قالب اور قالبوں کا مقطع

حاصلاتِ تعلم

اس یونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- معلومات کو مرتبہ 2 کے قالب کی شکل میں ظاہر کر سکیں۔
- دو قالبوں کے مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب پر مشتمل صورتحال کو حل کر سکیں۔
- ایک سکیلر مقدار اور قالب کا حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
- 2-by-2 مرتبہ کے قالب کا ضربی معکوس اور مقطع معلوم کر سکیں۔
- معکوس قالب کے طریقے اور کریمر کے قانون کو استعمال کرتے ہوئے دو متغیرات میں یک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کر سکیں۔
- مثالوں کے ساتھ وضاحت کر سکیں کہ کس طرح ریاضی نئے سائنسی نظریات اور ٹیکنالوجیز میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے (جیسے کہ، ریاضیاتی ماڈلز کا استعمال، نئے مادوں اور ادویات کو ڈیزائن کرنے اور بہتر بنانے اور پیچیدہ نظاموں جیسے انسانی دماغ کے رویوں کو سمجھنے کے لیے کیا جاتا ہے)۔
- حقیقی دنیا کے مسائل پر قالب کے تصورات کا اطلاق کر سکیں [جیسے انجینئرنگ، معاشیات، کمپیوٹر گرافکس اور طبعیات میں]۔

3.1 قالب (Matrices)

قالب ایک مستطیلی شکل کی ترتیب ہے، جس کے ارکان قطاروں اور کالموں میں ایک خاص ترتیب میں مربعی بریکٹ کے اندر لکھے جاتے ہیں۔ یہ ترتیبات بعض الجبری عوامل کی پابند ہوتی ہیں۔ عام طور پر، قالبوں کو انگریزی حروفِ تہجی کے بڑے حروف سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ ان کے ارکان کو چھوٹے حروف سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر،

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سکولوں میں اوقات کار، ہوائی اڈے پر پرواز کا شیڈول یا ریلوے سٹیشن پر ٹرینوں کی آمد روانگی کا وقت قالبوں کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔

قالب کی قطاریں اور کالم (Rows and Columns of a Matrix)

قطار: افقی لائن یا لائنوں میں لکھے ہوئے رکن یا ارکان قالب کی قطار یا قطاریں بناتے ہیں۔

کالم: عمودی لائن یا لائنوں میں لکھے ہوئے رکن یا ارکان قالب کے کالم بناتے ہیں۔

مثال کے طور پر،

کالم 1 | کالم 2 | کالم 3 | کالم 4

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 9 & 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} \leftarrow \text{قطار 1} \\ \leftarrow \text{قطار 2} \\ \leftarrow \text{قطار 3} \end{matrix}$$

www.ilmkidunya.com

قالب A کی 3 قطاریں اور 4 کالم ہیں۔

کالم 1 کالم 2 کالم 3

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{قطار 1} \\ \leftarrow \text{قطار 2} \\ \leftarrow \text{قطار 3} \end{matrix}$$

قالب B کی 3 قطاریں اور 3 کالم ہیں۔

$$C = [5]$$

قالب C کی 1 قطار اور 1 کالم ہے۔

ارکان (Elements or Entries)

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ہو تو 1، 2، 3، 4، 5 اور 6 قالب A کے ارکان کہلاتے ہیں۔

قالب کا مرتبہ (Order or Size of a Matrix)

اگر قالب A کی m قطاریں اور n کالم ہوں تو قالب A کا مرتبہ "m × n" ہوتا ہے اور اسے m-by-n پڑھا جاتا ہے۔

قالب $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 9 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ 3×3 (3-by-3 پڑھا جاتا ہے) اگر ایک قالب مرتبہ 3-by-4 ہو تو اس کا مطلب ہے کہ قالب کی 3 قطاریں اور 4 کالم ہیں۔ اس کا مطلب 3 ضرب 4=12 نہیں البتہ 12 قالب میں ارکان کی تعداد ہوتا ہے۔

مساوی قالب (Equal Matrices)

دو قالب A اور B مساوی قالب کہلاتے ہیں اگر ان کا مرتبہ اور متعلقہ ارکان ایک جیسے ہوں۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 4-2 & 3 \\ 4 & 4-6 \end{bmatrix}$ مساوی قالب ہیں۔

اسی طرح، $C = [a \quad b]$ اور $D = [3 \quad 4]$ مساوی قالب ہوں گے اگر $a = 3$ اور $b = 4$ ہو۔

حل مشق 3.1

1- ہر قالب کی قطاروں اور کالموں کی تعداد لکھیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, C = [8 \ -10 \ 11], D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 5 & 9 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: قالب A کے قطاروں کی تعداد = 2

قالب A کے کالموں کی تعداد = 2

قالب B کے قطاروں کی تعداد = 3

قالب B کے کالموں کی تعداد = 1

قالب C کے قطاروں کی تعداد = 1

www.ilmkidunya.com

قالب C کے کالموں کی تعداد = 3

قالب D کے قطاروں کی تعداد = 3

قالب D کے کالموں کی تعداد = 3

قالب E کے قطاروں کی تعداد = 2

قالب E کے کالموں کی تعداد = 3

2- ہر قالب کا مرتبہ لکھیے۔

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=[3\ \ 4],\mathbf{C}=\begin{bmatrix}3&5\\5&6\end{bmatrix},\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&3&4\\5&0&9\end{bmatrix},\ \mathbf{E}=\begin{bmatrix}0&1\\3&4\\5&6\end{bmatrix},\ \mathbf{F}=[5]$$

حل:

$$A=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

قالب A کا مرتبہ 2-by-1 ہے۔

$$C=\begin{bmatrix}3&5\\5&6\end{bmatrix}$$

قالب C کا مرتبہ 2-by-2 ہے۔

$$E=\begin{bmatrix}0&1\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$$

قالب E کا مرتبہ 3-by-2 ہے۔

$$B=[3\ \ 4]$$

قالب B کا مرتبہ 1-by-2 ہے۔

$$D=\begin{bmatrix}0&3&4\\5&0&9\end{bmatrix}$$

قالب D کا مرتبہ 2-by-3 ہے۔

$$F=[5]$$

قالب F کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

3- درج ذیل میں کون سے قالب مساوی ہیں؟

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&3\\4&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}9\\-7\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2\times3&2-1\\2\times2&4-2\\4+4&3+0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}5+4\\-8+1\end{bmatrix},\quad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}6&1\\4&2\\8&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}3-3&3\\3+1&1\end{bmatrix}$$

حل:

$$A=\begin{bmatrix}0&3\\4&1\end{bmatrix} \text{ اور } F=\begin{bmatrix}3-3&3\\3+1&1\end{bmatrix}\Rightarrow F=\begin{bmatrix}0&3\\4&1\end{bmatrix}$$

مساوی قالب ہیں کیونکہ ان کے مرتبے اور متعلقہ ارکان ایک جیسے ہیں یعنی $A=F$

$$B=\begin{bmatrix}9\\-7\end{bmatrix} \text{ اور } D=\begin{bmatrix}5+4\\-8+1\end{bmatrix}\Rightarrow D=\begin{bmatrix}9\\-7\end{bmatrix}$$

مساوی قالب ہیں کیونکہ ان کے مرتبے اور متعلقہ ارکان ایک جیسے ہیں یعنی $B=D$

$$C=\begin{bmatrix}2\times3&2-1\\2\times2&4-2\\4+4&3+0\end{bmatrix}\Rightarrow C=\begin{bmatrix}6&1\\4&2\\8&3\end{bmatrix} \text{ اور } E=\begin{bmatrix}6&1\\4&2\\8&3\end{bmatrix}$$

مساوی قالب ہیں کیونکہ ان کے مرتبے اور متعلقہ ارکان ایک جیسے ہیں یعنی $C=E$

www.ilmkidunya.com

-4 اگر $\begin{bmatrix} a+2 & c-3 \\ b-1 & d+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ ہوتو c،b،a اور d کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$$\begin{bmatrix} a+2 & c-3 \\ b-1 & d+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

چونکہ دونوں قالب مساوی ہیں، لہٰذا ان کے متعلقہ ارکان ایک جیسے ہیں۔

$a+2=5$ $\quad c-3=8$ $\quad b-1=6$ $\quad d+4=4$

$a=5-2$ $\quad c=8+3$ $\quad b=6+1$ $\quad d=4-4$

$a=3$ $\quad c=11$ $\quad b=7$ $\quad d=0$

-5 اگر $\begin{bmatrix} 2x+1 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 7 & y \end{bmatrix}$ ہوتو x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$$\begin{bmatrix} 2x+1 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 7 & y \end{bmatrix}$$

چونکہ دونوں قالب مساوی ہیں، لہٰذا ان کے متعلقہ ارکان ایک جیسے ہیں۔

$2x+1=9$ $\quad y=5$

$2x=9-1$

$2x=8$

$x=\frac{8}{2}$

$x=4$

$x=4,\ y=5$

-6 اگر $\begin{bmatrix} a+b & 2d-1 \\ 3b+2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 11 & c \end{bmatrix}$ ہوتو a ،b ،c اور d کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$$\begin{bmatrix} a+b & 2d-1 \\ 3b+2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 11 & c \end{bmatrix}$$

چونکہ دونوں قالب مساوی ہیں، لہٰذا ان کے متعلقہ ارکان ایک جیسے ہیں۔

$a+b=10$ ___ (i)

$3b+2=11$ ___ (ii)

$4=c$ ___ (iii)

$2d-1=5$ ___ (iv)

$c=4$ (iii)سے

$3b+2=11$ (ii)سے

$3b=11-2$

$3b=9$

$b=\frac{9}{3}=3 \Rightarrow b=3$

مساوات (i) میں b = 3 درج کرنے سے

$a+b=10$

$a+3=10$

$a = 10 - 3 = 7 \Rightarrow a = 7$

(iv) سے

$2d - 1 = 5$

$2d = 5 + 1$

$2d = 6$

$d = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow d = 3$

$a = 7, b = 3, c = 4, d = 3$

-7 اگر $\begin{bmatrix} p+q & 5 \\ 11 & p-2q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو p اور q کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:

$p + q = 6$ ___ (i)

$p - 2q = 0$ ___ (ii)

(ii) سے

$p - 2q = 0$

$p = 2q$

مساوات (i) میں $p = 2q$ درج کرنے سے

$p + q = 6$

$2q + q = 6$

$3q = 6$

$q = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow q = 2$

مساوات (i) میں $q = 2$ درج کرنے سے

$p + q = 6$

$p + 2 = 6$

$p = 6 - 2 = 4 \Rightarrow p = 4$

پس، $p = 4, q = 2$

3.2 قالبوں کی اقسام (Types of Matrices)

(i) **قالب قطاری:** ایسا قالب جس کی صرف ایک ہی قطار ہو، قطاری قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر، $A = [0\ 1\ 4]$، $B = [a\ b]$، $C = [a]$ قطاری قالب ہیں، ان کا مرتبہ بالترتیب 1-by-3، 1-by-2 اور 1-by-1 ہے۔

(ii) **کالمی قالب:** ایسا قالب جس کا صرف ایک ہی کالم ہو، کالمی قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$، $C = [2]$ کالمی قالب ہیں، ان کا مرتبہ بالترتیب 3-by-1، 2-by-1 اور 1-by-1 ہے۔

(iii) **صفری قالب:** اگر کسی قالب کے تمام ارکان صفر ہوں، تو وہ صفری قالب کہلاتا ہے۔ اس کو O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر، $[0]$، $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ صفری قالب ہیں ان کا مرتبہ بالترتیب 1-by-1، 2-by-2 اور 2-by-3 ہے۔

(iv) **مربعی قالب:** ایسا قالب جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو، مربعی قالب کہلاتا ہے۔ جیسا کہ n-by-n مرتبہ کے قالب کو اکثر مرتبہ n کا مربعی قالب کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{bmatrix}$ مرتبہ 3 کا ایک مربعی قالب ہے۔

مربعی قالب $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ میں، a_{11}, a_{22}, a_{33} کو اصل یا مرکزی وتری ارکان کہا جاتا ہے۔

(v) مستطیلی قالب: اگر کسی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر نہ ہو، تو اسے مستطیلی قالب کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر، $A = [a \ \ b]$، $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ مستطیلی قالب ہیں۔

(vi) وتری قالب: ایک مربعی قالب کو وتری قالب کہا جاتا ہے اگر اس کے مرکزی وتری ارکان میں سے کم از کم ایک غیر صفر ہو اور غیر وتری ارکان سب صفر ہوں۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ وتری قالب ہیں، ان کا مرتبہ بالترتیب 3-by-3 اور 2-by-2 ہے۔

(vii) سکیلر قالب: ایک وتری قالب کو سکیلر قالب کہا جاتا ہے اگر مرکزی وتر میں موجود تمام ارکان ایک جیسے اور غیر صفر ہوں۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$، $C = [\sqrt{3}]$ سکیلر قالب ہیں، ان کا مرتبہ بالترتیب 3-by-3، 2-by-2 اور 1-by-1 ہے۔

(viii) وحدانی قالب: ایک سکیلر قالب کو وحدانی قالب کہا جاتا ہے اگر اس کے تمام مرکزی وتری ارکان 1 ہوں۔

مثال کے طور پر، $P = [1]$، $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ وحدانی قالب ہیں، ان کا مرتبہ 1-by-1، 2-by-2 اور 3-by-3 ہے۔ ہم ان قالبوں کو $I_1 = [1]$، $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

> **یاد رکھیے!**
> سکیلر اور وحدانی قالب وتری قالب بھی ہوتے ہیں لیکن تمام وتری قالب سکیلر اور وحدانی قالب نہیں ہوتے۔

(ix) قالب کا ٹرانسپوز: ایسا قالب جو دیے گئے قالب کی قطاروں اور کالموں کو آپس میں تبدیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اسے دیے گئے قالب کا ٹرانسپوز کہا جاتا ہے۔ اگر A ایک قالب ہو تو اس کے ٹرانسپوز کو A^t سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

(x) سمیٹرک قالب: ایک مربعی قالب A سمیٹرک کہلاتا ہے اگر وہ اپنے ٹرانسپوز کے برابر ہو یعنی $A = A^t$۔

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$ اس طرح، A ایک سمیٹرک قالب ہے۔

www.ilmkidunya.com

(xi) **سکیو سمٹرک قالب:** ایک مربعی قالب A سکیو سمیٹرک کہلاتا ہے اگر $A^t = -A$۔

مثال کے طور پر، $B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو $B^t = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = -B$ اس طرح، B ایک سکیو سمیٹرک قالب ہے۔

(xii) **منفی قالب:** A کا منفی قالب اس کے ہر رکن کو 1- سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے اسے A- سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر، اگر $A = [3 \quad -6]$ ہو تو $-A = [-3 \quad 6]$

حل مشق 3.2

-1 درج ذیل قالبوں میں سے وحدانی قالب، قطاری قالب، کالمی قالب اور صفری قالبوں کی شناخت کیجیے۔

$$A = [5 \ \ 7 \ \ 8],\ B = [0],\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

حل: قالب A ایک قطاری قالب ہے جس کا مرتبہ 1-by-3 ہے۔

قالب B ایک صفری قالب ہے جس کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

یہ قطاری قالب اور کالمی قالب بھی ہے۔

قالب C ایک وحدانی قالب ہے جس کا مرتبہ 2-by-2 ہے۔

قالب D ایک صفری قالب ہے جس کا مرتبہ 2-by-2 ہے۔

قالب E ایک کالمی قالب ہے جس کا مرتبہ 3-by-1 ہے۔

قالب F ایک کالمی قالب ہے جس کا مرتبہ 3-by-1 ہے۔

-2 درج ذیل قالبوں میں سے قطاری، کالمی، مربعی اور مستطیلی قالبوں کی شناخت کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix},\quad F = [5 \ \ -3 \ \ 7],\quad G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix},\quad H = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: قالب F ایک قطاری قالب ہے۔

قالب A ایک کالمی قالب ہے۔

قالب B، D اور G ایک مربعی قالب ہے۔

قالب A، C، E، F اور H مستطیلی قالب ہیں۔

-3 وتری، سکیلر اور وحدانی قالبوں کی شناخت کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: قالب C اور D مرتبہ 2-by-2 کے وتری قالب ہیں۔

قالب B اور E مرتبہ 2-by-2 کے سکیلر قالب ہیں۔

قالب A مرتبہ 2-by-2 کا وحدانی قالب ہے۔

www.ilmkidunya.com

4- درج ذیل قالبوں کے ٹرانسپوز معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \ -2 \ 4], \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \ -2 \ 4], \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B^t = [3 \ 7 \ 6], \quad C^t = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad D^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

5- درج ذیل قالبوں کے منفی قالب معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

حل:

$$-A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \quad -B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad -C = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

6- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ ہوں تو تصدیق کیجیے کہ:

(i) $(A^t)^t = A$ (ii) $(B^t)^t = B$

حل:

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A^t)^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A$$

پس ثابت ہوا کہ $(A^t)^t = A$

حل:

(ii) $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

$$B^t = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(B^t)^t = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = B$$

پس ثابت ہوا کہ $(B^t)^t = B$

7- ثابت کیجیے کہ $L = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ ایک سمیٹرک قالب ہے۔

حل:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} = L$$

پس، $L^t = L$، L ایک سمیٹرک قالب ہے۔

www.ilmkidunya.com

3.3 قالبوں پر الجبری عوامل (Algebraic Operations on Matrices)

قالبوں پر درج ذیل بنیادی عوامل ہوتے ہیں:

(i) قالب کی سکیلر سے ضرب

(ii) قالبوں کی جمع/تفریق

(iii) قالبوں کی ضرب

ایک قالب کو دوسرے قالب سے تقسیم کرنے کا کوئی تصور موجود نہیں ہے۔

قالب کی سکیلر سے ضرب (Multiplication of a Matrix by a Scalar/ Real Number)

دیے گئے قالب $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ اور سکیلر k کے لیے، ہم ایک نیا قالب $kA=\begin{bmatrix} ka & bk & kc \\ kd & ke & kf \end{bmatrix}$ بناتے ہیں، یعنی کہ ہر رکن کو سکیلر k سے ضرب دیتے ہیں۔ خاص طور پر اگر $k=-1$ ہو تو $-A=\begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \end{bmatrix}$

قالبوں کی جمع (Addition of Matrices)

اگر A اور B ہم مرتبہ دو قالب ہوں تو انہیں جمع کیا جا سکتا ہے ان کے مجموعہ کو A + B سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو کہ اسی مرتبہ کا ایک قالب ہوتا ہے۔ ان قالبوں کو جمع کے لیے قابل موافق کہا جاتا ہے A + B کو A اور B کے متناظرہ ارکان کو جمع کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 1: اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہوں تو A + B اور B + A معلوم کیجیے۔

حل: $A=\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

A کا مرتبہ 3-by-3 اور B کا مرتبہ 3-by-3 ہے لہٰذا A اور B کو جمع کیا جا سکتا ہے۔

اب

$$A+B=\begin{bmatrix} 3+4 & 8+1 & 2-2 \\ 5+3 & 3+0 & 1+6 \\ 6+2 & 0+3 & 7+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 8 & 3 & 7 \\ 8 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

اور

$$B+A=\begin{bmatrix} 4+3 & 1+8 & -2+2 \\ 3+5 & 0+3 & 6+1 \\ 2+6 & 3+0 & 4+7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 8 & 3 & 7 \\ 8 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

قالبوں کی تفریق (Subtraction of Matrices)

اگر A اور B ایک ہی مرتبہ کے دو قالب ہوں تو انہیں تفریق کیا جا سکتا ہے اور ان کا فرق جسے A – B یا B – A سے ظاہر کیا جاتا ہے جو کہ اسی مرتبہ کا ایک قالب ہوتا ہے۔ ان قالبوں کو تفریق کے لیے قابل موافق کہا جاتا ہے۔ A – B کو A کے متناظرہ ارکان سے B کے متناظرہ ارکان کو تفریق کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

www.ilmkidunya.com

مثال2: اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ہوں تو A – B اور B – A معلوم کیجیے۔

حل: $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

اب

$$A - B = \begin{bmatrix} 5-3 & 9-6 \\ 4-2 & 8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

اور

$$B - A = \begin{bmatrix} 3-5 & 6-9 \\ 2-4 & 1-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$$

ہم نے دیکھا $A - B \neq B - A$

مثال3: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ ہوں تو A + B اور B – A معلوم کیجیے۔

حل: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

A کا مرتبہ 2-by-2 اور B کا مرتبہ 2-by-3 ہے۔ اس لیے A اور B جمع اور تفریق کے لیے قابل موافق نہیں ہیں۔

قالبوں کا قانون مبادلہ اور تلازم بلحاظ جمع (Commutative and Associative Laws of Addition of Matrices)

(a) قالبوں کا قانون مبادلہ بلحاظ جمع

کوئی بھی ایک جیسے مرتبہ کے قالبوں A اور B کے لیے $A + B = B + A$۔ یہ قانون قالبوں کا قانون مبادلہ بلحاظ جمع کہلاتا ہے۔

فرض کیا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

تب

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 & 3+3 \\ 4+4 & 5+2 & 6+2 \\ 7+0 & 8-1 & 9+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 8 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad ...(i)$$

اور

$$B + A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+1 & 1+2 & 3+3 \\ 4+4 & 2+5 & 2+6 \\ 0+7 & -1+8 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 8 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad ...(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے، $A + B = B + A$ لہٰذا، قالبوں کا قانون مبادلہ بلحاظ جمع لاگو ہوتا ہے۔

www.ilmkidunya.com

(b) **قالبوں کا قانون تلازم بلحاظ جمع**

کوئی بھی ایک جیسے مرتبہ کے قالبوں A، B اور C کے لیے $(A + B) + C = A + (B + C)$۔ یہ قانون قالبوں کا قانون تلازم بلحاظ جمع کہلاتا ہے۔

فرض کیا
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اب،
$$(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 & 3+3 \\ 4+4 & 5+2 & 6+2 \\ 7+0 & 8-1 & 9+0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 8 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 11 & 7 & 11 \\ 8 & 8 & 10 \end{bmatrix} \quad ...(i)$$

اور
$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3+0 & 1+2 & 3+0 \\ 4+3 & 2+0 & 2+3 \\ 0+1 & -1+1 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 11 & 7 & 11 \\ 8 & 8 & 10 \end{bmatrix} \quad ...(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے، $(A + B) + C = A + (B + C)$ لہٰذا، قالبوں کا قانون تلازم بلحاظ جمع لاگو ہوتا ہے۔

قالب کا جمعی ذاتی قالب (Additive Identity of a Matrix)

قالب کا جمعی ذاتی قالب ایسا قالب ہوتا ہے جسے جب اسی مرتبہ کے کسی بھی قالب A میں جمع کیا جائے تو وہ A کو غیر تبدیل شدہ رہنے دیتا ہے۔

ریاضیاتی طور پر، $A + O = A = O + A$، جہاں O ایک صفری قالب ہے جسے جمعی ذاتی قالب بھی کہا جاتا ہے۔

فرض کیا
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اب
$$A + O = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = A$$

www.ilmkidunya.com

اور $O + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = A$

قالب کا جمعی معکوس (Additive Inverse of a Matrix)

ایک قالب A کا جمعی معکوس ایک دوسرا قالب A- ہوتا ہے اس طرح کہ:

$$A + (-A) = O = (-A) + A.$$

تو $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ فرض کیا، $\Rightarrow \quad -A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

اب $A + (-A) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

$$(-A) + A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

لہٰذا A اور A- ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

حل مشق 3.3

-1 درج ذیل میں سے کون سے قالب جمع اور تفریق کے لیے قابل موافق ہیں؟

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, C = [5 \quad 2], D = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, E = [2],$

$F = [7 \quad 11], G = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, H = [3], M = \begin{bmatrix} \ell \\ m \end{bmatrix}$

جواب: قالب A اور D جمع اور تفریق کے لیے موزوں ہیں کیونکہ ان کے مرتبے ایک جیسے ہیں۔

قالب B، قالب G اور قالب M جمع اور تفریق کے لیے موزوں ہیں کیونکہ ان کے مرتبے ایک جیسے ہیں۔

قالب C اور قالب F جمع اور تفریق کے لیے موزوں ہیں کیونکہ ان کے مرتبے ایک جیسے ہیں۔

قالب E اور قالب H جمع اور تفریق کے لیے موزوں ہیں کیونکہ ان کے مرتبے ایک جیسے ہیں۔

-2 اگر $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$، $Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $Z = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ہو تو درج ذیل معلوم کیجیے۔

(i) $X + Y$ (ii) $Y + 7Z$ (iii) $4X - Z$

(iv) $X + 2Y + 3Z$ (v) $X - 4Y + Z$ (vi) $Z - Z$

حل: دیا گیا ہے کہ

$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $Z = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

www.ilmkidunya.com

(i) X + Y

$$X + Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & -1+2 \\ -2+3 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(ii) Y + 7Z

$$Y + 7Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+21 & 2+0 \\ 3+0 & 4-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 2 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$$

(iii) 4X – Z

$$4X - Z = 4\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -4-0 \\ -8-0 & 8+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

(iv) X + 2Y + 3Z

$$X + 2Y + 3Z = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2+9 & -1+4+0 \\ -2+6+0 & 2+8-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

(v) X – 4Y + Z

$$X - 4Y + Z = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-4+3 & -1-8+0 \\ -2-12+0 & 2-16-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -14 & -16 \end{bmatrix}$$

(vi) Z – Z

$$Z - Z = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-3 & 0-0 \\ 0-0 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-3 درج ذیل قالبوں کا جمعی معکوس معلوم کیجیے:

(i) $P = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ (ii) $Q = [9 \quad -3]$

حل: $-P = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$

حل: $-Q = [-9 \quad 3]$

(iii) $R = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (iv) $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

حل: $-R = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

حل: $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$-S = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$-S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

-4 اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ہوں تو درج ذیل کی تصدیق کیجیے کہ:

(i) $A + B = B + A$ (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(iii) $(2A + B) + C = 2A + (B + C)$ (iv) $3(A + B) = 3A + 3B$

(i) $A + B = B + A$

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & .6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 3+4 \\ -3+5 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ — (i)}$$

$$B+A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+2 & 4+3 \\ 5-3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ — (ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $A + B = B + A$

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

حل:

$$(A+B) + C = \left[\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 3+4 \\ -3+5 & 2+6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+1 & 7-2 \\ 2+0 & 8+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 13 \end{bmatrix} \text{ — (i)}$$

www.ilmkidunya.com

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3+1 & 4-2 \\ 5+0 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+4 & 3+2 \\ -3+5 & 2+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{—(ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(A + B) + C = A + (B + C)$

(iii) $(2A + B) + C = 2A + (B + C)$

حل:

$$(2A + B) + C = \left[2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 6+4 \\ -6+5 & 4+6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7+1 & 10-2 \\ -1+0 & 10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -1 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{—(i)}$$

$$2A + (B+C) = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3+1 & 4-2 \\ 5+0 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+4 & 6+2 \\ -6+5 & 4+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -1 & 15 \end{bmatrix} \leftarrow \text{(ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے $(2A+B) + C = 2A + (B+C)$

(iv) $3(A + B) = 3A + 3B$

حل:

$$3(A + B) = 3\left[\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\right]$$

$$= 3\begin{bmatrix} 2+3 & 3+4 \\ -3+5 & 2+6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 21 \\ 6 & 24 \end{bmatrix} \quad \text{———— (i)}$$

$$3A + 3B = 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+9 & 9+12 \\ -9+15 & 6+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 21 \\ 6 & 24 \end{bmatrix} \quad \text{———— (ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے $3(A + B) = 3A + 3B$

-5 اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ ہوں تو ثابت کیجیے کہ A قالب B کا اور B قالب A کا جمعی معکوس ہے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

ہم جانتے ہیں کہ اگر A اور B دو ایک جیسے مرتبے کے قالب ہوں جیسا کہ A+B=O=B+A تو قالب A اور B ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

اب

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-5 & 6-6 \\ 7-7 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O \quad \text{_____ (i)}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -7 & +2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+5 & -6+6 \\ -7+7 & +2-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O \quad \text{_____ (ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے $A + B = O = B + A$

-6 اگر $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ہوں تو تصدیق کیجیے۔

(i) $(A + B)^t = A^t + B^t$ **(ii) $(A-B)^t = A^t - B^t$**

(i) $(A + B)^t = A^t + B^t$

حل: دیا گیا ہے کہ

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+8 & -2-1 \\ 0+3 & 3+0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^t = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ --- (i)}$$

$$A^t + B^t = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+8 & 0+3 \\ -2-1 & 3+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ --- (ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے $(A + B)^t = A^t + B^t$

www.ilmkidunya.com

(ii) $(A-B)^t = A^t - B^t$

حل: دیا گیا ہے کہ

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 6-8 & -2+1 \\ 0-3 & 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^t = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ — (i)}$$

$$A^t - B^t = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-8 & 0-3 \\ -2+1 & 3-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

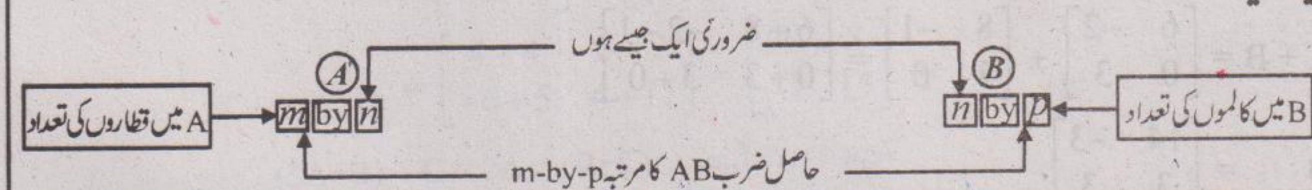
پس، (i) اور (ii) سے $(A-B)^t = A^t - B^t$

3.4 قالبوں کی ضرب (Multiplication of Matrices)

قالب A کو قالب B سے ضرب کے لیے قابل موافق کہا جاتا ہے اگر A میں کالموں کی تعداد B میں قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔

چنانچہ، اگر A اور B بالترتیب مرتبہ m-by-n اور n-by-p کے دو قالب دیے گئے ہوں تو قالب A اور B کا حاصل ضرب AB سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کا مرتبہ m-by-p ہوتا ہے۔

یاد رکھیے!



یاد رکھیے!

ضرب کے لیے

اگر A اور B دو قالب ہوں اور A کو B سے ضرب اس وقت ممکن ہے جب:

(i) قالب B میں قطاروں کی تعداد = قالب A میں کالموں کی تعداد (ii) قالب A کی قالب B کے ساتھ ضرب کو AB لکھا جاتا ہے۔

(iii) AB معلوم کرنے کے لیے ہم A کی پہلی قطار سے شروع کرتے ہیں اور اس کے ہر رکن کو قالب B کے پہلے کالم کے متناظرہ ارکان سے ضرب دے کر جمع کرتے ہیں۔ اس سے AB کی پہلی قطار کا پہلا رکن حاصل ہوتا ہے۔

پھر ہم A کی پہلی قطار کے ہر رکن کو B کے دوسرے کالم سے ضرب دیتے ہیں اور حاصل ضرب کو جمع کرتے ہیں یہ عمل حاصل ضرب قالب AB کی پہلی قطار کا دوسرا رکن فراہم کرتا ہے۔ اسی طرح ہم باری باری A کی تمام قطاروں کو B کے کالموں سے ضرب دیتے ہیں اور حاصل ضرب کو جمع کرتے ہیں تا کہ قالب AB کے باقی ارکان حاصل کیے جا سکیں۔

www.ilmkidunya.com

مثال4: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} \ell & m \\ n & p \end{bmatrix}$ ہوں تو معلوم کیجیے:

(i) اگر ممکن ہو تو AB (ii) اگر ممکن ہو تو BA

حل: (i) 2 = قالب A میں کالموں کی تعداد

2 = قالب B میں قطاروں کی تعداد

پس AB ممکن ہے۔

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ell & m \\ n & p \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a\ell + bn & am + bp \\ c\ell + dn & cm + dp \end{bmatrix}$$

(ii) 2 = قالب B میں کالموں کی تعداد

2 = قالب A میں قطاروں کی تعداد

پس BA ممکن ہے۔

$$BA = \begin{bmatrix} \ell & m \\ n & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} \ell a + mc & \ell b + md \\ na + pc & nb + pd \end{bmatrix}$$

مشاہدہ کیا کہ $AB \neq BA$

مثال5: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ہوں تو معلوم کیجیے:

(i) اگر ممکن ہو تو AB (ii) اگر ممکن ہو تو BA

حل: (i) 2 = قالب A میں کالموں کی تعداد

2 = قالب B میں قطاروں کی تعداد

پس AB ممکن ہے۔

اب

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times(-2) + 0\times 1 \\ 5\times(-2) + (-3)\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 0 \\ -10 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

(ii) 1 = قالب B میں کالموں کی تعداد

2 = قالب A میں قطاروں کی تعداد

پس BA ممکن ہے۔

خود آزمائی!

اگر $A = [5 \quad 3]$ اور $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ہو تو AB اور اس کا مرتبہ معلوم کیجیے۔

حل:

$$AB = [5 \quad 3]\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [5\,(-2) + 3\,(1)]$$

$$= [-10 + 3] = [-7]$$

$AB = [-7]$ اور اس کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

www.ilmkidunya.com

(Commutative Law of Multiplication of Matrices) قالبوں کا قانون مبادلہ بلحاظ ضرب

فرض کیا

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5\times1+2\times0 & 5\times5+2(-2) \\ 3\times1+4\times0 & 3\times5+4\times(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+0 & 25-4 \\ 3+0 & 15-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 21 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad ...(i)$$

اب

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times5+5\times3 & 1\times2+5\times4 \\ 0\times5+(-2)\times3 & 0\times2+(-2)\times4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+15 & 2+20 \\ 0-6 & 0-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 22 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} \quad ...(ii)$$

(i)اور(ii) سے ثابت ہوا کہ $AB \neq BA$

لہٰذا، قالبوں کی ضرب میں عمومی طور پر قانون مبادلہ لاگو نہیں ہوتا۔

(Associative Law of Multiplication of Matrices) قالبوں کا قانون تلازم بلحاظ ضرب

اگر A، B اور C کوئی تین قالب ہوں، تو $(AB)\,C = A\,(BC)$ قالبوں کا قانون تلازم بلحاظ ضرب کہلاتا ہے۔

فرض کیا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(2)+0(0) & 1(1)+0(3) \\ 2(2)+1(0) & 2(1)+1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 1+0 \\ 4+0 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

اب

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1)+1(4) & 2(2)+1(0) \\ 4(1)+5(4) & 4(2)+5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 4+0 \\ 4+20 & 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 24 & 8 \end{bmatrix} \quad ...(i)$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1)+1(4) & 2(2)+1(0) \\ 0(1)+3(4) & 0(2)+3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 4+0 \\ 0+12 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(6)+0(12) & 1(4)+0(0) \\ 2(6)+1(12) & 2(4)+1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0 & 4+0 \\ 12+12 & 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 24 & 8 \end{bmatrix} \quad ...(ii)$$

پس، (i) اور (ii) سے $(AB)C = A(BC)$

قالبوں کا قانون تلازم بلحاظ ضرب لاگو ہوتا ہے۔

ضرب کا قانون تقسیمی بلحاظ جمع اور تفریق

(Distributive Laws of Multiplication Over Addition and Subtraction)

(a) فرض کیا A، B اور C کوئی تین قالب ہوں، تو درج ذیل ضرب کے قانون تقسیمی بلحاظ جمع ہیں:

(i) $A(B + C) = AB + AC$ (بایاں قانون تقسیمی بلحاظ جمع)

(ii) $(A + B)C = AC + BC$ (دایاں قانون تقسیمی بلحاظ جمع)

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(4)+2(7) & 1(1)+2(6) \\ 0(4)+1(7) & 0(1)+1(6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+14 & 1+12 \\ 0+7 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 13 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad ...(i)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4 & 1+8 \\ 0+2 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+10 & 0+4 \\ 0+5 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+11 & 9+4 \\ 2+5 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 13 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad ...(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے $A(B + C) = AB + AC$

اس طرح ہم دایاں قانون تقسیمی بلحاظ جمع بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

(b) **اگر A، B اور C کوئی سے تین قالب ہوں، تو درج ذیل ضرب کے قانون تقسیمی بلحاظ تفریق ہیں:**

(i) $A(B - C) = AB - AC$ (بایاں قانون تقسیمی بلحاظ تفریق)

(ii) $(A - B)C = AC - BC$ (دایاں قانون تقسیمی بلحاظ تفریق)

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4&3\\1&2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}$$ فرض کیا

$$A(B-C)=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}4&3\\1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4-2&3-1\\1-0&2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(2)+2(1)&1(2)+2(1)\\0(2)+1(1)&0(2)+1(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+2&2+2\\0+1&0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&4\\1&1\end{bmatrix} \quad ...(i)$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(4)+2(1)&1(3)+2(2)\\0(4)+1(1)&0(3)+1(2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+2&3+4\\0+1&0+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&7\\1&2\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(2)+2(0)&1(1)+2(1)\\0(2)+1(0)&0(1)+1(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+0&1+2\\0+0&0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}$$

$$AB-AC=\begin{bmatrix}6&7\\1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-2&7-3\\1-0&2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&4\\1&1\end{bmatrix} \quad ...(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے $A(B-C)=AB-AC$

اس طرح ہم دایاں قانون تقسیمی بلحاظ تفریق بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

قالب کا ضربی ذاتی قالب (Multiplicative Identity of a Matrix)

قالب کا ضربی ذاتی قالب ایک ایسا قالب ہوتا ہے جسے کسی بھی قالب A سے ضرب دیں تو قالب A میں کوئی تبدیلی نہ آئے یعنی،

$AI=IA=A$ جہاں I ایک ضربی ذاتی قالب ہے۔

حل:

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\4&1\end{bmatrix}$$ فرض کیا

$$AI=\begin{bmatrix}2&3\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(1)+3(0)&2(0)+3(1)\\4(1)+1(0)&4(0)+1(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+0&0+3\\4+0&0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\4&1\end{bmatrix}=A$$

$$IA=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(2)+0(4)&1(3)+0(1)\\0(2)+1(4)&0(3)+1(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+0&3+0\\0+4&0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\4&1\end{bmatrix}=A$$

پس، قالب A کا ضربی ذاتی قالب I ہے۔

www.ilmkidunya.com

حل مشق 3.4

-1 اگر ممکن ہو تو AB اور BA معلوم کیجیے۔

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

حل: دیا گیا ہے کہ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

2 = قالب B میں قطاروں کی تعداد , 2 = قالب A میں کالموں کی تعداد

پس، AB ممکن ہے

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3)+2(1) & 1(2)+2(-1) \\ -1(3)+0(1) & -1(2)+0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 2-2 \\ -3+0 & -2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

دیا گیا ہے کہ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2 = قالب A میں قطاروں کی تعداد , 2 = قالب B میں کالموں کی تعداد

پس، BA ممکن ہے

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1)+2(-1) & 3(2)+2(0) \\ 1(1)+(-1)(-1) & 1(2)-1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 6+0 \\ 1+1 & 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

حل: دیا گیا ہے کہ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

2 = قالب A میں کالموں کی تعداد

2 = قالب B میں قطاروں کی تعداد

پس، AB ممکن ہے

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= [1(3) + (-2)(-4)]$$

$$= [3 + 8] = [11]$$

1 = اور قالب B میں کالموں کی تعداد

1 = قالب A میں قطاروں کی تعداد

پس، BA ممکن ہے

$$BA = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times1 & 3\times(-2) \\ -4\times1 & -5\times(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$

حل: دیا گیا ہے کہ $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$

1 = قالب A میں کالموں کی تعداد

1 = قالب B میں قطاروں کی تعداد

پس، AB ممکن ہے

$$AB = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(2) & 4(5) \\ 4(2) & 4(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$$

2 = قالب B میں کالموں کی تعداد

2 = قالب A میں قطاروں کی تعداد

پس، BA ممکن ہے

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= [2(4) + 5(4)]$$

$$= [8 + 20] = [28]$$

www.ilmkidunya.com

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

حل: دیا گیا ہے کہ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

قالب A میں کالموں کی تعداد = 2

قالب B میں قطاروں کی تعداد = 2

پس، AB ممکن ہے

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-1)+2(2) & 1(4)+2(3) & 1(1)+2(1) \\ -1(-1)+1(2) & -1(4)+1(3) & -1(1)+1(1) \\ 3(-1)+0(2) & 3(4)+0(3) & 3(1)+0(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+4 & 4+6 & 1+2 \\ 1+2 & -4+3 & -1+1 \\ -3+0 & 12+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ -3 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

قالب B میں کالموں کی تعداد = 3

قالب A میں قطاروں کی تعداد = 3

پس، BA ممکن ہے

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(1)+4(-1)+1(3) & -1(2)+4(1)+1(0) \\ 2(1)+3(-1)+1(3) & 2(2)+3(1)+1(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-4+3 & -2+4+0 \\ 2-3+3 & 4+3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

(v) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

حل: دیا گیا ہے کہ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

قالب A میں کالموں کی تعداد = 3

قالب B میں قطاروں تعداد = 3

www.ilmkidunya.com

پس، AB ممکن ہے

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+2(2)+2(1) & 1(5)+2(4)+2(6) \\ 3(1)+1(2)+1(1) & 3(5)+1(4)+1(6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4+2 & 5+8+12 \\ 3+2+1 & 15+4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 25 \\ 6 & 25 \end{bmatrix}$$

قالب B میں کالموں کی تعداد = 2

قالب A میں قطاروں کی تعداد = 2

پس، BA ممکن ہے

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+5(3) & 1(2)+5(1) & 1(2)+5(1) \\ 2(1)+4(3) & 2(2)+4(1) & 2(2)+(4)(1) \\ 1(1)+6(3) & 1(2)+6(1) & 1(2)+6(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 7 & 7 \\ 14 & 8 & 8 \\ 19 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

-2 اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ہوں تو ثابت کیجیے۔

(i) $AB \neq BA$

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(2)+1(0) & 5(-1)+1(3) \\ -1(2)+4(0) & -1(-1)+4(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+0 & -5+3 \\ -2+0 & 1+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 13 \end{bmatrix} \quad ...(i)$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(5)+(-1)(-1) & 2(1)+(-1)(4) \\ 0(5)+3(-1) & 0(1)+3(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+1 & 2-4 \\ 0-3 & 0+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} \quad ...(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $AB \neq BA$

(ii) $A(B-C) = AB - AC$

حل:

$$B - C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 & -1-1 \\ 0-1 & 3-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A(B-C)=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5(-3)+1(-1) & 5(-2)+1(-1)\\ -1(-3)+4(-1) & -1(-2)+4(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15-1 & -10-1\\ 3-4 & +2-4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-16 & -11\\ -1 & -2\end{bmatrix} \quad ...(i)$$

$$AB=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5(2)+1(0) & 5(-1)+1(3)\\ -1(2)+4(0) & -1(-1)+4(3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10+0 & -5+3\\ -2+0 & 1+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -2\\ -2 & 13\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5(5)+1(1) & 5(1)+1(4)\\ -1(5)+4(1) & -1(1)+4(4)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}25+1 & 5+4\\ -5+4 & -1+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26 & 9\\ -1 & 15\end{bmatrix}$$

$$AB-AC=\begin{bmatrix}10 & -2\\ -2 & 13\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}26 & 9\\ -1 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10-26 & -2-9\\ -2-(-1) & 13-15\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-16 & -11\\ -2+1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16 & -11\\ -1 & -2\end{bmatrix} \quad .... (ii)$$

پس،(i)اور(ii)سے ثابت ہوا کہ $A(B-C) = AB - AC$

(iii) A(BC) = (AB)C

حل:

$$BC=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(5)+(-1)(1) & 2(1)+(-1)(4)\\ 0(5)+3(1) & 0(1)+3(4)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10-1 & 2-4\\ 0+3 & 0+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -2\\ 3 & 12\end{bmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & -2\\ 3 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5(9)+1(3) & 5(-2)+1(12)\\ -1(9)+4(3) & -1(-2)+4(12)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}45+3 & -10+12\\ -9+12 & 2+48\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}48 & 2\\ 3 & 50\end{bmatrix} \quad .... (i)$$

$$AB=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5(2)+1(0) & 5(-1)+1(3)\\ -1(2)+4(0) & -1(-1)+4(3)\end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

$$=\begin{bmatrix}10+0 & -5+3\\ -2+0 & 1+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -2\\ -2 & 13\end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix}10 & -2\\ -2 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10(5)+(-2)(1) & 10(1)+(-2)(4)\\ (-2)(5)+13(1) & -2(1)+13(4)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}50-2 & 10-8\\ -10+13 & -2+52\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}48 & 2\\ 3 & 50\end{bmatrix}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $A(BC)=(AB)C$

(iv) $(BC)^t=C^tB^t$

حل:

$$BC=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(5)+(-1)(1) & 2(1)+(-1)(4)\\ 0(5)+3(1) & 0(1)+3(4)\end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix}10-1 & 2-4\\ 0+3 & 0+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -2\\ 3 & 12\end{bmatrix}$$

$$(BC)^t=\begin{bmatrix}9 & 3\\ -2 & 12\end{bmatrix}\quad\ldots\text{(i)}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$B^t=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix},C^t=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$C^tB^t\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5(2)+1(-1) & 5(0)+1(3)\\ 1(2)+4(-1) & 1(0)+4(3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10-1 & 0+3\\ 2-4 & 0+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 3\\ -2 & 12\end{bmatrix}\quad\ldots\text{(ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(BC)^t=C^tB^t$

(v) $(B+C)A=BA+CA$

حل:

$$B+C=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+5 & -1+1\\ 0+1 & 3+4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

$$(B+C)A=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7(5)+0(-1) & 7(1)+0(4)\\ 1(5)+7(-1) & 1(1)+7(4)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}35-0 & 7+0\\ 5-7 & 1+28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}35 & 7\\ -2 & 29\end{bmatrix}\quad\ldots\text{(i)}$$

www.ilmkidunya.com

$$BA=\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(5)+(-1)(-1)&2(1)+(-1)(4)\\0(5)+3(-1)&0(1)+3(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10+1&2-4\\0-3&0+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&-2\\-3&12\end{bmatrix}$$

$$CA=\begin{bmatrix}5&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5(5)+1(-1)&5(1)+1(4)\\1(5)+4(-1)&1(1)+4(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25-1&5+4\\5-4&1+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24&9\\1&17\end{bmatrix}$$

$$BA+CA=\begin{bmatrix}11&-2\\-3&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}24&9\\1&17\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11+24&-2+9\\-3+1&12+17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}35&7\\-2&29\end{bmatrix}\quad ...(ii)$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(B+C)A=BA+CA$

-3 اگر $\begin{bmatrix}4&a\\b&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$ ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{bmatrix}4&a\\b&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4(6)+a(6)\\b(6)+3(6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}24+6a\\6b+18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$$

چونکہ دونوں قالب مساوی ہیں، لہٰذا ان کے متعلقہ ارکان ایک جیسے ہوں گے

$24+6a=6$

$6a=6-24$

$6a=-18$

$a=-\frac{18}{6}$

$a=-3$

$6b+18=3$

$6b=3-18$

$6b=-15$

$b=-\frac{15}{6}$

$b=-\frac{5}{2}$

پس $a=-3, b=-\frac{5}{2}$

-4 اگر $\begin{bmatrix}x&1\\y&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-1\\4&-2\end{bmatrix}$ ہو تو x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{bmatrix}x&1\\y&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-1\\4&-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x(1)+1(3)&x(0)+1(-1)\\y(1)+2(3)&y(0)+2(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-1\\4&-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x+3&0-1\\y+6&0-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-1\\4&-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x+3&-1\\y+6&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-1\\4&-2\end{bmatrix}$$

چونکہ دونوں قالب مساوی ہیں، لہٰذا ان کے متعلقہ ارکان ایک جیسے ہوں گے

$x+3=7$

$x=7-3$

$x=4$

$y+6=4$

$y=4-6$

$y=-2$

پس $x=4$ اور $y=-2$

www.ilmkidunya.com

3.5 قالب کا ضربی معکوس (Multiplicative Inverse of a Matrix)

مرتبہ 2 کے قالب کا مقطع (Determinant of a Matrix of Order 2)

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ مرتبہ 2 کا ایک قالب ہے۔ A کے مقطع کو اس طرح لکھا جاتا ہے

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

مثال کے طور پر، فرض کیا کہ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک مربعی قالب ہے تو $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ قالب A کا مقطع کہلاتا ہے اور ad - bc مقطع کی قیمت کہلاتا ہے۔ ہم نوٹ کر سکتے ہیں کہ A اور |A| کے ارکان ایک جیسے ہیں۔ مقطع میں قالب کی بریکٹ [ ] کو عمودی لائنوں "| |" سے تبدیل کیا جاتا ہے۔

مثال 6: $B = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ کے مقطع کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$|B| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 8 \times 3 - 4 \times 2$$
$$= 24 - 8 = 16$$

> **یاد رکھیے!**
> قطاروں کو کالموں میں اور کالموں کو قطاروں میں تبدیل کرنے سے مقطع کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔

نادر اور غیر نادر قالب (Singular and Non-Singular Matrices)

ایک مربعی قالب A نادر قالب کہلاتا ہے اگر $|A| = 0$ ہو۔ ایک مربعی قالب A غیر نادر قالب کہلاتا ہے اگر $|A| \neq 0$ ہو۔

مثال کے طور پر، فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

اب $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \times 4 - 2 \times 8 = 16 - 16 = 0$

پس قالب A ایک نادر قالب ہے۔

مثال کے طور پر، فرض کیا $M = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

اب $|M| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 7 \times 9 - 4 \times 3 = 63 - 12 = 51 \neq 0$

پس قالب M ایک غیر نادر قالب ہے۔

قالب کا ایڈ جائنٹ (Adjoint of a Matrix)

ایک مربعی قالب کا ایڈ جائنٹ، قالب الجبرا میں اہم تصور ہے، خاص طور پر جب کسی قالب کا معکوس معلوم کیا جا رہا ہو یا مساواتوں کا نظام حل کیا جا رہا ہو۔

مرتبہ 2 کے ایک مربعی قالب A کا ایڈ جائنٹ، وتری ارکان کی جگہ اور دوسرے ارکان کی علامتوں کو تبدیل کرنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

اسے Adj A سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

www.ilmkidunya.com

غیر نادر قالب کا ضربی معکوس (Multiplicative Inverse of a Non-Singular Matrix)

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{3}{4}$ اور $\frac{4}{3}$ ضربی معکوس ہیں $\left(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\right)$ کیونکہ ان کا حاصل ضرب 1 ہے۔

> **یاد رکھیے!**
> نادر قالب کا ضربی معکوس نہیں ہوتا۔

اسی طرح، اگر ہمارے پاس ایک ہی مرتبہ کے دو مربعی قالب ہوں اور ان کا حاصل ضرب ایک وحدانی قالب ہو، تو یہ قالب ایک دوسرے کے ضربی معکوس کہلاتے ہیں۔

فرض کریں A کوئی مربعی قالب ہے اور B ایک اور مربعی قالب ہے جس کا مرتبہ A کے مرتبہ کے برابر ہے، اس طرح کہ

$AB = BA = I$ تو A اور B ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

لہٰذا، $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

ہم A کے ضربی معکوس A^{-1} سے ظاہر کرتے ہیں۔

ایڈجائنٹ کے طریقہ سے مربعی قالب کا معکوس معلوم کرنا (Adjoint Method to Find Inverse of a square Matrix)

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک غیر نادر قالب ہے، تو A کا ضربی معکوس ہے:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\,A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال 7: اگر $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو A کا ضربی معکوس معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \times 3 - 5 \times 4$$

$$= 24 - 20 = 4 \neq 0$$

A غیر نادر قالب ہے اس لیے A^{-1} ممکن ہے۔

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}\,A$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-5}{4} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

آئیے ثابت کرتے ہیں کہ A اور A^{-1} ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

اور

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-5}{4} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8\times\frac{3}{4} + 5\times(-1) & 8\times\left(\frac{-5}{4}\right) + 5\times 2 \\ 4\times\frac{3}{4} + 3\times(-1) & 4\times\left(\frac{-5}{4}\right) + 3\times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-5 & 10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

اب

$$A^{-1}A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3\times 8 + (-5)\times 4 & 3\times 5 + (-5)\times 3 \\ (-4)\times 8 + 8\times 4 & (-4)\times 5 + 8(3) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 24-20 & 15-15 \\ -32+32 & -20+24 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

پس $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

www.ilmkidunya.com

لہٰذا، $\begin{bmatrix}8 & 5\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{5}{4}\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

چیلنج!

اگر $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ہوں تو تصدیق کیجیے، $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ کیا اس کو ہم ضربی معکوس کا ریورسل قانون بھی کہہ سکتے ہیں؟

حل:

L.H.S

$$AB = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2(3)+1(2) & 2(4)+1(4)\\ 3(3)+2(2) & 3(4)+2(4)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}6+2 & 8+4\\ 9+4 & 12+8\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix}8 & 12\\ 13 & 20\end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix}8 & 12\\ 13 & 20\end{vmatrix}$$

$$= (8 \times 20) - (13 \times 12)$$

$$= 160 - 156$$

$$= 4 \neq 0$$

$$Adj(AB) = \begin{bmatrix}20 & -12\\ -13 & 8\end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \times Adj(AB)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}20 & -12\\ -13 & 8\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{20}{4} & \frac{-12}{4}\\ \frac{-13}{4} & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -3\\ -\frac{13}{4} & 2\end{bmatrix} \quad \text{(i)}$$

اب

R.H.S

$$B = \begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$|B| = (3 \times 4) - 2(4)$$

$$= 12 - 8 = 4 \neq 0$$

$$Adj\,B = \begin{bmatrix}4 & -4\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \times Adj\,B$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & -4\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{4}{4} & -\frac{4}{4}\\ -\frac{2}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & -1\\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$|A| = (2 \times 2) - (3 \times 1)$$

$$= 4 - 3 = 1$$

$$Adj\,A = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1(2)+(-1)(-3) & 1(-1)+(-1)(2)\\ -\frac{1}{2}(2)+\frac{3}{4}(-3) & -\frac{1}{2}(-1)+\frac{3}{4}(2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2+3 & -1-2\\ -1-\frac{9}{4} & +\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5 & -3\\ \frac{-4-9}{4} & \frac{4}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -3\\ -\frac{13}{4} & 2\end{bmatrix} \quad \text{(ii)}$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ہاں، ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ ایک ضربی معکوس کا ریورسل قانون ہے۔

مثال 8: $A = \begin{bmatrix}4 & -2\\ -6 & 4\end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}$ ایک

دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

اب $AB = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4\times1+(-2)\times\frac{3}{2} & 4\times\frac{1}{2}+(-2)\times1 \\ (-6)\times1+4\times\frac{3}{2} & (-6)\times\frac{1}{2}+4\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

اور $BA = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times4+\frac{1}{2}\times(-6) & 1\times(-2)+\frac{1}{2}\times4 \\ \frac{3}{2}\times4+1\times(-6) & \frac{3}{2}\times(-2)+1\times4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

پس، $AB = BA = I$

اس لیے $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

یاد رکھیے!
اگر A نادر قالب ہو یعنی کہ $|A| = 0$، تو اس کا معکوس نہیں ہوتا۔

مثال 9: اگر $A = \begin{bmatrix} x & 8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ ایک نادر قالب ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $A = \begin{bmatrix} x & 8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ ایک نادر قالب ہے تو $|A| = 0$

اب $|A| = \begin{vmatrix} x & 8 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$

چونکہ A ایک نادر قالب ہے، اس لیے

$|A| = 10x - 40 = 0$

$10x = 40$

$\Rightarrow \quad x = 4$

چیلنج!
کوئی 2-by-2 مرتبہ کا قالب لیں اور معلوم کیجیے کہ کیا یہ نادر ہے یا غیر نادر۔ اس کا ایڈ جائنٹ بھی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا $A\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= 3(4) - 1(2)$

$= 12 - 2 = 10 \neq 0$

لہٰذا، یہ ایک غیر نادر قالب۔

$\text{Adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

حل مشق 3.5

1- ہر مقطع کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

حل: $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

$= 10(6) - 4(5) = 60 - 20 = 40$

(ii) $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}$

حل: $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}$

$= -5(-7) - (-3)(8) = 35 + 24 = 59$

www.ilmkidunya.com

(iii) $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

حل:

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(2) - 0(8) = 6 - 0$$

$$= 6$$

-2 معلوم کیجیے کہ درج ذیل قالب نادر ہیں یا غیر نادر۔

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5(2) - (3)(3) = 10 - 9$$

$$= 1 \neq 0$$

پس، قالب A ایک غیر نادر قالب ہے۔

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 7 & 21 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 7(6) - 2(21) = 42 - 42 = 0$$

پس، قالب B ایک نادر قالب ہے۔

$$C = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 13(3) - 7(5) = 39 - 35 = 4 \neq 0$$

پس، قالب C ایک غیر نادر قالب ہے۔

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0) - 0(0) = 0 - 0 = 0$$

پس، قالب D ایک نادر قالب ہے۔

-3 اگر $A = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$ نادر قالب ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$A = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$$

دی گئی شرط کے مطابق قالب A ایک نادر قالب ہے، لہٰذا

$$\begin{vmatrix} x & 6 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(15) - 5(6) = 0$$

$$15x - 30 = 0 \Rightarrow 15x = 30$$

$$x = \frac{30}{15} = 2$$

-4 درج ذیل قالبوں کا ایڈجائنٹ معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{Adj}\,B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj}\,C = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

-5 درج ذیل قالبوں کا ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

حل: فرض کیا

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5(5) - 0(0) = 25 - 0 = 25 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہٰذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}\,A$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{25} & \frac{0}{25} \\ \frac{0}{25} & \frac{5}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

$$= 3(-3)-5(5) = -9-25 = -34 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہٰذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}\,A$$

$$= \frac{1}{-34}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{-34} & \frac{-5}{-34} \\ \frac{-5}{-34} & \frac{3}{-34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{34} & \frac{5}{34} \\ \frac{5}{34} & \frac{-3}{34} \end{bmatrix}$$

(v) $\begin{bmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$

حل: فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 10(3) - 3(8) = 30 - 24 = 6 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہٰذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}\,A$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{6} & -\frac{8}{6} \\ -\frac{3}{6} & \frac{10}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

(vi) $\begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

حل: فرض کیا $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2(5) - 4(-3) = -10 + 12 = 2 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہٰذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}\,A$$

(ii) $\begin{bmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{8} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

حل: فرض کیا $A = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)2 - 7(8) = -8 - 56 = -64 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہٰذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}\,A$$

$$= \frac{1}{-64}\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{-64} & \frac{-8}{-64} \\ \frac{-7}{-64} & \frac{-4}{-64} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{32} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{64} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

(iii) $\begin{vmatrix} \mathbf{40} & \mathbf{8} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$

حل: فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 40 & 8 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 40 & 8 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 40(2) - 5(8) = 80 - 40 = 40 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہٰذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -5 & 40 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}\,A$$

$$= \frac{1}{40} \times \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -5 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{40} & \frac{-8}{40} \\ \frac{-5}{40} & \frac{40}{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

(iv) $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} \end{vmatrix}$

حل: فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5 & 3\\ -4 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{-4}{2} & -\frac{2}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

-6 اگر $A = \begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ ، ہوتو A^{-1} معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

حل: فرض کیا

$$A = \begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$= 5(-1) - 2(-3) = -5 + 6 = 1 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہٰذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}\,A$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5(-1)+(-3)(-2) & 5(3)+(-3)(5)\\ 2(-1)+(-1)(-2) & 2(3)+(-1)(5)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-5+6 & 15-15\\ -2+2 & 6-5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I \quad ...(i)$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1(5)+3(2) & -1(-3)+3(-1)\\ -2(5)+5(2) & -2(-3)+5(-1)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-5+6 & 3-3\\ -10+10 & 6-5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I \quad ...(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے یہ ثابت ہوا کہ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

-7 ثابت کیجیے کہ درج ذیل قالب ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

(i) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

حل:

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2(2)+(-1)(3) & 2(1)+(-1)(2)\\ -3(2)+2(3) & -3(1)+2(2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4-3 & 2-2\\ -6+6 & -3+4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I$$

چونکہ $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix} = I$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2(2)+1(-3) & 2(-1)+1(2)\\ 3(2)+2(-3) & 3(-1)+2(2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4-3 & -2+2\\ 6+6 & -3+4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I \quad ___(i)$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

(ii) $\begin{bmatrix}4 & 15\\ 2 & 8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & -\frac{15}{2}\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

حل:

$$\begin{bmatrix}4 & 15\\ 2 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -\frac{15}{2}\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4(4)+15(-1) & 4\left(-\frac{15}{2}\right)+15(2)\\ 2(4)+8(-1) & 2\left(-\frac{15}{2}\right)+8(2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}16-15 & -30+30\\ 8-8 & -15+16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I$$

$$\begin{bmatrix}4 & 15\\ 2 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -\frac{15}{2}\\ -1 & 2\end{bmatrix} = I$$

www.ilmkidunya.com

$$= \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{-8} & \frac{1}{-8} \\ \frac{8}{-8} & \frac{0}{-8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{8} & -\frac{1}{8} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ....(i)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2) - (-3)(-1) = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

اس لیے قالب B ایک غیر نادر قالب ہے، لہٰذا، B^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj}\,B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \times \text{Adj}\,B$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-3 \times 6) - 5(-2) = -18 + 10 = -8 \neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے، لہٰذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}\,A$$

$$= \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{6}{-8} & \frac{2}{-8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -\frac{15}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \times 4 + \left(\frac{-15}{2}\right) \times 2 & 4 \times 15 + \left(\frac{-15}{2}\right) \times 8 \\ -1 \times 4 + 2 \times 2 & -1 \times 15 + 2 \times 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 - 15 & 60 + (-15) \times 4 \\ -4 + 4 & -15 + 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 60 - 60 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (ii)$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{15}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

8- اگر ثابت کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(i) $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3(2)+(-2)(-3) & -3(-1)+(-2)(2) \\ 5(2)+6(-3) & 5(-1)+6(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6+6 & 3-4 \\ 10-18 & -5+12 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 0(7) - (-8)(-1) = 0 - 8$$

$$= -8 \neq 0$$

اس لیے AB ایک غیر نادر قالب ہے، لہٰذا، $(AB)^{-1}$ ممکن ہے۔

$$\text{Adj}(AB) = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \times \text{Adj}(AB)$$

www.ilmkidunya.com

$$= \begin{bmatrix} \frac{-8}{-80} & \frac{-3}{-80} \\ \frac{0}{-80} & \frac{10}{-80} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{80} \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad ...(i)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0(2) - 5(-1) = 0 + 5 = 5 \neq 0$$

قالب B ایک غیر نادر قالب ہے، لہٰذا، B^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj}\,B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \times \text{Adj}\,B$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{5}{5} & \frac{0}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0) - 8(2) = 0 - 16 = -16 \neq 0$$

اس لیے قالب A ایک غیر نادر قالب ہے، لہٰذا، A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}\,A$$

$$= \frac{1}{-16}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\left(-\frac{3}{4}\right) + 1\left(\frac{5}{8}\right) & 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) \\ 3\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\left(\frac{5}{8}\right) & 3\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \\ -\frac{9}{4} + \frac{10}{8} & -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-12+5}{8} & \frac{-4+3}{8} \\ \frac{-18+10}{8} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-8}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{7}{8} & -\frac{1}{8} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ...(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے یہ ثابت ہوا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(0)+2(5) & 1(-1)+2(2) \\ 8(0)+0(5) & 8(-1)+0(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+10 & -1+4 \\ 0+0 & -8+0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 10(-8) - 0(3) = -80 - 0$$

$$= -80 \neq 0$$

اس AB ایک غیر نادر قالب ہے۔ لہٰذا، $(AB)^{-1}$ ممکن ہے۔

$$\text{Adj}(AB) = \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \times \text{Adj}(AB)$$

$$= \frac{1}{-80}\begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

$$= \begin{bmatrix} \frac{0}{-16} & \frac{-2}{-16} \\ -\frac{8}{-16} & \frac{1}{-16} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{16} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5}(0)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) & \frac{2}{5}\left(\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{16}\right) \\ -1(0)+0\left(\frac{1}{2}\right) & -1\left(\frac{1}{8}\right)+0\left(-\frac{1}{16}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+\frac{1}{10} & \frac{2}{40}-\frac{1}{80} \\ 0+0 & -\frac{1}{8}+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{4-1}{80} \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{80} \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad ...(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3.6 یک درجی ہمزاد مساواتوں کا حل (Solution of Simultaneous Linear Equations)

یک درجی مساوات ایک الجبری مساوات ہے جس میں متغیر کی زیادہ سے زیادہ قوت ایک ہوتی ہے۔ دو متغیرات میں یک درجی مساوات کی عام شکل یہ ہے:

$ax + by = c$ جہاں b، a اور c حقیقی اعداد ہیں، x اور y متغیرات اور a اور b غیر صفر ہیں۔

یک درجی ہمزاد مساواتیں دو یا دو سے زیادہ یک درجی مساواتوں کا ایک سیٹ ہوتی ہیں جن میں دو یا دو سے زیادہ متغیرات ہوتے ہیں اور جنھیں ایک مشترکہ حل معلوم کرنے کے لیے ایک ساتھ حل کیا جاتا ہے۔

دو متغیرات میں دو یک درجی مساواتوں کے نظام کی عام شکل ذیل میں دی گئی ہے

$$ax + by = m$$
$$cx + dy = n$$

جہاں m، a، b، c، d اور n حقیقی اعداد ہیں۔

یہاں ہم درج ذیل طریقوں سے دو متغیرات میں دو یک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کرنا سیکھیں گے:

(i) معکوس قالب کا طریقہ (ii) کریمر کا قانون

معکوس قالب کا طریقہ (Matrix Inversion Method)

درج ذیل مساواتوں کا حل کرتے ہیں:

فرض کیا $ax + by = m$

اور $cx + dy = n$

ان مساواتوں کو قالب کی شکل میں یوں لکھتے ہیں:

$$\begin{bmatrix} ax+by \\ cd+dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \quad (i)$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

اگر $|A| \neq 0$ ہو تو (i) کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$AX = B$$

اور $A^{-1}AX = A^{-1}B$

[بائیں طرف سے A^{-1} سے ضرب دینے سے]

$IX = A^{-1}B$ [جیسا کہ $A^{-1}A = I$]

$X = A^{-1}B$ [as $IX = X$ جیسا کہ]

$$X = \frac{\text{Adj } A}{|A|}.B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}}{ad-bc}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} dm-bn \\ ab-cm \end{bmatrix}}{ad-bc} = \begin{bmatrix} \frac{dm-bn}{ad-bc} \\ \frac{an-cm}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-22}\begin{bmatrix} -65 + 21 \\ -52 - 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{-22}\begin{bmatrix} -44 \\ -66 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x = 2, y = 3$

پس، $\{(2, 3)\} =$ حل سیٹ

چیلنج!

دو متغیرات میں کوئی سی دو یک درجی مساواتیں لیں اور ان کو معکوس قالب کے طریقہ سے حل کیجیے۔

حل:

$3x + 4y = 25$
$6x - 2y = 10$

ان مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 3x+4y \\ 6x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{— (i)}$$

فرض کریں

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, X\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}$$

تو مساوات (i) کو ایسے لکھا جاسکتا ہے

$AX = B$

یا

$X = A^{-1} B$

اب

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$= 3(-2) - 6(4) = -6 - 24 = -30$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & +3 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو ایسے لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & +3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -2(25) + (-4)(10) \\ -6(25) + 3(10) \end{bmatrix} = \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -50 - 40 \\ -150 + 30 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{dm - bn}{ad - bc}, \quad y = \frac{an - cm}{ad - bc}$$

مثال 10: درج ذیل کو معکوس قالب کے طریقہ سے حل کیجیے۔

$$2x + 3y = 13$$
$$4x - 5y = -7$$

حل: دیا گیا

$2x + 3y = 13$
$4x - 5y = -7$

مساواتوں کو قالب کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 4x - 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{or} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{(i)}$$

فرض کیا

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

(i) کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$AX = B$

یا

$X = A^{-1}B$

اب

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$= (2)(-5) - (3)(4)$
$= -10 - 12 = -22 \neq 0$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

اس لیے

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A$$

$$= \frac{1}{-22}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-22}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-22}\begin{bmatrix} (-5)\times 13 + (-3)\times(-7) \\ (-4)\times 13 + 2\times(-7) \end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

$$= \frac{1}{-30}\begin{bmatrix}-90\\-120\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-90}{-30}\\ \frac{-120}{-30}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

$x = 3, y = 4$

حل سیٹ $= \{(3, 4)\}$

تاریخ:

گیبریل کریمر (1704-1752) جنیوا سے تعلق رکھنے والے ایک ریاضی دان تھے۔ کریمر نے کم عمری سے ہی ریاضی میں ذہانت کا مظاہرہ کیا تھا۔ 18 سال کی عمر میں انھوں نے ریاضی میں اپنی ڈاکٹریٹ کی ڈگری حاصل کی۔

گیبریل کریمر

(31 جولائی 1704ء-4 جنوری 1752ء)

1750ء میں انھوں نے کریمر کا قانون شائع کیا جس میں یک درجی مساواتوں کے ایسے نظام کے لیے، جس کا صرف ایک ہی حل ہو، مقطع کی مدد سے کسی بھی متغیر کے منفرد حل کے لیے ایک عمومی کلیہ پیش کیا۔ یہ قانون آج بھی مستند ہے۔

کریمر کا قانون (Cramer's Rule)

فرض کیا درج ذیل یک درجی ہمزاد مساواتیں ہیں۔

$$ax + by = m$$
$$cx + dy = n$$

ان مساواتوں کو قالب کی شکل میں یوں لکھ سکتے ہیں:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \text{ اور } B=\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$$ جہاں

$$AX = B \quad (i)$$

اگر $|A| \neq 0$، ہو تو مساوات (i) سے

$$A^{-1} AX=A^{-1} B \quad$$ [بائیں A^{-1} سے ضرب دینے سے]

$$IX = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B \quad$$ [جیسا کہ $IX = X$]

$$X = \frac{\text{Adj} A}{|A|} \times B$$

$$\left[A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}\right]$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}}{|A|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}dm-bn\\-cm+an\end{bmatrix}}{|A|}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{dm-bn}{|A|}\\ \frac{-cm+an}{|A|}\end{bmatrix}$$

یا

$$x = \frac{dm-bn}{|A|},\ y = \frac{an-cm}{|A|}$$

یا

$$x = \frac{\begin{vmatrix}m & b\\n & d\end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix}a & m\\c & n\end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|A_y|}{|A|}$$

چیلنج!

دو متغیرات میں کوئی سی دو یک درجی مساواتیں لیں اور ان کو کریمر کے قانون سے حل کیجیے۔

$2x + 4y = 2$
$5x - 2y = -19$

حل: ان مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix}2x+4y\\5x-2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-19\end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix}2 & 4\\5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-19\end{bmatrix}$$

فرض کیا

$$A = \begin{bmatrix}2 & 4\\5 & -2\end{bmatrix},\ A_x = \begin{bmatrix}2 & 4\\-19 & -2\end{bmatrix},$$

www.ilmkidunya.com

$$Ay = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -19 \end{bmatrix}$$

اب

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -19 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2) - (5)(4)$$

$$= -4 - 20 = -24 \neq 0$$

$$|Ax| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -19 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2) - (-19)(4)$$

$$= -4 + 76 = 72$$

$$x = \frac{|Ax|}{|A|}$$

$$x = \frac{72}{-24} = -3$$

$$|Ay| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 19 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-19) - (5)(2)$$

$$= -38 - 10 = -48$$

$$|Ay| = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 19 \end{bmatrix} = \frac{-48}{-24} = 2$$

لہٰذا، $x = -3, y = 2$

حل سیٹ $= \{(-3, 2)\}$

مثال 11: کریمر کے قانون کا استعمال کرتے ہوئے مساواتوں کو حل کیجیے:

$$2x + 3y = 13$$
$$4x - 5y = -7$$

حل:

$$2x + 3y = 13$$
$$4x - 5y = -7$$

مساوات کی قالبی شکل ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-5) - (3)(4)$$

$$= -10 - 12$$

$$= -22 \neq 0$$

$$|Ax| = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (13)(-5) - (-7)(3)$$

$$= -65 + 21 = -44$$

$$x = \frac{|Ax|}{|A|}$$

$$= \frac{-44}{-22} = 2$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-7) - (13)(4)$$

$$= -14 - 52 = -66$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-66}{-22} = 3$$

حل سیٹ $= \{(2, 3)\}$

3.7 حقیقی دنیا میں قالبوں کا اطلاق (Applications of Matrices in Real World)

مثال 12: تین قوتیں ایک ذرہ (particle) پر عمل کر رہی ہیں جو کہ لازمی طور پر متوازن ہوں، یعنی $F_1 + F_2 + F_3 = 0$،

جہاں $F_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$، $F_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ x \end{bmatrix}$ اور $F_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ ہے۔

x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5-3-2 \\ 2+x-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

www.ilmkidunya.com

مثال 13: آٹھ سال پہلے حوریہ کی عمر جنت کی عمر کا $\frac{3}{4}$ گنا تھی۔ چار سال بعد حوریہ کی عمر جنت کی عمر کا $\frac{6}{7}$ گنا ہوگی۔ قالبوں کا استعمال کرتے ہوئے ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ حوریہ کی موجودہ عمر x سال ہے۔ اور جنت کی موجودہ عمر y سال ہے۔ آٹھ سال پہلے حوریہ کی عمر $(x-8)$ سال تھی اور جنت کی عمر $(y-8)$ سال تھی۔ پہلی شرط کے مطابق:

$$x - 8 = \frac{3}{4}(y - 8)$$

یا $$4x - 32 = 3y - 24$$

یا $$4x - 3y = -24 + 32$$

$$4x - 3y = 8 \quad \text{(i)}$$

4 سال بعد ان کی عمریں $(x+4)$ اور $(y+4)$ ہوں گی۔
دوسری شرط کے مطابق:

$$x + 4 = \frac{6}{7}(y + 4)$$

یا $$7x + 28 = 6y + 24$$

$$7x - 6y = -4 \quad \text{(ii)}$$

(i) اور (ii) کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

یہاں،

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix},$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (4)(-6) - (7)(-3)$$

$$= -24 + 21$$

$$= -3 \neq 0$$

کریمر کا قانون استعمال کرنے سے

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}}{-3}$$

$$= \frac{-48 - 12}{-3} = \frac{-60}{-3} = 20$$

$$= = \frac{-60}{-3} = 20$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}}{-3}$$

$$= \frac{-16 - 56}{-3} = \frac{-72}{-3} = 24$$

پس، حوریہ اور جنت کی موجودہ عمریں بالترتیب 20 سال اور 24 سال ہیں۔

3.8 سائنسی نظریات اور تکنیکی ترقی میں ریاضی کا کردار
(The Role of Mathematics in Scientific Theories and Technological Advancement)

ریاضی کو اکثر سائنس کی زبان کے طور پر بیان کیا جاتا ہے یہ سائنسی نظریات کو فروغ دینے اور جدید ٹیکنالوجی کو آگے بڑھانے میں ایک بنیادی کردار ادا کرتی ہے۔ فطرت کے قوانین کو سمجھنے سے لے کر زندگی بچانے والی ادویات کی بناوٹ تک، ریاضی حقیقی دنیا کے مظاہر کو بیان کرنے، پیش گوئی کرنے اور بہتر بنانے کے لیے ضروری کلیات فراہم کرتی ہے۔

ایک اہم میدان جہاں ریاضی اپنا کردار ادا کرتی ہے وہ ریاضیاتی ماڈلز اور مفروضات کا استعمال ہے۔ سائنسدان اور انجینئرز ان ماڈلز کو کمپلیکس نظاموں جیسے موسمی تبدیلیاں، آبادی میں اضافہ یا انسانی دماغ کے افعال کی نمائندگی ظاہر کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ یہ ماڈلز محققین کو مفروضوں کی جانچ، مستقبل کے نتائج کی پیش گوئی اور ایسے منظر ناموں کو جانچنے کی بصیرت دیتے ہیں جنھیں حقیقی دنیا میں نقل کرنا بہت مہنگا، خطرناک یا ناممکن ہو۔

مثال کے طور پر، طب اور مادی سائنس میں ریاضیاتی تصورات کا استعمال نئے مواد یا دواؤں کے مالیکیولز کی تشکیل اور بہتر بنانے کے لیے کیا جاتا ہے۔ یہ طریقہ آزمائشی اور غلط تجربات کو کم کر کے وقت اور وسائل کی بچت کرتا ہے۔ اسی طرح، فزکس اور فلکیات جیسے شعبوں میں مساواتیں اور ماڈلز ہمیں کہکشاؤں، بلیک ہولز اور ذیلی جوہری ذرات کی تشکیل کو سمجھنے میں مدد دیتی ہے۔

www.ilmkidunya.com

دواؤں کی دریافت:

ریاضیاتی الگورتھم یہ سمجھنے میں مدد دیتے ہیں کہ ایک دوا جسم میں خلیوں یا پروٹین کے ساتھ کس طرح تعامل کرتے ہیں جس سے مؤثر علاج کی دریافت میں تیزی آتی ہے۔

نیوروسائنس:

ریاضیاتی ماڈلز دماغ کی سرگرمی کو تحریک دینے کے لیے استعمال ہوتے ہیں، جو محققین کو سیکھنے، یادداشت اور مرگی جیسی بیماریوں کو سمجھنے میں مدد دیتے ہیں۔

موسمیاتی سائنس:

کمپلیکس مساواتیں ہوا، پانی اور توانائی کے تعامل کو بیان کرتی ہیں، جو سائنسدانوں کو موسم اور طویل مدتی موسمیاتی تبدیلی کی پیش گوئی کرنے میں مدد دیتی ہیں۔

حل مشق 3.6

1- اگر ممکن ہو تو معکوس قالب کے طریقہ سے حل کیجیے۔

(i) $2x + 5y = 19$

$4x - 3y = -1$

حل: دیا گیا ہے

$2x + 5y = 19$

$4x - 3y = -1$

مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 2x+5y \\ 4x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{—(i)}$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 19 \\ -1 \end{bmatrix}$

تو مساوات (i) کو ایسے لکھا جا سکتا ہے

$AX = B$

یا $X = A^{-1}B$

اب $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (2\times-3)-(4\times5)$$

$$= -6-20$$

$$= -26 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-26}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو ایسے لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-26}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-26}\begin{bmatrix} -3(19)+(-5)(-1) \\ -4(19)+\ \ 2(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-26}\begin{bmatrix} -57+5 \\ -76-2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-26}\begin{bmatrix} -52 \\ -78 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-52}{-26} \\ \frac{-78}{-26} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

پس، $x = 2, y = 3$

حل سیٹ $\{(2, 3)\}$

(ii) $3x + 2y = 7$

$5x - y = 16$

حل: دیا گیا ہے

$3x + 2y = 7$

$5x - y = 16$

مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 3x+2y \\ 5x-\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \text{—(i)}$$

www.ilmkidunya.com

(iii) $x - 2y = 9$

$2x + 7y = -4$

:حل دیا گیا ہے

$x - 2y = 9$

$2x + 7y = -4$

ان مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} x - 2y \\ 2x + 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix} \text{—(i)}$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$A\,X = B$$

یا $X = A^{-1}B$

اب $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(7) - 2(-2)$$

$$= 7 + 4$$

$$= 11 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اس لیے $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7(9) + 2(-4) \\ -2(9) + 1(-4) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 63 - 8 \\ -18 - 4 \end{bmatrix}$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix}$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$A\,X = B$$

یا $X = A^{-1}B$

اب $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1) - 5(2) = -3 - 10$$

$$= -13 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj} A$$

$$= \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} -1(7) + (-2)(16) \\ -5(7) + 3(16) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} -7 - 32 \\ -35 + 48 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} -39 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-39}{-13} \\ \frac{13}{-13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

پس، $x = 3, y = -1$

حل سیٹ $= \{(3, -1)\}$

www.ilmkidunya.com

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix}55\\-22\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{55}{11}\\[4pt] \frac{-22}{11}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$$

پس، $x = 5, y = -2$

حل سیٹ $= \{(5, -2)\}$

(iv) $3x + 2y = 2$

$x - 2y = -2$

حل: دیا گیا ہے کہ

$3x + 2y = 2$

$x - 2y = -2$

مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix}3x+2y\\x-2y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} \quad \text{______(i)}$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & -2\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$AX = B$$

یا

$$X = A^{-1}B$$

اب

$$A = \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & -2\end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix}3 & 2\\1 & -2\end{vmatrix}$$

$$= 3(-2) - 1(2) = -6 - 2$$

$$= -8 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix}-2 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix}$$

اس لیے

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}A$$

$$= \frac{1}{-8}\begin{bmatrix}-2 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix}-2 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix}-2(2)+(-2)(-2)\\-1(2)+3(-2)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix}-4+4\\-2-6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix}0\\-8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{0}{-8}\\[4pt] \frac{-8}{-8}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

پس، $x = 0, y = 1$

حل سیٹ $= \{(0, 1)\}$

-2 اگر ممکن ہو تو درج ذیل یک درجی مساواتوں کے جوڑوں کو کریمر کے قانون کی مدد سے حل کیجیے۔

(i) $x + 4y = 4$

$2x - y = 5$

حل: دیا گیا ہے کہ

$x + 4y = 4$

$2x - y = 5$

مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix}x+4y\\2x-y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix}1 & 4\\2 & -1\end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix}4 & 4\\5 & -1\end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

$$= 1(-2)-3(2)$$
$$= -2-6 = -8 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 7(-2)-(-3)(2)$$
$$= -14+6 = -8$$
$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$
$$= \frac{-8}{-8}$$
$$= 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-3)-3(7)$$
$$= -3-21 = -24$$
$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$
$$= \frac{-24}{-8}$$
$$= 3$$

حل سیٹ $= \{(1, 3)\}$

(iii) $\mathbf{2x - 5y = -6}$
$\mathbf{4x - 3y = -12}$

حل: دیا گیا ہے کہ
$2x - 5y = -6$
$4x - 3y = -12$

مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 2x-5y \\ 4x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \end{bmatrix}$$

یا
$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \end{bmatrix}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -12 & -3 \end{bmatrix},$$
$$A_y = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 2(-3)-4(-5)$$
$$= -6+20 = 14 \neq 0$$
$$|A_x| = \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -12 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= (-6)(-3)-(-12)(-5)$$
$$= 18-60 = -42$$
$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-1)-2(4)$$
$$= -1-8$$
$$= -9 \neq 0$$
$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 4(-1)-5(4)$$
$$= -4-20$$
$$= -24$$
$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-24}{-9} = \frac{8}{3}$$
$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 1(5)-2(4) = 5-8 = -3$$
$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$
$$= \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$$

حل سیٹ $= \left\{\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$

(ii) $\mathbf{x + 2y = 7}$
$\mathbf{3x - 2y = -3}$

حل: دیا گیا ہے کہ
$x + 2y = 7$
$3x - 2y = -3$

مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} x+2y \\ 3-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

یا
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

$$= \frac{-42}{14}$$

$$= -3$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-12) - 4(-6) = -24 + 24 = 0$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$= \frac{0}{14} = 0$$

حل سیٹ $= \{(-3, 0)\}$

(iv) $3x + 2y = -1$
$5x + 6y = 5$

حل: دیا گیا ہے کہ

$$3x + 2y = -1$$
$$5x + 6y = 5$$

مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 3x + 2y \\ 5x + 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 3(6) - 5(2) = 18 - 10 = 8$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -1(6) - 5(2)$$
$$= -6 - 10$$
$$= -16$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$= \frac{-16}{8}$$

$$= -2$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(5) - 5(-1)$$
$$= 15 + 5 = 20$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$= \frac{20}{8}$$

$$= \frac{5}{2}$$

-3 ایک الیکٹریکل انجینئر ایک سادہ برقی سرکٹ کی دو شاخوں A اور B میں کرنٹ معلوم کرنا چاہتا ہے۔

مساواتوں کا نظام یہ ہے:

$$x + y = 7$$
$$2x - y = 2$$

جہاں x شاخ A میں کرنٹ ہے اور y شاخ B میں کرنٹ ہے۔ قالبوں کا استعمال کرتے ہوئے x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$x + y = 7$$
$$2x - y = 2$$

مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} x + y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{(i)}$$

فرض کیا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$AX = B$$

یا

$$X = A^{-1}B$$

اب

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1) - 2(1)$$
$$= -1 - 2 = -3 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}A$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

www.ilmkidunya.com

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-1 & -1\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-1(7)+(-1)(2)\\-2(7)+1(2)\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-7 \; - \; 2\\-14 \; + \; 2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-9\\-12\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{-9}{-3}\\ \frac{-12}{-3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

پس $x = 3, y = 4$

شاخ A(x) میں کرنٹ $= 3$

شاخ B(y) میں کرنٹ $= 4$

-4 تین قوتیں ایک ذرہ پر عمل کر رہی ہیں جو کہ متوازن ہوں۔ یعنی $F_1 + F_2 + F_3 = 0$، جہاں $F_1 = \begin{bmatrix}8\\x\end{bmatrix}$، $F_2 = \begin{bmatrix}-2\\-7\end{bmatrix}$، $F_3 = \begin{bmatrix}y\\-1\end{bmatrix}$ ہے۔ x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا $F_1 + F_2 + F_3 = 0$

$$\begin{bmatrix}8\\x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\-7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}8-2+y\\x-7-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6+y\\x-8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$x - 8 = 0$ | $6 + y = 0$

$x = 8$ | $y = -6$

پس، $x = 8, y = -6$

-5 دو سپورٹ بیمز A اور B، 100 کلو نیوٹن (kN) کا مشترکہ بوجھ اٹھا رہے ہیں۔ بیم A پر بوجھ کا دوگنا اور بیم B پر بوجھ کا تین گنا 240 کلو نیوٹن (kN) بنتا ہے۔ قالبوں کا استعمال کرتے ہوئے بیم A اور بیم B پر بوجھ معلوم کیجیے۔

حل: دیے گئے مواد سے مساواتیں بنائیں۔

$$A + B = 100$$
$$2A + 3B = 240$$

ان مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix}A+B\\2A+3B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}100\\240\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}100\\240\end{bmatrix} \text{---(i)}$$

فرض کیا $C = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix}100\\240\end{bmatrix}$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$CX = D$$

یا $X = C^{-1}D$

اب $C = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}$

$$|C| = \begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{vmatrix}$$
$$= 1(3)-(2)(1)$$
$$= 3-2 = 1 \neq 0$$

$$\text{Adj } C = \begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 1\end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \times \text{Adj}C$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 1\end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

اب $X = CD$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\\240\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3(100)+(-1)(240)\\-2(100)+1(240)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}300-240\\-200+240\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}60\\40\end{bmatrix}$$

بیم A پر بوجھ $= 60\text{ kN}$

بیم B پر بوجھ $= 40\text{ kN}$

-6 ایک 2D گیم کی دنیا میں، دو کردار خط مستقیم پر چل رہے ہیں۔ ایک کردار ایسے خط پر چلتا ہے جہاں اس کی افقی پوزیشن اور عمودی پوزیشن کے دوگنا کا مجموعہ 5 ہے۔ جبکہ دوسرا کردار ایسے خط پر چلتا ہے جہاں اس کی افقی پوزیشن اس کی عمودی پوزیشن سے ایک زیادہ ہے۔ قالبوں کا استعمال کرتے ہوئے ان کا نقطہ تقاطع معلوم کیجیے۔

حل:

$x =$ فرض کیا افقی پوزیشن

$y =$ عمودی پوزیشن

پہلی شرط کے مطابق

$$2x + y = 5 \quad \text{___(i)}$$

دوسری شرط کے مطابق

$$x = y + 1$$
$$x - y = 1 \quad \text{___(ii)}$$
$$2x + y = 5$$
$$x - y = 1$$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix}2x+y\\x-y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \quad \text{___(i)}$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$AX = B$$

یا

$$X = A^{-1}B$$

اب

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$
$$= 2(-1) - (1)(1)$$
$$= -2 - 1$$
$$= -3 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$
$$= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-1(5)+(-1)(1)\\-1(5)+2(1)\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-5-1\\-5+2\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-6\\-3\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\frac{-6}{-3}\\\frac{-3}{-3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

لہٰذا، $x = 2, y = 1$

نقطہ تقاطع $= (2, 1)$

www.ilmkidunya.com

7- دوسال پہلے ایک آدمی اپنے بیٹے سے 5 گنا بڑا تھا۔ 6 سال بعد وہ اپنے بیٹے سے 3 گنا بڑا ہو گیا۔ قالبوں کا استعمال کرتے ہوئے ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا آدمی کی موجودہ عمر x سال اور بیٹے کی عمر y سال ہے۔

دوسال پہلے آدمی کی عمر $x - 2$ سال

دوسال پہلے بیٹے کی عمر $y - 2$ سال

پہلی شرط کے مطابق

$$x - 2 = 5(y - 2)$$
$$x - 2 = 5y - 10$$
$$x - 5y = -10 + 2$$
$$x - 5y = -8 \quad \text{(i)}$$

6 سال بعد باپ کی عمر ہوگی $x + 6$ سال

6 سال بعد بیٹے کی عمر ہوگی $y + 6$ سال

دوسری شرط کے مطابق

$$x + 6 = 3(y + 6)$$
$$x + 6 = 3y + 18$$
$$x - 3y = 18 - 6$$
$$x - 3y = 12 \quad \text{(ii)}$$

(i) اور (ii) کی قالبوں کی شکل

$$\begin{bmatrix} x - 5y \\ x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{(iii)}$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \end{bmatrix}$

مساوات (iii) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$AX = B$$

یا

$$X = A^{-1}B$$

اب

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-3) - 1(-5)$$
$$= -3 + 5 = 2 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 \\ 12 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3(-8) + 5(12) \\ -1(-8) + 1(12) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 24 + 60 \\ 8 + 12 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 84 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{84}{2} \\ \frac{20}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$x = 42, \ y = 10$

لہذا آدمی کی موجودہ عمر = 42 سال

بیٹے کی موجودہ عمر = 10 سال

8- دو سائیکل سوار 44 کلومیٹر کے فاصلہ پر ہیں اور ایک ہی وقت میں سفر شروع کرتے ہیں۔ اگر وہ ایک دوسرے کی طرف چلیں تو وہ دو گھنٹے میں ملتے ہیں، لیکن اگر وہ ایک ہی سمت میں چلیں تو تیز رفتار سائیکل سوار سُست رفتار سائیکل سوار کو $7\frac{1}{2}$ گھنٹے میں پیچھے چھوڑ دیتا ہے۔ قالبوں کا استعمال کرتے ہوئے ان کی رفتاریں معلوم کیجیے۔

حل: x = فرض کیا تیز رفتار سائیکل سوار کی رفتار (کلومیٹر فی گھنٹا میں)

y = سست رفتار سائیکل سوار کی رفتار (کلومیٹر فی گھنٹا میں)

پہلی شرط کے مطابق (ایک دوسرے کی طرف بڑھتے ہیں)

$$2(x+y) = 44$$

$$x + y = \frac{44}{2}$$

$$x + y = 22 \text{ --- (i)}$$

دوسری شرط کے مطابق

$$\frac{15}{2}(x-y) = 44$$

$$15(x-y) = 88$$

$$15x - 15y = 88 \text{ --- (ii)}$$

$$\begin{bmatrix} x+y \\ 15-15y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 88 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 15 & -15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 88 \end{bmatrix} \text{ (iii)}$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 15 & -15 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 22 \\ 88 \end{bmatrix}$

مساوات (iii) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$AX = B$$

یا

$$X = A^{-1}B$$

اب

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 15 & -15 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 15 & -15 \end{bmatrix}$$

$$= 1(-15) - 15(1)$$

$$= -15 - 15$$

$$= -30 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -15 & -1 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -15 & -1 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -15 & -1 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 22 \\ 88 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -15(22)+(-1)(88) \\ -15(22)+1(88) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -330-88 \\ -330+88 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -418 \\ -242 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-418}{-30} \\ \frac{-242}{-30} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.93 \\ 8.07 \end{bmatrix}$$

$$x = 13.93, \; y = 8.07$$

لہٰذا، تیز رفتار سائیکل سوار کی رفتار = 13.93 km/h

سست رفتار سائیکل سوار کی رفتار = 8.07 km/h

9- ایک کسر کا شمار کنندہ اس کے مخرج سے 7 کم ہے۔ اگر شمار کنندہ میں 3 کا اضافہ کر دیا جائے تو نئی کسر $\frac{3}{4}$ بن جاتی ہے۔ قالبوں کا استعمال کرتے ہوئے اصل کسر معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا

x = کسر کا شمار کنندہ

y = کسر کا مخرج نما

پہلی شرط کے مطابق

$$x - y = -7 \text{ --- (i)}$$

دوسری شرط کے مطابق

$$\frac{x+3}{y} = \frac{3}{4}$$

$$4(x+3) = 3y$$

$$4x + 12 = 3y$$

$$4x - 3y = -12 \text{ --- (ii)}$$

دونوں مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

www.ilmkidunya.com

$$\begin{bmatrix} x-y \\ 4x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \end{bmatrix} \quad \text{(iii)}$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \end{bmatrix}$

مساوات (iii) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$AX = B$$

یا

$$X = A^{-1}B$$

اب

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-3) - 4(-1) = -3+4 = 1 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(-7)+1(-12) \\ -4(-7)+1(-12) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +21-12 \\ +28-12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

لہٰذا، $x = 9, y = 16$

کسر $= \frac{9}{16}$

حل اعادہ مشق 3

-1 درج ذیل سوالات کے دیے گئے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) اگر $\begin{bmatrix} a+2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ ہو تو a برابر ہے:

(a) 3 (b) 5

(c) 6 (d) 7

(ii) $A = [3 \ 5 \ 0]$ ایک ______ قالب ہے۔

(a) قطاری (b) مربعی

(c) کالمی (d) صفری

(iii) $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ایک ______ قالب ہے۔

(a) وحدانی (b) مربعی

(c) قطاری (d) کالمی

(iv) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ایک ______ قالب ہے۔

(a) مستطیلی (b) وحدانی

(c) کالمی (d) قطاری

(v) اگر $A^t = A$ ہو تو A ایک ______ قالب ہے۔

(a) سمیٹرک (b) قطاری

(c) مستطیلی (d) سکیو سمیٹرک

(vi) اگر $A = [3 \ \ 4]$ اور $B = [7 \ \ 8]$ ہوں تو A+B برابر ہے:

(a) $[21 \ \ 32]$ (b) $[24 \ \ 28]$

(c) $[10 \ \ 12]$ (d) $[11 \ \ 11]$

(vii) اگر $A = [3 \ \ 4]$ اور $B = [7 \ \ 8]$ ہوں تو A − B برابر ہے:

(a) $[10 \ \ 12]$ (b) $[11 \ \ 11]$

(c) $[4 \ \ 4]$ (d) $[-4 \ \ -4]$

(viii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ کا جمعی معکوس کیا ہے؟

(a) $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

www.ilmkidunya.com

(ix) اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 3\\2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ ہو تو A^t کا مرتبہ ہے:

(a) 3-by-2 (b) 2-by-3
(c) 3-by-3 (d) 2-by-2

(x) $\begin{vmatrix}3 & 1\\0 & 4\end{vmatrix}$ برابر ہے:

(a) 11 (b) 12
(c) 13 (d) –11

جوابات

(i)	5	(ii)	قطاری	(iii)	کالمی
(iv)	وحدانی	(v)	سمیٹرک	(vi)	[10 12]
(vii)	[4 4]	(viii)	$\begin{bmatrix}-3\\-4\end{bmatrix}$	(ix)	2-by-3
(x)	12				

-2 اگر $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\7 & 6\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}5 & 5\\8 & 8\end{bmatrix}$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(i) $(A-B)^t$

حل:

$$A-B=\begin{bmatrix}4 & 2\\7 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 5\\8 & 8\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}4-5 & 2-5\\7-8 & 6-8\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}-1 & -3\\-1 & -2\end{bmatrix}$$

$$(A-B)^t=\begin{bmatrix}-1 & -3\\-1 & -2\end{bmatrix}^t$$

$$(A-B)^t=\begin{bmatrix}-1 & -1\\-3 & -2\end{bmatrix}$$

(ii) B^t-A^t

حل:

$$B=\begin{bmatrix}5 & 5\\8 & 8\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}4 & 2\\7 & 6\end{bmatrix}$$

$$B^t=\begin{bmatrix}5 & 8\\5 & 8\end{bmatrix},\ A^t=\begin{bmatrix}4 & 7\\2 & 6\end{bmatrix}$$

$$B^t-A^t=\begin{bmatrix}5 & 8\\5 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 7\\2 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5-4 & 8-7\\5-2 & 8-6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}$$

(iii) 2A + 3B

حل:

$$2A+3B=2\begin{bmatrix}4 & 2\\7 & 6\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}5 & 5\\8 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & 4\\14 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15 & 15\\24 & 24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8+15 & 4+15\\14+24 & 12+24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}23 & 19\\38 & 36\end{bmatrix}$$

-3 اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}5 & 6\\2 & 1\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 7\end{bmatrix}$ ہوں تو تصدیق کیجیے کہ

(i) 2(A + B) = 2A + 2B

حل:

$$2(A+B)=2\left[\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 6\\2 & 1\end{bmatrix}\right]$$

$$=2\begin{bmatrix}2+5 & 3+6\\4+2 & 5+1\end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix}7 & 9\\6 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}14 & 18\\12 & 12\end{bmatrix}\ \text{———(i)}$$

$$2A=2\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6\\8 & 10\end{bmatrix}$$

$$2B=2\begin{bmatrix}5 & 6\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 12\\4 & 2\end{bmatrix}$$

$$2A+2B=\begin{bmatrix}4 & 6\\8 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & 12\\4 & 2\end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

$$(A+B)C=\begin{bmatrix}7 & 9\\ 6 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7(3)+9(1) & 7(2)+9(7)\\ 6(3)+6(1) & 6(2)+6(7)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}21+9 & 14+63\\ 18+6 & 12+42\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}30 & 77\\ 24 & 54\end{bmatrix} \text{______ (i)}$$

$$AC=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2(3)+3(1) & 2(2)+3(7)\\ 4(3)+5(1) & 4(2)+5(7)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6+3 & 4+21\\ 12+5 & 8+35\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9 & 25\\ 17 & 43\end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5(3)+6(1) & 5(2)+6(7)\\ 2(3)+1(1) & 2(2)+1(7)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}15+6 & 10+42\\ 6+1 & 4+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & 52\\ 7 & 11\end{bmatrix}$$

$$AC+BC=\begin{bmatrix}9 & 25\\ 17 & 43\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}21 & 52\\ 7 & 11\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9+21 & 25+52\\ 17+7 & 43+11\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}30 & 77\\ 24 & 54\end{bmatrix} \text{______ (ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(A+B)\,C = AC + BC$

(iv) $C(A-B) = CA - CB$

حل:

$$A-B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 6\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+10 & 6+12\\ 8+4 & 10+2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}14 & 18\\ 12 & 12\end{bmatrix} \text{______ (ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $2(A+B) = 2A + 2B$

(ii) $(A+B)+C = A+(B+C)$

حل:

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 6\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+5 & 3+6\\ 4+2 & 5+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 9\\ 6 & 6\end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}7 & 9\\ 6 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7+3 & 9+2\\ 6+1 & 6+7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 11\\ 7 & 13\end{bmatrix} \text{______ (i)}$$

$$B+C=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5+3 & 6+2\\ 2+1 & 1+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 8\\ 3 & 8\end{bmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & 8\\ 3 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+8 & 3+8\\ 4+3 & 5+8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 11\\ 7 & 13\end{bmatrix} \text{______ (ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(A+B)+C = A+(B+C)$

(iii) $(A+B)\,C = AC + BC$

حل:

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 6\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+5 & 3+6\\ 4+2 & 5+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 9\\ 6 & 6\end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

(v) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(5)+3(2) & 2(6)+3(1) \\ 4(5)+5(2) & 4(6)+5(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+6 & 12+3 \\ 20+10 & 24+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 15 \\ 30 & 29 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 16 & 15 \\ 30 & 29 \end{vmatrix}$$

$$= (16 \times 29) - (30 \times 15)$$

$$= 464 - 450 = 14 \neq 0$$

$$Adj\,(AB) = \begin{bmatrix} 29 & -15 \\ -30 & 16 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \times Adj\,(AB)$$

$$= \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 29 & -15 \\ -30 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{29}{14} & \frac{-15}{14} \\ \frac{-30}{14} & \frac{16}{14} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{29}{14} & \frac{-15}{14} \\ \frac{-15}{7} & \frac{8}{7} \end{bmatrix} \text{ ——— (i)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5(1) - 2(6) = 5 - 12 = -7 \neq 0$$

$$Adj\,B = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \times Adj B$$

$$= \begin{bmatrix} 2-5 & 3-6 \\ 4-2 & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C(A-B) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(-3)+2(2) & 3(-3)+2(4) \\ 1(-3)+7(2) & 1(-3)+7(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9+4 & -9+8 \\ -3+14 & -3+28 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \text{ ——— (i)}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(2)+2(4) & 3(3)+2(5) \\ 1(2)+7(4) & 1(3)+7(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+8 & 9+10 \\ 2+28 & 3+35 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 30 & 38 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(5)+2(2) & 3(6)+2(1) \\ 1(5)+7(2) & 1(6)+7(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15+4 & 18+2 \\ 5+14 & 6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 20 \\ 19 & 13 \end{bmatrix}$$

$$CA - CB = \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 30 & 38 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 & 20 \\ 19 & 13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14-19 & 19-20 \\ 30-19 & 38-13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \text{ ——— (ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $C(A-B) = CA - CB$

www.ilmkidunya.com

$$= \begin{bmatrix} \frac{5+24}{14} & \frac{-3-12}{14} \\ \frac{-15}{7} & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{29}{14} & \frac{-15}{14} \\ \frac{-15}{7} & \frac{8}{7} \end{bmatrix} \text{ ---- (ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(vi) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(5) - 4(3)$$
$$= 10 - 12 = -2 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}A$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{-2} & \frac{-3}{-2} \\ \frac{-4}{-2} & \frac{2}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\left(-\frac{5}{2}\right)+3(2) & 2\left(\frac{3}{2}\right)+(3)(-1) \\ 4\left(\frac{-5}{2}\right)+5(2) & 4\left(\frac{3}{2}\right)+5(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+6 & 3-3 \\ -10+10 & 6-5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{-6}{-7} \\ \frac{-2}{-7} & \frac{5}{-7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-5}{7} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(5) - 4(3)$$
$$= 10 - 12 = -2 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}A$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{-2} & \frac{-3}{-2} \\ \frac{-4}{-2} & \frac{2}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-5}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{6}{7}\right)(2) & \left(-\frac{1}{7}\right)\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{6}{7}(-1) \\ \frac{2}{7}\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{-5}{7}\right)(2) & \frac{2}{7}\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{-5}{7}\right)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{14}+\frac{12}{7} & -\frac{3}{14}-\frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7}-\frac{10}{7} & \frac{3}{7}+\frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

$$=\begin{bmatrix}10+6 & 20+10\\12+3 & 24+5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}16 & 30\\15 & 29\end{bmatrix} \underline{\qquad} (ii)$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(AB)^t = B^tA^t$

(viii) (AB) C = A (BC)

حل:

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2(5)+3(2) & 2(6)+3(1)\\4(5)+5(2) & 4(6)+5(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10+6 & 12+3\\20+10 & 24+5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}16 & 15\\30 & 29\end{bmatrix}$$

$$(AB)\,C=\begin{bmatrix}16 & 15\\30 & 29\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}16(3)+15(1) & 16(2)+15(7)\\30(3)+29(1) & 30(2)+29(7)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}48+15 & 32+105\\90+29 & 60+203\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}63 & 137\\119 & 263\end{bmatrix} \underline{\qquad} (i)$$

$$BC=\begin{bmatrix}5 & 6\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5(3)+6(1) & 5(2)+6(7)\\2(3)+(1)(1) & 2(2)+1(7)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}15+6 & 10+42\\6+1 & 4+7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}21 & 52\\7 & 11\end{bmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}21 & 52\\7 & 11\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2(21)+3(7) & 2(52)+3(11)\\4(21)+5(7) & 4(52)+5(11)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I \underline{\qquad} (i)$$

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}(2)+\frac{3}{2}(4) & -\frac{5}{2}(3)+\frac{3}{2}(5)\\2(2)+(-1)(4) & 2(3)+(-1)(5)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5+6 & -\frac{15}{2}+\frac{15}{2}\\4-4 & 6-5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I \underline{\qquad} (ii)$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

(vii) $(AB)^t = B^tA^t$

حل:

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\2 & 1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}2(5)+3(2) & 2(6)+3(1)\\4(5)+5(2) & 4(6)+5(1)\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}10+6 & 12+3\\20+10 & 24+5\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}16 & 15\\30 & 29\end{bmatrix}$$

$$(AB)^t=\begin{bmatrix}16 & 30\\15 & 29\end{bmatrix} \underline{\qquad} (i)$$

$$B=\begin{bmatrix}5 & 6\\2 & 1\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}$$

$$B^t=\begin{bmatrix}5 & 2\\6 & 1\end{bmatrix},\ A^t=\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 5\end{bmatrix}$$

$$B^tA^t=\begin{bmatrix}5 & 2\\6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5(2)+2(3) & 5(4)+2(5)\\6(2)+1(3) & 6(4)+1(5)\end{bmatrix}$$

(iv) $A^{-1}A$

حل:

$$A=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=7(1)-2(3)$$

$$=7-6=1\neq 0$$

لہٰذا A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj }A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times \text{Adj}A$$

$$=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7(1)-3(2) & 1(3)+(-3)(1)\\ -2(7)+7(2) & -2(3)+7(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7-6 & 3-3\\ -14+14 & -6+7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

(v) $(AB)^t$

حل:

$$AB=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}7(5)+3(2) & 7(3)+3(4)\\ 2(5)+1(2) & 2(3)+1(4)\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}35+6 & 21+12\\ 10+2 & 6+4\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}41 & 33\\ 12 & 10\end{bmatrix}$$

$$(AB)^t=\begin{bmatrix}41 & 12\\ 33 & 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}42+21 & 104+33\\ 84+35 & 208+55\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}63 & 137\\ 119 & 263\end{bmatrix} \quad \text{(ii)}$$

پس، (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(AB)C = A(BC)$

-4 اگر $A=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(i) $|B|$

حل:

$$B=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}$$

$$=5(4)-2(3)$$

$$=20-6=14$$

(ii) AdjB

حل:

$$B=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\text{Adj}B=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

(iii) A^{-1}

حل:

$$A=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=7(1)-2(3)$$

$$=7-6=1\neq 0$$

اس لیے A ایک غیر نادر قالب ہے لہٰذا A^{-1} ممکن ہے۔

$$\text{Adj }A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times \text{Adj}A$$

$$=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

(vi) $(B^t)^t$

حل: $B=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

$B^t=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$(B^t)^t=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

-5 اگر ممکن ہو تو درج ذیل یک درجی مساواتوں کے جوڑے کو معکوس قالب کے طریقے اور کریمر کے قانون کی مدد سے حل کیجیے۔

(i) $3x+4y=7$
$5x-y=2$

حل: معکوس قالب کے طریقے سے

دیا گیا ہے کہ

$3x+4y=7$

$5x-y=2$

مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix}3x+4y\\ 5x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 2\end{bmatrix}-(i)$$

فرض کیا $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & -1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}7\\ 2\end{bmatrix}$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$AX=B$

یا $X=A^{-1}B$

اب $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & -1\end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & -1\end{vmatrix}$$

$=3(-1)-5(4)$

$=-3-20=-23\neq 0$

$$\text{Adj } A=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times \text{Adj } A$$

$$=\frac{1}{-23}\begin{bmatrix}-1 & -4\\ -5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-23}\begin{bmatrix}-1(7)+(-4)(2)\\ -5(7)+3(2)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-23}\begin{bmatrix}-7-8\\ -35+6\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-23}\begin{bmatrix}-15\\ -29\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{-15}{-23}\\ \frac{-29}{-23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{15}{23}\\ \frac{29}{23}\end{bmatrix}$$

پس، $x=\frac{15}{23}, y=\frac{29}{23}$

حل سیٹ $=\left\{\left(\frac{15}{23},\frac{29}{23}\right)\right\}$

کریمر کے قانون کے طریقے سے

دیا گیا ہے کہ $3x+4y=7$

$5x-y=2$

قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix}3x+4y\\ 5x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 2\end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 2\end{bmatrix}$$

یہاں

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & -1\end{bmatrix}, A_x=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}, A_y=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & -1\end{vmatrix}$$

$=3(-1)-5(4)$

$=-3-20=-23\neq 0$

www.ilmkidunya.com

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 1(6) - 2(-6)$$
$$= 6 + 12$$
$$= 18 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اس لیے $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}A$

$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -15 \\ -3 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 6(-15)+6(-3) \\ -2(-15)+1(-3) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -90-18 \\ +30-3 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -108 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-108}{18} \\ \frac{27}{18} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

پس، $x = -6, y = \frac{3}{2}$

حل سیٹ $= \left\{\left(-6, \frac{3}{2}\right)\right\}$

دیا گیا ہے کہ

$$x - 6y = -15$$
$$2x + 6y = -3$$

مساوات کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} x-6y \\ 2x+6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 7(-1) - (4)$$
$$= -7 - 8 = -15$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$
$$= \frac{-15}{-23} = \frac{15}{23}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3(2) - 5(7)$$
$$= 6 - 35$$
$$= -29$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$
$$= \frac{-29}{-23} = \frac{29}{23}$$

(ii) $x - 6y = -15$
$2x + 6y = -3$

حل: معکوس قالب کے طریقے سے

$$x - 6y = -15$$
$$2x + 6y = -3$$

قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} x-6y \\ 2x+6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{(i)}$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -15 \\ -3 \end{bmatrix}$

مساوات (i) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX = B$$

یا

$$X = A^{-1}B$$

اب

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

یا

$$\begin{bmatrix}1 & -6\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15\\ -3\end{bmatrix}$$

یہاں

$$A=\begin{bmatrix}1 & -6\\ 2 & 6\end{bmatrix}, A_x=\begin{bmatrix}-15 & -6\\ -3 & 6\end{bmatrix}, A_y=\begin{bmatrix}1 & -15\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -6\\ 2 & 6\end{vmatrix}$$

$$= 1(6) - 2(-6)$$
$$= 6 + 12$$
$$= 18 \neq 0$$

$$|A_x|=\begin{vmatrix}-15 & -6\\ -3 & 6\end{vmatrix}$$

$$= (-15)(6) - (-3)(-6)$$
$$= -90 - 18$$
$$= -108$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$= \frac{-108}{18} = -6$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix}1 & -15\\ 2 & -3\end{vmatrix}$$

$$= 1(-3) - (2)(-15)$$
$$= -3 + 30 = 27$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$y = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

پس، $x = -6, y = \frac{3}{2}$

حل سیٹ $= \left\{\left(-6, \frac{3}{2}\right)\right\}$

(iii) $2x + y = 5$
$x + 3y = 3$

حل: معکوس قالب کے طریقہ سے

دیا گیا ہے کہ $2x + y = 5$
$x + 3y = 3$

مساوات کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix}2x+y\\ x+3y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 3\end{bmatrix} \quad \text{---(i)}$$

فرض کیا $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5\\ 3\end{bmatrix}$

مساوات (i) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$AX = B$$

یا $X = A^{-1}B$

اب $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$= 2(3) - 1(1)$$
$$= 6 - 1 = 5 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}A$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 3\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3(5)+(-1)(3)\\ -1(5)+(2)(3)\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}15-3\\ -5+6\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}12\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{12}{5}\\ \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

پس، $x = \frac{12}{5}, y = \frac{1}{5}$

حل سیٹ $= \left\{\left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\}$

کریمر کے قانون کے ذریعے سے

دیا گیا ہے کہ

$$2x + y = 5$$
$$x + 3y = 3$$

مساوات کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 2\times(3) - 1(1)$$
$$= 6 - 1 = 5 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 5(3) - 3(1)$$
$$= 15 - 3 = 12$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$
$$= \frac{12}{5}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 2(3) - 1(5)$$
$$= 6 - 5 = 1$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$
$$= \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{12}{5}$$

لہٰذا، $y = \frac{1}{5}$

حل سیٹ $= \left\{\left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\}$

6- قالبوں کا استعمال کرتے ہوئے دو ایسے اعداد معلوم کیجیے کہ پہلے عدد کا دوگنا دوسرے میں شامل کرنے سے 21 بنتا ہے اور دوسرے عدد کا دوگنا پہلے میں جمع کرنے سے 27 بنتا ہے۔

حل: فرض کیا پہلا عدد x اور دوسرا عدد y ہے۔

پہلی شرط کے مطابق

$$2x + y = 21 _____ (i)$$

دوسری شرط کے مطابق

$$x + 2y = 27 _____ (ii)$$

مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 27 \end{bmatrix} _____ (i)$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\ B = \begin{bmatrix} 21 \\ 27 \end{bmatrix}$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$AX = B$$

یا

$$X = A^{-1}B$$

اب

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2(2) - 1(1)$$
$$= 4 - 1 = 3 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}21\\ 27\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2(21)+(-1)(27)\\ -1(21)+2(27)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}42-27\\ -21+54\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}15\\ 33\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{15}{3}\\ \frac{33}{3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 11\end{bmatrix}$$

پس، $x = 5,\ y = 11$

پس، 5 اور 11 مطلوبہ اعداد ہیں۔

7- 4 چاقو اور 6 کانٹوں کی قیمت 136 روپے ہے جب کہ 6 چاقوؤں اور 5 کانٹوں کی قیمت 164 روپے ہے۔ قالبوں کا استعمال کرتے ہوئے ایک چاقو اور ایک کانٹے کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا ایک چاقو کی قیمت x روپے اور ایک کانٹے کی قیمت y روپے ہے۔

پہلی شرط کے مطابق

$$4x + 6y = 136 \quad \text{(i)}$$

دوسری شرط کے مطابق

$$6x + 5y = 164 \quad \text{(ii)}$$

مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix}4x+6y\\ 6x+5y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}136\\ 164\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & 6\\ 6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}136\\ 164\end{bmatrix} \quad \text{(i)}$$

فرض کیا $A = \begin{bmatrix}4 & 6\\ 6 & 5\end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix}136\\ 164\end{bmatrix}$

پھر مساوات (i) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$AX = B$$

یا $X = A^{-1}B$

اب $A = \begin{bmatrix}4 & 6\\ 6 & 5\end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix}4 & 6\\ 6 & 5\end{vmatrix}$$

$$= 4(5) - 6(6)$$

$$= 20 - 36$$

$$= -16 \neq 0$$

$$\text{Adj}A = \begin{bmatrix}5 & -6\\ -6 & 4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}A$$

$$= \frac{1}{-16}\begin{bmatrix}5 & -6\\ -6 & 4\end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix}5 & -6\\ -6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}136\\ 164\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix}5(136)+(-6)(164)\\ -6(136)+4(164)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix}680-984\\ -816+656\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix}-304\\ -160\end{bmatrix}$$

www.ilmkidunya.com

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-304}{-16} \\ \frac{-160}{-16} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

پس، $x = 19, y = 10$

چاقو کی قیمت = Rs. 19 روپے

کانٹے کی قیمت = Rs. 10 روپے

-8 ایک دکاندار 5 مردوں اور 3 عورتوں کو ملازمت دیتا ہے اور 3500 روپے یومیہ اجرت ادا کرتا ہے۔ اگر مردوں کی تعداد کم کر کے 2 کر دی جائے اور 3 اضافی عورتوں کو ملازم رکھا جائے، تو یومیہ اجرت کی رقم 5000 روپے جاتی ہے۔ قالبوں کا استعمال کرتے ہوئے ایک مرد اور ایک عورت کی یومیہ اجرت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا ایک آدمی کی اُجرت x روپے اور ایک عورت کی اُجرت y روپے ہے۔

پہلی شرط کے مطابق

$$5x + 3y = 3500 \quad \text{(i)}$$

دوسری شرط کے مطابق

$$2x + 6y = 5000 \quad \text{(i)}$$

ان مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 5x+3y \\ 2x+6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3500 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3500 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

فرض کیا

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3500 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

اب مساوات (i) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$AX = B$$

یا

$$X = A^{-1}B$$

اب

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (5)(6) - (2)(3)$$
$$= 30 - 6$$
$$= 24 \neq 0$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times Adj\ A$$

$$= \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

اب $X = A^{-1}B$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3500 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 6(3500)+(-3)(5000) \\ -2(3500)+5(5000) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 21000-15000 \\ -7000+25000 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 6000 \\ 18000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{6000}{24} \\ \frac{18000}{24} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 250 \\ 750 \end{bmatrix}$$

پس، $x = 250, y = 750$

ایک آدمی کی یومیہ اُجرت = 250 روپے

ایک عورت کی یومیہ اُجرت = 750 روپے

www.ilmkidunya.com

معروضی طرز سوالات

اضافی کثیرالانتخابی سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے کثیرالانتخابی سوالات

3.1 قالب

درست جواب کا انتخاب کریں۔

-1 قالب $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ میں کتنی قطاریں ہیں؟

(a) 6 (b) 3 (c) 2 (d) 4

-2 قالب $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ میں کتنے کالم ہیں؟

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

-3 قالب $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ کی دوسری قطار کے ارکان ہیں:

(a) 1,3 (b) 2,4 (c) 12 (d) 3,4

-4 قالب $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ کی پہلی قطار اور دوسرے کالم کا رکن کیا ہے؟

(a) 7 (b) 1 (c) 4 (d) 3

3.1.3 قالب کا مرتبہ

-5 ان میں سے کون سا قالب 2×2 کے مرتبہ کا ہے۔

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

-6 قالب $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ بتائیں۔

(a) 3-by-3 (b) 3-by-1 (c) 1-by-3 (d) 1-by-1

-7 ایک قالب کا مرتبہ 3-by-2 ہے۔ اس کے ہر کالم کے ارکان کی تعداد ہوگی۔

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 4

-8 ایک 3 by 2 مرتبے والے قالب کے کالموں کی تعداد کتنی ہوگی؟

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 6

-9 قالب $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ کیا ہے؟

(a) 3-by-2 (b) 3-by-3 (c) 2×2 (d) 6

www.ilmkidunya.com

3.1.4 مساوی قالب

10- اگر $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ہوں تو x کی قیمت ہوگی۔

(a) 0 (b) 5 (c) 1 (d) 3

11- اگر $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ 2 \end{bmatrix}$ اور $b = 3$ ہو تو a کی قیمت ہوگی۔

(a) 2 (b) 4 (c) 7 (d) 9

12- اگر $[1 \quad x] \doteq [10 \quad 1]$ $[2x \quad 1]$ ہو تو x کی قیمت ہوگی۔

(a) 20 (b) 1 (c) 5 (d) 10

3.2 قالبوں کی اقسام

13- قالب $A = [-7 \quad 0 \quad 4]$ کس قسم کا قالب ہے؟

(a) قطاری (b) مربعی (c) صفری (d) کالمی

14- قالب $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ کس قسم کا قالب ہے؟

(a) وحدانی (b) مربعی (c) کالمی (d) قطاری

15- کون سا قالب صفری قالب ہے؟

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

16- قالب $B = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ کس قسم کا قالب ہے؟

(a) مربعی (b) قطاری (c) صفری (d) کالمی

17- کون سا مرتبہ مربعی قالب کا ہے؟

(a) 1×3 (b) 3×2 (c) 3×3 (d) 3×1

18- قالب $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ کس قسم کا قالب ہے؟

(a) قطاری (b) مربعی (c) صفری (d) مستطیلی

19- کون سا مرتبہ مستطیلی قالب کا ہے؟

(a) 1×3 (b) 3×3 (c) 2×2 (d) 1×1

20- کون سا قالب وتری قالب نہیں ہے؟

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

21- قالب $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ کس قسم کا قالب ہے؟

(a) قطاری (b) سکیلر (c) صفری (d) مستطیلی

www.ilmkidunya.com

22- وحدانی قالب کی شناخت کریں:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

23- قالب $A = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ کا ٹرانسپوز ہے:

(a) $\begin{bmatrix} -7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

24- ایک مربعی قالب A سیمٹرک کہلاتا ہے اگر

(a) $A = A^{-1}$ (b) $A = -A$ (c) $A^t = A$ (d) $A^t = -A$

25- ان میں سے کون سی مثال سکیو سیمٹرک قالب کی ہے؟

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

26- ایسا قالب جس کا ہر رکن صفر ہو کہلاتا ہے۔

(a) وحدانی (b) سکیو سیمٹرک (c) قطاری (d) صفری

3.3 قالبوں پر الجبری عوامل

27- اگر قالب A کا مرتبہ 2×3 اور قالب B کا مرتبہ 2×3 ہو تو A+B سے حاصل شدہ قالب کا مرتبہ ہوگا:

(a) 3×2 (b) 6×4 (c) 2×3 (d) 3×3

28- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ہوں تو A+B ہوگا۔

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$

29- اگر $2A = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ ہو تو قالب A ہوگا۔

(a) $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 20 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

30- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو A − B معلوم کریں۔

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

31- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ ہو تو B − A ہوگا۔

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

32- قالبوں کا قانون مبادلہ بلحاظ جمع ہے۔

(a) $A + B = A - B$ (b) $A + B = B + A$ (c) $A + B = AB$ (d) $A + B = 0$

www.ilmkidunya.com

-33 قالب $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$ کا جمعی ذاتی قالب ہے:

(a) $\begin{bmatrix}-1&-2\\-3&-5\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

-34 قالب $A=\begin{bmatrix}1&0\\-3&2\end{bmatrix}$ کا جمعی معکوس قالب ہے:

(a) $\begin{bmatrix}2&0\\3&1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-1&0\\3&-2\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}-1&2\\3&0\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-1&0\\+3&2\end{bmatrix}$

-35 اگر قالب $A=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$ ہو تو $3A-A$ ہوگا:

(a) $\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$

-36 کون سے قالب جمع کے لیے قابل موافق ہیں؟

(a) $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$

-37 قالبوں A اور B کے لیے کون سا ہمیشہ درست ہوتا ہے؟

(a) $A-B=B-A$ (b) $(A-B)^t=A^t-B^t$ (c) $(A-B)^t=A^tB^t$ (d) $AB=I$

-38 اگر $Q=\begin{bmatrix}2&-3\\0&-4\end{bmatrix}$ ہو تو $4Q=$ ______

(a) $\begin{bmatrix}-8&12\\0&16\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}8&-12\\0&-16\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}8&12\\16&0\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}8&9\\4&-12\end{bmatrix}$

3.4 قالبوں کی ضرب (Multiplication of Matrices)

-39 قالبوں کا کون سا جوڑا ضرب کے لیے قابل موافق ہے؟

(a) $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

-40 $\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$ کا حاصل ضرب ہے:

(a) $[0]$ (b) $[7]$ (c) $[5]$ (d) $\begin{bmatrix}5&0\end{bmatrix}$

-41 اگر $A=\begin{bmatrix}5&7\\0&-4\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ہو تو AB ہوگا:

(a) $\begin{bmatrix}7&5\\4&0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}0&-4\\5&7\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}5&7\\0&-4\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-5&-7\\0&4\end{bmatrix}$

-42 اگر $A=\begin{bmatrix}-3&7\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}-4\\-11\end{bmatrix}$ ہو تو AB کا مرتبہ ہوگا:

(a) 1-by-2 (b) 2-by-2 (c) 1-by-1 (d) 2-by-1

-43 قالبوں کی ضرب کی خاصیت تلازم ہے:

(a) $AB=BA$ (b) $AB=I$ (c) $AB+C=AB+AC$ (d) $(AB)C=A(BC)$

44- قالب $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ کا ضربی ذواضعافی عنصر ہے:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.5 قالب کا ضربی معکوس

45- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تب $|A|$ ہے۔

(a) 29 (b) 0 (c) 11 (d) 16

46- $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ کی قیمت کیا ہوگی؟

(a) 4 (b) 10 (c) 6 (d) −6

47- اگر $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تب $|B|$ کی قیمت ہے:

(a) ab − cd (b) ad − bc (c) cb − ad (d) ac − bd

3.5.2 نادر اور غیر نادر قالب

48- درج ذیل میں سے کون سا نادر قالب ہے؟

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

49- درج ذیل میں سے کون سا قالب غیر نادر ہے؟

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

50- اگر $\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 3 & k \end{vmatrix} = 0$ ہو تو k کی قیمت ہوگی۔

(a) 4 (b) 2 (c) 5 (d) 0

51- درج ذیل سے کون سا قالب نادر نہیں ہے؟

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 21 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

3.5.3 غیر نادر قالب کا ایڈ جائنٹ

52- قالب $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ کا ایڈ جائنٹ ہے:

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

53- قالب $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ کا ایڈ جائنٹ ہے:

(a) $\begin{bmatrix} d & -d \\ -c & a \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -a & c \\ b & -d \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} a & d \\ b & c \end{bmatrix}$

www.ilmkidunya.com

3.5.4 غیر نادر قالب کا ضربی معکوس

www.ilmkidunya.com

-54 کس قالب کا ضربی معکوس ممکن نہیں۔

(a) $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}7&14\\2&4\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$

-55 $(AB)^{-1}=$ ______

(a) $(BA)^{-1}$ (b) $B^{-1}A^{-1}$ (c) AB (d) $(A+B)'$

-56 اگر $A=\begin{bmatrix}4&9\\2&5\end{bmatrix}$ ہو تو $AA^{-1}=$ ______

(a) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-4&-4\\-2&-5\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}5&-9\\-2&4\end{bmatrix}$

-57 قالب B کا ضربی معکوس نہیں ہوتا اگر

(a) $|B|=-1$ (b) $|B|=4$ (c) $|B|=0$ (d) $|B|=10$

جوابات

-1 3   -2 3   -3 3,4   -4 7   -5 $\begin{bmatrix}1&2\\4&0\end{bmatrix}$

-6 1-by-3   -7 3   -8 3   -9 3-by-2   -10 3

-11 4   -12 5   -13 قطاری   -14 کالمی   -15 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

-16 مربعی   -17 3×3 -18 مستطیلی   -19 1×3 -20 $\begin{bmatrix}-3&4\\0&2\end{bmatrix}$

-21 سکیلر   -22 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ -23 $[-7\ \ 3\ \ 2]$ -24 $A^t=A$ -25 $\begin{bmatrix}0&-7\\7&0\end{bmatrix}$

-26 صفری   -27 3×2 -28 $\begin{bmatrix}6&8\\10&12\end{bmatrix}$ -29 $\begin{bmatrix}5&2\\3&4\end{bmatrix}$ -30 $\begin{bmatrix}3&-2\\1&2\end{bmatrix}$

-31 $[2\ \ 2\ \ -4]$ -32 $A+B=B+A$ -33 $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ -34 $\begin{bmatrix}-1&0\\3&-2\end{bmatrix}$ -35 $\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}$

-36 $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$ -37 $(A-B)^t=A^t-B^t$ -38 $\begin{bmatrix}-8&-12\\0&-16\end{bmatrix}$

-39 $\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$ -40 $[5]$ -41 $\begin{bmatrix}5&7\\0&-4\end{bmatrix}$ -42 1-by-1   -43 $(AB)C=A(BC)$

-44 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ -45 11   -46 -6 -47 $ad-bc$ -48 $\begin{bmatrix}4&10\\2&5\end{bmatrix}$

-49 $\begin{bmatrix}3&7\\4&2\end{bmatrix}$ -50 2   -51 $\begin{bmatrix}4&7\\2&9\end{bmatrix}$ -52 $\begin{bmatrix}3&0\\-2&-4\end{bmatrix}$ -53 $\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

-54 $\begin{bmatrix}7&14\\2&4\end{bmatrix}$ -55 $B^{-1}A^{-1}$ -56 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ -57 $|B|=0$

www.ilmkidunya.com

اضافی مختصر سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے مختصر جوابی سوالات

3.1.1 قالب کی قطاریں اور کالم

مختصر جواب دیں۔

1- قالب کی تعریف کریں:

جواب: قالب ایک مستطیلی شکل کی ترتیب ہے جس کے ارکان قطاروں اور کالموں میں مربعی بریکٹ کے اندر لکھے جاتے ہیں۔

2- قالب کے حوالے سے قطار کی تعریف کریں۔

جواب: افقی لائن میں لکھے ہوئے ارکان قالب کی قطار بناتے ہیں۔

3- قالب کے حوالے سے کالم کی تعریف کریں۔

جواب: عمودی لائن میں لکھے ہوئے ارکان قالب کے کالم بناتے ہیں۔

4- $B=\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ **، اس قالب مین کتنی قطاریں اور کالم ہیں؟**

جواب: قالب B کی دو قطاریں اور تین کالم ہیں۔

3.1.3 قالب کا مرتبہ

5- قالب $A=[1\ 3\ 7]$ کا مرتبہ لکھیں۔

جواب: قالب A کا مرتبہ 1-by-3 ہے۔

6- قالب، $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ **کا مرتبہ لکھیں**

جواب: قالب B کا مرتبہ 3-by-2 ہے۔

7- کیا قالب $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **اور قالب $B=[1\ 2]$ کا مرتبہ برابر ہے۔**

جواب: نہیں ان دونوں قالبوں کا مرتبہ برابر نہیں ہے۔ قالب A کا مرتبہ 2-by-1 ہے اور قالب B کا مرتبہ 1-by-2 ہے۔

3.1.4 مساوی قالب

8- مساوی قالب کی تعریف کریں۔

جواب: دو قالب A اور B مساوی قالب کہلاتے ہیں۔ اگر ان کا مرتبہ اور متعلقہ ارکان ایک جیسے ہوں۔

9- اگر $\begin{bmatrix} 5x-1 & 4 \\ 11 & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$ **ہوں تب x اور y کی قیمتیں معلوم کریں۔**

حل: دیا گیا ہے کہ $\begin{bmatrix} 5x-1 & 4 \\ 11 & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$

چونکہ دیے گئے قالب مساوی ہیں۔ لہٰذا ان کے مرتبے اور متعلقہ ارکان ایک جیسے ہوں گے۔

$5x-1 = 14$

$5x-14+1$

$5x = 15$

$x = \frac{15}{5}$

$x = 3$

$y = 9$

پس $x = 3,\ y = 9$

10- کیا قالب $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **اور قالب** $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **مساوی ہیں یا نہیں۔ وجہ بتائیے۔**

جواب: نہیں قالب A اور قالب B مساوی قالب نہیں ہیں۔ دونوں کا مرتبہ تو ایک جیسا ہے مگر دونوں قالبوں میں دوسری قطار کے متعلقہ ارکان ایک جیسے نہیں ہیں۔

11- اگر $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ b & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-1 & -4 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ **ہوں تو a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔**

حل: مساوی قالبوں کے متعلقہ ارکان بھی مساوی ہوتے ہیں۔

$a-1 = 7$

$a = 7+1$

$a = 8$

$b = 9$

پس $a = 8,\ b = 9$

www.ilmkidunya.com

-12 قطاری قالب کی تعریف کریں:

جواب: ایسا قالب جس کی صرف ایک ہی قطار ہو قطاری قالب کہلاتا ہے۔

مثلاً $A = [1 \quad 0 \quad 3]$

-13 کالمی قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایسا قالب جس کا صرف ایک ہی کالم ہو کالمی قالب کہلاتا ہے۔

مثلاً: $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

-14 ایک مربعی قالب کون سا ہوتا ہے؟

جواب: ایسا قالب جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو مربعی قالب کہلاتا ہے۔ مثلاً $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ ایک مربعی قالب ہے۔

-15 مستطیلی قالب کی تعریف کریں۔

جواب: اگر قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر نہ ہو تو اسے مستطیلی قالب کہتے ہیں۔ مثلاً $A = [3 \quad 4 \quad 5]$

-16 وتری قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایک مربعی قالب کو وتری قالب کہا جاتا ہے، اگر اس کے مرکزی وتری ارکان میں سے کم از کم ایک غیر صفر ہو اور غیر وتری ارکان سب صفر ہوں۔

مثلاً $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

-17 سکیلر قالب کی تعریف کریں:

جواب: ایک وتری قالب کو سکیلر قالب کہا جاتا ہے۔ اگر مرکزی وتر میں موجود تمام ارکان ایک جیسے اور غیر صفر ہوں۔

-18 وحدانی قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایک سکیلر قالب کو وحدانی قالب کہا جاتا ہے اگر اس کے تمام مرکزی وتری ارکان 1 ہوں مثلاً $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

-19 قالب $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ کا ٹرانسپوز معلوم کریں۔

حل: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

-20 قالب $C = [-1 \quad 0 \quad -19]$ کا ٹرانسپوز معلوم کریں۔

حل: $C = [-1 \quad 0 \quad -19]$

$$C^t = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -19 \end{bmatrix}$$

-21 اگر $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کریں کہ $(C^t)^t = C$

حل: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$

$$C^t = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(C^t)^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$$

پس ثابت ہوا کہ $(C^t)^t = C$

-22 قالب $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ کا منفی قالب معلوم کریں۔

حل: $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$$-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$$

-23 اگر $A = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کریں کہ یہ ایک سیمٹرک قالب ہے۔

حل: $A = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^t = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = A$$

پس ثابت ہوا کہ A ایک سیمٹرک قالب ہے کیوں کہ $A^t = A$

-24 ثابت کریں کہ $M = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ -13 & 0 \end{bmatrix}$ ایک سیکو سیمٹرک ہے۔

حل: $M = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ -13 & 0 \end{bmatrix}$

$$M^t = \begin{bmatrix} 0 & -13 \\ 13 & 0 \end{bmatrix} = -M$$

www.ilmkidunya.com

$$= -1\begin{bmatrix} 0 & 13 \\ -13 & 0 \end{bmatrix} = -M$$

$$M^t = -M$$

پس ثابت ہوا کہ M ایک سکیو سیمٹرک قالب ہے۔

3.3 قالبوں پر الجبری عوامل

-25 اگر $Z = [-3 \ \ 0 \ \ 15]$ ہو تب $-7Z$ معلوم کریں۔

حل:

$$Z = [-3 \ \ 0 \ \ 15]$$

$$-7Z = -7[-3 \ \ 0 \ \ 15]$$

$$-7Z = [21 \ \ 0 \ \ -105]$$

-26 اگر $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ اور $Z = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ہو تو $y - 5Z$ معلوم کریں۔

حل:

$$Y - 5Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 35 & 30 \\ 20 & -15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-35 & 0-30 \\ 1-20 & 2+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-35 & 0-30 \\ 1-20 & 2+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -34 & -30 \\ -19 & 17 \end{bmatrix}$$

-27 اگر $Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تو $Z - 3Z$ معلوم کریں۔

حل:

$$Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Z - 3Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-6 & 3-9 \\ -3+9 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

-28 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ ہو تو $A^t + B^t$ معلوم کریں۔

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^t = [1 \ \ 7], B^t = [0 \ \ 4]$$

$$A^t + B^t = [1 \ \ 7] + [0 \ \ 4]$$

$$= [1+0 \ \ 7+4]$$

$$= [1 \ \ 11]$$

3.4 قالبوں کی ضرب

-29 اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ہو تو AB معلوم کریں۔

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(-5)+0(1) \\ -3(-5)+5(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -15+0 \\ 15+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

-30 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو BA معلوم کریں۔

حل:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+0(3) & 1(2)+0(4) \\ 0(1)+1(3) & 0(2)+1(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+0 \\ 0+3 & 0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

-31 اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تو $(BC)^t$ معلوم کریں۔

حل:

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+0(4) & 1(7)+0(2) \\ 2(1)+3(4) & 2(7)+3(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+0 & 7+0 \\ 2+12 & 14+6 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$$

$$(BC)^t = \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 7 & 20 \end{bmatrix}$$

-32 $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = -3(4)-(-7)(2) = -12+14 = 2$$

-33 $A = \begin{bmatrix} -7 & 35 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ کا مقطع معلوم کریں۔

حل:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 35 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} -7 & 35 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= -7(5) - (-1)(35)$$

$$= -35 + 35 = 0$$

-34 قالب $C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ کا مقطع معلوم کریں۔

حل:

$$C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|C| = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -7(0) - (-3)(-5)$$

$$= 0 - 15 = -15$$

-35 بتائیے کہ قالب $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$ نادر قالب ہے یا غیر نادر

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$$

$$= 4(21) - 12(7)$$

$$= 84 - 84 = 0$$

پس A ایک نادر قالب ہے۔

-36 ثابت کریں کہ $A = \begin{bmatrix} 19 & 3 \\ 17 & 2 \end{bmatrix}$ ایک غیر نادر قالب ہے۔

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 19 & 3 \\ 17 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 19(2) - 17(3)$$

$$= 38 - 51$$

$$= -13 \neq 0$$

چونکہ $|A| \neq 0$، لہٰذا قالب A ایک غیر نادر قالب ہے۔

-37 اگر $B = \begin{bmatrix} k & 6 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$ ایک نادر قالب ہو تو K کی قیمت معلوم کریں۔

حل:

$$B = \begin{bmatrix} k & 6 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} k & 6 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} = 0$$

$$k(14) - 7(6) = 0$$

$$14k - 42 = 0$$

$$14k = 42$$

$$k = \frac{42}{14}$$

$$k = 3$$

-38 قالب $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ کا ایڈجائنٹ معلوم کریں۔

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

-39 قالب $M = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$ کا ایڈجائنٹ معلوم کریں۔

حل:

$$M = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } M = \begin{bmatrix} v & -t \\ -u & s \end{bmatrix}$$

-40 ایک قالب کا ضربی معکوس کب ممکن نہیں ہوتا ہے؟

حل: جب قالب ایک نادر قالب ہوتا ہے تب قالب کا ضربی معکوس ممکن نہیں ہوتا ہے۔

www.ilmkidunya.com

41- قالب $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&0\end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس معلوم کریں۔

جواب: $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&0\end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{bmatrix}2&1\\3&0\end{bmatrix}$$

$$=2(0)-3(1)$$

$$=0-3$$

$$=-3\neq 0$$

چونکہ قالب A ایک غیر نادر قالب ہے اس لیے قالب A کا ضربی معکوس ممکن ہے۔

$$\text{Adj. }A=\begin{bmatrix}0&-1\\-3&2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{Adj }A$$

$$=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}0&-1\\-3&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{0}{-3}&\frac{-1}{-3}\\\frac{-3}{-3}&\frac{2}{-3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}\\1&\frac{-2}{3}\end{bmatrix}$$

42- ثابت کریں کہ $\begin{bmatrix}8&5\\4&3\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{-5}{4}\\-1&2\end{bmatrix}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

حل: فرض کیا $B=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{-5}{4}\\-1&2\end{bmatrix}$ اور $A=\begin{bmatrix}8&5\\4&3\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}8&5\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{-5}{4}\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8\left(\frac{3}{4}\right)+5(-1)&8\left(-\frac{5}{4}\right)+5(2)\\4\left(\frac{3}{4}\right)+(3)(-1)&4\left(\frac{-5}{4}\right)+3(2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6-5&-10+10\\3-3&-5+6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I \quad ___\text{(i)}$$

$$BA=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{-5}{4}\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&5\\4&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\times 8+\left(\frac{-5}{4}\right)\times 4&\frac{3}{4}\times 5+\left(\frac{-5}{4}\right)\times 3\\-1\times 8+2\times 4&-1\times 5+2\times 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\times 2-5\times 1&\frac{15}{4}-\frac{15}{4}\\-8+8&-5+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-5&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I \quad ___\text{(ii)}$$

(i) اور (ii) سے $AB=BA=I$ اس لیے $A=\begin{bmatrix}8&5\\4&3\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{-5}{4}\\-1&2\end{bmatrix}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

43- $B=\begin{bmatrix}-3&-7\\9&21\end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس معلوم کریں۔

حل: $B=\begin{bmatrix}-3&-7\\9&21\end{bmatrix}$

$$|B|=\begin{vmatrix}-3&-7\\9&21\end{vmatrix}$$

$$=(-3\times 21)-(9\times -7)$$

$$=-63+63=0$$

پس قالب B کا ضربی معکوس ممکن نہیں ہے کیوں کہ یہ ایک نادر قالب ہے۔

www.ilmkidunya.com