یونٹ
8

منطق (Logic)

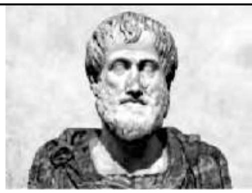
اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ریاضیاتی بیان اور اس کے ثبوت کو سمجھ سکیں۔
- کلیہ متعارفہ، قیاس اور مسئلے کے درمیان فرق واضح کر سکیں۔
- سادہ استخراجی ثبوتوں کو تشکیل دے سکیں۔[الجبرائی ثبوت جو یہ ظاہر کرنے کے لیے درکار ہوں کہ بائیں طرف برابر ہے دائیں طرف کے۔ مثلاً:
$[(x-3)^2+5=x^2-6x+14$

تعارف (Introduction)

منطق استدلال کا ایک منظم طریقہ ہے جو کسی کو بیانات کے معانی کی تشریح کرنے، ان کی سچائی کو جانچنے اور موجودہ حقائق سے نئی معلومات اخذ کرنے کے قابل بناتا ہے۔ منطق کسی مسئلہ کو حل کرنے اور فیصلہ سازی میں کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔ ہم عام طور پر اپنی روزمرہ زندگی میں ریاضی کے معاملات میں منطق کا استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم اکثر مشاہدات یا تجربات کی محدود تعداد سے عمومی نتائج اخذ کرتے ہیں۔ ایک شخص ایک یا دو مرتبہ پینسلین کا ٹیکہ لگواتا ہے اور جلد ہی اس کے بعد ردعمل محسوس کرتا ہے۔ وہ عمومی طور پر نتیجہ اخذ کرتا ہے کہ وہ پینسلین کے لیے حساس ہے۔ اس طریقے سے نتائج اخذ کرنے کو استقراء(induction) کہتے ہیں۔ استقرائی استدلال قدرتی علوم میں بہت مددگار ہے، جہاں ہمیں بار بار کے تجربات یا مشاہدات پر انحصار کرنا پڑتا ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ ہمارا زیادہ تر علم استقراء پر مبنی ہوتا ہے۔ کئی مواقع پر، ہمیں اس کے برعکس طریقہ اختیار کرنا پڑتا ہے۔ ہمیں مانے ہوئے یا معروف حقائق سے نتائج اخذ کرنے ہوتے

تاریخ



منطق کی تاریخ کا آغاز ارسطو سے ہوا، جنہیں رسمی منطق کا بانی تصور کیا جاتا ہے۔ انہوں نے استقرائی استدلال کا ایک نظام مرتب کیا جسے "قیاسی منطق کہا جاتا ہے، جو منطقی فکر کی بنیاد بنا۔ اس کے بعد اسٹوئک فلسفیوں نے تجویز منطق میں شراکت کی اور جسے منطقی تضاد کو دریافت کیا مثلاً Liar Paradox میں حصہ ڈالا اور مسائل پر تحقیق کی۔ قرونِ وسطیٰ کے دور میں پیٹر ایبلارڈ اور ولیم آف اوکھم جیسے سکالرز نے ارسطو کے کام کو وسعت دی اور معنیات اور نتائج کے نظریات متعارف کروائے۔ 19ویں صدی میں منطق نے جارج بول کے کام کے ذریعے ترقی پائی، جنہوں نے بولین الجبرا مرتب کیا، اور گوٹلوب فریگے نے جدید پیش گوئی منطق کو رسمی شکل دی۔ برٹرینڈ رسل اور الفریڈ نارتھ وائٹ ہیڈ نے اپنی اہم تصنیف پرنسپیا میتھمیٹیکا میں ریاضی کو منطق میں محدود کرنے کی کوشش کی۔ 20ویں صدی میں کرٹ گوڈل نے اپنے عدم تکمیل کے مسائل پیش کیے، جنہوں نے ریاضیاتی منطق کی تفہیم کو یکسر بدل دیا۔

Web version of PCTBtextbook

NOT FOR SALE-PESRP

ہیں۔ ہم اکثر وکلا یا ڈاکٹروں سے ان کی اچھی شہرت کی بنیاد پر مشورہ کرتے ہیں۔ اس قسم کے استدلال، یعنی ان مقدمات سے نتیجہ اخذ کرنا جو سچ مانے جاتے ہیں، کو استخراج کہتے ہیں۔ استخراج کی ایک عام مثال یہ ہے:

"تمام انسان فانی ہیں۔ ہم انسان ہیں۔ لہٰذا ہم بھی فانی ہیں۔" منطق کا مطالعہ کرنے کے لیے ہم بیان سے آغاز کرتے ہیں۔

8.1 بیان (Statement)

ایک جملہ یا ریاضیاتی عبارت جو درست یا غلط ہو سکتی ہے مگر دونوں نہیں ہو سکتے، کو بیان کہا جاتا ہے۔ یہ بات ریاضی اور دیگر سائنسی شعبوں میں درست ہے۔ مثال کے طور پر، بیان $a = b$ درست یا غلط ہو سکتا ہے۔ اسی طرح کوئی بھی طبعی یا کیمیائی نظریہ درست یا غلط ہو سکتا ہے۔ تاہم شماریاتی یا سماجی علوم میں بعض اوقات تمام بیانات کو دو باہمی خصوصی طبقات میں تقسیم کرنا ناممکن ہوتا ہے۔ کچھ بیانات مثال کے طور پر، فیصلہ کُن ہو سکتے ہیں۔ ہم ایک ریاضیاتی بیان کو معلومات کی اکائی کے طور پر سوچ سکتے ہیں جو یا تو درست ہے یا غلط۔

یہاں ہم ریاضیاتی بیانات کی کچھ مثالوں پر بات کرتے ہیں جو سب درست ہیں۔

(i) کسی غیر صفر حقیقی عدد x اور صحیح اعداد m اور n کے لیے، ہم لکھتے ہیں: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

(ii) مثلث کے اندرونی زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔

(iii) دائرے کا محیط جس کا رداس r ہو، $2\pi r$ کے برابر ہوتا ہے۔

(iv) $Q \subseteq R$ (ناطق اعداد کا سیٹ حقیقی اعداد کے سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔)

(v) $\frac{22}{7} \notin Q'$

(vi) دو طاق اعداد کا مجموعہ ایک جفت عدد ہوتا ہے۔

(vii) $x = 2$ اور $x = 3$ کے لیے $x^2 - 5x + 6 = 0$

مزید برآں ہم کچھ ریاضیاتی بیانات کی مثالوں پر تبادلہ خیال کرتے ہیں جو سب غلط ہیں۔

(i) $3 + 4 = 8$

(ii) $Z \subseteq W$

(iii) تمام مساوی الساقین مثلثیں مساوی الاضلاع مثلثیں ہوتی ہیں۔

(iv) کوئی بھی دو حقیقی اعداد کے درمیان کوئی حقیقی عدد نہیں ہوتا ہے۔

(v) $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{-1, -2, -3, -4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

(vi) اگر a اور b مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی ہیں، تو مستطیل کا رقبہ $\frac{1}{2}(a \times b)$ کے برابر ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(vii) کسی n-اضلاع والی کثیر الاضلاع کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ $(n-1)\times 180^\circ$ کے برابر ہوتا ہے۔

(viii) کسی بھی چوکور کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ 180° کے برابر ہوتا ہے۔

(ix) صحیح اعداد کا سیٹ متناہی ہوتا ہے۔

8.1.1 منطقی عمل کار (Logical Operators)

حروف p ، q وغیرہ بیانات کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیے جائیں گے۔ ذیل میں استعمال ہونے والی علامتوں کی ایک مختصر فہرست دی گئی ہے:

کیسے پڑھا جائے	علامتی جملے	کیسے پڑھا جائے	علامتیں
p نہیں p کی نفی	$\sim p$	نہیں	$\sim$
p اور q	$p \wedge q$	اور	$\wedge$
p یا q	$p \vee q$	یا	$\vee$
اگر p تب q p کا مطلب ہے q	$p \rightarrow q$	اگر . . . تب ,مطلب	$\rightarrow$
p صرف اور صرف q p برابر ہے q کے	$p \leftrightarrow q$	کے برابر ہے، صرف اور صرف	$\leftrightarrow$

8.1.2 علامات کے استعمال کی وضاحت (Explanation of the Use of the Symbols)

1۔ نفی (Negation)

جدول 1

p	$\sim p$
T	F
F	T

اگر p کوئی بھی بیان ہو تو اس کی نفی کو $\sim p$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جسے "p نہیں" پڑھا جاتا ہے۔ اس تعریف سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر p درست ہو تو $\sim p$ غلط ہو گا اور اگر p غلط ہو تو $\sim p$ درست ہو گا۔ p اور $\sim p$ کی ممکنہ صدق قیمتیں جدول 1 میں دی گئی ہیں جسے صدق جدول کہا جاتا ہے جہاں درست قیمت کو T سے ظاہر کیا جاتا ہے اور غلط قیمت کو F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

2۔ کنجکشن (Conjunction)

دو بیانات p اور q کے کنجکشن کو علامتی طور پر $p \wedge q$ (p اور q) لکھا جاتا ہے۔ کنجکشن کو صرف اس صورت میں درست سمجھا جاتا ہے جب دونوں بیانات درست ہوں۔ لہٰذا، $p \wedge q$ کی صدق قیمتیں جدول 2 میں دی گئی ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

جدول2

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال1: آیا کہ درج ذیل بیانات درست ہیں یا غلط۔

(i) لاہور پنجاب کا دارالحکومت ہے اور کوئٹہ بلوچستان کا دارالحکومت ہے۔

(ii) $4 < 5 \wedge 8 < 10$ (iii) $2+2=3 \wedge 6+6=10$

حل: واضح طور پر کنجکشن (i) اور (ii) درست ہیں جبکہ (iii) غلط ہے۔

3۔ ڈِس جنکشن (Disjunction)

جدول 3

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p اور q کے ڈِس جنکشن کو علامتی طور پر $p \vee q$ (p یا q) لکھا جاتا ہے۔ جب بیانات میں سے کم از کم ایک درست ہو تو ڈس جنکشن $p \vee q$ کو درست سمجھا جاتا ہے۔ جب یہ دونوں غلط ہوں تو ان کو غلط سمجھا جائے گا۔ $p \vee q$ کی صدق قیمتیں جدول 3 میں دی گئی ہیں۔

مثال 2: 10 ایک مثبت عدد ہے یا 0 ایک ناطق عدد ہے۔ اس ڈس جنکشن کی درست قیمت معلوم کریں۔

حل: چوں کہ دونوں بیانات درست ہیں، اس لیے ڈس جنکشن درست ہے۔

مثال 3: مثلث کے دو قائمۃ الزاویے ہو سکتے ہیں یا لاہور سندھ کا دارالحکومت ہے۔ اس ڈس جنکشن کی درست قیمت معلوم کریں۔

حل: دونوں بیانات غلط ہیں، ڈس جنکشن غلط ہے۔

4۔ استنباط یا مشروط (Implication or conditional)

جدول 4

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

اگر کوئی مرکب بیان اس صورت میں ہو کہ "اگر p ہو تو q" $(p \to q)$ جسے p مشروط q کے طور پر بھی لکھا جاتا ہے اسے استنباط یا مشروط بیان کہا جاتا ہے۔ p کو پیشرو یا مفروضہ کہا جاتا ہے اور q کو نتیجہ یا اختتام کہا جاتا ہے۔ ایک مشروط کو صرف اس وقت غلط سمجھا جاتا ہے جب مفروضہ درست ہو اور نتیجہ غلط ہو۔ دیگر تمام صورتوں میں مشروط کو درست سمجھا جاتا ہے۔ چنانچہ $p \to q$ کی صدق قیمتیں جدول 4 میں دی گئی ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

ہم ایک مثال کی مدد سے صورتحال کو واضح کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ مشروط جملے پر غور کریں:

اگر شخص A لاہور میں رہتا ہے، تو وہ پاکستان میں رہتا ہے۔

اگر پیشرو یا مفروضہ غلط ہو، یعنی A لاہور میں نہیں رہتا، تو وہ پھر بھی پاکستان میں رہ سکتا ہے۔ ہمارے پاس کوئی وجہ نہیں کہ یہ کہیں کہ وہ پاکستان میں نہیں رہتا۔ ہم اس لیے یہ نہیں کہہ سکتے کہ مشروطی جملہ غلط ہے۔ لہٰذا ہمیں اسے درست تصور کرنا ہو گا۔ اسی طرح، جب مشروطی جملے کا مفروضہ اور نتیجہ دونوں غلط ہوں، تو بیان کے ساتھ اختلاف کرنے کا کوئی جواز نہیں ہے۔

5۔ دوشرطی (Biconditional $p \leftrightarrow q$)

عبارت $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$ کو مختصراً $p \leftrightarrow q$ لکھا جاتا ہے اور اسے دوشرطی یا برابری کہتے ہیں۔ یہ "p صرف اور صرف q" کے طور پر پڑھا جاتا ہے، "iff" کا مطلب "صرف اور صرف" ہوتا ہے۔ ہم اس کا صدق جدول بناتے ہیں۔ جدول 5 سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ $p \leftrightarrow q$ صرف اس وقت درست ہوتا ہے جب دونوں بیانات p اور q درست ہوں یا دونوں بیانات p اور q غلط ہوں۔

جدول 5

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

6۔ ایک دیے گئے مشروط جملے سے متعلق مشروط جملے

(Conditionals related with a given conditional)

اگر p اور q بیانات ہوں اور $p \rightarrow q$ ایک دیا گیا مشروط ہو، تب

(i) $q \rightarrow p$ کو $p \rightarrow q$ کا اُلٹ کہا جاتا ہے۔

(ii) $\sim p \rightarrow \sim q$ کو $p \rightarrow q$ کا معکوس کہا جاتا ہے۔

(iii) $\sim q \rightarrow \sim p$ کو $p \rightarrow q$ کا ضد مثبت کہا جاتا ہے۔

ان نئے مشروط جملوں کی صدق قیمتیں نیچے جدول 6 میں دی گئی ہیں۔

جدول 6

				دیا گیا مشروط	الٹ	معکوس	ضد مثبت
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

جدول 6 سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ

(i) کوئی بھی مشروط اور اس کا ضد مثبت مساوی ہوتے ہیں اس لیے کسی بھی مسئلے کو اس کے ضد مثبت کو ثابت کر کے ثابت کیا جاسکتا ہے۔

(ii) اُلٹ اور معکوس ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

مثال 4: ثابت کریں کہ کسی بھی کائناتی سیٹ میں خالی سیٹ ϕ کسی بھی سیٹ A کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

حل: فرض کریں کہ U کائناتی سیٹ ہے۔ مشروط پر غور کریں

$$\forall x \in U, x \in \phi \rightarrow x \in A \qquad \ldots (i)$$

اس مشروط جملے کا مفروضہ غلط ہے کیوں کہ کوئی بھی $x \in U$ ϕ کا رکن نہیں ہے۔ لہٰذا یہ مشروط جملہ درست ہے۔

مثال 5: $[(p \rightarrow q) \wedge p]$ اور $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ کا صدق جدول بنائیں۔

حل: مطلوبہ صدق جدول 7 ذیل میں دیا گیا ہے۔

جدول 7

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

8.1.3 ریاضیاتی ثبوت (Mathematical Proof)

فرض کریں کہ فیاض جماعت نہم کا طالب علم ہے۔ ایک دن وہ شہر میں ٹریفک کی وجہ سے گھر دیر سے پہنچا۔ تاہم اس کے والد کو شک ہوا کہ فیاض اسکول نہیں گیا بلکہ اس نے دن کہیں اور گزارا۔ اپنے خدشات کو دور کرنے کے لیے اس کے والد نے پوچھا: "سچ بتاؤ؟ کیا تم آج اسکول گئے تھے؟" فیاض نے جواب دیا "جی ہاں، میں گیا تھا۔" پھر بھی شک میں مبتلا اس کے والد نے پوچھا: "تمہارے پاس کیا ثبوت ہے کہ تم اسکول گئے تھے؟" اپنے والد کو مطمئن کرنے کے لیے فیاض نے کہا کہ میرا ہم جماعت احمد میرے ساتھ اسکول گیا تھا اور آپ اس سے تصدیق کر سکتے ہیں۔ لیکن اس کے والد اس کی بات سے مطمئن نہیں ہوئے۔ اب وہ اپنے والد کے اس دعوے کو کیسے ثابت کرے گا کہ وہ اسکول گیا یا نہیں؟ اپنے والد کے اس دعوے کو دور کرنے کے لیے فیاض کو کچھ ثبوت پیش کرنا ہوگا جیسے کہ اس دن کی حاضری جو اسکول کے حاضری رجسٹر میں درج ہو یا اسکول کی سی سی ٹی وی فوٹیج جو یہ ثابت کرے کہ وہ واقعی اس دن اسکول میں موجود تھا۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

ایک اور صورت حال پر غور کریں آپ نے ایک موبائل فون خریدا ہے جس کی وارنٹی تقریباً ایک سال کی ہے۔ چند دن استعمال کرنے کے بعد آپ کا موبائل فون خراب ہو جاتا ہے تو آپ اسے موبائل کمپنی یا سروس فراہم کنندہ کے پاس لے جاتے ہیں۔ اگر آپ اپنے موبائل فون کی وارنٹی کا دعویٰ کرنا چاہتے ہیں تو گاہک کی خدمت کا نمائندہ آپ سے ثبوت طلب کرے گا۔ موبائل فون کی وارنٹی کا دعویٰ کرنے کے لیے آپ کو وارنٹی کارڈ بطور دستاویزی ثبوت کمپنی کے نمائندے کے سامنے پیش کرنا ہوگا۔ عام طور پر ہمیں اپنے روزمرہ کے معمولات میں بہت سے دعوؤں اور بیانات کو ثابت اور غلط ثابت کرنا پڑتا ہے۔ ریاضی میں ثبوت کسی بیان کی درستگی کی تصدیق فراہم کرتے ہیں جو ایک منطقی ترتیب کے ذریعے حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہیں۔

مثال 6: درج ذیل ریاضیاتی بیانات کو ثابت کریں۔

(a) اگر x ایک طاق عدد ہو تو x^2 بھی ایک طاق عدد ہوتا ہے۔

(b) دو طاق اعداد کا مجموعہ ایک جفت عدد ہوتا ہے۔

حل:

(a) فرض کریں کہ x ایک طاق عدد ہے۔ تو طاق عدد کی تعریف کے مطابق ہم x کو اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

$x = 2k + 1$، جہاں $k \in Z$

اب $x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

فرض کریں کہ $m = 2k^2 + 2k \in Z$

پس $\because$ $x^2 = 2m + 1$ جہاں $m \in Z$

اس لیے طاق عدد کی تعریف کی رو سے x^2 ایک طاق عدد ہے۔

> **نوٹ:**
> اگر x طاق ہو، تو اسے درج ذیل شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے:
> $x = 2k + 1$، جبکہ $k \in Z$

(b) فرض کریں کہ x اور y طاق اعداد ہیں۔ پھر طاق عدد کی تعریف کے مطابق، ہم x اور y کو اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں:

$x = 2k + 1$ اور $y = 2n + 1$ جب کہ $k, n \in Z$

اس لیے $x + y = (2k+1) + (2n+1)$

$= 2k + 2n + 1 + 1$

$= 2(k + n + 1) = 2m,$

جب کہ $k + n + 1 = m \in Z$

پس $x + y = 2m$ جہاں $m \in Z$

اس لیے جفت عدد کی تعریف کے مطابق $x + y$ ایک جفت عدد ہے۔

> **نوٹ:**
> اگر x ایک جفت صحیح عدد ہے تو x کو اس شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں: $x = 2k$ جبکہ $k \in Z$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال7: ثابت کریں کہ کوئی سے دو غیر خالی سیٹوں A اور B کے لیے، $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ثبوت: فرض کریں $x \in (A \cup B)'$

$$\Rightarrow x \notin (A \cup B)$$
$$\Rightarrow x \notin A \text{ اور } x \notin B$$
$$\Rightarrow x \in A' \text{ اور } x \in B'$$
$$\Rightarrow x \in A' \cap B'$$

لیکن $x \in (A \cup B)'$ ایک اختیاری رکن ہے

اس لیے $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$ ... (i)

اب فرض کریں $y \in A' \cap B'$

$$\Rightarrow y \in A' \text{ اور } y \in B'$$
$$\Rightarrow y \notin A \text{ اور } y \notin B$$
$$\Rightarrow y \notin (A \cup B)$$
$$\Rightarrow y \in (A \cup B)'$$

اس لیے $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$ ...(ii)

مساوات (i) اور (ii) سے ثابت ہوا۔

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

> **نوٹ:**
> سیٹ B، سیٹ A کا سب سیٹ ہوتا ہے اگر سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A کا رکن بھی ہو۔ ریاضیاتی طور پر، ہم اسے اس طرح لکھتے ہیں:
>
> $B \subseteq A$ اگر $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$

Web version of PCTB textbook

8.1.4 مسئلہ، قیاس اور اصول متعارفہ (Theorem, Conjecture and Axiom)

پچھلے یونٹس میں ہم نے ریاضیاتی بیانات اور ان کے متعلقہ ثبوتوں کو معلوم کیا ہے۔ اب ہم ایک مزید جدید درست تصور کی طرف بڑھیں گے جسے مسئلہ کہا جاتا ہے۔ مسئلہ (theorem) ایک ریاضیاتی بیان ہے جسے سابقہ معلوم کردہ حقائق کی بنیاد پر درست ثابت کیا گیا ہو۔ مثال کے طور پر، درج ذیل بیانات مسئلے ہیں:

(i) **مسئلہ:** چوکور شکل کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ $360°$ ہوتا ہے۔

(ii) **حساب کا بنیادی مسئلہ:** 1 سے بڑے ہر صحیح عدد کو اسے منفرد طور پر مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے جو جزو ضربی کی ترتیب تک ہوتا ہے۔

(iii) **فرمیٹ (Format) کا آخری مسئلہ:** ایسے کوئی تین مثبت صحیح اعداد a، b، c نہیں ہیں جو مساوات $a^n + b^n = c^n$ کو درست ثابت کریں جب کہ $n \in N$ اور $n > 2$ ہو۔

NOT FOR SALE-PESRP

ایک مشہور مسئلے کا نام 17 ویں صدی کے فرانسیسی ریاضی دان پیئر فرمیٹ (Pierre Fermat) کے نام پر رکھا گیا تھا۔ آیئے فرمیٹ کے آخری مسئلے کو n کی مخصوص قیمتوں کے لیے جانچیں اور دیکھیں کہ یہ کیسے لاگو ہوتا ہے۔ جب $n = 2$ ہو، تو بیان مختصر ہو کر $a^2 + b^2 = c^2$ بن جاتا ہے جس کے حل موجود ہیں۔ یہ مشہور فیثاغورث کا مسئلہ ہے۔ مثلاً، $3^2 + 4^2 = 5^2$ درست ہے کیوں کہ $9 + 16 = 25$۔

اب ہم $n = 3$ کے لیے اس بیان کا تجزیہ کرتے ہیں۔ بیان بن جاتا ہے $a^3 + b^3 = c^3$ ۔

صدیوں کی تلاش کے باوجود ایسا کوئی صحیح عدد حل کے طور پر نہیں مل سکا اور وائلز کا ثبوت اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ ایسا کوئی عددی حل موجود نہیں ہے۔ مثال کے طور پر، $5^3 \neq 4^3 + 3^3$ کیوں کہ $125 \neq 91$ فرمیٹ نے دعویٰ کیا تھا کہ وہ اس مسئلے کو ثابت کر سکتے ہیں، لیکن دیکھیں کہ اس کی کتاب کا حاشیہ اس طرح کی معنی خیز وضاحت کے لیے بہت قلیل تھا۔ اپنے دعوے کے باوجود، بہت سے ریاضی دانوں کو اس مسئلے کو صدیوں تک ثابت کرنا مشکل لگا۔ یہ مسئلہ 350 سال سے زیادہ عرصے تک بغیر ثابت کیے باقی رہا اور ریاضی کے سب سے مشہور مسائل میں سے ایک بن گیا۔ 1993 میں، اینڈریو وائلز (Andrew Wiles) نے پرنسٹن یونیورسٹی سے اعلان کیا کہ وہ سات سال سے زیادہ عرصے تک کام کرنے کے بعد اس کا ثبوت پیش کر رہے ہیں، جو سینکڑوں صفحات پر مشتمل تھا۔ یہ واضح کرتا ہے کہ کچھ حقائق پر مبنی بیانات فوری طور پر واضح نہیں ہوتے ہیں۔

قیاس (Conjecture): قیاس ایک ریاضیاتی بیان یا مفروضہ ہوتا ہے جو مشاہدات کی بنیاد پر درست مانا جاتا ہے لیکن ابھی تک اس کا ثبوت فراہم نہیں کیا گیا۔ ریاضی میں، قیاسات اکثر مفروضوں کے طور پر کام کرتے ہیں اور اگر کوئی قیاس کو درست ثابت کر دیا جائے تو وہ مسئلہ بن جاتا ہے۔ اس کے برعکس، اگر ایسا ثبوت مل جائے جو اسے غلط ثابت کرے، تو یہ قیاس غلط ثابت ہو جاتا ہے۔

یہاں ایک اور معروف بیان پیش کیا جا رہا ہے جس نے اتنی شہرت حاصل کی کہ اسے ایک شناخت کے طور پر نام دیا گیا۔ اسے پہلی بار اٹھارہویں صدی میں ایک جرمن ریاضی دان کرسچین گولڈباچ (Christian Goldbach) نے پیش کیا اور یہ قیاس گولڈباچ کے نام سے جانا جاتا ہے۔ گولڈباچ کا قیاس یہ بیان کرتا ہے کہ:

بیان (Statement): 2 سے بڑا ہر صحیح جفت عدد، دو مفرد اعداد کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

ہمیں اس بات پر اتفاق کرنا ہو گا کہ یہ قیاس یا تو درست ہے یا غلط۔ تجرباتی شواہد کی بنیاد پر یہ درست معلوم ہوتا ہے، کیوں کہ بہت سے جفت اعداد جو 2 سے بڑے ہیں، واقعی دو مفرد اعداد کے مجموعے کے طور پر لکھے جا سکتے ہیں: مثلاً $2 + 2 = 4$ ، $3 + 3 = 6$ ، $7 + 5 = 12$ اور دیگر۔ تاہم اس بات کا امکان موجود ہے کہ کوئی بڑا جفت عدد ایسا ہو جو دو مفرد اعداد کے مجموعے کے طور پر ظاہر نہ کیا جا سکے۔ اگر ایسا کوئی عدد پایا جاتا ہے تو یہ قیاس غلط ثابت ہو جائے گا۔ گولڈباچ نے یہ مسئلہ تقریباً 260 سال پہلے پیش کیا تھا اور تب سے اب تک کی گئی وسیع کوششوں کے باوجود اس قیاس کو درست یا غلط ثابت کرنے کے لیے کوئی ثبوت نہیں ملا۔

بہر حال، قیاس ایک معتبر ریاضیاتی بیان ہے کیوں کہ یہ یا تو درست ہوتا ہے یا غلط۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

ریاضی میں ہمیں اکثر ایسی صورتحال کا سامنا کرنا پڑتا ہے جہاں کسی دیے گئے بیان کو بغیر ثابت کیے اس کی سچائی کا تعین کرنا ضروری ہوتا ہے۔ اگلے مرحلے میں ہم اسی بیان کا مطالعہ کریں گے جسے اصول متعارفہ کہتے ہیں۔

ایک اصول متعارفہ ایک ریاضیاتی بیان ہے جسے ہم بغیر کسی ثبوت یا دلیل کے درست مانتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں یہ بیانات بنیادی حقائق ہیں جو مزید خیالات کے لیے نقطہ آغاز فراہم کرتے ہیں اور روزمرہ کے تجربات پر مبنی ہوتے ہیں۔ مزید برآں ان بیانات کے خلاف کوئی ثبوت موجود نہیں ہوتا۔ مثال کے طور پر، درج ذیل اصول متعارفہ کے بیانات ہیں۔

اصول متعارفہ: کسی دیے گئے نقطہ سے لامحدود خطوط گزر سکتے ہیں۔

اقلیدس کا اصول متعارفہ: کوئی سے بھی دو نقاط سے صرف ایک خط کھینچا جا سکتا ہے۔

پیانو کا کلیہ متعارفہ: ہر قدرتی عدد کا ایک جانشین ہوتا ہے جو خود بھی ایک قدرتی عدد ہوتا ہے۔

ایکسٹینالٹی کا اصول متعارفہ: دو سیٹ برابر ہوتے ہیں اگر ان میں ایک جیسے ارکان ہوں۔

قوت سیٹ کا اصول متعارفہ: کسی بھی سیٹ میں تمام تحتی سیٹوں کا ایک سیٹ موجود ہوتا ہے۔

درج بالا مثال پر غور کرنے سے ہمیں معلوم ہو گا کہ ان بیانات کو ثابت کرنے کی ضرورت نہیں ہے مثال کے طور پر ہمارا وجدان تسلیم کرتا ہے کہ لامحدود خطوط ایک نقطہ سے گزر سکتے ہیں، اس لیے اسے ثابت کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

اصول متعارفہ کو کبھی کبھار اصول موضوعہ بھی کہا جاتا ہے۔ دونوں اصول متعارفہ اور اصول موضوعہ ایسے بیانات کو بیان کرتے ہیں جنھیں بغیر کسی ثبوت کے سچ سمجھا جاتا ہے۔ تاہم اصول موضوعہ خاص طور پر جیومیٹری سے متعلق ہوتے ہیں جب کہ اصول متعارفہ وسیع تر ریاضیاتی سیاق وسباق سے تعلق رکھتے ہیں۔ اگلے مرحلے میں ہم ایک مسئلے کے بیان کو ثابت کرنے جا رہے ہیں۔

مثال 8: ثابت کریں کہ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ جبکہ a، b، c اور d غیر صفر حقیقی اعداد ہیں۔

حل :

$$\text{L.H.S} = \frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times 1+\frac{c}{d}\times 1 \quad \text{(ضربی ذاتی عنصر)}$$

$$= \frac{a}{b}\times\left(d\times\frac{1}{d}\right)+\frac{c}{d}\times\left(b\times\frac{1}{b}\right) \quad \text{(ضربی معکوس)}$$

$$= \frac{a}{b}\times\frac{d}{d}+\frac{c}{d}\times\frac{b}{b} \quad \left(\because\ a\times\frac{1}{b}=\frac{a}{b}\right)$$

$$= \frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db} \quad \left(\because\ \frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\right)$$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

$$= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \qquad (\because \text{حقیقی عدد کی خاصیت مبادلہ } ab = ba)$$

$$= ad \times \frac{1}{bd} + bc \times \frac{1}{bd} \qquad \left(\because \quad a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}\right)$$

$$= (ad + bc).\frac{1}{bd} \qquad \text{(خاصیت تقسیمی)}$$

$$= \frac{(ad + bc)}{bd} = \text{R.H.S}$$

اس لیے $\Rightarrow \quad \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

پس ثابت ہوا۔ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

8.1.5 استخراجی ثبوت (Deductive Proof)

جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا تھا کہ استخراجی طریقہ استدلال ایک ایسا طریقہ ہے جس کے ذریعے ایسے مقدمات سے نتائج اخذ کیے جاتے ہیں جو درست سمجھے جاتے ہیں۔ اگر مقدمات درست ہوں تو نتیجہ بھی لازمی طور پر درست ہو گا۔ مثال کے طور پر تمام انسانوں کو زندہ رہنے کے لیے سانس لینے کی ضرورت ہوتی ہے۔ احمد ایک انسان ہے۔ لہٰذا احمد بھی زندہ رہنے کے لیے سانس لے رہا ہے۔

اسی طرح ریاضی میں الجبری جملوں کے استخراجی ثبوت ایک طریقہ ہے جس کے ذریعے کسی ریاضیاتی بیان کی درستی کو معلوم اصولوں، مسئلوں اور اصول متعارفہ یا پہلے سے ثابت شدہ بیانات پر مبنی منطقی استدلال کے ذریعے ثابت کیا جاتا ہے۔ استخراجی طریقہ استدلال الجبرا میں عمومی طور پر مطابقت کی تصدیق اور مساواتوں کو حل کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال 9: ثابت کریں $(x + 1)^2 + 7 = x^2 + 2x + 8$

حل: ثبوت:

$$\text{L.H.S} = (x + 1)^2 + 7$$

$$= (x + 1)(x + 1) + 7 \qquad (\because x^m . x^n = x^{m+n})$$

$$= x.(x + 1) + 1.(x + 1) + 7 \qquad \text{(دائیں خاصیت تقسیمی)}$$

$$= x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1 + 7 \qquad \text{(دائیں خاصیت تقسیمی)}$$

$$= x^2 + 1 \cdot x + 1 \cdot x + 1 + 7 \qquad (\because \text{خاصیت مبادلہ اور } x^m . x^n = x^{m+n})$$

$$= x^2 + (1 + 1)x + 8 \qquad \text{(بائیں خاصیت تقسیمی)}$$

$$= x^2 + 2x + 8$$

$$= \text{R.H.S}$$

اس لیے $\Rightarrow \quad \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

پس ثابت ہوا۔ $(x + 1)^2 + 7 = x^2 + 2x + 8$

مثال 10: ہر مرحلے کا جواز پیش کر کے ثابت کریں کہ $\frac{45x + 15}{15} = 3x + 1$

NOT FOR SALE-PESRP

حل: ثبوت:

$$\text{L.H.S} = \frac{45x+15}{15}$$

$$= \frac{1}{15}\times(45x+15) \qquad \left(\because \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{b}\times a\right)$$

$$= \frac{1}{15}\times(15\times 3x + 15\times 1)$$ (∵ ضربی ذاتی عنصر)

$$= \frac{1}{15}\times 15(3x+1)$$ (∵ خاصیت تقسیمی)

$$= \left(\frac{1}{15}\times 15\right)\cdot(3x+1)$$ (∵ خاصیتِ تلازم)

$$= 1\cdot(3x+1)$$ (∵ ضربی معکوس)

$$= 3x+1 = \text{R.H.S}$$ (∵ ضربی ذاتی عنصر)

$$\Rightarrow \quad \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

$$\frac{45x+15}{15} = 3x+1$$ پس ثابت ہوا۔

مشق 8

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) درج ذیل میں سے کون سا بیان اکثر استقرائی استدلال سے متعلق ہوتا ہے؟

(a) بار بار کیے گئے تجربات پر مبنی (b) اگر اور صرف اگر کے بیانات
(c) بیان کو ایک مسئلے کے ذریعے ثابت کیا گیا ہو (d) عمومی اصولوں پر مبنی

(ii) درج ذیل میں سے کون سا جملہ استخراجی استدلال کی وضاحت کرتا ہے؟

(a) محدود مشاہدات سے عمومی نتائج (b) بار بار کیے گئے تجربات پر مبنی
(c) معلومات کی اکائیوں پر مبنی جو درست ہوں (d) معروف حقائق سے نتیجہ اخذ کرنا

(iii) درج ذیل میں سے کون سا بیان درست ہے؟

(a) صحیح اعداد کا سیٹ متناہی ہوتا ہے۔

(b) کسی بھی چوکور کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ 180° ہوتا ہے۔

(c) $\frac{22}{7} \notin Q'$

(d) تمام مساوی الاضلاع مثلثیں مساوی الساقین مثلثیں ہوتی ہیں۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

(iv) "چولہا جل رہا ہے" کے بیان کی نفی کے لیے درج ذیل میں سے کون سا بیان بہترین ہے؟

(a) چولہا نہیں جل رہا ہے　(b) چولہا مدھم ہے

(c) چولہا ہلکی آنچ پر بدل جاتا ہے　(d) یہ جل رہا ہے اور نہیں جل رہا ہے

(v) دونوں بیانات p اور q کا کنجکشن اس وقت درست ہوتا ہے جب:

(a) p اور q دونوں غلط ہوں　(b) p اور q دونوں درست ہوں

(c) صرف q درست ہو　(d) صرف p درست ہو

(vi) ایک مشروط کو صرف اس صورت میں غلط سمجھا جاتا ہے جب:

(a) مفروضہ درست ہو اور نتیجہ غلط ہو　(b) نتیجہ درست ہو اور مفروضہ غلط ہو

(c) صرف مفروضہ درست ہو　(d) صرف نتیجہ غلط ہو

(vii) $q \to p$ کا ضد مثبت برابر ہے:

(a) $q \to \sim p$　(b) $\sim q \to p$

(c) $\sim p \to \sim q$　(d) $\sim q \to \sim p$

(viii) بیان "2 سے بڑا ہر صحیح عدد دو مفرد اعداد کا مجموعہ ہے" یہ ہے:

(a) مسئلہ　(b) قیاس

(c) اصول متعارفہ　(d) اصول موضوعہ

(ix) بیان "کسی بھی دو نقاط سے ایک خط کھینچا جا سکتا ہے" یہ ہے:

(a) مسئلہ　(b) قیاس

(c) اصول متعارفہ　(d) منطق

(x) بیان "ایک مثلث کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے" یہ ہے:

(a) اُلٹ　(b) مسئلہ

(c) اصول متعارفہ　(d) مشروط

2۔ درج ذیل مشروط کے اُلٹ، معکوس اور ضد مثبت لکھیے۔

(i) $\sim p \to q$　(ii) $q \to p$　(iii) $\sim p \to \sim q$　(iv) $\sim q \to \sim p$

3۔ درج ذیل کا صدق جدول لکھیں۔

(i) $\sim(p \vee q) \vee (\sim q)$　(ii) $\sim(\sim q \vee \sim p)$　(iii) $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

4۔ ایک ریاضیاتی بیان اور اس کے ثبوت میں فرق واضح کریں۔ دو مثالیں دیجیے۔

5۔ ایک مسئلہ اور اصول متعارفہ میں کیا فرق ہے؟ ہر ایک کی مثالیں دیجیے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

6۔ ریاضیاتی ثبوتوں میں منطقی استدلال کی اہمیت کیا ہے؟ اپنی بات کو واضح کرنے کے لیے ایک مثال دیجیے۔

7۔ یہ بتائیں کہ آیا دیے گئے بیان ایک اصول متعارفہ، قیاس یا مسئلہ ہیں اور اپنی دلیل کی وضاحت کریں۔

(i) کوئی سے دو نقاط میں سے صرف ایک خط گزرتا ہے۔

(ii) ہر جفت عدد 2 سے بڑے دو مفرد اعداد کے مجموعے کے طور پر لکھا جاسکتا ہے۔

(iii) مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

8۔ درج ذیل الجبری جملوں کے لیے سادہ استخراجی ثبوتوں کو وضع کریں اور ثابت کریں کہ بائیں طرف برابر ہے دائیں طرف کے:

(i) ثابت کریں کہ $(x-4)^2+9=x^2-8x+25$

(ii) ثابت کریں کہ $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$

(ii) ثابت کریں کہ $(x+5)^2-(x-5)^2=20x$

9۔ ہر مرحلے کی وضاحت کرتے ہوئے درج ذیل کو ثابت کریں۔

(i) $\dfrac{4+16x}{4}=1+4x$ (ii) $\dfrac{6x^2+18x}{3x^2-27}=\dfrac{2x}{x-3}$

(iii) $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-3x-10}=\dfrac{x+5}{x-5}$

10۔ فرض کریں کہ x ایک صحیح عدد ہے۔ اگر x ایک طاق عدد ہو تو $9x+4$ ایک طاق عدد ہو گا۔

11۔ فرض کریں کہ x ایک صحیح عدد ہے۔ اگر x ایک طاق عدد ہو تو $7x+5$ ایک جفت عدد ہو گا۔

12۔ درج ذیل بیانات کو ثابت کریں۔

(i) اگر x ایک طاق صحیح عدد ہو تو ثابت کریں کہ x^2-4x+6 ایک طاق عدد ہے۔

(ii) اگر x ایک جفت صحیح عدد ہو تو ثابت کریں کہ x^2+2x+4 ایک جفت عدد ہے۔

13۔ ثابت کریں کہ کوئی سے بھی دو غیر خالی سیٹوں A اور B کے لیے، $(A\cap B)' = A'\cup B'$

14۔ اگر x اور y مثبت حقیقی اعداد ہوں اور $x^2<y^2$ ہو تو $x<y$

15۔ ثابت کریں کہ مثلث کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

16۔ اگر a، b اور c غیر صفر حقیقی اعداد ہوں تو ثابت کریں کہ:

(i) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$ (ii) $\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$ (iii) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP