frac{5+y}{y}$$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$$f^{-1}(y) = \frac{5+y}{y} \quad \therefore y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5+x}{x}$$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

(iii) $f(x) = \sqrt{x-5}$, $x \geq 5$

حل: $f(x) = \sqrt{x-5}$

$y = \sqrt{x-5}$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$y = \sqrt{x-5}$

$\left(\sqrt{x-5}\right)^2 = y^2$ دونوں اطراف کا مربع لینے سے

$x - 5 = y^2$

$x = y^2 + 5$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$f^{-1}(y) = y^2 + 5$ [$\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$]

$f^{-1}(x) = x^2 + 5$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

(iv) $f(x) = \frac{3-x}{2}$

حل: $f(x) = \frac{3-x}{2}$

$y = \frac{3-x}{2}$ [f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

یا $\frac{3-x}{2} = y$

$3 - x = 2y$

$-x = 2y - 3$

$x = -2y + 3$ [x کے لیے حل کرنے سے]

$f^{-1}(y) = -2y + 3$ [$\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$]

$f^{-1}(x) = -2x + 3$ [y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے]

$f^{-1}(x) = 3 - 2x$

5۔ درج ذیل مطلق قدر والے تفاعلوں کا گراف بنائیے۔

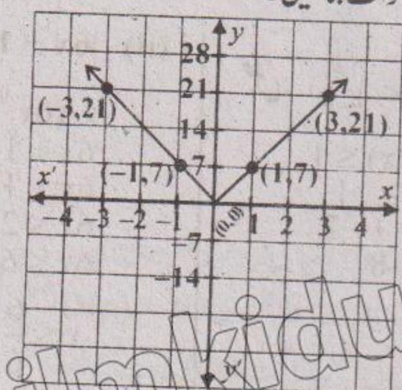
(i) $f(x) = 7|x|$

حل: دیا گیا ہے $f(x) = 7|x|$

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = 7\|x\|$	$(x, f(x))$
-3	$f(x) = 7\|-3\| = 7(3) = 21$	$(-3, 21)$
-1	$f(x) = 7\|-1\| = 7(1) = 7$	$(-1, 7)$
0	$f(x) = 7\|0\| = 7(0) = 0$	$(0, 0)$
1	$f(x) = 7\|1\| = 7(1) = 7$	$(1, 7)$
3	$f(x) = 7\|3\| = 7(3) = 21$	$(3, 21)$

اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف بنائیں۔



(ii) $f(x) = |x+6| - 2$

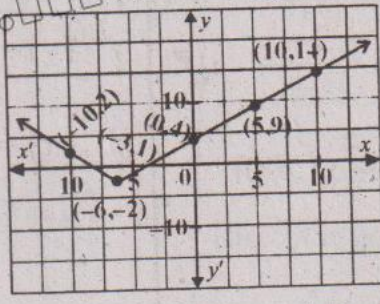
حل: دیا گیا ہے $f(x) = |x+6| - 2$

قیمتوں کا جدول

x	$f(x) = \|x+6\| - 2$	$(x, f(x))$
-10	$f(x) = \|-10+6\| - 2 = \|-4\| - 2 = 4 - 2 = 2$	$(-10, 2)$

-6	$f(x) = \lvert -6 + 6\rvert - 2 = \lvert 0\rvert - 2 = 0 - 2 = -2$	(-6, -2)
0	$f(x) = \lvert 0 + 6\rvert - 2 = \lvert 6\rvert - 2 = 6 - 2 = 4$	(0, 4)
5	$f(x) = \lvert 5 + 6\rvert - 2 = \lvert 11\rvert - 2 = 11 - 2 = 9$	(5, 9)
10	$f(x) = \lvert 10 + 6\rvert - 2 = \lvert 16\rvert - 2 = 16 - 2 = 14$	(10, 14)

اوپر دیے گئے مترتب جوڑوں کو ظاہر کریں اور گراف بنائیں۔



-6 حل کیجیے اور حل کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

(i) $|3x - 2| = 1$

حل:

$|3x - 2| = 1$

$\pm(3x - 2) = 1$

$3x - 2 = 1$ یا $-(3x - 2) = 1$

$3x - 2 = 1$ یا $3x - 2 = -1$

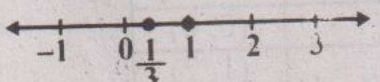
$3x = 1 + 2$ یا $3x = -1 + 2$

$3x = 3$ یا $3x = 1$

$x = \frac{3}{3}$ یا $x = \frac{1}{3}$

$x = 1$ یا

حل سیٹ $= \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$



(ii) $|6x + 1| = 9$

حل:

$|6x + 1| = 9$

$\pm(6x + 1) = 9$

$6x + 1 = 9$ یا $-(6x + 1) = 9$

$6x + 1 = 9$ یا $6x + 1 = -9$

$6x = 9 - 1$ یا $6x = -9 - 1$

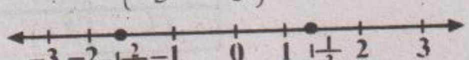
$6x = 8$ یا $6x = -10$

$x = \frac{8}{6}$ یا $x = \frac{-10}{6}$

$x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ یا $x = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$

$x = 1\frac{1}{3}$ یا $x = -1\frac{2}{3}$

حل سیٹ $= \left\{1\frac{1}{3}, -1\frac{2}{3}\right\}$



-7 حل کیجیے اور حل کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

(i) $|7 - 2x| \le 1$

حل: دیا گیا ہے $|7 - 2x| \le 1$

$\pm(7 - 2x) \le 1$

$(7 - 2x) \le 1$ یا $-(7 - 2x) \le 1$

$7 - 2x \le 1$ یا $7 - 2x \ge -1$

$-2x \le 1 - 7$ یا $-2x \ge -1 - 7$

$-2x \le -6$ یا $-2x \ge -8$

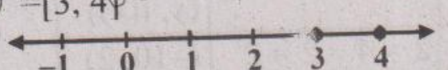
$2x \ge 6$ یا $2x \le 8$

$x \ge \frac{6}{2}$ یا $x \le \frac{8}{2}$

$x \ge 3$ یا $x \le 4$

$3 \le x \le 4$

حل سیٹ $= [3, 4]$



(ii) $|6x + 18| \le 24$

حل: دیا گیا ہے $|6x + 18| < 24$

$\pm(6x + 18) \le 24$

$6x + 18 \le 24$ یا $-(6x + 18) \le 24$

$6x + 18 \le 24$ یا $6x + 18 \ge -24$

$6x \le 24 - 18$ یا $6x \ge -24 - 18$

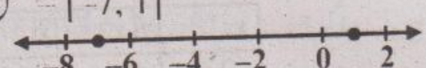
$6x \le 6$ یا $6x \ge -42$

$x \le \frac{6}{6}$ یا $x \ge \frac{-42}{6}$

$x \le 1$ یا $x \ge -7$

$-7 \le x \le 1$

حل سیٹ $= [-7, 1]$



-8 اگر $f(x) = 3x + 7$ معلوم کیجیے۔ (i) $f^{-1}(x)$ (ii) x کی قیمت جس کے لیے $f(x) = f^{-1}(x)$

(i)

حل: $f(x) = 3x + 7$

$y = 3x + 7$ | $f(x)$ کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے

یا $3x + 7 = y$

$3x = y - 7$

$x = \frac{y-7}{3}$ | x کے لیے حل کرنے سے

$f^{-1}(y) = \frac{y-7}{3} \quad \because \quad y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$ | y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے

(ii)

حل: $f(x) = 3x + 7$

$y = 3x + 7$ | $f(x)$ کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے

یا $3x + 7 = y$

$3x = y - 7$

$x = \frac{y-7}{3}$ | x کے لیے حل کرنے سے

$f^{-1}(y) = \frac{y-7}{3} \quad \because \quad y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$

| y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے

$f(x) = f^{-1}(x)$ (معلوم)

$3x + 7 = \frac{x-7}{3}$

$3(3x + 7) = x - 7$

$9x + 21 = x - 7$

$9x - x = -7 - 21$

$8x = -28$

$x = \frac{-28}{8} = \frac{-7}{2}$

-9 ایک کمپنی ہر فروخت شدہ چیز پر 100 روپے منافع کماتی ہے اور اس کا ماہانہ خرچ 10,000 روپے ہے۔ تفاعل $P(x) = 100x - 10,000$، x اشیا فروخت کرنے کے منافع کو ظاہر کرتا ہے۔ بریک ایون (0=منافع) تک پہنچنے کے لیے کتنی اشیا فروخت کرنا ضروری ہے؟

حل: (دیا گیا تفاعل)

$P(x) = 100x - 10,000$

$0 = 100x - 10,000$

$-100x = -10,000$

$100x = 10,000$

$x = \frac{10000}{100}$

$x = 100$

لہٰذا، بریک ایون (منافع) تک پہنچنے کے لیے 100 اشیا کی فروخت ضروری ہے۔

-10 ایک سٹور کسی ایک چیز پر 15 فیصد رعایت دیتا ہے۔ تفاعل $D(p) = 0.85$ اصل قیمت p پر رعایت کے بعد کی قیمت فروخت دیتا ہے۔ اس چیز کی قیمت فروخت کیا ہے جس کی اصل لاگت 2,000 روپے ہو۔

حل:

$D(p) = 0.85$ ______ (i)

جہاں 0.85 $D(p)$ اصل قیمت p پر 15% رعایت کے بعد قیمت فروخت کے تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔

روپے $(p) = \text{Rs. } 2000$ دی گئی اصل قیمت

مساوات (i) میں روپے 2000 = p درج کرنے سے

www.ilmkidunya.com

$D(2000) = 0.85(2000) = 1700$

لہٰذا قیمت فروخت = Rs. 1700 روپے

پس، اگر کسی چیز کی اصل قیمت 2000 روپے ہو تو 15% رعایت کے بعد اس کی قیمت 1700 روپے ہو جائے گی۔

11- ایک جی پی ایس سسٹم کو اس وقت درست مانا جاتا ہے۔ اگر اصل مقام رپورٹ کردہ مقام سے 6 میٹر سے زیادہ مختلف نہ ہو۔ اگر اصل مقام نقطہ x = 100 پر ہے۔ تو قابل قبول حد کو اس طرح بیان کیا گیا ہے $|x - r| \leq 6$، جہاں r رپورٹ شدہ مقام ہے۔ قابل قبول رپورٹ کردہ مقامات کی حد کیا ہے؟

حل: دی گئی غیر مساوات ہے

$|x - r| \leq 6$ ______ (i)

جہاں اصل مقام x = 100 ہے۔

دی گئی غیر مساوات (i) میں x = 100 درج کرنے سے

$|100 - r| \leq 6$

اس کا مطلب ہے کہ رپورٹ کی گئی جگہ r، اصل مقام 100 سے زیادہ سے زیادہ 6 میٹر تک مختلف ہو سکتی ہے۔

$100 - r \leq 6$ یا $-(100 - r) \leq 6$

$100 - r \leq 6$ یا $100 - r \geq -6$

$-r \leq 6 - 100$ یا $-r \geq -6 - 100$

$-r \leq -94$ یا $-r \geq -106$

$r \geq 94$ یا $r \leq 106$

لہٰذا $94 \leq r \leq 106$

پس اگر اصل مقام 100 ہو اور زیادہ سے زیادہ فرق 6 میٹر ہو تو رپورٹ کی گئی جگہ کی حد 94 سے 106 کے درمیان ہونی چاہیے۔

معروضی طرز سوالات

اضافی کثیر الانتخابی سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے کثیر الانتخابی سوالات

4.1 تفاعل

درست جواب کا انتخاب کریں۔

1- ریاضیاتی طور پر سیٹ X سے سیٹ Y تک کے تفاعل کو کس طرح لکھا جاتا ہے؟

(a) $f = X + Y$ (b) $f: Y \rightarrow X$ (c) $f: X \rightarrow Y$ (d) $f: (X, Y)$

2- ریاضی سیاق و سباق میں تفاعل کا لفظ کس نے متعارف کروایا؟

(a) آئزک نیوٹن (b) رینی ڈسکارٹ (c) گوٹفرائیڈ ولہیم لبنز (d) البرٹ آئن سٹائن

3- ایک تفاعل $f: X \rightarrow Y$ میں سیٹ x کو کس نام سے پکارا جاتا ہے؟

(a) رینج (b) کوڈومین (c) ڈومین (d) متغیر

4- اگر $f(x) = x^2 + 3x + 1$ ہو تو $f(-2)$ کی قیمت کیا ہوگی؟

(a) 1 (b) −1 (c) 11 (d) 0

5- اگر $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{6}$ ہو تو $f(3)$ ہوگا:

(a) 2 (b) 3 (c) 9 (d) 6

www.ilmkidunya.com

-6 اگر $g(y) = 3x^2 + 5x$ ہو تو g (5) کی قیمت ہوگی:

(a) 45 (b) 25 (c) 75 (d) 100

-7 $f(x) = (x+1)^2$ میں تفاعل $f\left(\sqrt{3}\right)$ کی قیمت کیا ہوگی؟

(a) $\left(\sqrt{3}\right)^2$ (b) $4 + 2\sqrt{3}$ (c) $3 + 4\sqrt{2}$ (d) $3 + \sqrt{3}\ \sqrt{2}$

-8 اگر f (a) = 5 ہو تو 5 کو تفاعل کا کہتے ہیں:

(a) f^{-1} (b) ڈومین (c) عکس (d) قوت

-9 $f(x) = (x+1)^2$ کی رینج ہوگی۔

(a) منفی اعداد کا سیٹ (b) صحیح اعداد کا سیٹ (c) تمام غیر منفی اعداد کا سیٹ (d) ڈومین کے برابر

4.1.1 تفاعل کے عوامل

-10 اگر $f(x) = 5x + 1$ اور $g(x) = -3x + 7$ ہو تب $f(x) + g(x)$ کی قیمت ہوگی:

(a) $2x + 8$ (b) $8x + 8$ (c) $2x - 8$ (d) $15x + 8$

-11 اگر $f(x) = x+4$ اور $g(x) = x-4$ تب $(f \cdot g)(x)$ ہوگا:

(a) $2x^2 - 8x - 16$ (b) $2x$ (c) $x^2 + 16$ (d) $x^2 - 16$

-12 اگر $f(x) = x^2$ اور $g(x) = 2x - 1$ ہو تب $(f-g)(x)$ کی قیمت ہوگی:

(a) $x^2 + 2x + 1$ (b) $-x^2 + x + 1$ (c) $x^2 - 2x$ (d) $x^2 - 2x + 1$

-13 اگر $f(x) = 3x+2$ اور $g(x) = x - 5$ ہو تب $(f+g)(x)$ ہوگا:

(a) $3x^2 - 13x - 10$ (b) $2x + 7$ (c) $4x - 3$ (d) $4x + 3$

-14 اگر $f(x) = 10x^3$ اور $g(x) = 5x$ ہو تو $\frac{f(x)}{g(x)}$ ہوگا:

(a) $2x^2$ (b) $10x^4$ (c) $50x^4$ (d) $10x^2$

-15 اگر $f(x) = x^2 - 1$ اور $g(x) = x + 1$ تو $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی قیمت ہوگی:

(a) $x^2 - x$ (b) $x + 1$ (c) $x - 1$ (d) $x^3 - 1$

-16 اگر $f(x) = x^3 + y^3$ اور $g(x) = x + y$ ہو تو $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی قیمت کیا ہوگی؟

(a) $x^2 + xy + y^2$ (b) $x^2 - xy + y^2$ (c) $(x+y)^3$ (d) $(x-y)^3$

-17 اگر $f(x) = x+k$ اور $g(x) = -x - 3$ تو k کی قیمت کیا ہوگی۔ جب $f(x) + g(x) = 4$ ہو؟

(a) 12 (b) 7 (c) 9 (d) -3

-18 اگر $f(x) = x-3$ اور $g(x) = x2 - 2$ ہو تو $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی قیمت ہوگی:

(a) $x + 3$ (b) $x - 3$ (c) $\frac{1}{x-3}$ (d) $\frac{1}{x+3}$

www.ilmkidunya.com

4.1.2 تفاعل کی ترکیب

19- اگر $f(x) = 2x + 3$ اور $g(x) = x^2$ ہو تو $(fog)(x)$ کی قیمت ہوگی:

(a) $2x^2 + 3$ (b) $2x + 3$ (c) $x^2 + 3$ (d) $2 + x + 3$

20- اگر $f(x) = -3x - 7$ اور $g(x) = x^3$ ہو تو $(fog)(x)$ کی قیمت ہوگی:

(a) $3x + 7$ (b) $x^3 - x - 7$ (c) $-3x^3 - 7$ (d) $3x^3 + 7$

21- اگر ایک تفاعل ون۔ٹو۔ون بھی ہو اور آن ٹو بھی ہو تو وہ کہلاتا ہے۔

(a) یکتا تفاعل (b) بائی جیکٹو تفاعل (c) منفی تفاعل (d) ان ٹو تفاعل

22- ون۔ٹو۔ون تفاعل ________ بھی کہلاتا ہے۔

(a) انجیکٹو (b) بائی جیکٹو (c) منفی (d) مسلسل

23- اگر $g(x) = x^2$ ہو تو $(gog)(x)$ کی قیمت ہوگی:

(a) x^3 (b) x^5 (c) x^4 (d) x^6

24- اگر $f(x) = x + 5$ ہو تو تب $(fof)(x)$ کی قیمت ہوگی:

(a) $x + 10$ (b) $x - 10$ (c) $x - 25$ (d) $x + 25$

25- اگر $f(x) = x^3$ اور $g(x) = x^2 + 4$ ہو تب $(gof)(x)$ کی قیمت ہوگی:

(a) $x + 3$ (b) $x^6 - 6$ (c) $x^2 - 4$ (d) $x^6 + 4$

4.1.3 معکوس تفاعل

26- اگر $y = f(x)$ ہو تب $f^{-1}(y) = x$ کہلاتا ہے:

(a) $f(x)$ کا منفی (b) $f(x)$ کا معکوس (c) $f(x)$ کا تفاعل (d) $f(x)$ کی ڈومین

27- $f(x)$ کی ڈومین = ________

(a) $f^{-1}(x)$ (b) $f(x)$ کا معکوس (c) $f^{-1}(x)$ کی رینج (d) $x = y$

28- اگر $f(x) = \{(2,a),(5,b)\}$ ہو تو $f^{-1}(x)$ ہوگا:

(a) $\{(-2, a), (-5, b)\}$ (b) $\{(a,2), (5, b)\}$ (c) $\{(a, 2), (b,5)\}$ (d) $\{(a,5), (b,2)\}$

29- $f^{-1}(x)$ کی ڈومین = ________۔

(a) $f(x)$ کی ڈومین (b) $f(x)$ کی رینج (c) $f^{-1}(x)$ کی ڈومین (d) (y) کی رینج

30- کسی تفاعل کا معکوس صرف اسی وقت ممکن ہوتا ہے جب وہ ہو:

(a) صرف آن ٹو (b) صرف ان ٹو (c) صرف ون۔ٹو۔ون (d) ون۔ٹو۔ون اور آن ٹو

31- $f(x) = 2x - 5$ کا معکوس تفاعل ہے:

(a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x-5}$ (b) $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ (c) $f^{-1}(x) = 5x + 2$ (d) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

32- $f(x) = x^2 + 3$ کا $f^{-1}(x)$ ہے:

(a) $\frac{x-3}{2}$ (b) $\sqrt{x-3}$ (c) $\sqrt{x} + 3$ (d) $\sqrt{\frac{x-3}{2}}$

www.ilmkidunya.com

33- اگر $f(x) = x^3 + 1$ ہو تو $f^{-1}(9)$ ہوگا:

(a) 3 (b) 730 (c) 8 (d) 2

34- $f^{-1}(x)$ کی ڈومین کیا ہوگی۔ اگر $f(x)$ کی رینج $[0, \infty)$ ہے؟

(a) $[0, \infty)$ (b) $(-\infty, 0)$ (c) $(0, \infty)$ (d) $(-\infty, \infty)$

35- اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ہو تو $f^{-1}(x)$ ہوگا:

(a) x^2 (b) $\frac{1}{x}$ (c) $-x$ (d) x

4.2 مطلق قدر والے تفاعل کا گراف

36- کسی عدد کی مطلق قیمت ہمیشہ ہوتی ہے؟

(a) منفی (b) صرف منفرد عدد (c) غیر منفی (d) صرف جفت عدد

37- وہ نقطہ جہاں گراف سمت تبدیل کرتا ہے وہ کہلاتا ہے:

(a) ڈومین (b) رینج (c) راس (d) تفاعل

38- ایک مطلق قدر والے تفاعل کی راسی شکل کون سی درست ہے؟

(a) $g(x) = a|h-x|$ (b) $g(x) = a|x|+k$ (c) $g(x) = a|x-h|+k$ (d) $g(x) = |x-h|\times k$

39- $f(x) = |x-5|$ کے گراف کا درست مترتب جوڑا ہے:

(a) $(-4, 9)$ (b) $(4, -9)$ (c) $(3, 8)$ (d) $(-1, -6)$

40- $g(x) = |x|+3$ کے گراف کا درست مترتب جوڑا ہے:

(a) $(-6, 3)$ (b) $(0, 4)$ (c) $(5, 8)$ (d) $(3, -6)$

41- کون سا مترتب جوڑا تفاعل $f(x) = |x-1|$ کے گراف کے لیے درست نہیں ہے؟

(a) (3.2) (b) $(-5,6)$ (c) $(-9,10)$ (d) $(-6,-7)$

42- مساوات $|x| = 7$ کا حل ہے:

(a) صرف 7- (b) صرف 7 (c) 7 اور 7- (d) کوئی حل نہیں

43- $|x - 10| = 0$ کا حل ہے:

(a) ± 10 (b) -10 (c) 10 (d) کوئی حل نہیں

44- $|3x| = 15$ کا حل ہے:

(a) $x = 5, x = -5$ (b) $x = 15$ (c) $x = 5$ (d) $x = 18, x = 12$

45- درج ذیل میں سے کس مساوات کے پورے دو حل ہیں؟

(a) $|x| + 5 = 5$ (b) $|3x| = -1$ (c) $|x-8| = 4$ (d) $|x+2| + 5 = 2$

4.4 ایک متغیر میں مطلق قدر والی یک درجی غیر مساوات کا حل

46- $-5 \leq x \leq 5$ کے مترادف ہے:

(a) $(-5,5)$ (b) $[-5, 5]$ (c) $(-5, \infty)$ (d) $(\infty, 5)$

www.ilmkidunya.com

47- $-a < x < a$ کے مترادف ہے:

(a) $(-a, a)$ (b) $[a, a]$ (c) $(-\infty, a)$ (d) (a, ∞)

48- ''x اور 0 کے درمیان فاصلہ کم از کم 10 اکائیاں ہیں'' کے لیے کون سی غیر مساوات درست ہے؟

(a) $|x| < 10$ (b) $|x| \leq 10$ (c) $|x| > 10$ (d) $|x| \geq 10$

49- $|3x - 6| \geq 9$ کا حل سیٹ ہے:

(a) $x < 1$ یا $x < -5$ (b) $x = 1, 5$ (c) $x < 1$ یا $x > -5$ (d) $x \geq 5$ یا $x \leq -1$

50- $2|x| - 4 < 6$ کا حل ہے:

(a) $x < 5$ (b) $-5 < x < 5$ (c) $x < 1$ یا $x > 5$ (d) $-1 < x < 1$

جوابات

1- $f : X \to Y$	2- گوٹفرائیڈ ولیم لبنز	3- ڈومین	4- -1	5- 2
6- 100	7- $4 + 2\sqrt{3}$	8- عکس	9- تمام غیر منفی اعداد کا سیٹ	10- $2x + 8$
11- $x^2\ 16$	12- $x^2 - 2x + 1$	13- $4x - 3$	14- $2x^2$	15- $x - 1$
16- $x^2 - xy + y^2$	17- 7	18- $\frac{1}{x+3}$	19- $2x^2 + 3$	20- $-3x^3 - 7$
21- بائی جیکٹو تفاعل	22- انجیکٹو	23- x^4	24- $x + 10$	25- $x^6 + 4$
26- $f(x)$ کا معکوس	27- $f^{-1}(x)$ کی رینج	28- $\{(a, 2), (b, 5)\}$	29- $f(x)$ کی رینج	30- ون ـ ٹو ـ ون اور آن ٹو
31- $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$	32- $\sqrt{x-3}$	33- 2	34- $[0, \infty)$	35- $\frac{1}{x}$
36- غیر منفی	37- راس	38- $g(x) = a\lvert x-h\rvert + k$	39- $(-4, 9)$	40- $(5, 8)$
41- $(-6, -7)$	42- 7 اور -7	43- 10	44- $x = 5, x = -5$	45- $\lvert x-8\rvert = 4$
46- $[-5, 5]$	47- $(-a, a)$	48- $\lvert x\rvert \geq 10$	49- $x \leq -1$ یا $x \geq 5$	50- $-5 < x < 5$

اضافی مختصر سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے مختصر جوابی سوالات

4.1 تفاعل

مختصر جواب دیں۔

1- **تفاعل کی تعریف کریں۔**

جواب: اگر X اور Y دو غیر خالی سیٹ ہوں تو سیٹ X سے سیٹ Y تک ایک تفاعل ایسا ربط ہے جو سیٹ X کے ہر رکن کا سیٹ Y کے صرف ایک رکن سے تعلق جوڑتا ہے۔ اسے $f: X \longrightarrow Y$ لکھا جاتا ہے۔

2- **تفاعل کی ڈومین کو بیان کریں۔**

جواب: کسی تفاعل کی ڈومین ان تمام ممکنہ ان پٹ قدروں (x-قدریں) کا سیٹ ہوتی ہے جن کے لیے وہ تفاعل واضح ہو۔

-3 تفاعل کی رینج کو بیان کریں۔

جواب: رینج ان تمام ممکنہ آؤٹ پٹ اقدار (y قیمتیں) کا سیٹ ہوتی ہے جو تفاعل ان پٹ قدریں درج کرنے کے بعد پیدا کرتا ہے۔

-4 اگر $f(x) = x^2 - 5x + 3$ ہو تو $f(3)$ معلوم کریں۔

حل:
$$f(x) = x^2 - 5x + 3$$
$$f(3) = (3)^2 - 5(3) + 3$$
$$= 9 - 15 + 3$$
$$= 9 + 3 - 15$$
$$= 12 - 15 = -3$$

-5 اگر $g(x) = (x - 1)^3$ ہو تو $g(-4)$ معلوم کریں۔

حل:
$$g(x) = (x - 1)^3$$
$$g(-4) = (-4 - 1)^3$$
$$= (-5)^3$$
$$= -125$$

-6 اگر $f(x) = 2^x$ ہو تب $f(5)$ معلوم کریں۔

حل:
$$f(x) = 2^x$$
$$f(5) = 2^5$$
$$= 32$$

-7 تفاعل $f(x) = \frac{3}{x+2}$ کی ڈومین معلوم کریں۔

حل: چونکہ $x = -2$ تفاعل کو غیر تعریف شدہ بنا دیتا ہے۔ اس لیے اس کی ڈومین -2 کے علاوہ تمام حقیقی اعداد ہیں۔

$f(x)$ کی ڈومین $= (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

-8 تفاعل $f(x) = \sqrt[3]{x}$ کی ڈومین اور رینج معلوم کریں۔

جواب: ہم کسی بھی منفی یا مثبت عدد کا جذر المکعب لے سکتے ہیں۔ کوئی پابندی نہیں کہ ان پٹ یا آؤٹ پٹ کیا ہے۔

f کی ڈومین = تمام حقیقی اعداد = $(-\infty, \infty)$

f کی رینج = تمام حقیقی اعداد = $(-\infty, \infty)$

-9 اگر $f(x) = 5x^2 - 3$ اور $g(x) = x^2 - 5$ ہو تو $f(x)$ اور $g(x)$ کو جمع کریں۔

حل:
$$f(x) = 5x^2 - 3, \; g(x) = x^2 - 5$$
$$f(x) + g(x) = (5x^2 - 3) + (x^2 - 5)$$
$$= 5x^2 - 3 + x^2 - 5$$
$$= 6x^2 - 8$$

-10 اگر $f(x) = 3x - 7$ اور $g(x) = -x - 3$ ہو تو $f(x) - g(x)$ معلوم کریں۔

حل:
$$f(x) = 3x - 7, \; g(x) = -x - 3$$
$$f(x) - g(x) = (3x - 7) - (-x - 3)$$
$$= 3x - 7 + x + 3$$
$$= 4x - 4$$

-11 اگر $f(x) = 7x - 3$ اور $g(x) = 2x^2 + 5$ تو $(f.g)(x)$ معلوم کریں۔

حل:
$$f(x) = 7x - 3, \; g(x) = 2x^2 + 5$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$
$$= (7x - 3)(2x^2 + 5)$$
$$= 14x^3 + 35x - 6x^2 - 15$$
$$= 14x^3 - 6x^2 + 35x - 15$$

-12 اگر $f(x) = x - 3$ اور $g(x) = x^2 + 4x - 21$ ہو تو $\frac{g(x)}{f(x)}$ معلوم کریں۔

حل:
$$f(x) = x - 3, \; g(x) = x^2 + 4x - 21$$
$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + 4x - 21}{x - 3}$$
$$= \frac{x^2 + 7x - 3x - 21}{x - 3}$$
$$= \frac{x(x+7) - 3(x+7)}{(x-3)}$$
$$= \frac{(x+7)(x-3)}{(x-3)}$$
$$= x + 7$$

-13 اگر $f(x) = a + b$ اور $g(x) = (a^2 - ab + b^2)$ ہو تب $f(x).g(x)$ معلوم کریں۔

حل:
$$f(x) = a + b, \; g(x) = a^2 - ab + b^2$$
$$f(x).g(x) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3$$

-14 اگر $f(x) = \frac{3}{x}$ اور $g(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ ہو تو $(f+g)(x)$ معلوم کریں۔

حل: $f(x) = \frac{3}{x}$، $g(x) = \frac{2}{x^2} + 3$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f+g)(x) = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + 3$$

$$= \frac{3x + 2 + 3x^2}{x^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 3x + 2}{x^2}$$

-15۔ اگر $f(x) = 3x - 5$ اور $g(x) = x^2$ ہو تو $(fog)(x)$ معلوم کریں۔

حل: معلوم: $f(x) = 3x - 5$ ، $g(x) = x^2$

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

$$= f(x^2)$$

$$= 3x^2 - 5$$

-16۔ اگر $f(x) = -4x - 3$ اور $g(x) = x^2$ ہو تب $(gof)(x)$ معلوم کریں۔

حل: معلوم: $f(x) = -4x - 3$ ، $g(x) = x^2$

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

$$= g(-4x - 3)$$

$$= (-4x - 3)^2$$

$$= (-4x - 3)(-4x - 3)$$

$$= 16x^2 + 12x + 12x + 9$$

$$= 16x^2 + 24x + 9$$

-17۔ اگر $f(x) = 3x - 4$ ہو تو $(fof)(x)$ معلوم کریں۔

حل: $f(x) = 3x - 4$ (معلوم)

$$(fof)(x) = f(f(x))$$

$$= f(3x - 4)$$

$$= 3(3x - 4) - 4$$

$$= 9x - 12 - 4$$

$$= 9x - 16$$

-18۔ اگر $g(x) = x^5$ ہو تو $(gog)(x)$ معلوم کریں۔

حل: معلوم: $g(x) = x^5$

$$(gog)(x) = g(g(x))$$

$$= g(x^5)$$

$$= (x^5)^5$$

$$= x^{25}$$

-19۔ ون۔ٹو۔ون تفاعل کی تعریف کریں۔

جواب: ایک تفاعل ون۔ٹو۔ون کہلاتا ہے۔ اگر ہر ان پٹ ایک منفرد آؤٹ پٹ سے ملتا ہو۔

-20۔ آن ٹو تفاعل کی تعریف کریں۔

جواب: ایک تفاعل آن ٹو کہلاتا ہے۔ اگر کوڈومین کا ہر رکن ڈومین میں کم از کم ایک ماقبل عکس رکھتا ہو۔

-21۔ بائی جیکٹو تفاعل کی تعریف کریں۔

جواب: ایک تفاعل بائی جیکٹو کہلاتا ہے۔ اگر وہ ون۔ٹو۔ون بھی ہو اور آن ٹو بھی ہو۔

4.1.3 معکوس تفاعل

-22۔ معکوس تفاعل کی تعریف کریں۔

جواب: کسی تفاعل f کا معکوس تفاعل f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وہ تفاعل عمل کو پلٹ دیتا ہے۔ یہ y کو ان پٹ اور x کو آؤٹ پٹ کے طور پر لیتا ہے۔

-23۔ اگر $f(x)=\{(3,a), (7,b), (11,c)\}$ ہو تو $f^{-1}(x)$ معلوم کریں۔

حل: دیا گیا ہے $f(x) = \{(3,a), (7,b), (11,c)\}$

$$f^{-1}(x) = \{(a, 3), (b, 7), (c, 11)\}$$

-24۔ $f(x) = 5x - 3$ کا معکوس تفاعل معلوم کریں۔

حل:

$$f(x) = 5x - 3$$

$y = 5x - 3$ (f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے)

یا

$$5x - 3 = y$$

$$5x = y + 3$$

$x = \frac{y+3}{5}$ (x کے لیے حل کرنے سے)

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{5} \quad [\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$$

$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{5}$ y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے

-25۔ $f(x) = 5x^2 + 1$ کا معکوس تفاعل معلوم کریں۔

حل:

$$f(x) = 5x^2 + 1$$

$y = 5x^2 + 1$ (f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے)

یا

$$5x^2 + 1 = y$$

www.ilmkidunya.com

$5x^2 = y - 1$

$x^2 = \frac{y-1}{5}$

دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے $\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{y-1}{5}}$

(x کے لیے حل کرنے سے) $x = \sqrt{\frac{y-1}{5}}$

$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y-1}{5}}$ $[\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x]$

y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{5}}$

-26 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ کا معکوس تفاعل معلوم کریں۔

حل:

$f(x) = \sqrt{2x+1}$

(f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے) $y = \sqrt{2x+1}$

یا

$\sqrt{2x+1} = y$

دونوں اطراف کا مربع لینے سے

$(\sqrt{2x+1})^2 = y^2$

$2x + 1 = y^2$

یا

$2x = y^2 - 1$

(x کے لیے حل کرنے سے)

$x = \frac{y^2-1}{2}$

$f^{-1}(y) = \frac{y^2-1}{2}$ $\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے $f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2}$

-27 اگر $f(x) = x^2$ ہو تب $f(f^{-1}(x))$ معلوم کریں۔

حل:

$f(x) = x^2$

[f(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے] $y = x^2$

یا

$x^2 = y$

دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے $\sqrt{x^2} = \sqrt{y}$

(x کے لیے حل کرنے سے) $x = y^{\frac{1}{2}}$

$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{2}}$ $\because y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

y کو x کے ساتھ تبدیل کرنے سے $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x$$

4.2 مطلق قدر والے تفاعل کا گراف

-28 **مطلق قدر والے تفاعل کی تعریف کریں۔**

جواب: ایک مطلق قدر والا تفاعل ایسا تفاعل ہوتا ہے۔ جس میں الجبری جملے کو مطلق قدر کی لائنوں میں بند کیا جاتا ہے۔ اس کی عمومی شکل $f(x) = |x|$ ہے۔

-29 **مطلق قدر والے بنیادی تفاعل $f(x) = |x|$ کی رینج کیا ہوتی ہے۔**

جواب: مطلق قدر والے بنیادی تفاعل $f(x) = |x|$ کی رینج $[0, \infty)$ ہے۔ کیوں کہ $|x|$ منفی نہیں ہو سکتا ہے، اس کی سب سے چھوٹی قیمت 0 اور سب سے بڑی قیمت کی کوئی حد نہیں ہے یعنی ∞ تک پہنچتی ہے۔

-30 **تفاعل $f(x) = |x|$ کے گراف کی شکل کیسی ہوتی ہے؟**

جواب: تفاعل $f(x) = |x|$ کے گراف کی شکل V جیسی ہوتی ہے۔

-31 **مطلق قدر والے تفاعل کی راسی شکل لکھیں۔**

جواب: ایک مطلق قدر والے تفاعل کی راسی شکل $f(x) = a|x - h| + k$ ہے۔

-32 **اگر $g(x) = a(x-4)+7$ ایک یک درجی تفاعل ہے اور $a = 0$ دیا گیا ہے۔ تو بتائیں $g(x)$ کا گراف کیسا ہو گا؟**

جواب: دیا گیا ہے۔ $g(x) = a(x - 4) + 7$ (i)

مساوات (i) میں $a = 0$ درج کرنے سے

$g(x) = 0(x - 4) + 7$

$g(x) = 0 + 7 = 7$

www.ilmkidunya.com

$g(x) = 7$

$y = 7$

g(x) کو y کے ساتھ تبدیل کرنے سے

پس، g(x) کا گراف ایک افقی لکیر ہے اور افقی لکیر پر عمودی خط کے گرد سمیٹرک ہوتی ہے۔ اس لیے یہ x = 4 کے گرد بھی سمیٹرک ہے۔

4.4 ایک متغیر میں مطلق قدر والی یک درجی غیر مساوات کا حل

-33 $3|x-2| = 18$ کو حل کریں اور حل کو عددی خط پر ظاہر کریں۔

حل:

$3|x-2| = 18$

$\frac{3}{3}|x-2| = \frac{18}{3}$ (دونوں اطراف کو 3 سے تقسیم کرنے سے)

$|x-2| = 6$

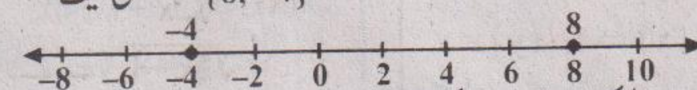
$(x-2) = \pm 6$

$x-2 = 6$ یا $x-2 = -6$

$x = 6+2$ یا $x = -6+2$

$x = 8$ یا $x = -4$

حل سیٹ $= \{8, -4\}$



-34 $|5-2x| = 3,$ کو حل کریں اور حل کو عددی خط پر ظاہر کریں۔

حل:

$|5-2x| = \pm 3$

$5-2x = \pm 3$

$5-2x = -3$ یا $5-2x = 3$

$-2x = -3-5$ یا $-2x = 3-5$

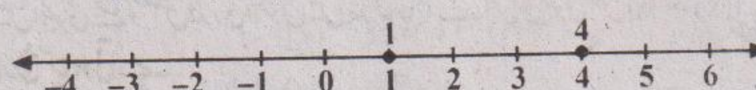
$-2x = -8$ یا $-2x = -2$

$2x = 8$ یا $2x = 2$

$x = \frac{8}{2}$ یا $x = \frac{2}{2}$

$x = 4$ یا $x = 1$

حل سیٹ $= \{1, 4\}$



-35 غیر مساوات $|x-2| \geq 7$ کو حل کریں اور حل کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

حل:

$|x-2| \geq 7$

$\pm(x-2) \geq 7$

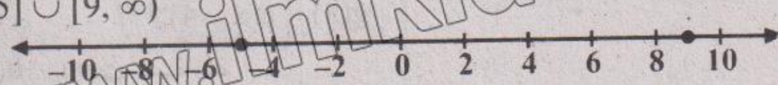
$x-2 \geq 7$ یا $-(x-2) \geq 7$

$x-2 \geq 7$ یا $x-2 \leq -7$

$x \geq 7+2$ یا $x \leq -7+2$

$x \geq 9$ یا $x \leq -5$

$(-\infty, -5] \cup [9, \infty)$



www.ilmkidunya.com