یونٹ 7

محدداتی جیومیٹری (Coordinate Geometry)

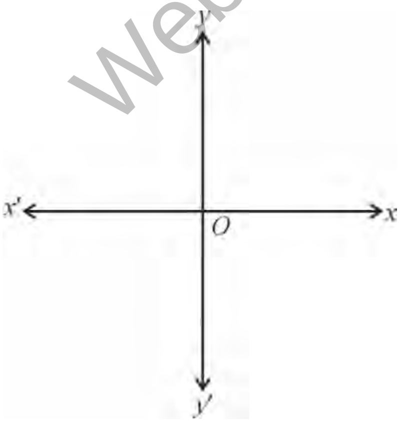
اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- محدداتی مستوی میں دو نقاط کی پوزیشن کا پتہ لگا کر فاصلے کا کلیہ اخذ کر سکیں۔
- قطعہ خط کا وسطی نقطہ معلوم کر سکیں۔
- جب دو نقاط کے محددات دیے گئے ہوں تو خط مستقیم کی ڈھلوان معلوم کر سکیں۔
- $y = mx + c$ کی شکل میں خط مستقیم کی مساوات معلوم کر سکیں۔ عمودی اور متوازی خطوط کی ڈھلوان معلوم کر سکیں۔
- حقیقی زندگی کے مسائل جیسے جسمانی پیمائش یا مقامات کے درمیان فاصلے کو معلوم کرنے کے لیے فاصلہ اور وسطی نقطہ کے کلیوں کا اطلاق کر سکیں۔
- محدداتی جیومیٹری کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل (جیسا کہ ہوابازی اور نیویگیشن، لینڈ سکیپنگ، نقشہ پڑھنا، طول بلد اور عرض بلد) میں اطلاق کر سکیں۔
- خط مستقیم کی مساوات اخذ کر سکیں:
  - نقطہ ڈھلوان شکل
  - ڈھلوان قاطع شکل
  - دو نقاطی شکل
  - قاطع شکل
  - سمیٹرک شکل
  - عام شکل
- اظہار کر سکیں کہ دو متغیرات میں یک درجی مساوات ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے اور خط مستقیم کی مساوات کی عمومی شکل کو دیگر معیاری صورتوں میں تبدیل کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

جیومیٹری ریاضی کی قدیم ترین شاخوں میں سے ایک ہے۔ یونانیوں نے چار صدی قبل مسیح میں منظم طریقے سے اس کا مطالعہ کیا۔ اسکولوں میں پڑھائی جانے والی زیادہ تر جیومیٹری یوکلڈ کی وجہ سے ہے جس نے اس موضوع پر 300 قبل مسیح میں تیرہ کُتب کی توضیح کی۔ ایک فرانسیسی فلسفی اور ریاضی دان رینے ڈیکارٹس (1596 تا 1650 عیسوی) نے جیومیٹری میں الجبری طریقے متعارف کروائے جس نے تجزیاتی جیومیٹری (یا محدداتی جیومیٹری) کو جنم دیا۔ ہمارا مقصد اس کتاب میں مضمون کی بنیادی باتیں پیش کرنا ہے۔

7.1 محدداتی مستوی (Coordinate Plane)



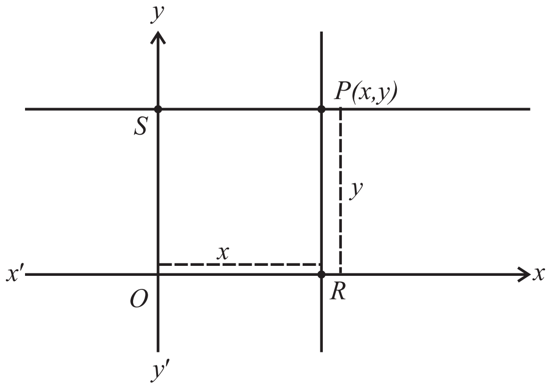
مستوی میں دو باہم عمودی خطوط مستقیم، ایک افقی اور دوسرا عمودی، xx' اور yy' کھینچیں۔ فرض کریں کہ دونوں خطوط مستقیم جس نقطہ پر ملتے ہیں اس کو مبدا کہتے ہیں اور O سے ظاہر کرتے ہیں۔ دونوں خطوط مستقیم کو محدداتی محور کہا جاتا ہے۔ افقی خط مستقیم $x'Ox$ کو x- محور اور عمودی خط مستقیم $y'Oy$ کو y- محور کہا جاتا ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

اہم معلومات:

کارتیسی محدداتی نظام یا مستطیلی محدداتی نظام کو فرانسیسی ریاضی دان رینے ڈیکارٹس نے متعارف کرایا تھا۔ جب اس نے اپنے بستر پر لیٹے ہوئے چھت پر باہم عمودی شہتیروں کے ساتھ رینگنے والی مکھی کے راستے کو بیان کرنے کی کوشش کی۔ کارتیسی محدداتی نظام نے الجبرا اور جیومیٹری کے درمیان ایک ربط پیدا کیا۔ جیومیٹری کی اشکال کو اب ان نقاط کے محددات کا استعمال کرتے ہوئے الجبری طور پر بیان کیا جاسکتا ہے جو اشکال بناتے ہیں۔

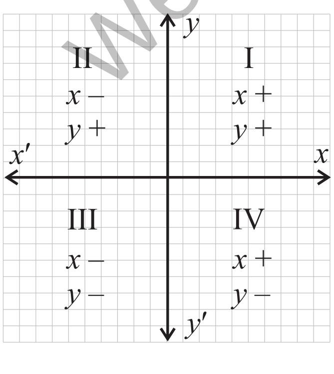


ایسے نقاط جو Ox پر واقع ہوں وہ مثبت اور جو نقاط Ox' پر واقع ہوں وہ منفی ہوتے ہیں۔

ایسے نقاط جو Oy پر واقع ہوں وہ مثبت اور جو نقاط Oy' پر واقع ہوں وہ منفی ہوتے ہیں۔

فرض کریں کہ مستوی میں کوئی بھی نقطہ P ہے۔ پھر حقیقی اعداد کے مترتب جوڑے کا استعمال کرکے P کو معلوم کیا جاسکتا ہے۔ P کے ذریعے محدداتی محوروں کے متوازی خطوط کھینچیں جو x- محور کو R اور y- محور کو S پر ملتے ہیں۔ فرض کریں کہ $\overline{OR} = x$ اور $\overline{OS} = y$ مترتب جوڑا (x, y) ہمیں نقطہ P کو معلوم کرنے کے لیے کافی معلومات فراہم کرتا ہے اور اس کے محددات (x, y) ہیں۔ مترتب جوڑے (x, y) کے پہلے جزو کو x- محدد یا ایبسیسا (Abscissa) اور دوسرے جزو کو y- محدد یا آرڈینیٹ (Ordinate) کہا جاتا ہے۔ اس مہارت کا اُلٹ بھی مستوی میں ایک نقطہ کو حقیقی اعداد کے کسی بھی مترتب جوڑے (x, y) کے ساتھ منسلک کرنے کا طریقہ فراہم کرتا ہے۔۔ ون ٹو ون انداز میں جوڑا بنانے کے اس طریقے کو حقیقی اعداد کے مترتب جوڑے کے ساتھ ایک مستوی میں نقاط کو دورُخی مستطیلی (یا کارتیسی) محدداتی نظام کہا جاتا ہے۔

محدداتی محور مستوی کو جن چار برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اسے ربع کہتے ہیں۔ ان کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے:



پہلا ربع (I) : تمام نقاط (x, y) جن میں x اور y دونوں مثبت ہوں۔

دوسرا ربع (II) : تمام نقاط (x, y) جن میں x منفی اور y مثبت ہو۔

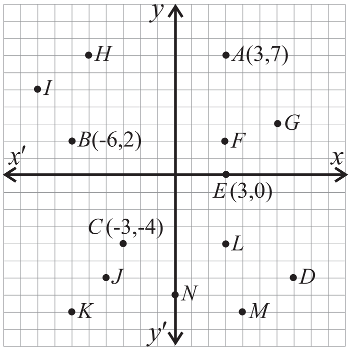
تیسرا ربع (III) : تمام نقاط (x, y) جن میں x اور y دونوں منفی ہوں۔

چوتھا ربع (IV) : تمام نقاط (x, y) جن میں x مثبت اور y منفی ہو۔

مستوی میں نقطہ P جس مترتب جوڑے (x, y) سے مطابقت رکھتا ہے اسے گراف کہتے ہیں۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook



اس طرح دیے گئے حقیقی اعداد کے مترتب جوڑوں کا ایک سیٹ مستوی کے تمام نقاط کے سیٹ کا گراف ہوتا ہے جو سیٹ کے مترتب جوڑوں کے مساوی ہوتا ہے۔

آپ کو جاننا چاہیے!

x- محور پر نقاط $(a, 0)$ کی شکل کے ہوتے ہیں اور y- محور پر نقاط $(0, b)$ کی شکل کے ہوتے ہیں۔

چیلنج!

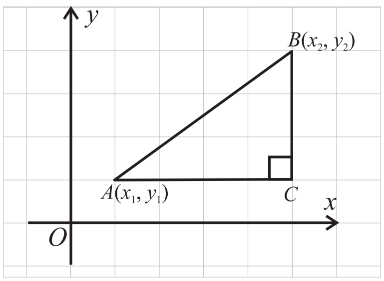
(i) ان نقاط کے محددات لکھیے جن کا متصل شکل میں ذکر نہیں کیا گیا ہے۔

(ii) ظاہر کریں $(-4, 7)$، $(2, 2)$، $(0, -1)$ اور $(-3, -3)$

نوٹ: $|\overline{AB}|$ کا مطلب $m\overline{AB}$ ہے۔

7.1.1 فاصلے کا کلیہ (The Distance Formula)

فرض کریں کہ $A\ (x_1, y_1)$ اور $B\ (x_2, y_2)$ مستوی میں دو نقاط ہیں۔ فاصلہ $d = |\overline{AB}|$ معلوم کرنے کے لیے ہم نقطہ A سے نقطہ C تک ایک افقی خط کھینچتے ہیں جو B کے نیچے واقع ہے اور ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC بناتا ہے۔



$$|\overline{AC}| = |x_2 - x_1| \quad \text{اور} \quad |\overline{BC}| = |y_2 - y_1|$$

مسئلہ فیثا غورث کا استعمال کرتے ہوئے

$$d^2 = |\overline{AB}|^2 = |\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

یا

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \ldots(i)$$

فاصلے کو ہمیشہ مثبت لیا جاتا ہے۔ یہ A سے B تک کا براہ راست فاصلہ نہیں ہے۔

اگر A اور B محدداتی محوروں میں سے کسی ایک کے متوازی خط پر واقع ہوں تو کلیہ (i) کے ذریعے $\overrightarrow{AB}$ کا براہ راست فاصلہ $\overrightarrow{AB}$ کی مطلق قدر ہوتا ہے۔ کلیہ (i) ظاہر کرتا ہے کہ دو نقاط میں سے کسی کو بھی پہلے نقطہ کے طور پر لیا جا سکتا ہے۔

مثال 1: دیے گئے نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کریں:

(i) $A(5, 6)$ ، $B(5, -2)$ (ii) $C(-4, -2)$ ، $D(0, 9)$

حل: فاصلے کے کلیہ کی مدد سے

(i)

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(5-5)^2 + (-2-6)^2}$$

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(0)^2 + (-8)^2}$$

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{0+64} = 8$$

(ii)

$$d = |\overline{CD}| = \sqrt{(0-(-4))^2 + (9-(-2))^2}$$

$$d = |\overline{CD}| = \sqrt{(0+4)^2 + (9+2)^2}$$

$$d = |\overline{CD}| = \sqrt{4^2 + 11^2}$$

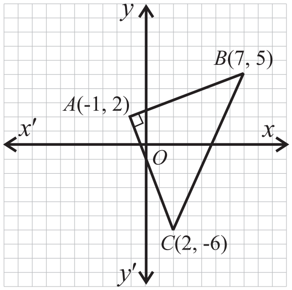
$$d = |\overline{CD}| = \sqrt{16+121} = \sqrt{137}$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 2: ثابت کریں کہ نقاط $A(-1, 2)$، $B(7, 5)$ اور $C(2, -6)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

حل: فرض کریں کہ a، b اور c بالترتیب اضلاع $\overline{BC}$ ، $\overline{CA}$ اور $\overline{AB}$ کی لمبائیاں ہیں۔



فاصلہ کے کلیہ کی مدد سے

$$c = |\overline{AB}| = \sqrt{(7-(-1))^2 + (5-2)^2} = \sqrt{73}$$

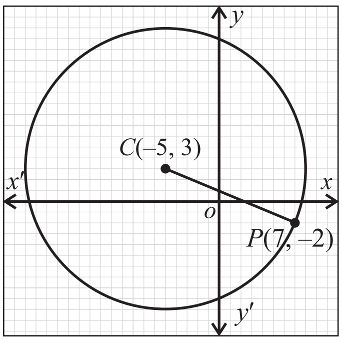
$$a = |\overline{BC}| = \sqrt{(2-7)^2 + (-6-5)^2} = \sqrt{146}$$

$$b = |\overline{CA}| = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{73}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

اس لیے ABC ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس کا قائمہ زاویہ A پر ہے۔

مثال 3: نقطہ $C(-5, 3)$ دائرہ کا مرکز اور $P(7, -2)$ دائرہ پر واقع ہے۔ دائرہ کا رداس معلوم کریں۔



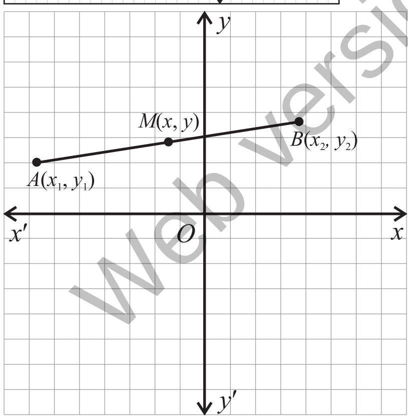
حل: دائرہ کا رداس نقطہ C سے P تک کا فاصلہ ہے۔ فاصلہ کے کلیہ سے

$$\text{رداس} = |\overline{CP}| = \sqrt{(7-(-5))^2 + (-2-3)^2}$$

$$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169}$$

$$= 13$$

7.1.2 وسطی نقطہ معلوم کرنے کا کلیہ (Mid Point Formula)



وسطی نقطہ کا کلیہ جیومیٹری میں مستوی میں دو دیے گئے نقاط کے درمیان وسطی نقطہ معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ یہ کلیہ خاص طور پر اس وقت مفید ہوتا ہے جب آپ کو قطعہ خط کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنے کی ضرورت ہو۔

وسطی نقطہ کا کلیہ اخذ کرنا

فرض کریں کہ دو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ دو رُخی مستوی پر واقع ہیں۔ ان دو نقاط سے بننے والے قطعہ خط میں ایک وسطی نقطہ $M(x, y)$ ہے، جہاں x اور y وسطی نقطہ کے محددات ہیں۔

$M(x, y)$ کے کلیہ کو اخذ کرنے کے لیے ہمیں نقاط A اور B کے x- محدد اور y- محدد کی اوسط الگ الگ معلوم کرنی ہوگی۔

Web version of PCTB textbook

1۔ وسطی نقطہ کا x - محدد

وسطی نقطہ کا x- محدد نقاط A اور B کے x- محددات کا اوسط ہوتا ہے۔

یعنی کہ $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

2۔ وسطی نقطہ کا y - محدد

وسطی نقطہ کا y- محدد نقاط A اور B کے y- محددات کا اوسط ہوتا ہے۔

یعنی کہ $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

پس وسطی نقطہ $M(x, y)$ کے محددات یہ ہیں:

$$M(x,\ y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مثال 4: $A(2, 3)$ اور $B(8, 7)$ کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ معلوم کریں۔

حل: وسطی نقطہ کلیہ کی مدد سے

$$M(x,\ y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

وسطی نقطہ کلیہ میں درج کرنے سے $x_1 = 2$ ، $x_2 = 8$ ، $y_1 = 3$ اور $y_2 = 7$

$$M = \left(\frac{2+8}{2},\ \frac{3+7}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{10}{2},\ \frac{10}{2}\right) = (5,\ 5)$$

مشق 7.1

1۔ نقاط $P(x, y)$ کے مستوی میں مقام کی وضاحت کریں، جس کے لیے:

(i) $x > 0$ (ii) $x > 0$ اور $y > 0$ (iii) $x = 0$ (iv) $y = 0$

(v) $x > 0$ اور $y \leq 0$ (vi) $x = 0$ ، $y = 0$ (vii) $x = y$

(viii) $x \geq 3$ (ix) $y > 0$ (x) x اور y کی مخالف علامتیں ہیں

2۔ درج ذیل نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کریں:

(i) $A(6, 7)$ ، $B(0, -2)$ (ii) $C(-5, -2)$ ، $D(3, 2)$

(iii) $L(0, 3)$ ، $M(-2, -4)$ (iv) $P(-8, -7)$ ، $Q(0, 0)$

3۔ درج ذیل میں معلوم کریں:

(i) دیے گئے دو نقاط کے درمیان فاصلہ

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

(ii)　دو نقاط کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ

(a) $A(3, 1)$ ، $B(-2, -4)$　　　(b) $A(-8, 3)$ ، $B(2, -1)$

(c) $A\left(-\sqrt{5}, -\frac{1}{3}\right)$ ، $B\left(-3\sqrt{5}, 5\right)$

4۔　درج ذیل نقاط میں سے کون سے مبدا سے 15 اکائیوں کے فاصلہ پر ہیں؟

(i) $(\sqrt{176}, 7)$　　(ii) $(10, -10)$　　(iii) $(1, 15)$

5۔　ثابت کیجیے کہ:

(i)　نقاط $A(0, 2)$ ، $B(\sqrt{3}, 1)$ اور $C(0, -2)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

(ii)　نقاط $A(3, 1)$ ، $B(-2, -3)$ اور $C(2, 2)$ متساوی الساقین مثلث کے راس ہیں۔

(iii)　نقاط $A(5, 2)$ ، $B(-2, 3)$ ، $C(-3, -4)$ اور $D(4, -5)$ متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

6۔　h کی قیمت معلوم کریں جب کہ نقاط $A(\sqrt{3}, -1)$ ، $B(0, 2)$ اور $C(h, -2)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں جس میں قائمۃ الزاویہ راس A پر ہے۔

7۔　نقاط $A(-1, h)$ ، $B(3, 2)$ اور $C(7, 3)$ ہم خط ہیں۔ h معلوم کریں۔

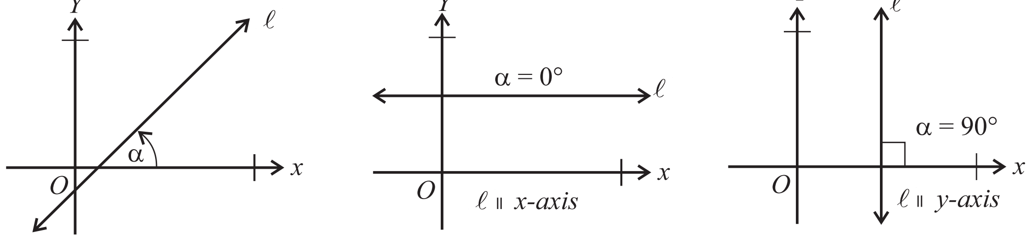
8۔　نقاط $A(-5, -2)$ اور $B(5, -4)$ دائرہ کے قطر کے سرے ہیں۔ دائرہ کا مرکز اور رداس معلوم کریں۔

9۔　نقاط $A(h, 1)$ ، $B(2, 7)$ اور $C(-6, -7)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں جس میں قائمۃ الزاویہ راس A پر ہے۔ h معلوم کریں۔

10۔　نقاط $A(9, 3)$ ، $B(-7, 7)$ ، $C(-3, -7)$ اور $D(5, -5)$ چوکور کے راس ہیں۔ اس کے اضلاع کے وسطی نقاط معلوم کریں۔ ثابت کیجیے کہ وسطی نقاط کو ملانے سے جو شکل بنتی ہے وہ متوازی الاضلاع ہے۔

7.2　خط مستقیم کی مساواتیں (Equations of Straight Line)

خط کا جھکاؤ: زاویہ $\alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ مثبت x- محور سے غیر افقی خط مستقیم ℓ تک گھڑی کی مخالف سمت میں ماپا جاتا ہے۔ ℓ کا جھکاؤ کہلاتا ہے۔



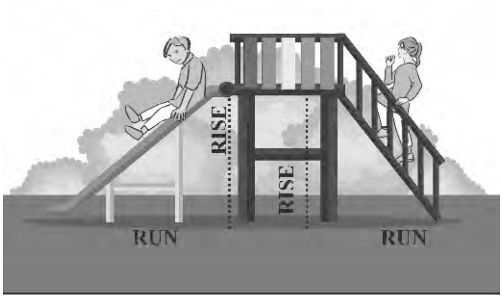
NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

نوٹ:
(i) اگر ℓ، x-محور کے متوازی ہو تو $\alpha = 0°$
(ii) اگر ℓ، y-محور کے متوازی ہو تو $\alpha = 90°$

مشاہدہ کریں کہ زاویہ α خط ℓ کی مختلف حالتوں میں بالترتیب $0°$، اور $90°$ ہے۔

خط کی ڈھلوان یا میلان (Slope or Gradient of a Line)



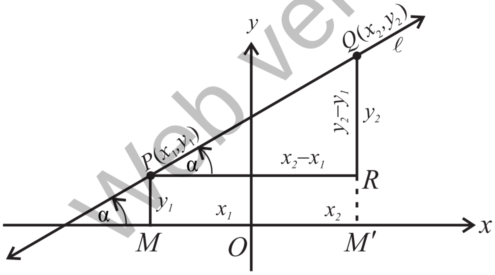
جب ہم ڈھلوان مستوی پر چلتے ہیں تو ہم ایک ہی وقت میں افقی فاصلہ (run) کے ساتھ ساتھ عمودی فاصلہ (rise) بھی طے کرتے ہیں۔
زیادہ ڈھلوان والی مستوی پر چڑھنا مشکل ہے۔ کھڑے پن کی پیمائش (عمودی فاصلہ اور افقی فاصلہ میں نسبت) کو سطح مائل راستے کی ڈھلوان یا میلان کہا جاتا ہے اور اسے m سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$m = \frac{\text{عمودی فاصلہ}}{\text{افقی فاصلہ}} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$$

تجزیاتی جیومیٹری میں ایک غیر عمودی خط مستقیم کی ڈھلوان یا میلان m جس کے جھکاؤ کی وضاحت کی گئی ہے: $m = \tan\alpha$
اگر ℓ افقی خط ہو تو اس کی ڈھلوان صفر ہوتی ہے اور اگر ℓ عمودی ہو تو اس کی ڈھلوان غیر واضح ہوتی ہے۔
اگر $0° < \alpha < 90°$ ہو تو m مثبت ہوتا ہے اور اگر $90° < \alpha < 180°$ ہو تو m منفی ہوتا ہے۔

7.2.1 دو نقاط کو ملانے والے خط مستقیم کی ڈھلوان یا میلان
(Slope or Gradient of a Straight Line Joining Two Points)

مسئلہ 1: اگر ایک غیر عمودی خط ℓ زاویہ α کے ساتھ دو نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ سے گزرتا ہو تو ℓ کی ڈھلوان یا میلان m درج ذیل ہوتی ہے:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\alpha$$

ثبوت: فرض کریں کہ خط ℓ کی ڈھلوان m ہے۔
x-محور پر عمود $\overline{PM}$ اور $\overline{QM'}$ کھینچیں اور $\overline{QM'}$ پر عمود $\overline{PR}$ کھینچیں۔

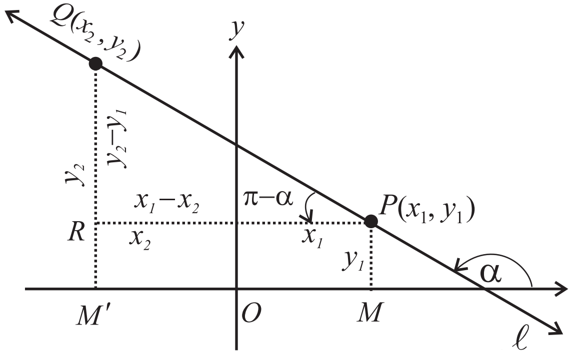
اس طرح $m\overline{PR} = x_2 - x_1$, $m\overline{QR} = y_2 - y_1$ اور $m\angle RPQ = \alpha$
ℓ کی ڈھلوان یا میلان کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے: اور

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ڈھلوان کیوں ضروری ہے؟
ڈھلوان کا تصوّر، انجینئرنگ، آرکیٹیکچر حتیٰ کہ کھیلوں اور سائیکلنگ میں بھی استعمال ہو رہا ہے۔ جہاں پہاڑی کی ڈھلوان کا علم بہت ضروری ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



صورت (i): جب $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

قائمۃ الزاویہ مثلث PRQ میں

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

صورت (ii): جب $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

قائمۃ الزاویہ مثلث PRQ میں

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

یا $$-\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

یا $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ یا $$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

اگر $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ خط پر دو نقاط ہوں تو PQ کی ڈھلوان ہوتی ہے:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{یا} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

نوٹ:

(i) $m \neq \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$ یا $m \neq \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$

(ii) ℓ افقی خط ہے صرف اور صرف اسی صورت میں جب کہ $m = 0$ $(\because \alpha = 0^\circ)$

(iii) ℓ عمودی خط ہے صرف اور صرف اسی صورت میں جب کہ m کی وضاحت نہ ہو $(\because \alpha = 90^\circ)$

(iv) اگر $\overline{BC}$ کی ڈھلوان = $\overline{AB}$ کی ڈھلوان ہو تو نقاط A, B اور C ہم خط ہیں۔

مسئلہ نمبر 2: اگر خطوط ℓ_1 اور ℓ_2 کی ڈھلوانیں بالترتیب m_1 اور m_2 ہوں تو:

(i) متوازی صرف اور صرف اسی صورت میں جب کہ $m_1 = m_2$

(ii) عمودی صرف اور صرف اسی صورت میں جب کہ $m_1 = \frac{-1}{m_2}$

یا $m_1 m_2 = -1$

یاد رکھیے!

(i) علامت $\parallel$ کا مطلب متوازی ہے۔

(ii) علامت $\nparallel$ کا مطلب متوازی نہیں ہے۔

(iii) علامت $\perp$ کا مطلب عمود ہے۔

مثال 5: ثابت کیجیے کہ نقاط $A(-3, 6)$، $B(3, 2)$ اور $C(6, 0)$ ہم خط ہیں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ نقاط A، B اور C ہم خط ہوتے ہیں اگر خط $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کی ڈھلوانیں برابر ہوں۔

یہاں $\overline{AB}$ کی ڈھلوان $= \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{3+3} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$ اور $\overline{BC}$ کی ڈھلوان $= \frac{0-2}{6-3} = \frac{-2}{3}$

$\because$ $\overline{BC}$ کی ڈھلوان $=$ $\overline{AB}$ کی ڈھلوان

اس لیے نقاط A، B اور C ہم خط ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 6: ثابت کیجیے کہ نقاط $A(1, 1)$ ، $B(4, 5)$ اور $C(12, -1)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

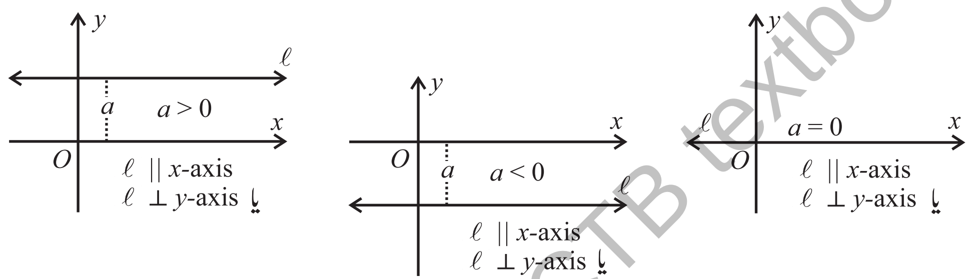
حل: $\overline{AB} = m_1 = \frac{5-1}{4-1} = \frac{4}{3}$ کی ڈھلوان اور $\overline{BC} = m_2 = \frac{-1-5}{12-4} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$ کی ڈھلوان

چوں کہ $m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$ ، اس لیے $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

پس ΔABC قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

7.2.2 x- محور کے متوازی خط مستقیم کی مساوات (یا y- محور کے عمودی خط مستقیم کی مساوات)

(Equation of a Straight Line Parallel to the *x*-axis (perpendicular to the *y*-axis))



خط ℓ پر تمام نقاط x- محور کے متوازی ہیں اور x- محور سے مستقل فاصلے (a) پر رہتے ہیں۔ لہٰذا خط پر ہر نقطہ کا x- محور سے فاصلہ a کے برابر ہے، جو کہ اس کا y- محدد (آرڈینیٹ) ہے۔ لہٰذا اس خط پر تمام نقاط مساوات $y = a$ کو درست ثابت کرتے ہیں۔

نوٹ:

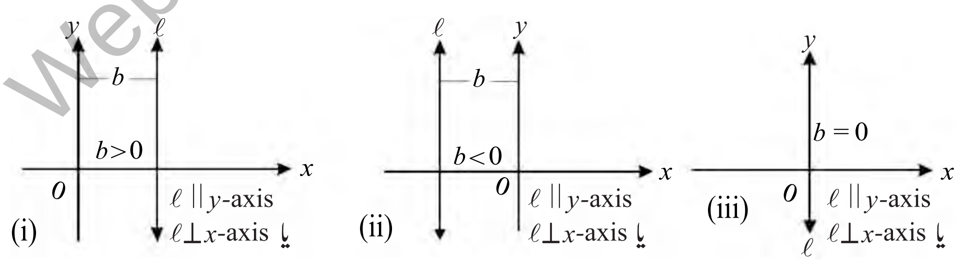
(i) اگر $a > 0$ ہو تو ℓ خط x- محور کے اوپر ہوتا ہے۔

(ii) اگر $a < 0$ ہو تو ℓ خط x- محور کے نیچے ہوتا ہے۔

(iii) اگر $a = 0$ ہو تو ℓ خط x- محور بن جاتا ہے۔ پس x- محور کی مساوات $y = 0$ ہے۔

7.2.3 y- محور کے متوازی خط مستقیم کی مساوات (یا x- محور کے عمودی خط مستقیم کی مساوات)

(Equation of a straight Line Parallel to the *y*-axis (or perpendicular to the *x*-axis)

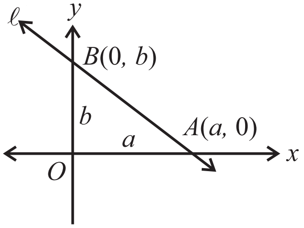


خط ℓ پر تمام نقاط y- محور کے متوازی ہیں اور y- محور سے مستقل فاصلے (b) پر رہتے ہیں۔ لہٰذا خط پر ہر نقطہ کا y- محور سے فاصلہ b کے برابر ہے جو کہ اس کا x- محدد ہے۔ لہٰذا اس خط پر تمام نقاط مساوات $x = b$ کو درست ثابت کرتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

7.2.4 خط مستقیم کی مساوات کی معیاری اشکال کو اخذ کرنا
(Derivation of Standard Forms of Equation of Straight Line)



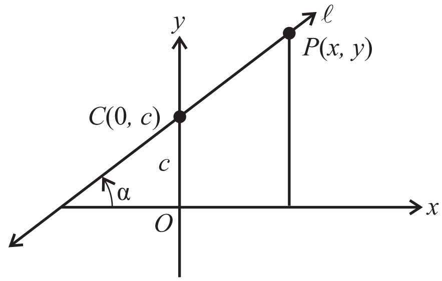
خط کے قاطع (Intercepts of a Line)

- اگر خط x- محور کو $(a, 0)$ پر قطع کرے تو a خط کا x- قاطع کہلاتا ہے۔
- اگر خط y- محور کو $(0, b)$ پر قطع کرے تو b خط کا y- قاطع کہلاتا ہے۔

1۔ خط مستقیم کی مساوات کی ڈھلوان قاطع شکل
(Slope-Intercept form of Equation of a Straight Line)

مسئلہ 3: غیر عمودی خط مستقیم کی مساوات جس کی ڈھلوان m اور y- قاطع c ہو درج ذیل ہے۔

$$y = mx + c$$



ثبوت: فرض کریں کہ $P(x, y)$ خط مستقیم ℓ کا کوئی بھی نقطہ ہے جس کی ڈھلوان m اور y- قاطع c ہے۔ جیسا کہ $C(0, c)$ اور $P(x, y)$ دونوں خط پر واقع ہیں، لہٰذا خط کی ڈھلوان یہ ہے:

$m = \dfrac{y-c}{x-0}$ یا $y - c = mx$ یا $y = mx + c$ جو کہ ℓ کی مساوات ہے۔

$y = mx$ خط کی مساوات ہے جس میں $c = 0$ ہے۔ اس صورت میں خط مبدا سے گزرتا ہے۔

مثال 7: خط مستقیم کی مساوات معلوم کریں اگر

(a) اس کی ڈھلوان 2 اور y- قاطع 5 ہو۔

(b) یہ ڈھلوان -6 والے خط پر عمود ہو اور y- قاطع $\dfrac{4}{3}$ ہو۔

حل: (a) خط کی ڈھلوان اور y- قاطع بالترتیب $m = 2$ اور $c = 5$ ہیں۔

پس $y = 2x + 5$ مطلوبہ مساوات ہے۔

(b) $m_1 = -6$ دیے گئے خط کی ڈھلوان ہے۔

اس لیے مطلوبہ خط کی ڈھلوان $m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = \dfrac{1}{6}$ ہے۔

خط کی ڈھلوان اور y- قاطع بالترتیب $m_2 = \dfrac{1}{6}$ اور $c = \dfrac{4}{3}$ ہیں۔

پس $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{4}{3}$ یا $6y = x + 8$ مطلوبہ مساوات ہے۔

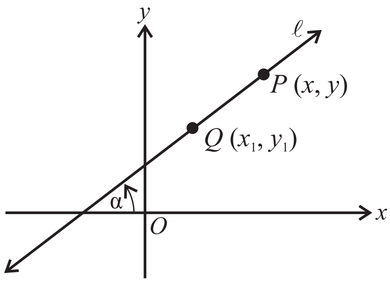
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

2۔ خط مستقیم کی مساوات کی نقطہ ڈھلوان شکل (Point-slope Form of Equation of a Straight Line)

مسئلہ 4: غیر عمودی خط مستقیم ℓ کی مساوات جس کی ڈھلوان m اور نقطہ $Q\ (x_1\ ,\ y_1)$ سے گزرتا ہو درج ذیل ہے۔

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$



ثبوت: فرض کریں کہ $P\ (x, y)$ خط مستقیم ℓ کا کوئی بھی نقطہ ہے جس کی ڈھلوان m اور نقطہ $Q\ (x_1\ ,\ y_1)$ سے گزرتا ہے۔ جیسا کہ $Q(x_1,\ y_1)$ اور $P(x, y)$ دونوں خط پر واقع ہیں لہٰذا خط کی ڈھلوان یہ ہے۔

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \text{ or } y - y_1 = m(x - x_1)$$

جو کہ خط مستقیم کی مساوات ہے جو $Q(x_1\ ,\ y_1)$ میں سے گزرتا ہے اور ڈھلوان m ہے۔

3۔ خط مستقیم کی مساوات کی سمیٹرک شکل (Symmetric Form of Equation of a Straight Line)

$m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \tan\alpha$ جہاں α خط کا جھکاؤ ہے۔

$\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ یا $\dfrac{x - x_1}{\cos\alpha} = \dfrac{y - y_1}{\sin\alpha} = r$ (فرض کریں)

یہ خط مستقیم کی مساوات کی سمیٹرک شکل کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال 8: نقطہ $(5, 1)$ سے گزرنے والے خط مستقیم کی ایک مساوات لکھیں جو نقاط $(0, -1)$ ، $(7, -15)$ سے گزرنے والے خط کے متوازی ہو۔

حل: فرض کریں کہ m مطلوبہ خط مستقیم کی ڈھلوان ہے اس طرح

$$m = \frac{-15 - (-1)}{7 - 0} \quad \text{(کیوں کہ متوازی خطوط کی ڈھلوانیں برابر ہوتی ہیں۔)}$$

$$= -2$$

جیسا کہ نقطہ $(5, 1)$ مطلوبہ خط پر واقع ہے جس کی ڈھلوان -2 ہے، اس طرح نقطہ ڈھلوان شکل سے خط مستقیم کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$y - 1 = -2(x - 5)$$

یا $y = -2x + 11$

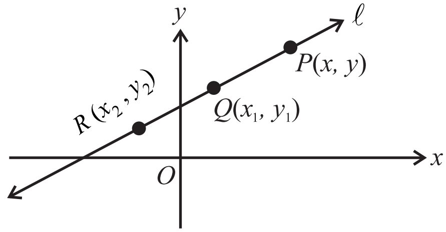
یا $2x + y - 11 = 0$

مطلوبہ خط مستقیم کی مساوات ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

4۔ خط مستقیم کی مساوات کی دو نقاطی شکل (Two-point Form of Equation of a Straight Line)

مسئلہ نمبر 5: غیر عمودی خط مستقیم ℓ کی مساوات جو نقاط $Q(x_1 , y_1)$ اور $R(x_2 , y_2)$ میں سے گزرتی ہو درج ذیل ہے:



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

یا

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

ثبوت: فرض کریں کہ $P (x, y)$ خط مستقیم کا کوئی بھی نقطہ ہے جو کہ نقاط $Q (x_1 , y_1)$ اور $R (x_2 , y_2)$ میں سے گزرتا ہے۔

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ (P، Q اور R ہم خط نقاط ہیں)

ہم لیتے ہیں

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

یا $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ جو کہ مطلوبہ خط PQ کی مساوات ہے۔

یا $(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$

قالب میں ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ اسی طرح $y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - 1}(x - x_2)$ بھی اخذ کی جا سکتی ہے۔

مثال 9: ایسے خط کی مساوات معلوم کریں جو $(-2, 1)$ اور $(6, -4)$ میں سے گزرتا ہو۔

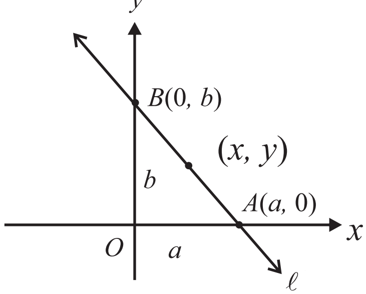
حل: خط مستقیم کی مساوات کی دو نقاطی شکل کا استعمال کرتے ہوئے مطلوبہ مساوات یہ ہے:

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)}[x - (-2)] \quad \text{یا} \quad y - 1 = \frac{-5}{8}(x + 2) \quad \text{یا} \quad 5x + 8y + 2 = 0$$

5۔ خط مستقیم کی مساوات کی قاطع شکل (Intercept Form of Equation of a Straight Line)

مسئلہ 6: خط مستقیم کی مساوات جس کے غیر صفر x اور y- قاطع بالترتیب a اور b ہوں درج ذیل ہے:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



ثبوت: فرض کریں کہ $P (x, y)$ خط مستقیم کا کوئی بھی نقطہ ہے جس کے غیر صفر x اور y- قاطع بالترتیب a اور b ہیں۔ ظاہر ہے نقاط $A(a, 0)$ اور $B(0, b)$ مطلوبہ خط پر واقع ہیں۔ تو خط کی مساوات کی دو نقاطی شکل ہے۔

Web Version of PCTB textbook

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a)$$ (P، A اور B ہم خط نقاط ہیں)

$$-ay = b(x-a)$$ یا $$bx + ay = ab$$

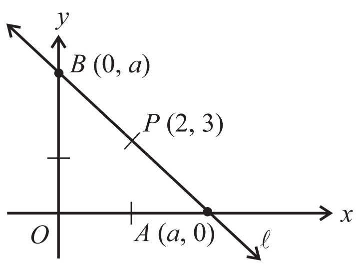
یا $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$ (ab سے تقسیم کرنے سے)

مثال 10: خط کی ایک مساوات لکھیں جو x- محور کو $(2, 0)$ اور y- محور کو $(0, -4)$ پر قطع کرتی ہے۔

حل: جیسا کہ مطلوبہ خط کے 2 اور 4- بالترتیب x اور y- قاطع ہیں اس طرح خط مستقیم کی مساوات کی دو قاطع شکل ہے۔

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$ یا $$2x - y - 4 = 0$$

جو کہ مطلوبہ مساوات ہے۔



مثال 11: نقطہ $P(2, 3)$ میں سے گزرنے والے خط کی مساوات معلوم کریں جو پہلے ربع میں محدداتی محور کے ساتھ ایک متساوی الساقین مثلث بناتی ہو۔

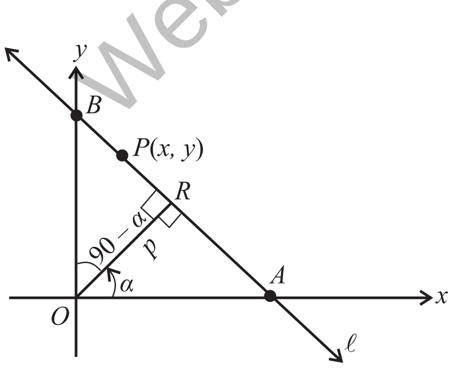
حل: فرض کریں کہ OAB ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔ خط AB نقاط $A(a, 0)$ اور $B(0, a)$ میں سے گزرتا ہے، جہاں a کوئی مثبت حقیقی عدد ہے۔

$\overline{AB} = \frac{a-0}{0-a} = -1$ کی ڈھلوان، لیکن $\overline{AB}$ نقطہ $P(2, 3)$ میں سے گزرتا ہے۔

ڈھلوان 1- کے ساتھ $P(2, 3)$ سے گزرنے والے خط کی مساوات ہے۔

$$y - 3 = -1(x - 2)$$ یا $$x + y - 5 = 0$$

6۔ خط مستقیم کی مساوات کی عام شکل (Normal Form of Equation of a Straight Line)



مسئلہ 7: غیر عمودی خط مستقیم ℓ کی مساوات جہاں ℓ سے مبدا تک کی عمودی لمبائی p اور α اس عمود کا جھکاؤ ہوتا ہے:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

ثبوت: فرض کریں کہ خط مستقیم ℓ x- محور اور y- محور کو بالترتیب نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔ فرض کریں کہ $P(x, y)$ خط کا کوئی بھی ایک نقطہ ہے اور $\overline{OR}$ خط ℓ پر عمود ہے۔ یعنی کہ $|\overline{OR}| = p$ قائمۃ الزاویہ مثلثوں

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

ORA اور ORB کی مدد سے

$$\cos\alpha = \frac{p}{|\overline{OA}|} \quad \text{یا} \quad |\overline{OA}| = \frac{p}{\cos\alpha}$$

اور $$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{p}{|\overline{OB}|} \quad \text{یا} \quad |\overline{OB}| = \frac{p}{\sin\alpha} \qquad [\because \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha]$$

جیسا کہ $|OA|$ اور $|OB|$ خط کے x اور y - قاطع ہیں۔ اس طرح خط AB کی مساوات یہ ہے:

$$\frac{x}{p/\cos\alpha} + \frac{y}{p/\sin\alpha} = 1 \qquad \text{(قاطع شکل)}$$

پس $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال 12: مبدا سے ایک خط تک کی عمودی لمبائی 5 cm ہے اور اس عمود کا جھکاؤ 120° ہے۔ خط کی ڈھلوان اور y - قاطع معلوم کریں۔

حل: یہاں $p = 5$ ، $\alpha = 120^\circ$

عام شکل میں خط مستقیم کی مساوات یہ ہے:

$$x\cos 120^\circ + y\sin 120^\circ = 5$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 5$$

$$\Rightarrow \quad x - \sqrt{3}y + 10 = 0 \quad \ldots(i)$$

خط کی ڈھلوان معلوم کرنے کے لیے ہم (i) کو دوبارہ اس طرح سے لکھتے ہیں: $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}}$

جو کہ مساوات کی ڈھلوان قاطع شکل ہے۔ جہاں $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ اور $c = \frac{10}{\sqrt{3}}$

7.2.5 دو متغیرات میں ایک یک درجی مساوات خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے

(A Linear Equation in two Variables Represents a Straight Line)

مسئلہ نمبر 8: دو متغیرات x اور y میں ایک یک درجی مساوات $ax + by + c = 0$ خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے۔

$$ax + by + c = 0 \quad \ldots(i)$$

جہاں a ، b اور c مستقل مقداریں ہیں اور a اور b دونوں غیر صفر ہیں۔

> **یاد رکھیے!**
> مساوات (i) ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے اور اسے خط مستقیم کی عمومی مساوات کہا جاتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

ثبوت: یہاں a اور b دونوں صفر نہیں ہو سکتے۔ تو درج ذیل صورتیں پیدا ہوتی ہیں:

صورت I: $a \neq 0 , b = 0$

اس صورت میں مساوات (i) کی شکل یہ ہے:

$$ax + c = 0 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{c}{a}$$

جو y- محور کے متوازی خط مستقیم کی مساوات ہے جو y- محور سے ایک مستقل فاصلے $-\frac{c}{a}$ پر ہے۔

صورت II: $a = 0 , b \neq 0$

اس صورت میں مساوات (i) کی شکل یہ ہے:

$$by + c = 0 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{c}{b}$$

جو x- محور کے متوازی خط مستقیم کی مساوات ہے جو x- محور سے ایک مستقل فاصلے $\frac{-c}{b}$ پر واقع ہے۔

صورت III: $a \neq 0 , b \neq 0$

اس صورت میں مساوات (i) کی شکل یہ ہے:

$$by = ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + c$$

جو کہ ڈھلوان $\frac{-a}{b}$ اور y- قاطع $\frac{-c}{b}$ کے ساتھ خط مستقیم کی ڈھلوان قاطع شکل ہے۔

اس طرح مساوات $ax + by + c = 0$ ہمیشہ خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے۔

7.2.6 یک درجی مساوات کو معیاری اشکال میں تبدیل کرنا

(Transform the General Linear Equation to Standard Forms)

آیئے مساوات $ax + by + c = 0$ کو معیاری اشکال میں تبدیل کرتے ہیں:

-i ڈھلوان قاطع شکل **(Slope-Intercept Form)**

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + c_1 \qquad \ldots(i)$$

جب کہ $m = \frac{-a}{b}, c_1 = \frac{-c}{b}$

-ii نقطہ ڈھلوان شکل **(Point - Slope Form)**

(i) سے ہم نے دیکھا کہ خط $ax + by + c = 0$ کی ڈھلوان $\frac{-a}{b}$ ہے۔ خط پر ایک نقطہ $\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$ ہے۔

خط کی مساوات $y - 0 = -\frac{a}{b}\left(x + \frac{c}{a}\right)$ بن جاتی ہے جو نقطہ ڈھلوان شکل میں ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

-iii سمیٹرک شکل (Symmetric Form)

$$m=\tan\alpha=\frac{-a}{b},\ \sin\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},\cos\alpha=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

خط $ax+by+c=0$ پر ایک نقطہ $\left(\frac{-c}{a},0\right)$ ہے۔

سمیٹرک شکل میں مساوات درج ذیل بن جاتی ہے:

$$\frac{x-\left(-\frac{c}{a}\right)}{b/\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{y-0}{a/\pm\sqrt{a^2+b^2}}=r \text{ (فرض کریں)}$$

-iv دو نقاطی شکل (Two -Point Form)

یہاں ہم خط $ax+by+c=0$ پر دو نقاط $\left(0,\frac{-c}{b}\right)$ اور $\left(\frac{-c}{a},0\right)$ لیتے ہیں۔ ان نقاط سے گزرنے والے خط کی مساوات یہ ہے:

$$\frac{y-0}{0+\frac{c}{b}}=\frac{x+\frac{c}{a}}{-\frac{c}{a}-0} \quad \text{جیسا کہ} \quad y-0=\frac{-a}{b}\left(x+\frac{c}{a}\right)$$

-v قاطع شکل (Intercept Form)

$$ax+by=-c \quad \text{یا} \quad \frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1 \quad \text{جیسا کہ} \quad \frac{x}{-c/a}+\frac{y}{-c/b}=1$$

جو قاطع شکل میں ہے۔

-vi عام شکل (Normal Form)

مساوات (i)... $\quad ax+by+c=0$

کو عام شکل میں اس طرح لکھا جاتا ہے:

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \ldots\text{(ii)}$$

جذر کی علامت اس طرح سے لی جاتی ہے کہ (i) کے دائیں طرف جمع کی علامت ہو۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ عام شکل میں خط کی مساوات ہوتی ہے:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \quad \ldots\text{(iii)}$$

اگر (i) اور (iii) ایک جیسے ہوں تو

$$\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{-c}{p}$$

$$\text{جیسا کہ} \quad \frac{p}{-c}=\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin\alpha}{b}=\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

لہٰذا $\cos\alpha = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ ، $\sin\alpha = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ اور $p = \dfrac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ اور p کی قیمتیں مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

اس طرح (i) کو (ii) میں تبدیل کرنے کے لیے $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ سے تقسیم کرتے ہیں۔ جذر کی علامت اس طرح سے لی جاتی ہے کہ (ii) کے دائیں طرف جمع کی علامت ہو۔

مثال 13: $5x - 12y + 39 = 0$ کو درج ذیل اشکال میں تبدیل کریں:

(i) ڈھلوان قاطع شکل (ii) دو قاطع شکل (iii) عام شکل

(iv) نقطہ ڈھلوان شکل (v) دو نقاطی شکل (vi) سمیٹرک شکل

حل: (i) $12y = 5x + 39$ یا $y = \dfrac{5}{12}x + \dfrac{39}{12}$, $m = \dfrac{5}{12}$ ، $c = \dfrac{39}{12}$ y-قاطع

(ii) $5x - 12y = 39$ یا $\dfrac{5x}{-39} + \dfrac{12y}{39} = 1$ یا $\dfrac{x}{-39/5} + \dfrac{y}{39/12} = 1$

جو کہ مطلوبہ مساوات ہے۔

(iii) $5x - 12y = -39$

دونوں اطراف $\pm\sqrt{5^2+12^2} = \pm 13$ سے تقسیم کریں۔ چوں کہ دائیں طرف مثبت عدد ہونا چاہیے اس لیے ہمیں منفی علامت لینی ہو گی۔

یہاں $\dfrac{5x}{-13} + \dfrac{12y}{13} = 3$ عام شکل میں مساوات ہے۔

(iv) $\left(\dfrac{-39}{5}, 0\right)$ خط پر ایک نقطہ اور $\dfrac{5}{12}$ اس کی ڈھلوان ہے۔ خط کی مساوات کو اس طرح لکھا جاتا ہے:

$$y - 0 = \frac{5}{12}\left(x + \frac{39}{5}\right)$$

(v) $\left(0, \dfrac{39}{12}\right)$ خط پر دوسرا نقطہ ہے۔ $\left(\dfrac{-39}{5}, 0\right)$ اور $\left(0, \dfrac{39}{12}\right)$ میں سے گزرنے والے خط کی مساوات ہے:

$$\frac{y-0}{0-\frac{39}{12}} = \frac{x+\frac{39}{5}}{\frac{-39}{5}-0}$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(vi) جیسا کہ $\tan\alpha = \frac{5}{12} = m$، پس $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ اور $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

خط کا ایک نقطہ $\left(\frac{-39}{5}, 0\right)$ ہے۔

$\frac{x + \frac{39}{5}}{\frac{12}{13}} = \frac{y - 0}{\frac{5}{13}} = r$ (فرض کریں) سمیٹرک شکل میں مساوات ہے۔

مشق 7.2

1۔ دیے گئے نقاط سے بننے والے خط کی ڈھلوان اور جھکاؤ معلوم کریں:

(i) $(-2, 4)\,;\,(5, 11)$ (ii) $(3, -2)\,;\,(2, 7)$ (iii) $(4, 6)\,;\,(4, 8)$

2۔ ڈھلوان کے ذریعے یہ ظاہر کریں کہ درج ذیل نقاط ایک ہی خط پر ہیں:

(i) $A(-1, -3)\,;\,B(1, 5)\,;\,C(2, 9)$ (ii) $P(4, -5)\,;\,Q(7, 5)\,;\,R(10, 15)$

(iii) $L(-4, 6)\,;\,M(3, 8)\,;\,N(10, 10)$ (iv) $X(a, 2b)\,;\,Y(c, a + b)\,;\,Z(2c - a, 2a)$

3۔ k معلوم کریں جب کہ $A(7, 3)$ اور $B(k, -6)$ کو ملانے والا خط اور $C(-4, 5)$ ؛ $D(-6, 4)$ کو ملانے والا خط:

(i) متوازی ہوں (ii) عمودی ہوں

4۔ ڈھلوان کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ مثلث اپنے راس $A(6, 1)$، $B(2, 7)$ اور $C(-6, -7)$ کے ساتھ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بناتی ہے۔

5۔ نقاط کے دو جوڑے دیے گئے ہیں۔ معلوم کریں کہ آیا ان نقاط سے بننے والے دو خطوط

(i) متوازی ہیں (ii) عمودی ہیں (iii) کچھ بھی نہیں ہیں۔

(a) $(1, -2), (2, 4)$ اور $(4, 1), (-8, 2)$ (b) $(-3, 4), (6, 2)$ اور $(4, 5), (-2, -7)$

6۔ مساوات معلوم کریں۔

(a) $(7, -9)$ میں سے گزرنے والا افقی خط ہو (b) $(-5, 3)$ میں سے گزرنے والا عمودی خط ہو

(c) $A(-6, 5)$ سے گزرنے والا خط جس کی ڈھلوان 7 ہے

(d) $(8, -3)$ سے گزرنے والا خط جس کی ڈھلوان 0 ہے

(e) $(-8, 5)$ سے گزرنے والا خط جس کی ڈھلوان غیر واضح ہو (f) $(-5, -3)$ اور $(9, -1)$ سے گزرنے والا خط

(g) y- قاطع: -7 اور ڈھلوان 5 (h) x- قاطع: -3 اور y- قاطع 4

(i) x- قاطع: -9 اور ڈھلوان -4

7۔ نقاط $A(3, 5)$ اور $B(9, 8)$ کو ملانے والے قطعہ خط کے عمودی ناصف کی مساوات معلوم کریں۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

8۔ (6–, 4–) سے گزرنے والے خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ اس خط پر عمود ہو اور جس کی ڈھلوان $\frac{-3}{2}$ ہو۔

9۔ (5–, 11) سے گزرنے والے خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ اس خط کے متوازی ہو جس کی ڈھلوان 24– ہو۔

10۔ درج ذیل مساواتوں میں سے ہر ایک کو ڈھلوان قاطع شکل، دو قاطع شکل اور عام شکل میں تبدیل کریں:

(a) $2x - 4y + 11 = 0$ (b) $4x + 7y - 2 = 0$ (c) $15y - 8x + 3 = 0$

11۔ درج ذیل ہر ایک میں چیک کریں کہ آیا دو خطوط:

(i) متوازی ہیں (ii) عمودی ہیں (iii) نامتوازی اور ناعمودی ہیں

(a) $2x + y - 3 = 0$; $4x + 2y + 5 = 0$

(b) $3y = 2x + 5$; $3x + 2y - 8 = 0$

(c) $4y + 2x - 1 = 0$; $x - 2y - 7 = 0$

12۔ (7 , 4–) سے گزرنے والے خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ خط $2x - 7y + 4 = 0$ کے متوازی ہو۔

13۔ (8– ,5) سے گزرنے والے خط کی مساوات معلوم کریں جو $A(-15, -8)$ اور $B(10, 7)$ سے بننے والے خط پر عمود ہو۔

7.3 حقیقی زندگی میں محدداتی جیومیٹری کا اطلاق

(Applications of Coordinate Geometry in Real life Situations)

مثال 14: نقشے پر ٹاؤن A کے محددات (2, 3) اور ٹاؤن B کے محددات (1– ,4–) ہیں۔ دونوں ٹاؤن کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

حل: فاصلہ کا کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

قیمتوں کو درج کرنے سے

$$d = \sqrt{(-4-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} \approx 7.21$$

اس طرح ٹاؤن A اور ٹاؤن B کے درمیان فاصلہ تقریباً 7.21 ہے۔

مثال 15: فرض کریں کہ دو شہروں، شہر A اور شہر B کے محددات (3, 4) اور (7, 1) نقشے پر ظاہر کیے گئے ہیں۔ دونوں شہروں کے درمیان کا فاصلہ معلوم کریں۔

حل: فاصلہ کا کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(7-3)^2 + (1-4)^2}$$

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}$$

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

اس طرح شہر A اور شہر B کا درمیانی فاصلہ 5 ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مثال16: ایک انجینئر دریا کے کنارے پر دو مقامات کے درمیان پل بنا رہا ہے۔ فرض کریں کہ (2, 5) اور (8, 9) دو مقامات کے نقاط ہیں جہاں سے پل شروع اور ختم ہو گا۔ وسطی نقطہ کے محددات معلوم کریں جو پل کے مرکز کو ظاہر کریں۔

حل: وسطی نقطہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے

$$M = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{5+9}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{10}{2}, \frac{14}{2}\right) = (5, 7)$$

اس طرح پل کا مرکزی نقطہ کے محددات (5, 7) ہیں۔

مثال17: زمین کی تزئین و آرائش کرنے والا ایک مثلثی باغ ڈیزائن کر رہا ہے جس کے کونے $A(2, 3)$ ، $B(5, 7)$ اور $C(6, 2)$ پر ہیں۔ مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں معلوم کریں۔

حل: ہر ضلع کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے فاصلہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(6-5)^2 + (2-7)^2}$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-5)^2}$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} = 5.10$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(6-2)^2 + (2-3)^2}$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(4)^2 + (-1)^2}$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} = 4.12$$

اس طرح اضلاع کی لمبائیاں درج ذیل ہیں:

$$m\overline{AB} = 5\ ,\quad m\overline{BC} \approx 5.10\ ,\quad m\overline{AC} \approx 4.12$$

مثال18: ایک پائلٹ کو شہر $A(50, 60)$ سے شہر $B(120, 150)$ تک سفر کرنے کی ضرورت ہے۔ ہیڈنگ زاویہ کا تعین کریں کہ ہوائی جہاز کو مشرق کی سمت لے جانا چاہئے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حل: ہیڈنگ زاویہ ڈھلوان کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے:

$$m = \frac{150-60}{120-50} = \frac{90}{70} = \frac{9}{7}$$

فرض کریں کہ مطلوبہ زاویہ θ ہے پھر

$$\tan\theta = m = \frac{9}{7}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{9}{7}\right)$$

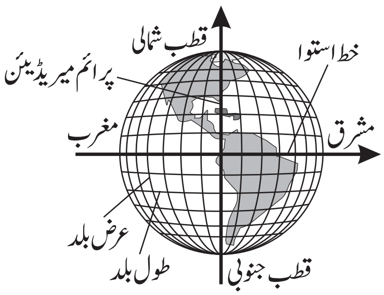
$$\theta = \tan^{-1}(1.2857)$$

$$\theta \approx 52.13^\circ$$

> **کیا آپ جانتے ہیں؟**
>
> **ایوی ایشن** ہوائی جہازوں، ہیلی کاپٹروں اور ڈرونز سمیت طیاروں کا آپریشن اور پرواز ہے۔
>
> **نیوی گیشن** گاڑی کے راستے کا تعین اور ایک جگہ سے دوسری جگہ تک کنٹرول کرنے کا عمل ہے۔

اس طرح ہوائی جہاز کو 52.13° مشرق سے شمال کی طرف ہیڈنگ زاویہ لینا چاہیے۔

عرض بلد پیمائش کرتا ہے کہ خط استوا سے کوئی مقام کتنا دور ہے۔ یہ خط استوا پر 0° سے 90° شمال (قطب شمالی پر) یا 90° جنوب (قطب جنوبی پر) تک ہے۔
طول بلد پیمائش کرتا ہے کہ کوئی مقام پرائم میریڈیئن (جو گرین وچ، لندن سے گزرتا ہے) سے کتنا دور ہے۔ یہ پرائم میریڈیئن میں 0° سے 180° مشرق اور 180° مغرب تک ہے۔



مثال 19: عبدالہادی نقطہ A(E °50 طول بلد، N °10 عرض بلد) سے نقطہ B(E °60 طول بلد، N °20 عرض بلد) تک سفر کر رہا ہے۔ عرض بلد اور طول بلد کے لحاظ سے اس کے سفر کا وسطی نقطہ معلوم کریں۔

حل: ہمیں دیا گیا ہے کہ نقطہ A(E °50 طول بلد، N °10 عرض بلد)

نقطہ B(E °60 طول بلد، N °20 عرض بلد)

عرض بلد کا وسطی نقطہ $= \frac{10^\circ + 20^\circ}{2} = 15^\circ\,N$

طول بلد کا وسطی نقطہ $= \frac{50^\circ + 60^\circ}{2} = 55^\circ\,E$

اس طرح عبدالہادی کے سفر کا وسطی نقطہ (E °55 طول بلد، N °15 عرض بلد) ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال20: ایک زمین کی تزئین و آرائش کرنے والا $P(2, 3)$ سے $Q(8, 9)$ تک سیدھا راستہ ڈیزائن کر رہا ہے۔ راستے کی لمبائی معلوم کریں۔

حل: فاصلہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سیدھے راستے کی لمبائی معلوم کی جاسکتی ہے:

$$\text{فاصلہ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(8-2)^2 + (9-3)^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (6)^2}$$

$$= \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

لہٰذا راستے کی لمبائی تقریباً $6\sqrt{2}$ ہے۔

مشق 7.3

1۔ 2 دوستوں کے گھروں کو ایک گرڈ پر محددات $(2, 6)$ اور $(9, 12)$ کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔ اگر گرڈ کی اکائیاں کلومیٹر کو ظاہر کرتی ہوں تو ان کے گھروں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

2۔ ایک سیدھی پگڈنڈی پر غور کریں جو نقطہ $(5, 7)$ سے شروع ہوتی ہے اور نقطہ $(15, 3)$ پر ختم ہوتی ہے۔ اس کے وسطی نقطہ کے محددات معلوم کریں۔

3۔ ایک معمار ایک پارک ڈیزائن کر رہا ہے جس میں دو عمارتوں کے محددات $(10, 8)$ اور $(4, 3)$ گرڈ پر واقع ہیں۔ عمارتوں کے درمیان فاصلہ میٹر میں معلوم کریں۔

4۔ ڈیلیوری ڈرائیور کو دو ڈیلیوری مقامات کے درمیان فاصلہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔ ایک مقام شہر کے گرڈ کے نقشے پر $(7, 2)$ اور دوسرا $(12, 10)$ پر واقع ہے۔ دونوں مقامات کے درمیان فاصلہ کلومیٹر میں معلوم کریں۔

5۔ ریس ٹریک کے آغاز اور اختتامی نقاط کے محددات $(3, 9)$ اور $(9, 13)$ ہیں۔ ٹریک کا وسطی نقطہ کیا ہے؟

6۔ سڑک پر دو نقاط $A(3, 4)$ اور $B(7, 10)$ ہیں۔ سڑک کے وسطی نقطہ کے محددات معلوم کریں۔

7۔ ایک جہاز $(12^o\ N, 65^o\ W)$ پر واقع پورٹ A سے پورٹ B تک $(20^o\ N, 45^o\ W)$ جا رہا ہے۔ اگر جہاز زمین کی سطح پر مختصر ترین راستے پر سفر کرتا ہے، تو نقاط کے درمیان خط مستقیم کا فاصلہ معلوم کریں۔

8۔ فرح ایک مستطیل میدان کے گرد باڑ لگا رہی ہے جس کے کونوں کے محددات $(0, 0)$، $(0, 5)$، $(8, 5)$ اور $(8, 0)$ ہیں۔ اس کھیت کے احاطے کے لیے کتنی باڑ کی ضرورت ہوگی؟

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

9۔ ایک ہوائی جہاز شہر X(40° N, 100° W) سے شہر Y(50° N, 80° W) تک اڑ رہا ہے۔ محدداتی جیومیٹری کا استعمال کرتے ہوئے ان دو شہروں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

10۔ زمین کا سروے کرنے والا ایک مستطیلی پلاٹ کو نشان زدہ کر رہا ہے جس کے کونوں کے محددات (3, 1) ، (3, 6) ، (8, 6) اور (8, 1) ہیں۔ اس مستطیلی پلاٹ کا احاطہ معلوم کریں۔

11۔ ایک مستطیلی باغ جس کے کونوں کے محددات $A(0, 0)$، $B(5, 0)$ ، $C(5, 3)$ اور $D(0, 3)$ ہیں۔ اس مستطیلی باغ کے گرد کتنی باڑ لگانے کی ضرورت ہوگی؟

جائزہ مشق 7

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) ڈھلوان قاطع شکل میں خط مستقیم کی مساوات اس طرح لکھی جاتی ہے:

(a) $y = m(x + c)$ (b) $y - y_1 = m(x - x_1)$
(c) $y = c + mx$ (d) $ax + by + c = 0$

(ii) دو متوازی خطوط کے میلان ہوتے ہیں:

(a) برابر (b) صفر
(c) ایک دوسرے کے منفی رد عمل (d) غیر واضح

(iii) اگر دو خطوط کی ڈھلوان کی ضرب 1– ہو تو خطوط ہوتے ہیں:

(a) متوازی (b) عمودی (c) ہم خط (d) ایک جیسے

(iv) نقاط $P(1, 2)$ اور $Q(4, 6)$ کے درمیان فاصلہ ہوتا ہے:

(a) 5 (b) 6 (c) $\sqrt{13}$ (d) 4

(v) قطعہ خط کے سروں $(-2, 4)$ اور $(6, -2)$ کا وسطی نقطہ ہوتا ہے:

(a) (4, 2) (b) (2, 1) (c) (1, 1) (d) (0, 0)

(vi) نقاط (1, 2) اور (4, 5) میں سے گزرنے والا خط ہے:

(a) $y = x + 1$ (b) $y = 2x + 3$ (c) $y = 3x - 2$ (d) $y = x + 2$

(vii) نقطہ ڈھلوان شکل میں خط کی مساوات ہے:

(a) $y = m(x + c)$ (b) $y - y_1 = m(x - x_1)$
(c) $y = c + mx$ (d) $ax + by + c = 0$

(viii) $2x + 3y - 6 = 0$ کی ڈھلوان قاطع شکل ہے:

(a) $y = \frac{-2}{3}x + 2$ (b) $y = \frac{2}{3}x - 2$
(c) $y = \frac{2}{3}x + 1$ (d) $y = \frac{-2}{3}x - 2$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(ix) سمیٹرک شکل میں خط کی مساوات ہے:

(a) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (b) $\frac{x-x_1}{1}+\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{1}$

(c) $\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}=r$ (d) $y-y_1=m(x-x_1)$

(x) عام شکل میں خط کی مساوات ہے:

(a) $y=mx+c$ (b) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

(c) $\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}$ (d) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$

2۔ محدداتی مستوی پر نقاط $A(2, 3)$ اور $B(7, 8)$ کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

3۔ نقاط $(4, -2)$ اور $(-6, 3)$ سے مل کر بننے والے قطعہ خط کا وسطی نقطہ معلوم کریں۔

4۔ نقاط $(1, 2)$ اور $(4, 6)$ سے گزرنے والے خط کی ڈھلوان معلوم کریں۔

5۔ نقاط $(3, 7)$ اور $(5, 11)$ سے گزرنے والے خط کی مساوات $y = mx + c$ شکل میں معلوم کریں۔

6۔ اگر دو خطوط متوازی ہوں اور ایک خط کی ڈھلوان $\frac{2}{3}$ ہو تو دوسرے خط کی ڈھلوان معلوم کریں۔

7۔ ایک ہوائی جہاز کو شہر A پر محددات $(12, 5)$ سے شہر B پر محددات $(-4, 8)$ تک پرواز کرنے کی ضرورت ہے۔ ان دو شہروں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

8۔ زمین کی تزئین و آرائش کے منصوبے میں راستہ کے محددات $(2, 3)$ اور $(10, 7)$ ہیں۔ اس راستے کے وسطی نقطہ کے محددات معلوم کریں۔

9۔ ایک ڈرون ایک مقام سے دوسرے مقام تک اُڑ رہا ہے جس کے محددات $(2, 3)$ اور $(10, 15)$ ہیں۔ اس خط کی ڈھلوان اور کل فاصلہ معلوم کریں۔

10۔ -3 کے میلان اور 2 کے y- قاطع والے خط کے لیے مساوات لکھیں:

(a) ڈھلوان قاطع شکل (b) نقطہ $(1, 2)$ کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ ڈھلوان شکل

(c) نقاط $(1, 2)$ اور $(4, -7)$ کا استعمال کرتے ہوئے دو نقطہ شکل

(d) قاطع شکل (e) سمیٹرک شکل (f) عام شکل

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP