# یونٹ 1

# کمپلیکس اعداد

## حاصلاتِ تعلّم

اس یونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- کمپلیکس اعداد، کمپلیکس کا نجوگیٹ، کمپلیکس عدد کے ماڈیولس یا مطلق قدر کی شناخت کر سکیں۔
- الجبری خصوصیات کا اطلاق کر سکیں اور کمپلیکس اعداد پر بنیادی عوامل لاگو کر سکیں۔
- کمپلیکس اعداد کے سیٹ پر جمعی ذاتی عنصر اور ضربی ذاتی عنصر کا مظاہرہ کر سکیں۔
- ایک کمپلیکس عدد z کا جمعی معکوس اور ضربی معکوس معلوم کر سکیں۔
- ایک کمپلیکس عدد z کی درج ذیل خصوصیات کا مظاہرہ کر سکیں:
  - o $|z| = |-z| = |\bar{\bar{z}}| = |-\bar{z}|$
  - o $\bar{\bar{z}} = z, z\bar{z} = |z|^2$
  - o $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
  - o $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2; \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$
- کمپلیکس عدد، کمپلیکس عدد کے ماڈیولس اور کمپلیکس عدد کے الجبری عوامل کی جیومیٹرک وضاحت کا اطلاق کر سکیں۔
- $(x + iy)^n$ اور $\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right)^n$، $x_2 + iy_2 \neq 0$ کی طرح کے کمپلیکس اعداد کے حقیقی اور خیالاتی حصے معلوم کر سکیں جہاں $n = \pm 1$، $n = \pm 2$

  یک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کر سکیں۔
- کمپلیکس عددی سروں والی یک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کر سکیں۔

## 1.1 کمپلیکس اعداد (Complex Numbers)

کمپلیکس عدد ایک ایسا عدد ہے جسے $x + iy$ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے جہاں x اور y حقیقی اعداد ہیں اور i خیالاتی اکائی ہے۔

یہ خیالاتی اکائی ہمیں بتاتی ہے کہ $i^2 = -1$

**مثال 1: درج ذیل کو مختصر کیجیے۔**

(i) $i^7$ (ii) $i^8$ (iii) $i^{17}$ (iv) $i^{-25}$

**حل:**

(i) $i^7 = i^6 \times i = (i^2)^3 \times i = (-1)^3 \times i = -i$

(ii) $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$

(iii) $i^{17} = i^{16} \times i = (i^2)^8 \times i = (-1)^8 \times i = i$

(iv) $i^{-25} = \frac{1}{i^{25}} = \frac{1}{i^{24} \times i} = \frac{1}{i^{(2)12} \times i} = \frac{1}{(-1)^{12} \times i} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

**کیا آپ جانتے ہیں؟**

کمپلیکس اعداد سمارٹ فون سگنل پروسیسنگ اور ایم آر آئی امیجنگ جیسی ٹیکنالوجیز کے لیے ضروری ہیں۔

www.ilmkidunya.com

## کمپلیکس عدد کی مستطیلی شکل (Rectangular Form of a Complex Number)

ایک کمپلیکس عدد $x + iy$ (یا $x + yi$) کی شکل کا ہوتا ہے جہاں $x$ اور $y$ حقیقی اعداد ہیں۔ $x$ کو حقیقی حصہ کہا جاتا ہے اور $y$ کو کمپلیکس عدد کا خیالاتی حصہ کہا جاتا ہے۔

(i) اگر $x = 0$ ہو تو کمپلیکس عدد کو خالص خیالاتی عدد کہا جاتا ہے۔

(ii) اگر $y = 0$ ہو تو کمپلیکس عدد کو حقیقی عدد کہا جاتا ہے۔

(iii) کمپلیکس عدد $x + iy$ کو عموماً $z$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور ہم یوں لکھتے ہیں:

$x = Re(z)$ اور $y = Im(z)$

مثال کے طور پر، $Re(5 - 7i) = 5$ اور $Im(5 - 7i) = -7$

## کمپلیکس اعداد کی برابری (Equality of Complex Numbers)

دو کمپلیکس اعداد $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ صرف اور صرف اس وقت مساوی کہلاتے ہیں اگر اور $Re(z_1) = Re(z_2)$ اور $Im(z_1) = Im(z_2)$ یعنی کہ $x_1 = x_2$ اور $y_1 = y_2$۔

مثال کے طور پر، اگر $\alpha + i\beta = -2 + 5i$ ہو تو $\alpha = -2, \beta = 5$۔

**مثال 2: اگر $(2x - 1) + (y + 4)i = 5 + 7i$ ہو تو $x$ اور $y$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔**

حل: $(2x - 1) + (y + 4)i = 5 + 7i$

دیے گئے دو کمپلیکس اعداد مساوی ہیں اس لیے ان کے حقیقی اور خیالاتی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

لہٰذا

$$2x - 1 = 5 \quad , \quad y + 4 = 7$$
$$2x = 6 \quad , \quad y = 7 - 4$$
$$x = 3 \quad , \quad y = 3$$

## حل مشق 1.1

**1- درج ذیل کو مختصر کیجیے۔**

(i) $i^5$

حل: $i^5 = i^4 \times i = (i^2)^2 \times i = (-1)^2 \times i = 1 \times i = i \qquad (\because i^2 = -1)$

(ii) $i^{16}$

حل: $i^{16} = (i^2)^8 = (-1)^8 = 1 \qquad (\because i^2 = -1)$

(iii) $(-i)^{-19}$

حل:
$$(-i)^{-19} = \frac{1}{(-i)^{19}} = \frac{1}{(-1\times i)^{19}} = \frac{1}{(-1)^{19}\times i^{19}} = \frac{1}{-1\times i^{18}\times i}$$
$$= \frac{1}{-1\times (i^2)^9\times i} = \frac{1}{-1\times(-1)^9\times i} = \frac{1}{-1\times -1\times i} = \frac{1}{1\times i} \qquad (\because i^2 = -1)$$
$$= \frac{1}{i} = \frac{1\times i}{i\times i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

(iv) $27i^{-26}$

حل: $= \dfrac{27}{i^{26}} = \dfrac{27}{(i^2)^{13}} = \dfrac{27}{(-1)^{13}} = \dfrac{27}{-1} = -27 \qquad (\because i^2 = -1)$

www.ilmkidunya.com

**(v) $i^{11} + i^5$**

حل:

$i^{11} + i^5 = i^{10} \times i + i^4 \times i = (i^2)^5 \times i + (i^2)^2 \times i$

$= (-1)^5 \times i + (-1)^2 \times i = -1 \times i + 1 \times i = -i + i = 0$ $\quad (\because i^2 = -1)$

**(vi) $(i^4 + i^3 + i^2 + i)^2$**

حل:

$(i^4 + i^3 + i^2 + i)^2 = [(i^2)^2 + i^2 \times i + (-1) + i]^2$ $\quad (\because i^2 = -1)$

$= [(-1)^2 + (-1) \times i - 1 + i]^2 = (1 - i - 1 + i)^2$

$= (1 - 1 - i + i)^2 = (0)^2 = 0$

**(vii) $\left(\frac{i^8}{i^5}\right)^{-5}$**

حل:

$\left(\frac{i^8}{i^5}\right)^{-5} = (i^{8-5})^{-5} = (i^3)^{-5} = (i^3)^{-5} = i^{-15}$

$= \frac{1}{i^{15}} = \frac{1}{i^{14} \times i} = \frac{1}{(i^2)^7 \times i} = \frac{1}{(-1)^7 \times i} = \frac{1}{-1 \times i}$ $\quad (\because i^2 = -1)$

$= \frac{1}{-i} = \frac{1 \times i}{-i \times i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{-(-1)} = \frac{i}{1} = i$

**(viii) $i^{13} \times i^{29}$**

حل:

$i^{13} \times i^{29} = i^{13+29} = i^{42} = (i^2)^{21} = (-1)^{21} = -1$

**-2 $i$ کی شکل میں لکھیے۔**

**(i) $2+\sqrt{-4}$**

حل:

$2+\sqrt{-4} = 2 + \sqrt{4 \times (-1)} = 2 + \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2 + 2i$ $\quad \sqrt{-1} = i$

**(ii) $3-\sqrt{-7}$**

حل:

$3-\sqrt{-7} = 3 - \sqrt{7 \times (-1)} = 3 - \sqrt{7} \times \sqrt{-1} = 3 - \sqrt{7}i$ $\quad \sqrt{-1} = i$

**(iii) $\frac{2}{5} + \frac{\sqrt{-16}}{5}$**

حل:

$\frac{2}{5} + \frac{\sqrt{-16}}{5} = \frac{2+\sqrt{-16}}{5} = \frac{2+\sqrt{16 \times (-1)}}{5}$

$= \frac{2+\sqrt{16} \times \sqrt{-1}}{5} = \frac{2+4i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{4i}{5}$ $\quad \sqrt{-1} = i$

**(iv) $\sqrt{2} - \sqrt{-3}$**

حل:

$\sqrt{2} - \sqrt{-3} = \sqrt{2} - \sqrt{3 \times (-1)} = \sqrt{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{-1} = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$ $\quad \sqrt{-1} = i$

**-3 x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔**

**(i) $(2x + 5) + (y - 3)i = 1 + 2i$**

حل:

$(2x + 5) + (y - 3)i = 1 + 2i$

دیے گئے دونوں کمپلیکس اعداد آپس میں مساوی ہیں اس لیے ان کے حقیقی اور خیالاتی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

$2x + 5 = 1 \quad , \quad y - 3 = 2$

$2x = 1 - 5 \quad , \quad y = 2 + 3$

$2x = -4 \quad , \quad y = 5$

$x = -2$

www.ilmkidunya.com

**(ii) $(3x + 2) - (4 - y)i = 5 + 3i$**

حل:

$(3x + 2) - (4 - y)i = 5 + 3i$

دیے گئے دونوں کمپلیکس اعداد آپس میں مساوی ہیں اس لیے ان کے حقیقی اور خیالاتی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

$3x + 2 = 5 \quad , \quad -(4 - y) = 3$

$3x = 5 - 2 \quad , \quad -4 + y = 3$

$3x = 3 \quad , \quad y = 3 + 4$

$x = \frac{3}{3} \quad , \quad y = 7$

$x = 1$

**(iii) $(2 + i)x + (1 - 2i)y = 3 + 4i$**

حل:

$(2 + i)x + (1 - 2i)y = 3 + 4i$

$2x + xi + y - 2yi = 3 + 4i$

$2x + y + xi - 2yi = 3 + 4i$

$(2x + y) + (x - 2y)i = 3 + 4i$

دیے گئے دونوں کمپلیکس اعداد آپس میں مساوی ہیں اس لیے ان کے حقیقی اور خیالاتی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

$2x + y = 3 \, , \, x - 2y = 4$

$2x + y = 3$ ____ (i)

$x - 2y = 4$ ____ (ii)

مساوات (i) کو 2 سے ضرب دینے سے

$4x + 2y = 6$ ____ (iii)

مساوات (ii) اور (iii) کو جمع کریں۔

$$\begin{array}{r} x - 2y = 4 \\ 4x + 2y = 6 \\ \hline 5x \quad = 10 \end{array}$$

$x = \frac{10}{5} \Rightarrow x = 2$

x = 2 مساوات (i) میں درج کرنے سے

$2(2) + y = 3$

$4 + y = 3$

$y = 3 - 4 \Rightarrow y = -1$

$x = 2, y = -1$

**(iv) $(1 - i)x + (2 + i)y = 4 - i$**

حل:

$(1 - i)x + (2 + i)y = 4 - i$

$x - xi + 2y + yi = 4 - i$

$x + 2y - xi + yi = 4 - i$

$(x + 2y) + (-x + y)i = 4 - i$

دیے گئے دونوں کمپلیکس اعداد آپس میں مساوی ہیں اس لیے ان کے حقیقی اور خیالاتی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

$x + 2y = 4$ ____ (i) $\quad -x + y = -1$ ____ (ii)

مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے

$$\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ -x + y = -1 \\ \hline 3y \quad = 3 \end{array}$$

$y = \frac{3}{3}$

$y = 1$

y = 1 مساوات (i) میں درج کرنے سے

$x + 2(1) = 4$

$x + 2 = 4 \Rightarrow = 4 - 2 = 2$

$x = 2$

پس، $x = 2, y = 1$

**(v) $(3x - 1) + (2y - 3)i = 8 + 7i$**

حل:

$(3x - 1) + (2y - 3)i = 8 + 7i$

پس دونوں کمپلیکس اعداد آپس میں مساوی ہیں اس لیے ان کے حقیقی اور خیالاتی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

$3x - 1 = 8 \quad , \quad 2y - 3 = 7$

$3x = 8 + 1 \quad , \quad 2y = 7 + 3$

$3x = 9 \quad , \quad 2y = 10$

$x = \frac{9}{3} \quad , \quad y = \frac{10}{2}$

$x = 3 \quad , \quad y = 5$

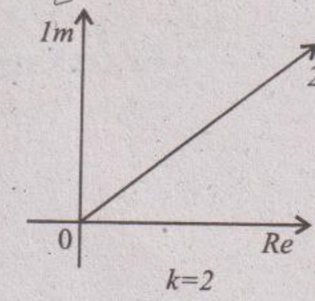
## 1.2 کمپلیکس اعداد پر الجبری عوامل (Algebraic Operations on Complex Numbers)

### کمپلیکس اعداد کی سکیلر ضرب (Scalar multiplication of Complex Numbers)

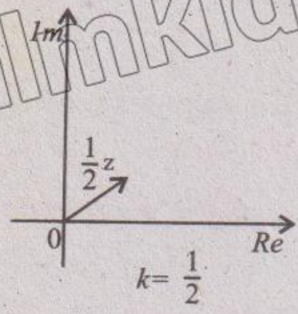
اگر $z = x + iy$ اور $k \in R$ ہوں تو $kz = (kx) + i(ky)$ یا $kz = (kx) + (ky)i$

www.ilmkidunya.com

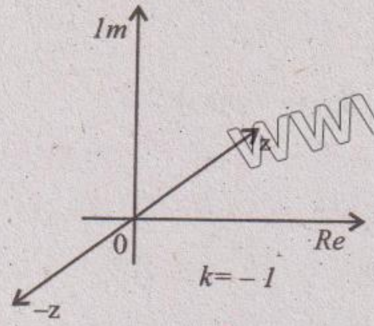
درج ذیل اشکال $kz$ کو ظاہر کرتی ہیں جب $k = 2, \frac{1}{2}, -1$ ہے۔




شکل 1.3




شکل 1.4




شکل 1.5

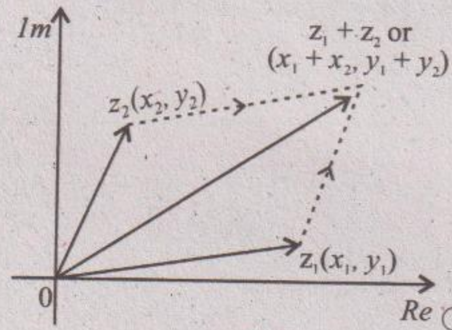
## دو کمپلیکس اعداد کی جمع (Addition of Two Complex Numbers)

اگر $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ جہاں $x_1$، $x_2$، $y_1$ اور $y_2$ حقیقی اعداد ہوں تو

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$
$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

شکل 1.6 سے، جمع کے متوازی الاضلاع قانون کے مطابق

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$




شکل 1.6

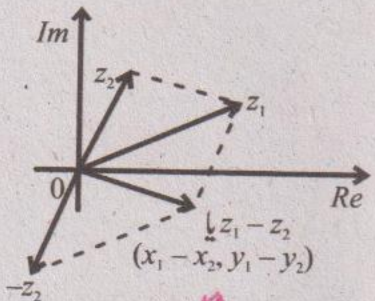
(i) $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$ جہاں $a, b, c, d \in R$,
تو $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

(ii) If $z_1 = a - ib, z_2 = c + id$, جہاں $a, b, c, d \in R$,
$z_1 + z_2 = (a - ib) + (c + id) = (a + c) + (-b + d)i$

**مثال 3:** $(3 + 4i)$ اور $(5 - 2i)$ کو جمع کیجیے۔

حل:
$$(3 + 4i) + (5 - 2i)$$
$$= (3 + 5) + (4 - 2)i$$
$$= 8 + 2i$$

## دو کمپلیکس اعداد کی تفریق (Subtraction of Two Complex Numbers)




شکل 1.7

اگر $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$، جہاں $x_1$، $x_2$، $y_1$ اور $y_2$ حقیقی اعداد ہوں تو

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$
$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$
$$= (x_1 + iy_1) + (-x_2 - iy_2)$$
$$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

**مثال 4:** مختصر کیجیے۔ (i) $(8 + 2i) - (5 - 6i)$ (ii) $(4 - 3i) - (2 - 5i)$

حل:

(i) $(8 + 2i) - (5 - 6i)$
$= 8 + 2i - 5 + 6i$
$= (8 - 5) + (2i + 6i) = 3 + 8i$

(ii) $(4 - 3i) - (2 - 5i)$
$= 4 - 3i - 2 + 5i$
$= (4 - 2) + (-3 + 5)i = 2 + 2i$

**خود آزمائی!**

اگر $z_1 - z_2 = 4 + 6i$ اور $z_2 = 3 - 2i$ ہو تو $z_1$ معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $z_1 - z_2 = 4 + 6i$
$z_1 = 4 + 6i + z_2$
$z_1 = 4 + 6i + 3 - 2i \quad (\because z_2 = 3 - 2i)$
$z_1 = 7 + 4i$

www.ilmkidunya.com

## دو کمپلیکس اعداد کا حاصل ضرب (Multiplication of Two Complex Numbers)

فرض کیا $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$

اب
$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2)$$
$$= x_1x_2 + x_1y_2i + y_1x_2i + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

**مثال 5:** (i) مختصر کیجیے۔ $(3 - 4i)(5 - 6i)$

(ii) اگر $z_1 = 2 + 3i$ اور $z_2 = 4 + 7i$ ہو تو $z_1z_2$ معلوم کیجیے۔

**حل:**

(i) $(3 - 4i)(5 - 6i)$
$$= 3(5 - 6i) - 4i(5 - 6i)$$
$$= 15 - 18i - 20i + 24i^2$$
$$= 15 - (18 + 20)i - 24$$
$$= 15 - 38i - 24$$
$$= (15 - 24) - 38i = -9 - 38i$$

(ii) $z_1z_2 = (2 + 3i)(4 + 7i)$
$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$
$$z_1z_2 = (2 \times 4 - 3 \times 7) + i(2 \times 7 + 3 \times 4)$$
$$= (8 - 21) + (14 + 12)i = -13 + 26i$$

## دو کمپلیکس اعداد کی تقسیم (Division of Two Complex Numbers)

فرض کیا $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$

اب
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}, z_2 \neq 0$$
$$= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2 - i^2y_1y_2}{(x_2)^2 - (iy_2)^2}$$
$$= \frac{x_1x_2 - i(x_1y_2 - y_1x_2) + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (i^2 = -1)$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - i(x_1y_2 - y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad \frac{i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

**خود آزمائی!**

-1 مختصر کیجیے۔

$$\left(\frac{1+2i}{3-i}\right)(2+i)$$

**حل:**
$$= \frac{(1+2i)(2+i)}{3-i} = \frac{2+i+4i+2i^2}{3-i}$$
$$= \frac{2+5i+2(-1)}{3-i} = \frac{2+5i-2}{3-i} = \frac{0+5i}{3-i}$$
$$= \frac{5i}{3-i} = \frac{5i}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i} = \frac{15i+5i^2}{9-(-1)}$$

-2 کمپلیکس عدد z معلوم کیجیے۔

اگر $\frac{z}{2+i} = 3 - i$

**حل:**
$$\frac{z}{2+i} = 3 - i$$
$$z = (3 - i)(2 + i)$$
$$= 3(2 + i) - i(2 + i)$$
$$= 6 + 3i - 2i - i^2$$
$$= 6 + i - (-1) = 6 + 1 + i = 7 + i$$
پس $z = 7 + i$

www.ilmkidunya.com

$$= \frac{15i + 5(-1)}{9+1} = \frac{-5+15i}{10}$$

$$= \frac{-5}{10} + \frac{15i}{10} = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}i$$

**مثال 6:** $\frac{3+4i}{5-7i}$ **کو $x + iy$ یا $x + yi$ کی شکل میں ظاہر کیجیے۔**

حل:

$$\frac{3+4i}{5-7i} = \frac{3+4i}{5-7i} \times \frac{5+7i}{5+7i} = \frac{15+21i+20i+28i^2}{(5)^2-(7i)^2}$$

$$= \frac{15-28\ +(21+20)i}{25+49} \qquad (\text{کیوں کہ } i^2 = -1)$$

$$= \frac{-13+41i}{74} = \frac{-13}{74} + \frac{41}{74}i$$

## کمپلیکس اعداد کی خصوصیات (Properties of Complex Numbers)

| کمپلیکس اعداد کی جمع کی درج ذیل خصوصیات پر پورا اترتے ہیں۔ | کمپلیکس اعداد ضرب کی درج ذیل خصوصیات پر پورا اترتے ہیں۔ |
|---|---|
| **(i) خاصیت بندش (Closure Property)**<br>کوئی سے دو کمپلیکس اعداد $z_1$ اور $z_2$ کے لیے، مجموعہ $z_1 + z_2$ بھی ایک کمپلیکس عدد ہوتا ہے۔ | **(i) خاصیت بندش (Closure Property)**<br>کوئی سے دو کمپلیکس اعداد $z_1$ اور $z_2$ کے لیے، حاصل ضرب $z_1z_2$ بھی ایک کمپلیکس عدد ہوتا ہے۔ |
| **(ii) خاصیت مبادلہ (Commutative Property)**<br>کوئی سے دو کمپلیکس اعداد $z_1$ اور $z_2$ کے لیے،<br>$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ | **(ii) خاصیت مبادلہ (Commutative Property)**<br>کوئی سے دو کمپلیکس اعداد $z_1$ اور $z_2$ کے لیے،<br>$z_1z_2 = z_2\,z_1$ |
| **(iii) خاصیت تلازم (Associative Property)**<br>کوئی سے تین کمپلیکس اعداد $z_1$، $z_2$ اور $z_3$ کے لیے،<br>$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ | **(iii) خاصیت تلازم (Associative Property)**<br>کوئی سے تین کمپلیکس اعداد $z_1$، $z_2$ اور $z_3$ کے لیے،<br>$(z_1z_2)z_3 = z_1\,(z_2z_3)$ |
| **(iv) جمعی ذاتی عنصر (Additive Identity)**<br>$0 = 0 + 0i$ ایک ایسا کمپلیکس عدد ہوتا ہے جو کہ ہر کمپلیکس عدد کے لیے،<br>$z + 0 = 0 + z = z$<br>کمپلیکس عدد $0 + 0i = 0$ جمعی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔ | **(iv) ضربی ذاتی عنصر (Multiplicative Identity)**<br>$1 = 1 + 0i$ ایک ایسا کمپلیکس عدد ہوتا ہے جو کہ ہر کمپلیکس عدد کے لیے،<br>$z \times 1 = 1 \times z = z$<br>کمپلیکس عدد $1 + 0i = 1$ ضربی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔ |
| **(v) جمعی معکوس (Additive Inverse)**<br>کسی بھی کمپلیکس عدد z کے لیے $-z$ ایسا کمپلیکس عدد ہوتا ہے جس کے لیے<br>$z + (-z) = (-z) + z = 0$<br>$-z$ کمپلیکس عدد z کا جمعی معکوس کہلاتا ہے۔ | **(v) ضربی معکوس (Multiplicative Inverse)**<br>کوئی بھی غیر صفر کمپلیکس عدد z کے لیے w ایسا کمپلیکس عدد ہوتا ہے جس کے لیے<br>$zw = wz = 1$<br>w کمپلیکس عدد z کا ضربی معکوس کہلاتا ہے اور w کو $z^{-1}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ |

www.ilmkidunya.com

### (vi) ضرب کی خاصیت تقسیم بلحاظ جمع (Distributive Property of Multiplication Over Addition)

کوئی سے تین کمپلیکس اعداد $z_1$، $z_2$ اور $z_3$ کے لیے $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ اور $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

**مثال 7:** اگر $z = -7 - 4i$ ہو تو ثابت کیجیے۔ $z + 0 = z$

حل:

$$z + 0 = (-7 - 4i) + (0 + 0i)$$
$$= -7 - 4i + 0 + 0i$$
$$= -7 - 4i = z$$

پس ثابت ہوا $z + 0 = z$ (0 جمعی ذاتی عنصر ہے)

**مثال 8:** $z = 3 - 2i$ کے لیے ضربی ذاتی عنصر کی تصدیق کیجیے۔

حل:

$$z \times 1 = (3 - 2i)(1 + 0i)$$
$$= 3 + 0i - 2i - 0i^2$$
$$= 3 - 2i = z$$
$$1 \times z = (1 + 0i)(3 - 2i)$$
$$= 3 - 2i + 0i - 0i^2$$
$$= 3 - 2i = z$$

پس $z \times 1 = 1 \times z = z$

**مثال 9:** $z = 7 - 10i$ کا جمعی معکوس معلوم کیجیے۔

حل:

$$z = 7 - 10i$$
$$z = -7 + 10i \quad \text{(z کا جمعی معکوس)}$$

کیوں کہ $-z + (-z) = 7 - 10i + (-7 + 10i)$

$$= 7 - 10i - 7 + 10i = 0$$

**مثال 10:** $4 - 3i$ کا ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا $z = 4 - 3i$ (معلوم)

$$z^{-1} = \frac{1}{4 - 3i} \quad \text{(z کا ضربی معکوس)}$$
$$= \frac{4 + 3i}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{4 + 3i}{(4)^2 - (3i)^2}$$
$$z^{-1} = \frac{4 + 3i}{16 + 9} = \frac{4 + 3i}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3i}{25}$$

## حل مشق 1.2

**-1** مختصر کیجیے اور $a + bi$ کی شکل میں لکھیے۔

**(i) $(2 + 5i) + (3 - zi)$**

حل:

$$(2 + 5i) + (3 - zi) = 2 + 5i + 3 - zi$$
$$= 2 + 3 + 5i - zi$$
$$= 5 + (5 - z)i$$

**(ii) $(16 - 3i) + (9 + 2i)$**

حل:

$$(16 - 3i) + (9 + 2i) = 16 - 3i + 9 + 2i$$
$$= 16 + 9 - 3i + 2i$$
$$= 25 - i$$

**(iii) $(9 - 2i) - (7 - 3i)$**

حل:

$$(9 - 2i) - (7 - 3i) = 9 - 2i - 7 + 3i$$
$$= 9 - 7 - 2i + 3i$$
$$= 2 + i$$

**(iv) $(11 + 9i) - (9 - 7i)$**

حل:

$$(11 + 9i) - (9 - 7i) = 11 + 9i - 9 + 7i$$
$$= 11 - 9 + 9i + 7i$$
$$= 2 + 16i$$

**(v) $(3 + 4i)(2 - 3i)$**

حل:

$$(3 + 4i)(2 - 3i) = 3(2 - 3i) + 4i(2 - 3i)$$
$$= 6 - 9i + 8i - 12i^2$$
$$= 6 - 9i + 8i - 12(-1)$$
$$= 6 - 9i + 8i + 12$$
$$= 6 + 12 - 9i + 8i$$
$$= 18 - i$$

**(vi) $(5 - 2i)(3 - 4i)$**

حل:

$$(5 - 2i)(3 - 4i) = 5(3 - 4i) - 2i(3 - 4i)$$
$$= 15 - 20i - 6i + 8i^2$$
$$= 15 - 20i - 6i + 8(-1)$$
$$= 15 - 20i - 6i - 8$$
$$= 15 - 8 - 20i - 6i$$
$$= 7 - 26i$$

www.ilmkidunya.com

**(vii) $(3-5i)\div(2-4i)$**

حل:

$$(3-5i)\div(2-4i)) = \frac{3-5i}{2-4i}$$

$$= \frac{3-5i}{2-4i}\times\frac{2+4i}{2+4i}$$

$$= \frac{3(2+4i)-5i(2+4i)}{(2)^2-(4i)^2}$$

$$= \frac{6+12i-10i-20i^2}{4-(16i^2)}$$

$$= \frac{6+12i-10i-20(-1)}{4-(16\times-1)} \quad (\because i^2=-1)$$

$$= \frac{6+12i-10i+20}{4+16}$$

$$= \frac{6+20+12i-10i}{20}$$

$$= \frac{26+2i}{20}$$

$$= \frac{26}{20}+\frac{2i}{20} = \frac{13}{10}+\frac{i}{10}$$

**(viii) $(5+2i)\div(6-3i)$**

حل:

$$(5+2i)\div(6-3i) = \frac{5+2i}{6-3i}$$

$$= \frac{5+2i}{6-3i}\times\frac{6+3i}{6+3i}$$

$$\frac{5(6+3i)+2i(6+3i)}{(6)^2-(3i)^2}$$

$$= \frac{30+15i+12i+6i^2}{36-(9i^2)}$$

$$= \frac{30+15i+12i+6(-1)}{36-(9\times-1)} \quad (\because i^2=-1)$$

$$= \frac{30-6+15i+12i}{36+9}$$

$$= \frac{24+27i}{45}$$

$$= \frac{24}{45}+\frac{27i}{45}$$

$$= \frac{8}{15}+\frac{3i}{5}$$

**-2 دیے گئے ہر کمپلیکس عدد کا جمعی معکوس معلوم کیجیے۔**

**(i) $3+2i$**

حل: فرض کیا $z = 3+2i$

کا جمعی معکوس $z = -3-2i$

**(ii) $4-3i$**

حل: فرض کیا $z = 4-3i$

کا جمعی معکوس $z = -4+3i$

**(iii) $5-7i$**

حل: کا جمعی معکوس $z = -5+7i$

**(iv) $-\frac{2}{3}+\frac{5}{4}i$**

حل: کا جمعی معکوس $z = \frac{2}{3}-\frac{5}{4}i$

www.ilmkidunya.com

3- دیے گئے کمپلیکس اعداد کا ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

**(i)** $4+5i$

حل: فرض کیا $z = 4+5i$

کا ضربی معکوس $z = z^{-1}$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{4+5i}$$

$$= \frac{1}{4+5i} \times \frac{4-5i}{4-5i}$$

$$= \frac{4-5i}{(4)^2-(5i)^2}$$

$$= \frac{4-5i}{16-25i^2}$$

$$= \frac{4-5i}{16-(25\times(-1))} \qquad (\because i^2=-1)$$

$$= \frac{4-5i}{16+25}$$

$$= \frac{4-5i}{41} = \frac{4}{41} - \frac{5i}{41}$$

**(ii)** $6+2i$

حل: فرض کیا $z = 6+2i$

کا جمعی معکوس $z = z^{-1}$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{6+2i}$$

$$= \frac{1}{6+2i} \times \frac{6-2i}{6-2i}$$

$$= \frac{6-2i}{(6)^2-(2i)^2} = \frac{6-2i}{36-4i^2}$$

$$= \frac{6-2i}{36-(4\times(-1))} \qquad (\because i^2=-1)$$

$$= \frac{6-2i}{36+4}$$

$$= \frac{6-2i}{40} = \frac{6}{40} - \frac{2i}{40}$$

$$= \frac{3}{20} - \frac{1}{20}i$$

**(iii)** $7-3i$

حل: فرض کیا $z = 7-3i$

کا ضربی معکوس $z = z^{-1}$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{7-3i}$$

$$= \frac{1}{7-3i} \times \frac{7+3i}{7+3i}$$

$$= \frac{7+3i}{(7)^2-(3i)^2}$$

$$= \frac{7+3i}{49-9i^2}$$

$$= \frac{7+3i}{49+9} \qquad (\because i^2=-1)$$

$$= \frac{7+3i}{58} = \frac{7}{58} + \frac{3i}{58}$$

**(iv)** $\sqrt{5}-4i$

حل: فرض کیا $z = \sqrt{5}-4i$

کا ضربی معکوس $z = z^{-1}$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{5}-4i}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}-4i} \times \frac{\sqrt{5}+4i}{\sqrt{5}+4i}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+4i}{(\sqrt{5})^2-(4i)^2} = \frac{\sqrt{5}+4i}{5-16i^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+4i}{5-(16\times(-1))} \qquad (\because i^2=-1)$$

$$= \frac{\sqrt{5}+4i}{5+16} = \frac{\sqrt{5}+4i}{21}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{21} + \frac{4}{21}i$$

www.ilmkidunya.com

4- اگر $z_1 = 2 + 5i$ ، $z_2 = 1 - 3i$ اور $z_3 = 2 + i$ ہو تو تصدیق کیجیے کہ

**(i)** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

حل:

**L.H.S**

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (2 + 5i) + (1 - 3i) \\
&= 2 + 5i + 1 - 3i \\
&= 2 + 1 + 5i - 3i \\
&= 3 + 2i \quad ______(1)
\end{aligned}
$$

**R.H.S**

$$
\begin{aligned}
z_2 + z_1 &= (1 - 3i) + (2 + 5i) \\
&= 1 - 3i + 2 + 5i \\
&= 1 + 2 - 3i + 5i \\
&= 3 + 2i \quad ______(2)
\end{aligned}
$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوا

L.H.S = R.H.S

پس ثابت ہوا کہ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

**(ii)** $z_1 z_2 = z_2 z_1$

حل:

**L.H.S**

$$
\begin{aligned}
z_1 . z_2 &= (2 + 5i).(1 - 3i) \\
&= 2(1 - 3i) + 5i(1 - 3i) \\
&= 2 - 6i + 5i - 15i^2 \\
&= 2 - 6i + 5i - 15(-1) \\
&= 2 - 6i + 5i + 15 \\
&= 2 + 15 - 6i + 5i \\
&= 17 - i \quad ______(1)
\end{aligned}
$$

**R.H.S**

$$
\begin{aligned}
z_2 z_1 &= (1 - 3i)(2 + 5i) \\
&= 1(2 + 5i) - 3i(2 + 5i) \\
&= 2 + 5i - 6i - 15i^2 \\
&= 2 + 5i - 6i - 15(-1) \\
&= 2 + 5i - 6i + 15 \\
&= 2 + 15 + 5i - 6i \\
&= 17 - i \quad ______(2)
\end{aligned}
$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوا

L.H.S = R.H.S

پس ثابت ہوا کہ $z_1 z_2 = z_2 z_1$

**(iii)** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

حل:

**L.H.S**

$$
\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= [(2 + 5i) + (1 - 3i)] + (2 + i) \\
&= [2 + 5i + 1 - 3i] + (2 + i) \\
&= (2 + 1 + 5i - 3i) + (2 + i) \\
&= (3 + 2i) + (2 + i) \\
&= 3 + 2i + 2 + i \\
&= 3 + 2 + 2i + i \\
&= 5 + 3i \quad ______(1)
\end{aligned}
$$

**R.H.S**

$$
\begin{aligned}
z_1 + (z_2 + z_3) &= (2 + 5i) + [(1 - 3i)] + (2 + i)] \\
&= (2 + 5i) + [1 - 3i + 2 + i] \\
&= (2 + 5i) + (1 + 2 - 3i + i) \\
&= (2 + 5i) + (3 - 2i) \\
&= 2 + 5i + 3 - 2i \\
&= 2 + 3 + 5i - 2i \\
&= 5 + 3i \quad ______(2)
\end{aligned}
$$

(1) اور (2) سے حاصل ہوا

L.H.S = R.H.S

پس ثابت ہوا کہ $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

**(iv)** $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

حل:

**L.H.S**

$$
\begin{aligned}
(z_1 z_2) z_3 &= [(2 + 5i)(1 - 3i)](2 + i) \\
&= [2(1 - 3i) + 5i(1 - 3i)](2 + i) \\
&= (2 - 6i + 5i - 15i^2)(2 + i) \\
&= (2 - 6i + 5i - 15(-1))(2 + i) \\
&= (2 - 6i + 5i + 15)(2 + i) \\
&= (2 + 15 - 6i + 5i)(2 + i) \\
&= (17 - i)(2 + i) \\
&= 17(2 + i) - i(2 + i) \\
&= 34 + 17i - 2i - i^2 \\
&= 34 + 17i - 2i - (-1) \\
&= 34 + 17i - 2i + 1 \\
&= 34 + 1 + 17i - 2i \\
&= 35 + 15i \quad ______(1)
\end{aligned}
$$

www.ilmkidunya.com

**R.H.S**

$$z_1(z_2z_3) = (2+5i)[(1-3i)(2+i)]$$
$$= (2+5i)[1(2+i)-3i(2+i)]$$
$$= (2+5i)(2+i-6i-3i^2)$$
$$= (2+5i)(2+i-6i-3(-1))$$
$$= (2+5i)(2+i-6i+3)$$
$$= (2+5i)(2+3+i-6i)$$
$$= (2+5i)(5-5i)$$
$$= 2(5-5i)+5i(5-5i)$$
$$= 10-10i+25i-25i^2$$
$$= 10-10i+25i-25(-1)$$
$$= 10-10i+25i+25$$
$$= 10+25-10i+25i$$
$$= 35+15i \quad ______(2)$$

(1)اور(2)سے حاصل ہوا۔

L.H.S = R.H.S

پس ثابت ہوا کہ $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

**(v)** $z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0$

حل:

$$z_1 = 2+5i$$
$$-z_1 = -(2+5i) = -2-5i$$
$$z_1 + (-z_1) = (2+5i) + (-2-5i)$$
$$= 2+5i-2-5i$$
$$= 2-2+5i-5i = 0+0 = 0$$
$$(-z_1) + z_1 = (-2-5i) + (2+5i)$$
$$= -2-5i+2+5i$$
$$= -2+2-5i+5i = 0+0 = 0$$

پس ثابت ہوا کہ $z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0$

**-5** اگر $\frac{(1+i)^2}{2-i} = x+iy$ ہو تو x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:

$$\frac{(1+i)^2}{2-i} = x+iy$$
$$\frac{(1)^2+2(1)i+(i)^2}{2-i} = x+iy$$
$$\frac{1+2i+(-1)}{2-i} = x+iy$$
$$\frac{1+2i-1}{2-i} = x+iy$$
$$\frac{1-1+2i}{2-i} = x+iy$$
$$\frac{2i}{2-i} = x+iy$$
$$\frac{2i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i} = x+iy$$
$$\frac{4i+2i^2}{(2)^2-i^2} = x+iy$$
$$\frac{4i+2(-1)}{4-(-1)} = x+iy$$
$$\frac{4i-2}{4+1} = x+iy$$
$$\frac{-2+4i}{5} = x+iy$$
$$\frac{-2}{5}+\frac{4}{5}i = x+iy$$

حقیقی اور خیالاتی حصوں کے موازنہ کرنے سے

$$x = \frac{-2}{5},\ y = \frac{4}{5}$$

**-6** اگر $(2x+iy)(1-i) = 4+2i$ ہو تو x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:

$$(2x+iy)(1-i) = 4+2i$$
$$2x(1-i) + iy(1-i) = 4+2i$$

www.ilmkidunya.com

$2x - 2xi + iy - i^2y = 4 + 2i$
$2x - 2xi + iy - (-1)y = 4 + 2i$
$2x - 2xi + iy + y = 4 + 2i$
$2x + y - 2xi + iy = 4 + 2i$
$2x + y + i(-2x + y) = 4 + 2i$

حقیقی اور خیالاتی حصوں کے موازنہ کرنے سے

$2x + y = 4 - (i)\ ,\ -2x + y = 2 - (ii)$

مساوات (i) مساوات (ii) کو جمع کرنے سے

$$\begin{array}{r} 2x + y = 4 \\ -2x + y = 2 \\ \hline 2y = 6 \end{array}$$

$$y = \frac{6}{2} = 3$$

مساوات (i) میں y = 3 درج کرنے سے

$2x + 3 = 4$
$2x = 4 - 3 \Rightarrow 2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$
$x = \frac{1}{2}\ ,\ y = 3$ لہٰذا

www.ilmkidunya.com

-7 a اور B کی قیمتیں معلوم کیجیے۔ اگر $(a + bi)(1 + 3i) = -8 + 11i$

حل:

$(a + bi)(1 + 3i) = -8 + 11i$
$a(1 + 3i) + bi(1 + 3i) = -8 + 11i$
$a + 3ai + bi + 3bi^2 = -8 + 11i$
$a + 3ai + bi + 3b(-1) = -8 + 11i$
$a - 3b + 3ai + bi = -8 + 11i$
$(a - 3b) + (3a + b)i = -8 + 11i$

حقیقی اور خیالاتی حصے کو موازنہ کرنے سے

$a - 3b = -8 - (i),$
$3a + b = 11 \quad ____ (ii)$

مساوات (ii) کو 3 سے ضرب دیں

$9a + 3b = 33 \quad ______ (iii)$

مساوات (i) اور (iii) کو جمع کریں

$$\begin{array}{r} a - 3b = -8 \\ 9a + 3b = 33 \\ \hline 10a = 25 \end{array}$$

$$a = \frac{25}{10} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$a = \frac{5}{2}$ کو مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$\frac{5}{2} - 3b = -8$$

$$2\left(\frac{5}{2}\right) - 2(3b) = 2(-8)$$

$$5 - 6b = -16$$

$$-6b = -16 - 5$$

$$-6b = -21 \Rightarrow 6b = 21$$

$$b = \frac{21}{6}$$

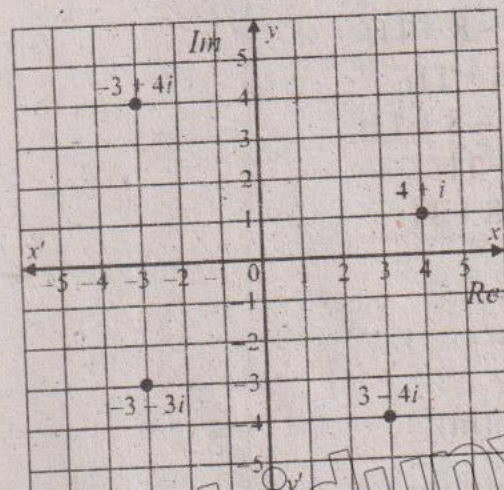
$$b = \frac{7}{2}$$

لہٰذا، $a = \frac{5}{2}$ , $b = \frac{7}{2}$

## 1.3 کمپلیکس یا آرگینڈ مستوی (Complex or Argand Plane)

ایک کمپلیکس عدد $z = x + iy$ کا تعین مکمل طور پر حقیقی اعداد کے ایک مرتب جوڑے $(x, y)$ سے ہوتا ہے۔ اعداد $2 - 5i, 8$ اور $-7i$ بالترتیب $(2, -5)$، $(8, 0)$ اور $(0, -7)$ کے مساوی ہیں۔ اس طرح ایک کمپلیکس عدد $z = x + iy$ کو محوری مستوی میں نقطہ $(x, y)$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

یہاں کچھ کمپلیکس اعداد کو کمپلیکس مستوی پر ظاہر کیا گیا ہے۔




### کمپلیکس عدد کا کانجوگیٹ (Conjugate of a Complex Number)

کمپلیکس عدد $x + iy$ کا کانجوگیٹ $x - iy$ ہوتا ہے۔ $z$ کے کمپلیکس کانجوگیٹ کو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کمپلیکس عدد $z$ کا کانجوگیٹ حاصل کرنے کے لیے $i$ کو $-i$ سے تبدیل کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $3 + 8i$ کا کانجوگیٹ $3 - 8i$ ہوتا ہے۔ کمپلیکس عدد کا اپنے کانجوگیٹ سے حاصل ضرب ایک حقیقی عدد ہوتا ہے۔

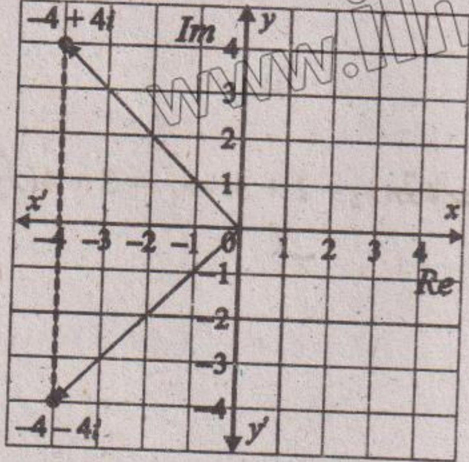
مثال کے طور پر،

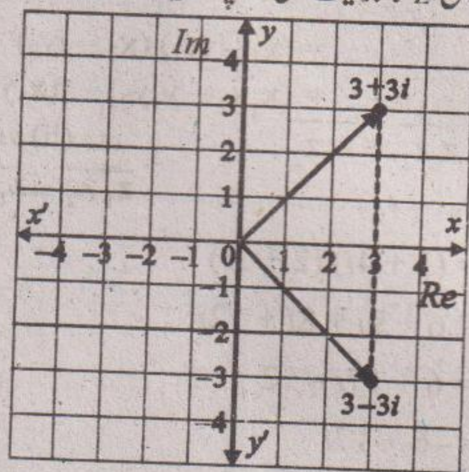
$$(1 + 2i)(1 - 2i) = (1)^2 - (2i)^2 = 1 + 4 = 5$$

www.ilmkidunya.com

## کمپلیکس عدد کے کانجوگیٹ کا جیومیٹریکل اظہار
## Geometrical Representation of Conjugate of a Complex Number

جیومیٹریکل، z کا کانجوگیٹ حقیقی محور پر z کی عکاسی سے حاصل ہوتا ہے۔




### کمپلیکس کانجوگیٹ کی خصوصیات (Properties of Complex Conjugate)

**خاصیت 1:**

کوئی سے دو کمپلیکس اعداد $z_1$ اور $z_2$ کے لیے

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

**ثبوت:** فرض کیا $z_1 = x_1 + iy_1$، $z_2 = x_2 + iy_2$ جہاں $x_1$، $y_1$، $x_2$ اور $y_2$ حقیقی اعداد ہوں۔

اب

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)}$$

$$= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$$

$$= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 - iy_1 - iy_2$$

$$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

**مثال 11:** اگر $z_1 = 4 + 3i$، $z_2 = 5 + 2i$ ہوں تو ثابت کیجیے کہ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

**حل:**

$z_1 + z_2 = 4 + 3i + 5 + 2i = 9 + 5i$

$\overline{z_1 + z_2} = 9 - 5i$ ________ (i)

$\overline{z_1} = 4 - 3i$

$\overline{z_2} = 5 - 2i$

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = 4 - 3i + 5 - 2i$

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = 9 - 5i$ ________ (ii)

(i) اور (ii) سے $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

**خاصیت 2:** $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

**ثبوت:** فرض کیا $z_1 = (x_1 + iy_1)$ اور $z_2 = (x_2 + iy_2)$ جہاں $x_1$، $y_1$، $x_2$ اور $y_2$ حقیقی اعداد ہوں۔

$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

www.ilmkidunya.com

اس لیے

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)}$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2) \quad \text{(i)}$$

اور

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \left(\overline{x_1 + iy_1}\right)\left(\overline{x_2 + iy_2}\right)$$

$$= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2) \quad \text{(ii)}$$

ii) اور (ii) سے

$$\therefore \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

مثال12: اگر $z_1 = 3 + 4i$ ، $z_2 = 2 + 3i$ ہوتو ثابت کیجیے کہ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

حل: اب

$$z_1z_2 = (3 + 4i)(2 + 3i)$$

$$= 6 + 9i + 8i + 12i^2$$

$$= 6 + 17i - 12$$

$$= -6 + 17i$$

$$\overline{z_1z_2} = -6 - 17i \quad \text{...... (i)}$$

اور

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (3 - 4i)(2 - 3i)$$

$$= 6 - 9i - 8i + 12i^2$$

$$= 6 - 9i - 8i - 12$$

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = -6 - 17i \quad \text{...... (ii)}$$

(i)اور(ii) سے

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

خاصیت3

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

ثبوت: فرض کیا

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

اور

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

اب

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(x_1y_2 - y_1x_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}$$

اور

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - y_1x_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} \quad \text{..........(i)}$$

اب

$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2}$$

$$= \frac{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)}{(x_2 - iy_2)(x_2 + iy_2)}$$

$$= \frac{x_1x_2 + ix_1y_2 - iy_1x_2 - i^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad \text{——— (ii)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$$ (i)اور(ii) سے

---

**خودآزمائی!**

(i) کوئی سے دو کمپلیکس اعداد لیں اور ثابت کیجیے کہ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

حل: فرض کیا

$z_1 = (2 + 3i), z_2 = (4 + 5i)$

$\bar{z}_1 = 2 - 3i, \; \bar{z}_2 = 4 - 5i$

$z_1 + z_2 = (2+3i) + (4+5i)$

$= 2 + 3i + 4 + 5i$

$= 6 + 8i$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{6+8i} = 6 - 8i$ ___ (i)

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (2-3i) + (4-5i) = 2 - 3i + 4 - 5i = 6 - 8i$ _____ (ii)

پس ثابت ہوا

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(i)اور(ii) سے

(ii) کوئی سے دو کمپلیکس اعداد لیں اور ثابت کیجیے کہ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$

حل:

$z_1 z_2 = (2+3i)(4+5i)$

$= 8 + 10i + 12i + 15i^2$

$= 8 + 22i + 15 \times (-1)$

$= 8 + 22i - 15 = -7 + 22i$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{-7 + 22} = -7 - 22i$ ___________ (i)

$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (2 - 3i)(4 - 5i)$

$= 8 - 10i - 12i + 15i^2$

$= 8 - 22i + 15(-1)$

$= 8 - 15 - 22i = -7 - 22i$ ________ (ii)

پس ثابت ہوا

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$ (i)اور(ii) سے

(ii) کوئی سے دو کمپلیکس اعداد لیں اور ثابت کیجیے کہ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, (z_2 \neq 0)$

حل: $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{2+3i}{4+5i}$

$$= \frac{2+3i}{4+5i}\times\frac{4-5i}{4-5i}$$

$$= \frac{8-10i+12i-15i^2}{(4)^2-(5i)^2}$$

$$= \frac{8+2i-15\times(-1)}{(4)^2-(5i)^2}$$

$$= \frac{8+15+2i}{16+25} = \frac{23+2i}{41} = \frac{23}{41}+\frac{2}{41}i$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\frac{23}{41}+\frac{2}{41}i} = \frac{23}{41}-\frac{2}{41}i \quad \text{____(i)}$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{2-3i}{4-5i}$$

$$= \frac{2-3i}{4-5i}\times\frac{4+5i}{4+5i}$$

$$= \frac{8+10i-12i-15i^2}{(4)^2-(5i)^2} = \frac{8-2i-15(-1)}{16-(25\times(-1))}$$

$$= \frac{8+15-2i}{16-(25\times(-1))} = \frac{23-2i}{16+25} = \frac{23-2i}{41}$$

$$= \frac{23}{41}-\frac{2}{41}i \quad \text{____ ii}$$

پس ثابت ہوا کہ

(i)اور(ii) سے $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

---

مثال13: اگر $z_1 = 5 + 4i$ ، $z_2 = 3 + 2i$ ہوتو ثابت کیجیے کہ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

حل:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+4i}{3+2i}$$

$$= \frac{(5+4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

$$= \frac{15-10i+12i-8i^2}{(3)^2-(2i)^2} = \frac{23+2i}{9+4}$$

$$= \frac{23+2i}{13} = \frac{23}{13}+\frac{2}{13}i$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{23}{13}-\frac{2}{13}i \quad \text{____(i)}$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{5-4i}{3-2i} = \frac{(5-4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$$

$$= \frac{15+10i-12i-8i^2}{9+4} = \frac{15-2i+8}{9+4}$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{23-2i}{13} = \frac{23}{13}-\frac{2}{13}i \quad \text{____ (ii)}$$

اس لیے (i)اور(ii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

خاصیت4: $\overline{\overline{z}} = z$

ثبوت: فرض کیا $z = x + iy$

$$\overline{z} = x - iy$$

$$\overline{\overline{z}} = x + iy = z$$

پس ثابت ہوا $\overline{\overline{z}} = z$

مثال14: اگر $z = 7 + 3i$ ہوتو ثابت کیجیے کہ $\overline{\overline{z}} = z$

حل: $z = 7 + 3i$

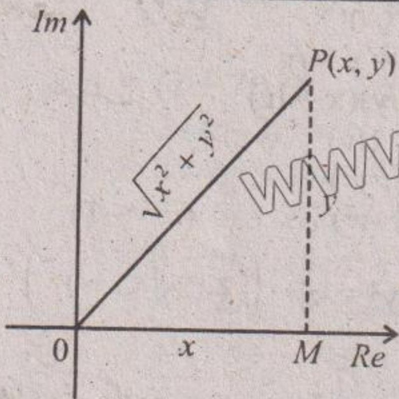
تو $\overline{z} = 7 - 3i$

$$\overline{\overline{z}} = 7 + 3i = z$$

پس ثابت ہوا $\overline{\overline{z}} = z$

www.ilmkidunya.com

## 1.4 کمپلیکس عدد کا ماڈیولس (Modulus of a Complex Number)




جس طرح ایک حقیقی عدد کی مطلق قیمت حقیقی عددی خط پر اس کے مبداء سے فاصلے کو ماپتی ہے، اسی طرح ایک کمپلیکس عدد کا ماڈیولس کمپلیکس مستوی میں اس کے مبداء سے فاصلے کو ماپتا ہے۔ غور کریں کہ مبداء سے نقطہ P(x, y) تک کا فاصلہ ایک رداسی خط کے ساتھ ہوتا ہے اور یہ قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر بناتا ہے، جہاں اُفقی اور عمودی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب x اور y ہوتی ہیں۔

**تعریف:** اگر $z = x + iy$ ہو تو $\sqrt{x^2+y^2}$ کمپلیکس عدد z کا ماڈیولس کہلاتا ہے اور اسے $|z|$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

یعنی $$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

مثال کے طور پر

(i) $|i| = |0+1i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

(ii) $|3-5i| = \sqrt{(3)^2+(-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

### کمپلیکس عدد کے ماڈیولس کی خصوصیات (Properties of Modulus of a Complex Number)

**خاصیت 1:** کوئی سے کمپلیکس عدد کے لیے $|z| = |\bar{z}|$

**ثبوت:** فرض کیا $z = x + iy$

پھر $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ ____(i)

اب $\bar{z} = x - iy$

$|\bar{z}| = \sqrt{(x)^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ ____(ii)

(i) اور (ii) سے

$|\bar{z}| = |z|$

**مثال 15:** اگر $z = 5 + 4i$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $|\bar{z}| = |z|$

**حل:** $z = 5 + 4i$

$|z| = \sqrt{(5)^2+(4)^2}$

$= \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$ ____(i)

اب $\bar{z} = 5 - 4i$

$|\bar{z}| = \sqrt{(5)^2+(-4)^2}$

$= \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$ ____(ii)

(i) اور (ii) سے $|z| = |\bar{z}|$

**خاصیت 2:** $|z| = |-z| = |\bar{\bar{z}}| = |\bar{z}|$

**ثبوت:** فرض کیا $z = x + iy$

اب $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ ____(i)

$|-z| = |-x-iy|$

$= \sqrt{(-x)^2+(-y)^2}$

$= \sqrt{x^2+y^2}$ ____(ii)

$\bar{z} = x - yi \Rightarrow \bar{\bar{z}} = x + yi$

$|\bar{\bar{z}}| = \sqrt{x^2+y^2}$ ____(iii)

$z = x + iy$ جب کہ یہاں $\bar{z} = x - iy$

$-\bar{z} = -x + iy$

$|-\bar{z}| = \sqrt{(-x)^2+(y)^2}$

$= \sqrt{x^2+y^2}$ ____(iv)

(i)، (ii)، (iii) اور (iv) سے

$|z| = |-z| = |\bar{\bar{z}}| = |-\bar{z}|$

خاصیت 3: $z\bar{z} = |z|^2$

ثبوت: فرض کیا

$z = x + iy$

$\therefore \bar{z} = x - iy$

اب

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy)$$
$$= (x)^2 - (iy)^2$$
$$= x^2 - (i^2y^2)$$
$$= x^2 - (-y^2) \qquad (i^2 = -1)$$
$$= x^2 + y^2 = |z|^2 \quad \left(|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

پس

$$z\bar{z} = |z|^2$$

مثال 16: اگر $z = 5 + 3i$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $z\bar{z} = |z|^2$

حل:

$z = 5 + 3i$

$\bar{z} = 5 - 3i$

$$z\bar{z} = (5 + 3i)(5 - 3i)$$
$$= (5)^2 - (3i)^2$$
$$= (25) - (9i^2)$$
$$= 25 - (-9)$$
$$= 25 + 9 = 34 \quad ___(i)$$

$$|z| = \sqrt{(5)^2 + (3)^2}$$

$$|z|^2 = \left[\sqrt{(5)^2 + (3)^2}\right]^2$$

$$= 25 + 9 = 34 \quad ___(ii)$$

(i) اور (ii) سے $z\bar{z} = |z|^2$

## حل مشق 1.3

-1 درج ذیل کمپلیکس اعداد کا ماڈیولس معلوم کیجیے۔

**(i)** $4 + 3i$

حل:

$$|4+3i| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

**(ii)** $-5 - 4i$

حل:

$$|-5-4i| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

**(iii)** $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

حل:

$$\left|\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

**(iv)** $-\sqrt{2} - \sqrt{3}i$

حل:

$$|-\sqrt{2} - \sqrt{3}i| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$$

-2 اگر $z_1 = 2 + 7i$ اور $z_2 = 4 - 3i$ ہو تو تصدیق کیجیے کہ

**(i)** $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

حل:

L.H.S

$$z_1 + z_2 = (2 + 7i) + (4 - 3i)$$
$$= 2 + 7i + 4 - 3i$$
$$= 2 + 4 + 7i - 3i$$
$$= 6 + 4i$$
$$\overline{z + z_2} = \overline{6 + 4i} = 6 - 4i \quad ___(i)$$

R.H.S

$z_1 = 2 + 7i$

$\bar{z}_1 = 2 - 7i$

$z_2 = 4 - 3i$

$\bar{z}_2 = 4 + 3i$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (2 - 7i) + (4 + 3i)$$
$$= 2 - 7i + 4 + 3i$$
$$= 2 + 4 - 7i + 3i$$
$$= 6 - 4i \quad ___(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

www.ilmkidunya.com

**(ii)** $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

حل:

L.H.S

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2+7i)(4-3i) \\ &= 2(4-3i) + 7i(4-3i) \\ &= 8 - 6i + 28i - 21i^2 \\ &= 8 - 6i + 28i - 21(-1) \\ &= 8 - 6i + 28i + 21 \\ &= 8 + 21 - 6i + 28i \\ &= 29 + 22i \end{aligned}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{29+22i} = 29 - 22i \quad \text{___(i)}$$

R.H.S

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + 7i \\ \overline{z_1} &= 2 - 7i \\ z_2 &= 4 - 3i \\ \overline{z_2} &= 4 + 3i \\ \overline{z_1}\,\overline{z_2} &= (2-7i)(4+3i) \\ &= 8 + 6i - 28i - 21i^2 \\ &= 8 + 6i - 28i - 21(-1) \\ &= 8 + 6i - 28i + 21 \\ &= 8 + 21 + 6i - 28i \\ &= 29 - 22i \quad \text{___(ii)} \end{aligned}$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

**(iii)** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

حل:

L.H.S

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+7i}{4-3i} = \frac{2+7i}{4-3i} \times \frac{4+3i}{4+3i}$$

$$= \frac{2(4+3i) + 7i(4+3i)}{(4)^2 - (3i)^2}$$

$$= \frac{8 + 6i + 28i + 21i^2}{16 - (9 \times -1)}$$

$$= \frac{8 + 6i + 28i + 21(-1)}{16 + 9}$$

$$= \frac{8 + 6i + 28i - 21}{25}$$

$$= \frac{8 + 6i + 28i - 21}{25}$$

$$= \frac{8 - 21 + 6i + 28i}{25}$$

$$= \frac{-13 + 34i}{25}$$

$$= \frac{-13}{25} + \frac{34i}{25}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\frac{-13}{25} + \frac{34}{25}i} = -\frac{13}{25} - \frac{34}{25}i \quad \text{___(i)}$$

R.H.S

$$z_1 = 2 + 7i$$

$$\overline{z_1} = 2 - 7i$$

$$z_2 = 4 - 3i$$

$$\overline{z_2} = 4 + 3i \qquad \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{2-7i}{4+3i}$$

$$= \frac{2-7i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{2(4-3i) - 7i(4-3i)}{(4)^2 - (3i)^2}$$

$$= \frac{8 - 6i - 28i + 21i^2}{16 - 9i^2} = \frac{8 - 6i - 28i + 21i^2}{16 - (9 \times -1)}$$

$$= \frac{8 - 6i - 28i + 21i^2}{16 - (9 \times -1)} = \frac{8 - 6i - 28i + 21(-1)}{16 + 9}$$

$$= \frac{8 - 6i - 28i - 21}{25} = \frac{8 - 21 - 6i - 28i}{25}$$

$$= \frac{-13 - 34i}{25} = \frac{-13}{25}\ \frac{-34}{25}i \quad \text{___(ii)}$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

www.ilmkidunya.com

3- اگر $z = 5 - 2i$ ہو تو تصدیق کیجیے کہ

(i) $\bar{\bar{z}} = z$

حل:

$z = 5 - 2i$

$\bar{z} = 5 + 2i$

$\bar{\bar{z}} = 5 - 2i$

$\bar{\bar{z}} = z$

پس ثابت ہوا

(ii) $|z| = |\bar{z}|$

حل:

$z = 5 - 2i$

$\bar{z} = 5 + 2i$

$|z| = \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ ____(i)

$|\bar{z}| = \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ ____(ii)

(i) اور (ii) سے $|z| = |\bar{z}|$

(iii) $|z| = |-z|$

حل:

$z = 5 - 2i$

$-z = -5 + 2i$

$|z| = |5 - 2i| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ ____(i)

$|-z| = \sqrt{(-5)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ ____(ii)

پس ثابت ہوا

(i) اور (ii) سے $|z| = |-z|$

(iv) $z\bar{z} = |z|^2$

حل:

$z = 5 - 2i$

$\bar{z} = 5 + 2i$

$z\bar{z} = (5 - 2i)(5 + 2i)$

$= (5)^2 - (2i)^2$

$= 25 - 4i^2$

$= 25 - (4 \times -1)$

$= 25 + 4$

$= 29$ ____(i)

$|z| = |5 - 2i| = \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$|z|^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2$

$|z|^2 = 29$ ____(ii)

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا $z\bar{z} = |z|^2$

(v) $|z| = |-\bar{z}|$

حل:

$z = 5 - 2i$

$\bar{z} = 5 + 2i$

$-\bar{z} = -(5 + 2i) = -5 - 2i$

$|z| = |5 - 2i|$

$= \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ ____(i)

$|-\bar{z}| = |-5 - 2i|$

$= \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2}$ ____(ii)

$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا $|\bar{z}| = |-\bar{z}|$

www.ilmkidunya.com

**4- اگر $z = 4 - 3i$ ہو تو تصدیق کیجیے کہ $|z| = |-z| = |\bar{\bar{z}}| = |-\bar{z}|$**

**حل:**

$z = 4 - 3i$

$-z = -(4 - 3i) = -4 + 3i$

$-z = -4 + 3i$

$-\bar{z} = \overline{-4 + 3i} = -4 - 3i$

$-\bar{z} = -4 - 3i$

$|z| = |4 - 3i|$

$|z| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$

$|z| = 5$ ______ (i)

$|-z| = |-4 + 3i|$

$|-z| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$

$|-z| = 5$ ______ (ii)

$-\bar{z} = -4 - 3i$

$|-\bar{z}| = |-4 - 3i|$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = 25$

$= 5$

$|-\bar{z}| = 5$ ______ (iii)

اور $z = 4 - 3i$

$\bar{z} = \overline{4 - 3i}$

$\bar{z} = 4 + 3i$

$\bar{\bar{z}} = \overline{4 + 3i}$

$\bar{\bar{z}} = 4 - 3i$

$|\bar{\bar{z}}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}$

$|\bar{\bar{z}}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$

$|\bar{\bar{z}}| = 5$ ______ (iv)

پس (i)، (ii)، (iii) اور (iv) سے ثابت ہوا

$|z| = |-z| = |\bar{\bar{z}}| = |-\bar{z}|$

**5- اگر $z_1 = 2 + 3i$ اور $z_2 = -1 + i$ ہوں تو معلوم کیجیے:**

**(i) $Re(z_1z_2)$**

**حل:**

$z_1z_2 = (2 + 3i)(-1 + i)$

$= 2(-1 + i) + 3i(-1 + i)$

$= -2 + 2i - 3i + 3i^2$

$= -2 + 2i - 3i + 3(-1)$

$= -2 - 3 + 2i - 3i = -5 - i$

$= -5 - i$

لہٰذا $Re(z_1z_2) = -5$

**(ii) $Im(z_1z_2)$**

**حل:**

$z_1z_2 = (2 + 3i)(-1 + i)$

$= 2(-1 + i) + 3i(-1 + i)$

$= -2 + 2i - 3i + 3i^2$

$= -2 + 2i - 3i + 3(-1)$

$= -2 - 3 + 2i - 3i$

$= -5 - i$

لہٰذا $Im(z_1z_2) = -1$

## 1.5 $(x + iy)^n$ اور $\left(\dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right)^n$، جہاں $x_2 + iy_2 \neq 0$، $n = \pm 1$ اور $n = \pm 2$ کے حقیقی اور خیالاتی حصے معلوم کرنا

$(x + iy)^n$ جب کہ $n = \pm 1$

$z = (x + iy)^n$ ایک کمپلیکس عدد ہے۔

(i) $n = 1$ کے لیے

$z = (x + iy)^1$

$= x + iy$

$Re(z) = x, Im(z) = y$

www.ilmkidunya.com

(ii) $n = -1$ کے لیے

$$z = (x + iy)^{-1}$$

$$= \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \text{Re}(z) = \frac{x}{x^2+y^2}, \text{Im}(z) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

خود آزمائی!

$(x + iy)^n$ کے حقیقی اور خیالاتی حصے معلوم کیجیے جب کہ $n = \pm 2$۔

حل:

$$(x + iy)^2$$
$$= x^2 + 2xyi + (yi)^2$$
$$= x^2 + 2xyi + (y^2 \times -1)$$
$$= x^2 + 2xyi - y^2$$
$$= x^2 - y^2 + 2xyi$$

پس حقیقی حصہ $= x^2 - y^2$ اور خیالاتی حصہ $= 2xy$

اب

$$(x + yi)^{-2}$$

$$= \left(\frac{1}{x+yi}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{x+yi} \times \frac{x-yi}{x-yi}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x-yi}{(x)^2-(yi)^2}\right)^2 = \left(\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{(x-yi)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2-2xyi+y^2i^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-2xyi-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2-y^2)-2xyi}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xyi}{(x^2+y^2)^2}$$

لہٰذا حقیقی حصہ $= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$، خیالاتی حصہ $= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

مثال 17: $(4 + 3i)^{-1}$ کے حقیقی اور خیالاتی حصے معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا

$$z = (4 + 3i)^{-1}$$

$$= \frac{1}{(4+3i)}$$

$$= \frac{1(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{4-3i}{16-9i^2}$$

www.ilmkidunya.com

$$= \frac{4-3i}{16+9} = \frac{4-3i}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$$

اس لیے $\therefore \ Re(z) = \frac{4}{25}, \ Im(z) = -\frac{3}{25}$

مثال18: $z = (4+3i)^{-2}$ کے حقیقی اور خیالاتی حصے معلوم کیجیے۔

حل:

$$z = (4+3i)^{-2}$$

$$= \frac{1}{(4+3i)^2}$$

$$= \frac{1}{(4)^2 + (3i)^2 + 2(4)(3i)} = \frac{1}{16-9+24i}$$

$$= \frac{1}{7+24i} = \frac{(7-24i)}{(7+24i)(7-24i)}$$

$$= \frac{7-24i}{49-576i^2} = \frac{7-24i}{49-576(-1)}$$

$$= \frac{7-24i}{49+576} = \frac{7-24i}{625}$$

$$= \frac{7}{625} - \frac{24}{625}i$$

اس لیے $Re(z) = \frac{7}{625}, Im(z) = -\frac{24}{625}$

**کیا آپ جانتے ہیں؟**

$$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2},$$

$$Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

مثال19: $z = \left(\frac{4+3i}{3+2i}\right)^{-1}$ کے حقیقی اور خیالاتی حصے معلوم کیجیے۔

حل:

$$z = \left(\frac{4+3i}{3+2i}\right)^{-1}$$

$$= \frac{3+2i}{4+3i} = \frac{(3+2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$$

$$= \frac{12-9i+8i-6i^2}{16-9i^2} = \frac{12-9i+8i-6(-1)}{16-9(-1)} = \frac{12-i+6}{16+9}$$

$$= \frac{18-i}{25} = \frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$$

اس لیے $\mathrm{Re(z)} = \frac{18}{25}, \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{25}$

مثال 20: $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-2}$ کے حقیقی اور خیالاتی حصے معلوم کیجیے۔

حل:

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2} = \left(\frac{1-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right)^{2} = \left(\frac{1-i-i+i^2}{1^2-i^2}\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{1-2i-1}{1+1}\right)^{2} = \left(\frac{-2i}{2}\right)^{2} = (-i)^2 = -1$$

$$= -1 + 0i$$

اس لیے $\mathrm{Re(z)} = -1, \mathrm{Im(z)} = 0$

## 1.6 کمپلیکس عددی سروں کے ساتھ یک درجی ہمزاد مساواتوں کا حل
## (Solution of Simultaneous Linear Equations with Complex Coefficients)

ایک سے زیادہ مساواتیں جن کو متغیرات کی یکساں قدروں سے ثابت کیا جا سکے ہمزاد مساواتیں کہلاتی ہیں۔

مثال 21: کمپلیکس عددی سروں z اور w کے لیے دی گئی یک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کیجیے۔

$$5z - (3+i)w = 7 - i$$
$$(2-i)z + 2i\,w = 4$$

حل:

$$5z - (3+i)w = 7 - i \quad \text{______ (i)}$$
$$(2-i)z + 2i\,w = 4 \quad \text{______ (ii)}$$

مرحلہ I مساوات (i) کو ہم w کے لیے حل کرتے ہیں۔

$$5z - (3+i)w = 7 - i$$
$$(3+i)w = 5z - 7 + i$$
$$w = \frac{5z-7+i}{3+i} \quad \text{______ (iii)}$$

مرحلہ II w کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$(2-i)z + 2i\left(\frac{5z-7+i}{3+i}\right) = 4$$

$$(2-i)(3+i)z + 10iz - 14i + 2i^2 = 4(3+i)$$
$$(6 + 2i - 3i - i^2)z + 10iz - 14i + 2i^2 = 12 + 4i$$
$$(6 - i + 1)z + 10iz - 14i - 2 = 12 + 4i$$
$$(7-i)z + 10iz - 14i - 2 = 12 + 4i$$

www.ilmkidunya.com

$$7z - iz + 10iz - 14i - 2 = 12 + 4i$$
$$7z + 9iz = 12 + 4i + 14i + 2$$
$$7z + 9iz = 14 + 18i$$
$$z(7 + 9i) = 2(7 + 9i)$$
$$z = \frac{2(7+9i)}{7+9i}$$
$$z = 2$$

مرحلہ III　$z = 2$ مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$$w = \frac{5(2) - 7 + i}{3+i} = \frac{10 - 7 + i}{3+i}$$
$$w = \frac{3+i}{3+i} = 1 \Rightarrow w = 1$$

لہٰذا $z = 2, w = 1$

## حل مشق 1.4

-1　درج ذیل کمپلیکس اعداد کے حقیقی اور خیالاتی حصے معلوم کیجیے۔

**(i) $(8 - 3i)^2$**

حل:

$$(8 - 3i)^2$$
$$= (8)^2 - 2(8)(3i) + (3i)^2$$
$$= 64 - 48i + (9(-1))$$
$$= 64 - 9 - 48i = 55 - 48i$$

$\therefore$ حقیقی حصہ $= 55$ ، خیالاتی حصہ $= -48$

**(ii) $(5 + 3i)^{-1}$**

حل:

$$(5 + 3i)^{-1}$$
$$= \frac{1}{(5+3i)}$$
$$= \frac{1}{5+3i} \times \frac{5-3i}{5-3i}$$
$$= \frac{5-3i}{(5)^2 - (3i)^2} = \frac{5-3i}{25-9i^2}$$
$$= \frac{5-3i}{25-(9\times -1)} = \frac{5-3i}{25+9}$$
$$= \frac{5-3i}{34} = \frac{5}{34} - \frac{3i}{34}$$

$\therefore$ حقیقی حصہ $= \frac{5}{34}$ ، خیالاتی حصہ $= \frac{-3}{34}$

**(iii) $(4 - 5i)^{-1}$**

حل:

$$(4 - 5i)^{-1}$$
$$= \frac{1}{4-5i}$$
$$= \frac{1}{4-5i} \times \frac{4+5i}{4+5i}$$
$$= \frac{4+5i}{(4)^2 - (5i)^2}$$
$$= \frac{4+5i}{16-(25\times -1)}$$
$$= \frac{4+5i}{16+25}$$
$$= \frac{4+5i}{41} = \frac{4}{41} + \frac{5i}{41}$$

$\therefore$ حقیقی حصہ $= \frac{4}{41}$ ، خیالاتی حصہ $= \frac{5}{41}$

www.ilmkidunya.com

$$=\frac{12-8i+9i-6(-1)}{9+4}$$

$$=\frac{12-8i+9i+6}{13}=\frac{18+i}{13}=\frac{18}{13}+\frac{i}{13}$$

$\therefore$ حقیقی حصہ $=\frac{18}{13}$ ، خیالی حصہ $=\frac{1}{13}$

(vi) $\left(\frac{2-i}{2+i}\right)^{-2}$

حل:

$$\left(\frac{2-i}{2+i}\right)^{-2}=\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{2+i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{2(2+i)+i(2+i)}{(2)^2-(i)^2}\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{4+2i+2i+i^2}{4-(-1)}\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{4+2i+2i+(-1)}{4+1}\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{4-1+2i+2i}{5}\right)^{2}=\left(\frac{3+4i}{5}\right)^{2}$$

$$=\frac{(3)^2+2(3)(4i)+(4i)^2}{25}$$

$$=\frac{9+24i+16i^2}{25}$$

$$=\frac{9+24i+(16\times-1)}{25}$$

$$=\frac{9+24i-16}{25}$$

$$=\frac{-7+24i}{25}=\frac{-7}{25}+\frac{24}{25}i$$

$\therefore$ حقیقی حصہ $=\frac{-7}{25}$ ، خیالی حصہ $=\frac{24}{25}$

(iv) $(4-3i)^{-2}$

حل:

$$(4-3i)^{-2}$$

$$=\left(\frac{1}{4-3i}\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{1}{4-3i}\times\frac{4+3i}{4+3i}\right)^{2}=\left(\frac{4+3i}{(4)^2-(3i)^2}\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{4+3i}{16-9i^2}\right)^{2}=\left(\frac{4+3i}{16-(9\times-1)}\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{4+3i}{16+9}\right)^{2}=\left(\frac{4+3i}{25}\right)^{2}$$

$$=\frac{(4)^2+2(4)(3i)+(3i)^2}{(25)^2}$$

$$=\frac{16+24i+9i^2}{625}$$

$$=\frac{16+24i+(9\times-1)}{625}=\frac{16+24i-9}{625}$$

$$=\frac{7+24i}{625}=\frac{7}{625}+\frac{24i}{625}$$

$\therefore$ حقیقی حصہ $=\frac{7}{625}$ ، خیالی حصہ $=\frac{24}{625}$

(v) $\left(\frac{3+2i}{4+3i}\right)^{-1}$

حل:

$$\left(\frac{3+2i}{4+3i}\right)^{-1}=\left(\frac{4+3i}{3+2i}\right)^{+1}$$

$$=\frac{4+3i}{3+2i}\times\frac{3-2i}{3-2i}$$

$$=\frac{4(3-2i)+3i(3-2i)}{(3)^2-(2i)^2}$$

$$\frac{12-8i+9i-6i^2}{9-4i^2}$$

$$=\frac{12-8i+9i-6i^2}{9-(4\times-1)}$$

www.ilmkidunya.com

(vii) $\left(\frac{1-2i}{1+i}\right)^2$

حل:

$$\left(\frac{1-2i}{1+i}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1-2i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1(1-i)-2i(1-i)}{(1)^2-(i)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{1-i-2i+2i^2}{1-(-1)}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1-i-2i+2(-1)}{1+1}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1-i-2i-2}{2}\right)^2=\left(\frac{-1-3i}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(-1-3i)(-1-3i)}{2\times2}$$

$$=\frac{-1(-1-3i)-3i(-1-3i)}{4}$$

$$=\frac{1+3i+3i+9i^2}{4}$$

$$=\frac{1+6i+(9\times-1)}{4}=\frac{1+6i-9}{4}$$

$$=\frac{-8+6i}{4}=\frac{-8}{4}+\frac{6i}{4}$$

$$=-2+\frac{3i}{2}$$

∴ حقیقی حصہ = $-2$ ، خیالاتی حصہ = $\frac{3}{2}$

-2 کمپلیکس عددی سروں z اور w کے لیے یک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کیجیے۔

(i) $3z + (2+i)w = 11-i$

$(2-i)z - w = -1+i$

حل:

$3z + (2+i)w = 11-i$ ____ (i)

$(2-i)z - w = -1+i$ ____ (ii)

مساوات (i) کو w کے لیے حل کیا

$3z + (2+i)w = 11-i$

$(2+i)w = 11-i-3z$

$w = \frac{11-i-3z}{2+i}$ ____ (iii)

$w = \frac{11-i-3z}{2+i}$ کی قیمت مساوات (iii) سے (ii) میں درج کریں۔

$$(2-i)z-\frac{11-i-3z}{2+i}=-1+i$$

$$\frac{(2+i)(2-i)z-(11-i-3z)}{2+i}=-1+i$$

$[(2)^2-(i)^2]z-11+i+3z=(-1+i)(2+i)$

$(4-(-1))z-11+i+3z=-2-i+2i+i^2$

$(4+1)z-11+i+3z=-2+i+(-1)$

$5z-11+i+3z=-3+i$

$5z+3z+i-i=-3+11$

$8z=8$

$z=\frac{8}{8}$

$z=1$ ____ (iv)

مساوات (iv) سے $z=1$ (iii) میں درج کرنے سے

$$w=\frac{11-i-3(1)}{2+i}$$

$$=\frac{11-i-3}{2+i}=\frac{8-i}{2+i}$$

$$=\frac{8-i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}=\frac{8(2-i)-i(2-i)}{(2)^2-i^2}$$

$$=\frac{16-8i-2i+i^2}{4-(-1)}$$

$$=\frac{16-10i+(-1)}{4+1}=\frac{16-1-10i}{5}$$

$$=\frac{15-10i}{5}=\frac{5(3-2i)}{5}$$

$$=3-2i$$

پس $z=1,\ w=3-2i$

www.ilmkidunya.com

$$w = \frac{2(6-5i)}{2} = 6-5i$$

$w = 6 - 5i$

مساوات (iii) میں $w = 6 - 5i$ درج کریں۔

$z = -i - 1 - w$

$z = -i - 1 - (6 - 5i)$

$z = -i - 1 - 6 + 5i$

$z = -7 - i + 5i$

$z = -7 + 4i$

پس $z = -7 + 4i,\ w = 6 - 5i$

**(iii)** $\mathbf{z - 4w = 3i}$

$\mathbf{2z + 3w = 11 - 5i}$

حل: $z - 4w = 3i$ ____ (i)

$2z + 3w = 11 - 5i$ ____ (ii)

مساوات (i) کو w کے لیے حل کریں۔

$z - 4w = 3i$

$-4w = 3i - z$

$4w = -3i + z$

$$w = \frac{-3i + z}{4} \quad \text{____ (iii)}$$

مساوات (ii) میں $w = \dfrac{-3i+z}{4}$ درج کرنے سے

$$2z + 3\left(\frac{-3i+z}{4}\right) = 11 - 5i$$

$$\frac{4(2z) + 3(-3i+z)}{4} = 11 - 5i$$

$8z - 9i + 3z = 4(11 - 5i)$

$8z - 9i + 3z = 44 - 20i$

$11z = 44 - 20i + 9i$

$11z = 44 - 11i$

$$z = \frac{44 - 11i}{11}$$

$$z = \frac{11(4-i)}{11}$$

$z = 4 - i$

مساوات (iii) میں $z = 4 - i$ درج کریں۔

$$w = \frac{-3i + 4 - i}{4} = \frac{-4i + 4}{4}$$

**(ii)** $\mathbf{2z + (3 + i)w = 9 - i}$

$\mathbf{-iz - iw = -1 + i}$

حل: $2z + (3 + i)\,w = 9 - i$ ____ (i)

$-iz - iw = -1 + i$ ____ (ii)

مساوات (ii) کو z کے لیے حل کریں۔

$-iz = -1 + i + iw$

$iz = 1 - i - iw$

$$z = \frac{1 - i - i^2 w}{i}$$

$$z = \frac{1 - i - iw}{i} \times \frac{i}{i}$$

$$z = \frac{i - i^2 - i^2 w}{i^2}$$

$$z = \frac{i - (-1) - (-1)w}{-1}$$

$$z = \frac{i + 1 + w}{-1}$$

$z = -i - 1 - w$ ____ (iii)

مساوات (i) میں $z = -i - 1 - w$ درج کرنے سے

$2z + (3 + i)\,w = 9 - i$

$2(-i - 1 - w) + 3w + wi = 9 - i$

$-2i - 2 - 2w + 3w + wi = 9 - i$

$-2i + i + w + wi = 9 + 2$

$-i + w + wi = 11$

$w + wi - i = 11$

$w + wi = 11 + i$

$w(1 + i) = 11 + i$

$$w = \frac{11 + i}{1 + i}$$

$$w = \frac{11 + i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i}$$

$$w = \frac{11 - 11i + i - i^2}{(1)^2 - i^2}$$

$$w = \frac{11 - 10i - (-1)}{1 - (-1)}$$

$$w = \frac{11 + 1 - 10i}{1 + 1} = \frac{12 - 10i}{2}$$

www.ilmkidunya.com

$$w=\frac{5}{1+3i}$$
$$w=\frac{5}{1+3i}\times\frac{1-3i}{1-3i}$$
$$w=\frac{5-15i}{(1)^2-(3i)^2}$$
$$w=\frac{5-15i}{1-9i^2}$$
$$w=\frac{5-15i}{1-(9\times-1)}$$
$$w=\frac{5-15i}{1+9}$$
$$w=\frac{5-15i}{10}$$
$$w=\frac{5}{10}-\frac{15}{10}i$$
$$w=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

$w=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ مساوات(iii) میں درج کرنے سے

$$z=-2-w+wi$$
$$z=-2-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)i$$
$$z=-2-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}i^2$$
$$z=-2-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}(-1)$$
$$z=-2-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}i$$
$$z=\frac{-4-1+3}{2}+\frac{3i+i}{2}$$
$$z=\frac{-2}{2}+\frac{4i}{2}$$
$$z=-1+2i$$

پس $z=-1+2i,\ w=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

$$w=\frac{4(-i+1)}{4}$$
$$w=-i+1$$

لہٰذا $z=4-i,\ w=1-i$

**(iv)** $\mathbf{z+w=3i}$

$\mathbf{2z+3w=2}$

حل: $z+w=3i$ ____ (i)

$2z+3w=2$ ____ (ii)

مساوات(i) کو w کے لیے حل کرنے سے

$$z+w=3i$$
$w=3i-z$ ____ (iii)

مساوات(ii) میں $w=3i-z$ درج کرنے سے

$$2z+3(3i-z)=2$$
$$2z+9i-3z=2$$
$$2z-3z=2-9i$$
$$-z=2-9i$$
$$z=-2+9i$$

$z=-2+9i$ مساوات(iii) میں درج کرنے سے

$$w=3i-(-2+9i)$$
$$w=3i+2-9i$$
$$w=2+3i-9i$$
$$w=2-6i$$

لہٰذا $z=-2+9i,\ w=2-6i$

**(v)** $\mathbf{2z+(3+i)w=1}$

$\mathbf{-z-(1-i)w=2}$

حل: $2z+(3+i)w=1$ ____ (i)

$-z-(1-i)w=2$ ____ (ii)

مساوات(ii) کو z کے لیے کرنے سے

$$-z-(1-i)w=2$$
$$-z=2+(1-i)w$$
$$z=-2-(1-i)w$$
$z=-2-w+wi$ ____ (iii)

$z=-2-w+wi$ مساوات(i) میں درج کرنے سے

$$2z+(3+i)w=1$$
$$2(-2-w+wi)+3w+wi=1$$
$$-4-2w+2wi+3w+wi=1$$
$$-2w+3w+2wi+wi=1+4$$
$$w+3wi=5$$
$$w(1+3i)=5$$

www.ilmkidunya.com

# حل اعادہ مشق 1

-1 درج ذیل سوالات کے دیئے گئے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) $i^2 + i^4 =$

(a) $-1$ (b) $0$ (c) $1$ (d) $2$

(ii) $(2 - 3i)(2 + 3i)$ کا حقیقی حصہ ہے:

(a) $-3$ (b) $1$ (c) $3$ (d) $13$

(iii) $(2 - i)(2 + i)$ کا خیالاتی حصہ ہے:

(a) $0$ (b) $1$ (c) $7$ (d) $9$

(iv) $x + iy$ ایک خالص خیالاتی عدد ہوگا، جب:

(a) $y = 0$ (b) $x = 0$ (c) $i = 0$ (d) $x = 0, y = 0$

(v) $5 - 2i$ کا جمعی معکوس ہے:

(a) $5 + 2i$ (b) $-5 - 2i$ (c) $5 - 2i$ (d) $-5 + 2i$

(vi) $z = 1 + i$ کا ضربی معکوس ہے:

(a) $1 - i$ (b) $i$ (c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

(vii) اگر $z = 4 - 3i$ ہو تو $z\bar{z}$ برابر ہے:

(a) $3$ (b) $9$ (c) $16$ (d) $25$

(viii) $9 - 4i$ کا کانجوگیٹ ہے:

(a) $-9 - 4i$ (b) $9 + 4i$ (c) $9 + 9i$ (d) $4 - 9i$

(ix) اگر $z = 4 + 4i$ ہو تو $z + \bar{z}$ برابر ہے:

(a) $8$ (b) $8 + 8i$ (c) $8i$ (d) $0$

(x) اگر $z = 5 + 4i$ ہو تو $|z|$ برابر ہے:

(a) $9$ (b) $25$ (c) $41$ (d) $\sqrt{41}$

## جوابات

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (i) $0$ | (ii) $13$ | (iii) $0$ | (iv) $x = 0$ | (v) $-5 + 2i$ |
| (vi) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ | (vii) $25$ | (viii) $9 + 4i$ | (ix) $8$ | (x) $\sqrt{41}$ |

-2 (i) کیا "0" ایک کمپلیکس عدد ہے؟ وضاحت کیجیے۔

جواب: جی ہر حقیقی عدد ایک کمپلیکس عدد ہوتا ہے جس خیالاتی حصہ صفر ہوتا اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں $0 + 0i$

(ii) کمپلیکس عدد کی اپنے ہی کانجوگیٹ سے ضرب کا نتیجہ کیا ہوتا ہے؟

جواب: اس کا نتیجہ ایک غیر منفی صحیح عدد نکلتا ہے۔

www.ilmkidunya.com

(iii) دو کمپلیکس اعداد کے برابر ہونے کی شرط بیان کیجیے۔

جواب: دو کمپلیکس اعداد بس اس صورت ہی میں برابر ہو سکتے ہیں جب ان کا حقیقی اور خیالاتی حصہ آپس میں برابر ہو۔

-3 مختصر کیجیے۔

(i) $i^{37}$

حل: $i^{37} = i^{36}.\ i = (i^2)^{18}.i = (-1)^{18}.i = 1.i = i$

(ii) $i^{13} \times i^{11}$

حل: $i^{13} \times i^{11} = i^{13+11} = i^{24} = (i^2)^{12} = (-1)^{12} = 1$

(iii) $(-i)^{-9}$

حل:
$$(-i)^{-9} = \frac{1}{(-i)^9} = \frac{1}{(-1\times i)^9} = \frac{1}{(-1)^9 \times i^9} = \frac{1}{-1\times i^8 \times i}$$

$$= \frac{1}{-1\times (i^2)^4 \times i} = \frac{1}{-1\times(-1)^4\times i} = \frac{1}{-1\times 1\times i} = \frac{1}{-1\times i} = \frac{1}{-i}$$

$$\frac{1}{-i}\times\frac{i}{i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{-(-1)} = \frac{i}{1} = i$$

(iv) $(3-4i)(5-6i)$

حل:
$$(3-4i)(5-6i)$$
$$= 3(5-6i) - 4i(5-6i)$$
$$= 15 - 18i - 20i + 24i^2$$
$$= 15 - 24 - 38i$$
$$= -9 - 38i$$

(v) $(3+4i) \div (5-7i)$

حل:
$$(3+4i) \div (5-7i)$$
$$= \frac{3+4i}{5-7i}$$
$$= \frac{3+4i}{5-7i}\times\frac{5+7i}{5+7i} = \frac{3(5+7i)+4i(5+7i)}{(5)^2-(7i)^2}$$
$$= \frac{15+21i+20i+28i^2}{25-(49\times -1)} = \frac{15+41i+28(-1)}{25+49}$$
$$= \frac{15-28+41i}{74} = \frac{-13+41i}{74} = -\frac{13}{74}+\frac{41i}{74}$$

-4 $z = 8 + 9i$ کا جمعی اور ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

حل:
$$z = 8 + 9i$$

جمعی معکوس $= -(8+9i) = -8-9i$

ضربی معکوس $= z^{-1} = \dfrac{1}{8+9i}$

$$= \frac{1}{8+9i}\times\frac{8-9i}{8-9i}$$
$$= \frac{8-9i}{(8)^2-(9i)^2} = \frac{8-9i}{64-(81\times -1)}$$
$$= \frac{8-9i}{64+81} = \frac{8-9i}{145} = \frac{8}{145}-\frac{9i}{145}$$

-5 اگر $z_1 = 3 + 4i$ اور $z_2 = 2 + 3i$ ہوں تو تصدیق کیجیے کہ

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

حل:

$z_1 = 3 + 4i$

$\overline{z_1} = 3 - 4i$

$z_2 = 2 + 3i$

$\overline{z_2} = 2 - 3i$

L.H.S

$$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (2 + 3i)$$
$$= 3 + 4i + 2 + 3i$$
$$= 3 + 2 + 4i + 3i = 5 + 7i$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{5+7i} = 5 - 7i \quad \text{___(i)}$$

R.H.S

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (3 - 4i) + (2 - 3i)$$
$$= 3 - 4i + 2 - 3i$$
$$= 3 + 2 - 4i - 3i = 5 - 7i$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

حل:

$z_1 = 3 + 4i$

$\overline{z_1} = 3 - 4i$

$z_2 = 2 + 3i$

$\overline{z_2} = 2 - 3i$

L.H.S

$$z_1 z_2 = (3 + 4i)(2 + 3i)$$
$$= 3(2 + 3i) + 4i(2 + 3i)$$
$$= 6 + 9i + 8i + 12i^2$$
$$= 6 + 17i + 12(-1)$$
$$= 6 - 12 + 17i$$
$$= -6 + 17i$$
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{-6+17i} = -6 - 17i$$

R.H.S

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (3 - 4i)(2 - 3i)$$
$$= 3(2 - 3i) - 4i(2 - 3i)$$
$$= 6 - 9i - 8i + 12i^2$$
$$= 6 - 17i + 12(-1)$$
$$= 6 - 12 - 17i$$
$$= -6 - 17i$$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ پس ثابت ہوا

(iii) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

حل:

$z_1 = 3 + 4i, z_2 = 2 + 3i$

$\overline{z_1} = 3 - 4i, \overline{z_2} = 2 - 3i$

L.H.S

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{2+3i}$$
$$= \frac{3+4i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i}$$
$$= \frac{3(2-3i)+4i(2-3i)}{(2)^2-(3i)^2}$$
$$= \frac{6-9i+8i-12i^2}{4-(9\times(-1))}$$
$$= \frac{6-i-(12\times(-1))}{4-(-9)}$$
$$= \frac{6-i+12}{4+9}$$
$$= \frac{18-i}{13} = \frac{18}{13} - \frac{i}{13}$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\frac{18}{13} - \frac{i}{13}} = \frac{18}{13} + \frac{i}{13}$$

www.ilmkidunya.com

R.H.S

$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{3-4i}{2-3i}$$

$$= \frac{3-4i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i}$$

$$= \frac{3(2+3i)-4i(2+3i)}{(2)^2-(3i)^2}$$

$$= \frac{6+9i-8i-12i^2}{4-(9\times(-1))}$$

$$= \frac{6+i-12(-1)}{4-(-9)}$$

$$= \frac{6+i+12}{4+9}$$

$$= \frac{18+i}{13} = \frac{18}{13} + \frac{i}{13}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$ پس ثابت ہوا

$\overline{z}_1 = 3-4i, \overline{z}_2 = 2-3i$

**(iv)** $|z_1| = |\overline{-z_1}|$

حل:

$z_1 = 3+4i$

$\overline{z}_1 = 3-4i$

$-\overline{z}_1 = -(3-4i) = -3+4i$

L.H.S = $|z_1| = |3+4i| = \sqrt{(3)^2+(4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

R.H.S = $|-\overline{z}_1| = |-3+4i| = \sqrt{(-3)^2+(4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$|z_1| = |-\overline{z}_1|$ پس ثابت ہوا

**(v)** $\overline{\overline{z}}_2 = z_2$

حل:

$z_2 = 2+3i$

$\overline{z}_2 = \overline{2+3i} = 2-3i$

$\overline{\overline{z}}_2 = \overline{2-3i} = 2+3i$

$\overline{\overline{z}}_2 = z_2$ پس ثابت ہوا

**(vi)** $z_1\overline{z}_1 = |z_1|^2$

حل:

$z_1 = 3+4i$

$\overline{z}_1 = \overline{3+4i} = 3-4i$

L.H.S

$z_1\overline{z}_1 = (3+4i)(3-4i)$

$= (3)^2-(4i)^2$

$= 9-16i^2$

$= 9-(16\times(-1))$

$= 9+16 = 25$

R.H.S

$|z_1| = |3+4i| = \sqrt{(3)^2+(4)^2}$

$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$|z_1|^2 = (5)^2 = 25$

$z_1\overline{z}_1 = |z_1|^2$ پس ثابت ہوا

-6 اگر $z_1 = 5 + 4i$ اور $z_2 = 3 + 2i$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(i) $z_1z_2$

حل: $z_1 = 5 + 4i,\ z_2 = 3 + 2i$

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (5 + 4i)(3 + 2i) \\ &= 5(3 + 2i) + 4i(3 + 2i) \\ &= 15 + 10i + 12i + 8i^2 \\ &= 15 + 22i + 8(-1) \\ &= 15 + 22i - 8 \\ &= 7 + 22i \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{z_1}{z_2}$

حل:

$z_1 = 5 + 4i,\ z_2 = 3 + 2i$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{5+4i}{3+2i} = \frac{5+4i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i} \\ &= \frac{5(3-2i)+4i(3-2i)}{(3)^2-(2i)^2} = \frac{15-10i+12i-8i^2}{9-(4(-1))} \\ &= \frac{15+2i-8(-1)}{9-(-4)} = \frac{15+2i+8}{9+4} \\ &= \frac{23+2i}{13} = \frac{23}{13} + \frac{2i}{13} \end{aligned}$$

(iii) $\overline{z}_1\overline{z}_2$

حل:

$z_1 = 5 + 4i,\ z_2 = 3 + 2i$

$$\begin{aligned} \overline{z_1} &= 5 - 4i,\ \overline{z_2} = 3 - 2i \\ \overline{z}_1\overline{z}_2 &= (5 - 4i)(3 - 2i) \\ &= 5(3 - 2i) - 4i(3 - 2i) \\ &= 15 - 10i - 12i + 8i^2 \\ &= 15 - 22i + 8(-1) \\ &= 15 - 22i - 8 \\ &= 7 - 22i \end{aligned}$$

(iv) $|z_1z_2|$

حل:

$z_1 = 5 + 4i,\ z_2 = 3 + 2i$

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (5 + 4i)(3 + 2i) \\ &= 5(3 + 2i) + 4i(3 + 2i) \\ &= 15 + 10i + 12i + 8i^2 \\ &= 15 + 22i + 8(-1) \\ &= 15 + 22i - 8 \\ &= 7 + 22i \\ |z_1z_2| &= |7 + 22i| = \sqrt{(7)^2 + (22)^2} \\ &= \sqrt{49+484} = \sqrt{533} \end{aligned}$$

-7 $z = (2 + 7i)^{-1}$ کے حقیقی اور خیالاتی حصے معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned} z &= (2 + 7i)^{-1} \\ &= \frac{1}{2+7i} = \frac{1}{2+7i} \times \frac{2-7i}{2-7i} \\ &= \frac{2-7i}{(2)^2-(7i)^2} = \frac{2-7i}{4-49i^2} = \frac{2-7i}{4-(49\times-1)} \\ &= \frac{2-7i}{4+49} = \frac{2-7i}{53} = \frac{2}{53} - \frac{7}{53}i \end{aligned}$$

لہٰذا حقیقی حصہ $= \dfrac{2}{53}$ ، خیالاتی حصہ $= -\dfrac{7}{53}$

-8 کمپلیکس عددی سروں z اور w کے لیے دی گئی یک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کیجیے۔

$iz + (2 - i)w = 4 + i$

$iz + (3 + i)w = 3 + 3i$

حل:

$iz + (2 - i)w = 4 + i$ ______ (i)

$iz + (3 + i)w = 3 + 3i$ ______ (ii)

www.ilmkidunya.com

مساوات (i) کو مساوات (ii) سے تفریق کرنے سے

$$\cancel{iz} + (3+i)w = 3+3i$$
$$\cancel{iz} \pm (2-i)w = 4 \pm i$$
$$\underline{\quad - \quad\quad\quad - \quad}$$

$$[(3+i)-(2-i)]w = -1+2i$$

$$(3+i-2+i)w = -1+2i$$

$$(1+2i)w = -1+2i$$

$$w = \frac{-1+2i}{1+2i}$$

$$w = \frac{-1+2i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{-1(1-2i)+2i(1-2i)}{(1)^2-(2i)^2}$$

$$= \frac{-1+2i+2i-4i^2}{1-(4\times -1)} = \frac{-1+4i-4(-1)}{1+4}$$

$$= \frac{-1+4i+4}{5} = \frac{3+4i}{5}$$

$$w = \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$

مساوات (i) میں $w = \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ درج کرنے سے

$$iz+(2-i)\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right) = 4+i$$

$$iz+2\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)-i\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right) = 4+i$$

$$iz+\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i-\frac{3}{5}i-\frac{4}{5}i^2 = 4+i$$

$$iz+\frac{6}{5}-\frac{4}{5}(-1)+\left(\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\right)i = 4+i$$

$$iz+\frac{6}{5}+\frac{4}{5}+\left(\frac{5}{5}\right)i = 4+i$$

$$iz+\frac{10}{5}+i = 4+i$$

$$iz+2+i = 4+i$$

$$iz = 4-2+i-i = 2 \quad \Rightarrow \quad iz = 2$$

$$z = \frac{2}{i}$$

$$z = \frac{2}{i}\times\frac{i}{i} = \frac{2i}{i^2}$$

www.ilmkidunya.com

$$z = \frac{2i}{-1} = -2i$$

لہٰذا $z = -2i, \; w = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

-9 $(3 - 4i)(a + bi) = 1 + 0i$ کو حل کیجیے اور a اور b کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:

$$(3 - 4i)(a + bi) = 1 + 0i$$
$$3(a + bi) - 4i(a + bi) = 1 + 0i$$
$$3a + 3bi - 4ai - 4bi^2 = 1 + 0i$$
$$3a + 3bi - 4ai - 4b(-1) = 1 + 0i$$
$$3a + 4b + 3bi - 4ai = 1 + 0i$$
$$(3a + 4b) + (3b - 4a)i = 1 + 0i$$

دونوں اطراف کے حقیقی حصہ کو حقیقی حصہ سے اور خیالاتی حصہ کو خیالاتی حصہ سے موازنہ کرنے سے

$$3a + 4b = 1 \quad \text{(i)}, \qquad -4a + 3b = 0 \quad \text{(ii)}$$

مساوات (i) کو 4 سے (ii) کو 3 سے ضرب دینے سے

$$12a + 16b = 4 \quad \text{(iii)}, \qquad -12a + 9b = 0 \quad \text{(iv)}$$

مساوات (iii) اور (iv) کو جمع کریں

$$12a + 16b = 4$$
$$-12a + 9b = 0$$
$$+25b = 4$$

$$b = \frac{4}{25}$$

$b = \frac{4}{25}$ مساوات (i) درج کریں۔

$$3a + 4\left(\frac{4}{25}\right) = 1$$

$$3a + \frac{16}{25} = 1$$

مساوات کے دونوں اطراف 25 سے ضرب دینے سے

$$25 \times 3a + 25 \times \frac{16}{25} = 25 \times 1$$
$$75a + 16 = 25$$
$$75a = 25 - 16 = 9$$

$$a = \frac{9}{75} = \frac{3}{25}$$

$$a = \frac{3}{25}$$

پس $a = \frac{3}{25}, \; b = \frac{4}{25}$

10- x اور y کے لیے مساوات کو حل کیجیے۔ $(3-2i)(x+yi) = 2(x-2yi)+2i-1$

حل:

$$(3-2i)(x+yi) = 2(x-2yi)+2i-1$$

$$3x+3yi-2xi-2yi^2 = 2x-4yi+2i-1$$

$$3x-2y(-1)-2xi+3yi = 2x-1-4yi+2i$$

$$3x+2y+(-2x+3y)i = (2x-1)+(-4y+2)i$$

دونوں اطراف کے حقیقی حصہ کو حقیقی حصہ سے اور خیالاتی حصہ کو خیالاتی حصہ سے موازنہ کرنے سے

$3x+2y = 2x-1 \quad , \quad -2x+3y = -4y+2$

$3x-2x+2y = -1 \quad , \quad -2x+3y+4y = 2$

$x+2y = -1$ ___ (i) $\quad , \quad -2x+7y = 2$ ___ (ii)

مساوات (i) کو 2 سے ضرب دینے سے

$2x+4y = -2$ ___ (iii)

مساوات (ii) اور (iii) کو جمع کرنے سے

$$\begin{array}{r} -2x+7y=2 \\ 2x+4y=-2 \\ \hline 11y=0 \end{array}$$

$y = \frac{0}{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

y = 0 مساوات (i) میں درج کریں

$x+2(0) = -1$

$x+0 = -1$

$x = -1$

پس $x=-1, y=0$

# معروضی طرز سوالات

## اضافی کثیر الانتخابی سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے کثیر الانتخابی سوالات

### 1.1 کمپلیکس اعداد

درست جواب کا انتخاب کریں۔

1- $x^2+1=0$ کے حقیقی حل ہیں:

(a) ایک (b) دو (c) تین (d) کوئی نہیں

2- $i =$ ______

(a) $\sqrt{-1}$ (b) $\pm 1$ (c) $0i$ (d)

3- $i^7 =$ ______

(a) $i$ (b) 1 (c) $-1$ (d) $-i$

4- $i^{-25} =$ ______
(a) $i$ (b) $-i$ (c) 1 (d) −1

5- خیالاتی اکائی کو ظاہر کیا جاتا ہے:
(a) $\alpha$ (b) $i$ (c) $\beta$ (d) $\omega$

6- کمپلیکس اعداد کا تصور سب سے پہلے پیش کیا گیا:
(a) 15ویں صدی میں (b) 16ویں صدی میں (c) 17ویں صدی میں (d) 18ویں صدی میں

## 1.1.1 کمپلیکس عدد کی مستطیلی شکل

7- درج ذیل میں سے کون سا کمپلیکس عدد ہے:
(a) 7 (b) $\sqrt{7}$ (c) $x + yi$ (d) $x^2 - 1$

8- $-3 + 4yi$ کا حقیقی حصہ ہے:
(a) 4 (b) y (c) $i$ (d) −3

9- $(-i)^4 =$ ______
(a) 1 (b) $i^3$ (c) −1 (d) 4

10- اگر $x = 0$ ہو تو کمپلیکس عدد کہلاتا ہے:
(a) حقیقی عدد (b) خیالاتی عدد (c) جفت عدد (d) مفرد عدد

11- $(5x - 7i)$ کا خیالاتی حصہ ہے:
(a) 5 (b) −7 (c) x (d) $i$

12- $(8 + 2i) - (4 - 3i)$ کا حقیقی حصہ ہے:
(a) 8 (b) 4 (c) $2i$ (d) $4 - i$

13- $(7 - 4i)$ کا خیالاتی حصہ ہے:
(a) 2 (b) 16 (c) 3 (d) −4

## 1.1.2 کمپلیکس اعداد کی برابری

14- اگر $x + yi = 5 - 9i$ ہو تو تب $y =$ ______
(a) 9 (b) −9 (c) $x + 5$ (d) $yi$

15- اگر $2a + (b - 1)i = 10 + 4i$ ہو تو تب $a =$ ______
(a) 5 (b) 10 (c) $2a + 10$ (d) $2a - 10$

16- اگر $(3x + 2) + 4i = 14 - yi$ ہو تو تب $x =$ ______ اور $y =$ ______
(a) $x = 4, y = -3$ (b) $x = -4, y = 4$ (c) $x = 3, y = 4$ (d) $x = 4, y = -4$

17- اگر $-5x + yi = -10$ ہو تو تب $y =$ ______ ہوگا۔
(a) 10 (b) −5 (c) 0 (d) −2

## 1.2 کمپلیکس اعداد پر الجبری عوامل (Algebraic Operations on Complex Numbers)

18- اگر $z = 3 + 5i$ ہو تو تب $3z =$ ______
(a) $9 + 15i$ (b) $6 + 8i$ (c) $3 - 5i$ (d) $9 + 25i^2$

19- اگر $z = x + yi$ ہو تو تب $-5z =$ ______
(a) $5z = -5x + yi$ (b) $-5x - 5yi$ (c) $x - 5yi$ (d) $5x + 5yi$

www.ilmkidunya.com

-20 $(5i + 4)$ اور $(-6 + 7i)$ کا حاصل جمع ہوگا:

(a) $-6 + 12i$ (b) $-10 + 12i$ (c) $10 + 12i$ (d) $-2 + 12i$

-21 $(4 - 3i) - (2 - 5i) =$ ______

(a) $2 + 2i$ (b) $2 - 3i$ (c) $6 - 5i$ (d) $-2 - 2i$

-22 $(5 + 2i) + (3 - 7i) =$ ______

(a) $2 - 5i$ (b) $15 - 9i$ (c) $8 - 5i$ (d) $8 + 9i$

-23 $(4 + i)(4 - i) =$ ______

(a) $16 - i$ (b) $17$ (c) $15$ (d) $16$

-24 $\frac{1+i}{1-i}$ کی $a + bi$ میں شکل ہوگی۔

(a) $1 + i$ (b) $-i$ (c) $-1$ (d) $i$

## 1.2.6 کمپلیکس اعداد کی خصوصیات

-25 کمپلیکس اعداد خاصیت بندش رکھتے ہیں:

(a) تفریق (b) جمع (c) جمع اور ضرب (d) صرف جمع

-26 کمپلیکس اعداد کی خاصیت تلازم ہے:

(a) $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ (b) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
(c) $z + 0 = z$ (d) $z - z = 0$

-27 کمپلیکس اعداد کے لیے جمعی ذاتی عنصر ہے:

(a) $(1, 1)$ (b) $(0, 0i)$ (c) $(1, 0i)$ (d) $(1, i)$

-28 کمپلیکس اعداد کے لیے ضربی ذاتی عنصر ہے:

(a) $(1 + 0i)$ (b) $(0, 0i)$ (c) $(1, 1i)$ (d) $(-i, i)$

-29 $(7 - 2i)$ کا جمعی معکوس ہے:

(a) $(-2 + 7i)$ (b) $(-7, -2i)$ (c) $(0, 0)$ (d) $(-7 + 2i)$

-30 اگر z اور w ایک دوسرے کے ضربی معکوس والے کمپلیکس اعداد ہوں تو تب ______ $= zw$

(a) $0$ (b) $1$ (c) $i$ (d) $-i$

-31 کوئی سے بھی دو کمپلیکس اعداد $z_1$ اور $z_1$ کے لیے

(a) $z_1z_2 = z_1 + z_2$ (b) $z_1 + z_2 = \frac{n_1}{n_2}$ (c) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (d) $z_1 - z_2 = \frac{z_1}{z_2}$

## 1.3 کمپلیکس یا آرگینڈ مستوی

-32 عدد $(2 - 7i)$ کے مساوی ہے:

(a) $(2, -7)$ (b) $(2 + 7)$ (c) $(-2 + 7i)$ (d) $(2 - 7, i)$

-33 $z = -7i$ کو ظاہر کیا جاسکتا ہے:

(a) $(7 + -i)$ (b) $(1 - 7i)$ (c) $+7i$ (d) $(0, -7)$

-34 کمپلیکس مستوی کا نام کس کے اعزاز میں رکھا گیا:

(a) جین آرگینڈ (b) لونرڈ اولر (c) نیوٹن (d) کال

www.ilmkidunya.com

-35 کون سا مرتب جوڑا کمپلیکس عدد z = 8i کو ظاہر کرتا ہے:

(a) (0, 8) (b) (8, 8) (c) (8, 0) (d) (8, *i*)

## 1.3.1 کمپلیکس عدد کا کانجوگیٹ

-36 ایک کمپلیکس عدد $a + bi$ کے کانجوگیٹ کا اظہار ہے۔

(a) $-a - bi$ (b) $a - bi$ (c) $-a + bi$ (d) $a + bi^2$

-37 $-4 + 4i$ کا کانجوگیٹ ہے

(a) $4 - 4i$ (b) $-4 + 4i$ (c) $-8i$ (d) $-4 - 4i$

-38 ایک کمپلیکس عدد کا اپنے کانجوگیٹ سے حاصل ضرب ہوتا ہے

(a) ایک عدد حقیقی (b) ایک کمپلیکس عدد (c) جفت عدد (d) طاق عدد

-39 $(1 + 2i)(1 - 2i) =$ ______

(a) 3 (b) $3i$ (c) 5 (d) $5i$

-40 $-11i$ کا کانجوگیٹ ہے

(a) $11i$ (b) $-11$ (c) $-11i$ (d) $11i^2$

## 1.3.3 کمپلیکس کانجوگیٹ کی خصوصیات

-41 کوئی سے بھی دو کمپلیکس اعداد $z_1$ اور $z_2$ کے لیے $\overline{z_1 + z_2} =$ ______

(a) $\overline{z_1 z_2}$ (b) $\overline{z_1 - z_2}$ (c) $\overline{z_1} + \overline{z_2}$ (d) $z_1 z_2$

-42 $z_1 = 4 + 3i$ اور $z_2 = 5 - 2i$ کے لیے ______ $= \overline{z_1 + z_2}$

(a) $9 - i$ (b) $9 + i$ (c) $5 + 5i$ (d) $4 - 5i$

-43 اگر $z = -3 + 7i$ ہو تو تب $\overline{\overline{z}}$ ہوگا:

(a) $-3 - 7i$ (b) $3 - 7i$ (c) $-3 + 7i$ (d) $7 - 3i$

-44 اگر $z = 3 - 7i$ ہو تو تب ______ $= z.\overline{z}$ ہوگا

(a) $3 - 21i$ (b) $57i$ (c) 58 (d) $21 - 9i$

-45 اگر z ایک کمپلیکس عدد ہو تب ______ $= z\overline{z}$

(a) $|z|^2$ (b) $z + \overline{z}$ (c) $\overline{z}.\overline{z}$ (d) $z - 2\overline{z}$

## 1.4.1 کمپلیکس عدد کے ماڈیولس کی خصوصیات

-46 اگر $z = 8 - 3i$ تب $|z|$

(a) 53 (b) 63 (c) 73 (d) 83

-47 اگر $z = 13 + 7i$ ہو تب ______ $= |\overline{\overline{z}}|$

(a) $13 - 7i$ (b) 169 (c) 812 (d) 218

-48 اگر $z = -\sqrt{3} - \sqrt{5}$ ہو تب ______ $= |z|$

(a) 8 (b) $\sqrt{34}$ (c) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (d) $i\sqrt{8}$

www.ilmkidunya.com

## 1.5 $(x+iy)^n$ اور $\left(\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\right)^n$ ، جہاں $x_2+iy_2 \neq 0$ ، $n=\pm 1$ اور $n=\pm 2$ کے حقیقی اور خیالاتی حصے معلوم کرنا

www.ilmkidunya.com

-49 $(4+3i)^{-2} =$ ______

(a) $(4+3i)^2$  (b) $(-4-3)^{-2}$  (c) $\sqrt{(4)^2+(3)^2}$  (d) $\dfrac{1}{(4+3i)^2}$

-50 اگر z ایک کمپلیکس عدد ہو تو تب $\text{Re}(z) =$ ______

(a) $\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$  (b) $\dfrac{z+\bar{\bar{z}}}{2}$  (c) $\dfrac{z+\bar{z}}{2}$  (d) $z.\bar{z}$

-51 اگر z ایک کمپلیکس عدد ہو تو تب $\text{Im}(z) =$ ______

(a) $\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$  (b) $\dfrac{z-\bar{z}}{2}$  (c) $\dfrac{z+\bar{z}}{2}$  (d) $\dfrac{z+\bar{z}}{2i}$

-52 $\left(\dfrac{5z-3i}{3-i}\right)^{-2} =$ ______

(a) $\left(\dfrac{5z+3i}{3-i}\right)^{-2}$  (b) $\left(\dfrac{5z-3i}{3-i}\right)^{2}$  (c) $\left(\dfrac{3-i}{5z-3i}\right)^{2}$  (d) $\left(\dfrac{3+i}{5z-3i}\right)^{-2}$

www.ilmkidunya.com

### جوابات

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -1 کوئی نہیں | -2 $\sqrt{-1}$ | -3 $i$ | -4 $-i$ | -5 $i$ |
| -6 16ویں صدی | -7 $x+yi$ | -8 $-4$ | -9 $1$ | -10 حقیقی عدد |
| -11 $-7$ | -12 $4$ | -13 $3$ | -14 $-9$ | -15 $5$ |
| -16 $x=4, y=-4$ | -17 $0$ | -18 $9+15i$ | -19 $-5x-5yi$ | -20 $-2+12i$ |
| -21 $2+2i$ | -22 $8-5i$ | -23 $17$ | -24 $i$ | -25 جمع اور ضرب |
| -26 $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$ | | -27 $(0, 0i)$ | -28 $(1+0i)$ | -29 $-7+2i$ |
| -30 $1$ | -31 $z_1+z_2=z_2+z_1$ | | -32 $(2, -7)$ | -33 $(0, -7)$ |
| -34 جین آرگینڈ | -35 $(8, 0)$ | -36 $a-bi$ | -37 $-4-4i$ | -38 حقیقی عدد |
| -39 $58$ | -40 $11i$ | -41 $\overline{z_1}+\overline{z_2}$ | -42 $9-i$ | -43 $-3+7i$ |
| -44 $57i$ | -45 $\|z\|^2$ | -46 $.73$ | -47 $\sqrt{218}$ | -48 $8$ |
| -49 $\dfrac{1}{(4+3i)^2}$ | -50 $\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ | -51 $\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ | -52 $\left(\dfrac{3-i}{5z-3i}\right)^2$ | |

# اضافی مختصر سوالات

محکمہ تعلیم کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے مختصر جوابی سوالات

## 1.1 کمپلیکس اعداد

**مختصر جواب دیں۔**

**-1 کمپلیکس عدد کی تعریف کریں:**

**جواب:** ایک کمپلیکس عدد ایسا عدد ہے جسے $x + yi$ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ جس میں x اور y حقیقی اعداد ہوں اور $i$ ایک خیالاتی اکائی ہو۔

**-2 مساوات $x^2 + 1 = 0$ کا کوئی بھی حقیقی حل کیوں نہیں ہے۔**

**جواب:** $x^2 + 1 = 0$ کو حل کرنے سے ہمیں $x^2 = -1$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی حقیقی عدد کا مربع ایک مثبت عدد ہی ہوتا ہے اور کسی بھی حقیقی عدد کا مربع $-1$ نہیں ہوسکتا ہے۔

لہٰذا، مساوات $x^2 + 1 = 0$ کا کوئی بھی حقیقی حل نہیں ہے۔

**-3 خیالاتی اکائی ($i$ آئیوٹا) کی تعریف کریں۔**

**جواب:** خیالاتی اکائی $i$ کی تعریف یوں ہے کہ یہ $-1$ کا جذر المربع ہے۔ اسے $i = \sqrt{-1}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

**-4 $i^{27}$ کو مختصر کریں۔**

**حل:** $i^{27} = i^{26} \times i = (i^2)^{13} \times i = (-1)^{13} \times i = -1 \times i = -i$

**-5 $(-i)^{17}$ کو مختصر کریں۔**

**حل:**

$$(-i)^{17} = (-1 \times i)^{17} = (-1)^{17}(i)^{17} = -1(i)^{16} \times i = -1(i^2)^8 \times i$$
$$= -1(-1)^8 \times i = -1(1) \times i = -i$$

## 1.1.1 کمپلیکس عدد کی مستطیلی شکل

**-6 ایک خالص خیالاتی عدد کیا ہوتا ہے؟**

**جواب:** ایک کمپلیکس عدد $z = x + yi$ کو خالص خیالاتی عدد اس وقت کہا جاتا ہے اگر اس کا حقیقی عدد صفر ہو یعنی $(x = 0)$۔

**-7 حقیقی کمپلیکس عدد کیا ہوتا ہے؟** **جواب:** ایک حقیقی کمپلیکس عدد اس وقت بنتا ہے جب اس کا خیالاتی حصہ صفر ہو یعنی $(y = 0)$

**-8 $z = 7 - 11i$ کے حقیقی حصہ اور خیالاتی حصہ کی شناخت کریں۔**

**جواب:** حقیقی حصہ $Re(z)$ 7 ہے۔ خیالاتی حصہ $Im(z)$ $-11$ ہے۔

## 1.1.2 کمپلیکس اعداد کی برابری

**-9 کس شرط کے تحت دو کمپلیکس عدد برابر ہوتے ہیں؟**

**جواب:** دو کمپلیکس عدد صرف اور صرف اسی وقت برابر ہوتے ہیں اگر ان کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں $(x_1 = x_2)$ اور خیالاتی حصے بھی آپس میں برابر ہوں $(y_1 = y_2)$۔

**-10 اگر $a + bi = 9 - 13i$ ہوں تو a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔**

**حل:** دیا گیا ہے کہ $a + bi = 9 - 13i$

دیے گئے دو کمپلیکس اعداد مساوی ہیں، اس لیے ان کے حقیقی اور خیالاتی حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

www.ilmkidunya.com

خیالاتی حصوں کی برابری ، حقیقی حصوں کی برابری

$a = 9 \quad , \quad b = -13$

-11 دیا گیا ہے کہ $(3x + 3) + (5 - y)i = 7 + 3i$ ہو تو x اور y کی قیمتیں معلوم کریں۔

حل: دیا گیا ہے کہ $(3x + 3) + (5 - y)i = 7 + 3i$

دیے گئے دو کمپلیکس اعداد مساوی ہیں، اس لیے ان کے حقیقی اور خیالات حصے ضرور برابر ہوتے ہیں۔

$3x + 3 = 7 \quad , \quad 5 - y = 3$

$3x = 7 - 3 \quad , \quad -y = 3 - 5$

$3x = 4 \quad , \quad -y = -2$

$x = \frac{4}{3} \quad , \quad y = 2$

پس $x = \frac{4}{3}, y = 2$

## 1.2 کمپلیکس اعداد پر الجبری عوامل

-12 اگر $z = 1 - 2yi$ ہو تو $-3z$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل:

$z = 1 - 2yi$

$-3z = -3(1 - 2yi)$

$= -3 + 6yi$

-13 مختصر کریں $(17 - 7i) + (19 - 7i)$

حل:

$(17 - 7i) + (19 - 7i)$

$= 17 - 7i + 19 - 7i$

$= 17 + 19 - 7i - 7i$

$= 36 - 14i$

-14 مختصر کریں $(21 - 12i) - (-11 + 17i)$

حل:

$(21 - 12i) - (-11 + 17i)$

$= 21 - 12i + 11 - 17i$

$= 21 + 11 - 12i - 17i$

$= 32 - 29i$

-15 مختصر کریں $(5 - 3i)(4 + 7i)$

حل:

$(5 - 3i)(4 + 7i)$

$= 5(4 + 7i) - 3i(4 + 7i)$

$= 20 + 35i - 12i - 21i^2$

$= 20 + 23i - 21(-1)$

$= 20 + 23i + 21$

$= 41 + 23i$

-16 اگر $z_1 + z_2 = 19 - 11i$ اور $z_1 = 3 - 7i$ ہو تو $z_2$ معلوم کریں۔

حل:

$z_1 + z_2 = 19 - 11i$

$z_2 = 19 - 11i - z_1$

$z_2 = 19 - 11i - (3 - 7i)$

$\because z_1 = 3 - 7i$

$z_2 = 19 - 11i - 3 + 7i$

$z_2 = 19 - 3 - 11i + 7i$

$z_2 = 16 - 4i$

لہٰذا $z_2 = 16 - 4i$

-17 $(2 + \sqrt{3}i)(-7 + 2i)$ کو $a + bi$ کی شکل میں ظاہر کریں۔

حل:

$(2 + \sqrt{3}i)(-7 + 2i)$

$= 2(-7 + 2i) + \sqrt{3}i(-7 + 2i)$

$= -14 + 4i - 7\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}i^2$

$= -14 + (4 - 7\sqrt{3})i + 2\sqrt{3}(-1)$

$= -14 + (4 - 7\sqrt{3})i - 2\sqrt{3}$

$= (-14 - 2\sqrt{3}) + (4 - 7\sqrt{3})i$

-18 اگر $\frac{z}{3 - 5i} = 2 + i$ ہو تو کمپلیکس عدد z معلوم کریں۔

حل:

$\frac{z}{3 - 5i} = 2 + i$

$z = (2 + i)(3 - 5i)$

$z = 2(3 - 5i) + i(3 - 5i)$

$z = 6 - 10i + 3i - 5i^2$

$z = 6 - 7i - 5(-1) = 6 + 5 - 7i$

$z = 11 - 7i$

لہٰذا $z = 11 - 7i$

www.ilmkidunya.com

19- $(7-3i) \div (6+2i)$ کو مختصر کریں اور $a + bi$ کی شکل میں ظاہر کریں۔

حل:

$$(7-3i) \div (6+2i)$$
$$= \frac{7-3i}{6+2i}$$
$$= \frac{7-3i}{6+2i} \times \frac{6-2i}{6-2i}$$
$$= \frac{7(6-2i)-3i(6-2i)}{(6)^2-(2i)^2}$$
$$= \frac{42-14i-18i+6i^2}{36-(4(-1))}$$
$$= \frac{42-32i+6(-1)}{36-(-4)}$$
$$= \frac{42-32i-6}{36+4}$$
$$= \frac{36-32i}{40} = \frac{36}{40} - \frac{32}{40}i$$
$$= \frac{9}{10} - \frac{4}{5}i$$

## 1.2.6 کمپلیکس اعداد کی خصوصیات

20- کمپلیکس عدد کا جمعی ذاتی عنصر کیا ہوتا ہے؟

جواب: ایک کمپلیکس عدد کا جمعی ذاتی عنصر $0 + 0i = 0$ ہے۔ جب اسے کسی بھی کمپلیکس عدد z میں جمع کیا جاتا ہے۔ تو حاصل جمع وہی z ہی رہتا ہے۔

21- اگر $z1 = 2 + 3i$ اور $z2 = 4 + i$ ہو تو ظاہر کریں کہ یہ کمپلیکس اعداد خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع رکھتے ہیں۔

حل:

$$z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 4 + i$$
$$z_1 + z_2 = (2+3i) + (4+i)$$
$$= 2 + 4 + 3i + i = 6 + 4i$$
$$z_2 + z_1 = (4+i) + (2+3i)$$
$$= 4 + 2 + i + 3i = 6 + 4i$$

چونکہ دونوں نتائج یکساں ہیں لہٰذا

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

22- کمپلیکس اعداد کے لیے ضرب کی خاصیت تلازم کیا ہے؟

جواب: کوئی سے بھی تین کمپلیکس اعداد $z_1$، $z_2$ اور $z_3$ کے لیے

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

23- کمپلیکس اعداد کے سیٹ میں ضربی ذاتی عنصر کی خاصیت کیا ہے؟

جواب: کمپلیکس اعداد کے لیے ضربی ذاتی عنصر $1 + 0i = 1$ ہے۔

24- $z = 9 - 7i$ کا جمعی معکوس لکھیں۔

حل:

$$z = 9 - 7i$$
$$-z = -(9-7i)$$
$$-z = -9 + 7i$$

پس $9 - 7i$ کا جمعی معکوس $-9 + 7i$ ہے۔

25- $z = \sqrt{3} - 5i$ کا ضربی معکوس معلوم کریں۔

حل:

$$z = \sqrt{3} - 5i$$
$$z^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-5i}$$
$$z^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-5i} \times \frac{\sqrt{3}+5i}{\sqrt{3}+5i}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+5i}{(\sqrt{3})^2-(5i)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+5i}{3-25i^2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+5i}{3-(25\times -1)}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+5i}{3+25} = \frac{\sqrt{3}+5i}{28}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{28} + \frac{5}{28}i$$

-26 اگر $z_1 = 2 + 5i$ اور $z_2 = 7 - 3i$ ہو تو ثابت کریں کہ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

حل:

$z_1 = 2 + 5i,\ z_2 = 7 - 3i$

L.H.S

$$z_1 + z_2 = (2 + 5i) + (7 - 3i) = 2 + 5i + 7 - 3i = 2 + 7 + 5i - 3i = 9 + 2i \quad ____(i)$$

R.H.S

$$z_2 + z_1 = (7 - 3i) + (2 + 5i) = 7 - 3i + 2 + 5i = 7 + 2 - 3i + 5i = 9 + 2i \quad ____(ii)$$

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

## 1.3 کمپلیکس یا آرگینڈ مستوی

-27 آرگینڈ مستوی کیا ہے؟

جواب: آرگینڈ مستوی ایک محدداتی مستوی ہوتی ہے۔ افقی محور (x- محور) کمپلیکس عدد کے حقیقی حصے کو اور عمودی محور (y- محور) خیالاتی حصے کو ظاہر کرتا ہے۔

-28 کمپلیکس عدد $-7i$ کو ایک مترتب جوڑے میں ظاہر کریں۔

جواب: کیونکہ اس میں حقیقی حصہ موجود نہیں ہے۔ لہٰذا حقیقی حصے کی قیمت 0 ہے۔ اسی لیے مترتب جوڑا $(0, -7)$ ہے۔

-29 مترتب جوڑے $(-7, -3)$ کو کمپلیکس عدد میں ظاہر کریں۔

حل: $(-7, -3)$ کا کمپلیکس عدد $-7 - 3i$ ہے۔

### 1.3.1 کمپلیکس عدد کا کانجوگیٹ

-30 کمپلیکس عدد کے کانجوگیٹ کی تعریف کریں۔

جواب: کمپلیکس عدد $x + yi$ کا کانجوگیٹ کمپلیکس عدد $x - yi$ ہوتا ہے۔

z کے کمپلیکس کا کانجوگیٹ کو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

-31 کسی کمپلیکس عدد z کا کانجوگیٹ معلوم کرنے کا سادہ قانون کیا ہے؟

جواب: کسی کمپلیکس عدد z کا کانجوگیٹ معلوم کرنے کے لیے $i$ کو $-i$ میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $3 - 5i$ کا کانجوگیٹ $3 + 5i$ ہے۔

-32 $-4 + 4i$ کا کانجوگیٹ کیا ہے؟

جواب: دیا گیا ہے $\overline{-4 + 4i} = -4 - 4i$

پس، $-4 + 4i$ کا کانجوگیٹ $-4 - 4i$ ہے۔

### 1.3.3 کمپلیکس کانجوگیٹ کی خصوصیات

-33 اگر $z = 19 - 7i$ ہو تو ثابت کریں کہ $\bar{\bar{z}} = z$

حل:

$$z = 19 - 7i$$

$$\bar{z} = \overline{19 - 7i}$$

$$\bar{z} = 19 + 7i$$

$$\bar{\bar{z}} = \overline{19 + 7i}$$

$$\bar{\bar{z}} = 19 - 7i = z$$

پس ثابت ہوا کہ $\bar{\bar{z}} = z$

www.ilmkidunya.com

34- اگر $z_1 = 4 + 3i$ اور $z_2 = -5 - 7i$ ہو تو ثابت کریں کہ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

حل:

$z_1 = 4 + 3i \quad , z_2 = -5 - 7i$

$\overline{z_1} = 4 - 3i \quad , \overline{z_2} = -5 + 7i$

L.H.S

$z_1 + z_2 = (4 + 3i) + (-5 - 7i)$

$= 4 + 3i - 5 - 7i = -1 - 4i$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{-1 - 4i} = -1 + 4i$

R.H.S

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4 - 3i) + (-5 + 7i)$

$= 4 - 3i - 5 + 7i = -1 + 4i$

پس ثابت ہوا کہ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

35- اگر $z_1 = 11 - 4i$ اور $z_2 = -5 + 4i$ ہو تو $\overline{z_1 z_2}$ معلوم کریں۔

حل:

$z_1 z_2 = (11 - 4i)(-5 + 4i)$

$= 11(-5 + 4i) - 4i(-5 + 4i)$

$= -55 + 44i + 20i - 16i^2$

$= -55 + 64i - 16 \times (-1)$

$= -55 + 64i + 16 = -39 + 64i$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{-39 + 64i}$

$= -39 - 64i$

## 1.4.1 کمپلیکس عدد کے ماڈیولس کی خصوصیات

36- اگر $z = -3 + \sqrt{5}i$ ہو تو ثابت کریں کہ $|z| = |\overline{z}|$

حل:

$z = -3 + \sqrt{5}i$

$\overline{z} = -3 - \sqrt{5}i$

$|z| = |-3 + \sqrt{5}i| = \sqrt{(-3)^2 + (+\sqrt{5})^2}$

$= \sqrt{9 + 5} = \sqrt{14}$ ........(i)

$|\overline{z}| = |-3 - \sqrt{5}i| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{5})^2}$

$= \sqrt{9 + 5} = \sqrt{14}$ ........(ii)

پس (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $|z| = |\overline{z}|$