یونٹ 6

تکونیات (Trigonometry)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ڈگری اور ریڈین میں ظاہر کیے گئے زاویوں کی معیاری حالت کو پہچان سکیں۔
- قائمۃ الزاویہ مثلث میں حادہ زاویہ کے لیے sin، cosine اور tangent کی نسبتیں معلوم کرنے کے لیے مسئلہ فیثا غورث کا استعمال کر سکیں۔
- دو رُخی (2-D) شکل میں زاویہ نزول اور زاویہ صعود سے متعلقہ تکونیات کے عملی زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔
- تکونیات کی اکائیاں ثابت کر سکیں اور اُنہیں مختلف تکونیات کے روابط اخذ کرنے کے لیے لاگو کر سکیں۔
- تکونیات کی اکائیوں سے متعلقہ عملی زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔

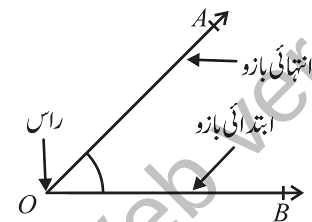
تعارف (Introduction)

تکونیات ریاضی کی ایک ایسی شاخ ہے جو مثلث کے زاویوں اور اضلاع کے روابط کو ظاہر کرتی ہے خصوصاً قائمۃ الزاویہ مثلث۔ بہت سے میدانوں میں اِس کا اہم کردار ہے جیسا کہ فزکس، انجینئرنگ، تعمیرات اور فلکیات۔ تکونیات کے تصورات کو عملی زندگی کے بہت سے مسائل جن میں زاویے اور فاصلے ہوں کو حل کر سکتے ہیں۔ جیسا کہ عمارات کی اونچائی، اشیا کے درمیان فاصلہ اور جہاز رانی کے لیے زاویے کی پیمائش وغیرہ کو معلوم کرنا۔

دماغی مشق!

جیومیٹری میں دو رُخی اشکال کا مطالعہ کیا جاتا ہے۔ اقلیدس (Euclidean) جیومیٹری کیا ہے؟

6.1 معیاری حالت میں زاویوں کی پہچان (ڈگری اور ریڈین)
(Identifying Angles in Standard Position (Degrees and Radians))



ایسی شکل جو دو شعاعوں کے ملنے سے بنتی ہو اور اُس کا ایک سرا مشترک ہو زاویہ کہلاتی ہے۔ دونوں شعاعیں زاویے کے بازو کہلاتی ہیں۔ مشترک سرا راس کہلاتا ہے۔ اِن شعاعوں کے گھومنے کی مقدار یا اِن کے درمیانی فاصلہ کی پیمائش زاویہ کہلاتی ہے۔ $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ دو شعاعیں ہیں اور AOB زاویہ ہے۔ جسے اس طرح لکھا جاتا ہے $\angle AOB$ یا $A\hat{O}B$۔

زاویوں کی اقسام ہیں:

- حادہ زاویہ $0 < \theta < 90°$
- منفرجہ زاویہ $90° < \theta < 180°$
- قائمہ زاویہ $\theta = 90°$
- زاویہ مستقیم $\theta = 180°$
- زاویہ معکوس $180° < \theta < 360°$
- مکمل گردش $\theta = 360°$

زاویے کو معیاری حالت میں کہا جاتا ہے اگر:

(a) اِس کا نقطہ راس کارتیسی محدد میں مرکز پر واقع ہو۔

(b) اِس کی ایک شعاع (ابتدائی بازو) x-محور پر واقع ہو۔

(c) دوسری شعاع (انتہائی بازو) زاویے کی سمت کا تعین کرتی ہو۔

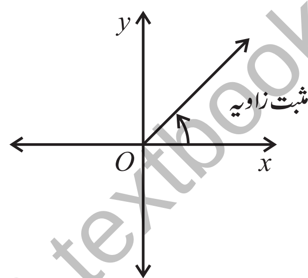
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

زاویے کی پیمائش ابتدائی بازو سے انتہائی بازو کی طرف کی جاتی ہے۔ اِس کو عموماً یونانی حروف θ، α، β، γ وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

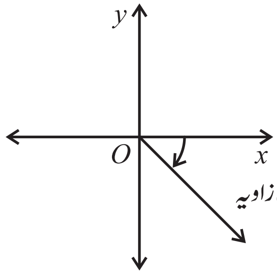
مثبت زاویہ

اگر انتہائی بازو کو گھڑی کی مخالف سمت میں ابتدائی بازو سے گھمایا جائے تو زاویہ مثبت ہو گا۔ دیا ہوا زاویہ پہلے ربع میں واقع ہے۔



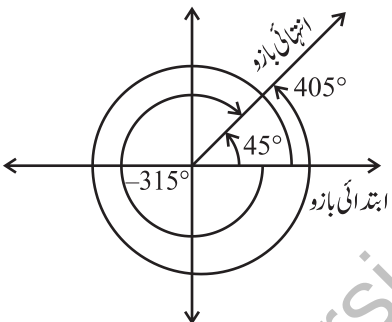
منفی زاویہ

اگر انتہائی بازو کو گھڑی کی سمت میں ابتدائی بازو سے گھمایا جائے تو زاویہ منفی ہو گا۔ دیا ہوا زاویہ چوتھے ربع میں واقع ہے۔



کوٹرمینل زاویے (Co-Terminal Angles)

کوٹرمینل زاویے ایسے زاویے ہوتے ہیں جن میں ابتدائی بازو اور انتہائی بازو معیاری حالت میں مشترک ہوں۔ لیکن اُن کی پیمائش مختلف ہو سکتی ہے۔ اِن زاویوں کا فرق 360° یا 2π ریڈین کا اضعاف ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 45°، 405° اور -315° کوٹرمینل زاویے ہیں۔ کیوں کہ $405^\circ = 45^\circ + 360^\circ$ اور $-315^\circ = 45^\circ - 360^\circ$



6.1.1 ڈگری کی پیمائش (Degree Measurement)

ایک ڈگری (°) زاویوں کی پیمائش کی اکائی ہے۔ یہ ایک نقطہ کے گرد پورے چکر کا $\left(\frac{1}{360}\right)^{th}$ ہوتی ہے۔ سادہ الفاظ میں ڈگری ایک زاویے کی پیمائش ہے اور ایک مکمل دائرے میں 360° ہوتی ہیں۔

تاریخ کی نظر میں 360° کیوں؟

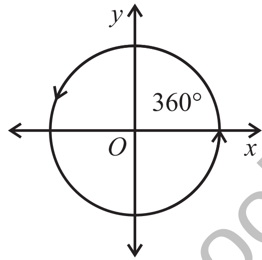
ایک دائرے کو 360 حصوں میں تقسیم کرنے کا انتخاب بیبولین کے زمانے سے ہے۔ جنہوں نے 60 کے اساس کے نظام کو استعمال کیا۔ وہ پہلے لوگوں میں شامل تھے جنہوں نے زاویے کی پیمائش کا تصور پیش کیا۔ 360 کو اس لیے منتخب کیا کیوں کہ وہ بہت بڑا مرکب عدد ہے (جو ... ,15 ,12 ,10 ,9 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 وغیرہ پر تقسیم ہو سکتا ہے) اور اِس کا حل آسان ہے۔ یہ نظام پرانے زمانے سے رائج رہا اور ڈگری کا تصور بہت سی تہذیبوں اور ریاضی کی روایات میں اہمیت اختیار کر گیا۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

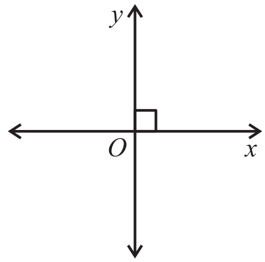
مکمل دائرہ

ایک مرکزی نقطہ کے گرد ایک مکمل گردش $360°$ کا زاویہ بناتی ہے۔

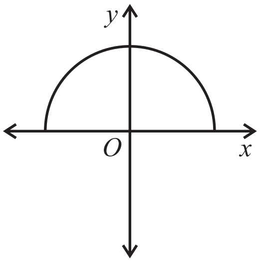


قائمہ زاویہ

ایک مکمل گردش کا ایک چوتھائی یا $90°$ کا زاویہ قائمہ زاویہ کہلاتا ہے۔



آدھادائرہ (Half Circle)



ایک زاویہ مستقیم یا ایک مکمل گردش کے آدھے کی پیائش $180°$ ہوتی ہے۔ڈگری کی پیائش کو مزید منٹ ($'$) اور سیکنڈ ($''$) میں تقسیم کیا گیا ہے۔

$1° = 60'$ (60 منٹ)

$1' = 60''$ (60 سیکنڈ)

$1° = 3600''$ (60×60 سیکنڈ)

6.1.2 ڈگری سے منٹ اور سیکنڈ میں تبدیلی (Converting Degrees to Minutes and Seconds)

اعشاری ڈگری کو ڈگری، منٹ اور سیکنڈ (ڈی ایم ایس) میں تبدیل کرنے کے لیے درج ذیل اقدامات کیے جائیں گے:

- اعشاریہ والے عدد سے مکمل عدد (ڈگری) کو علیحدہ کریں۔
- اعشاریہ والے حصہ کے منٹ بنانے کے لیے 60 سے ضرب دیں۔
- حاصل ضرب کا مکمل عدد والا حصہ منٹ ہیں اور اعشاریہ والے حصہ کو مزید 60 سے ضرب دے کر سیکنڈ حاصل کریں۔

مثال 1: $73.12°$ کو ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں تبدیل کریں۔

حل: ڈگری: مکمل عددی حصہ $= 73°$

منٹ: اعشاری حصہ (0.12) کو 60 سے ضرب دیں۔

$0.12 \times 60 = 7.2'$ ۔ مکمل عددی حصہ (منٹ) $= 7'$

سیکنڈ: اب اعشاری حصّہ 0.2 کو 60 سے ضرب دیں۔

$60 \times 0.2 = 12.0''$

پس $73.12° = 73°\ 7'\ 12''$

مثال 2: $109.42°$ کو ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں تبدیل کریں۔

حل: ڈگری: مکمل عددی حصہ $= 109°$

منٹ: اعشاری حصہ (0.42) کو 60 سے ضرب دیں۔

$60 \times 0.42 = 25.2'$ ۔ مکمل عددی حصہ (منٹ) $= 25'$

سیکنڈ: اب اعشاری حصّہ 0.2 کو 60 سے ضرب دیں۔

$60 \times 0.2 = 12.0''$

پس $109.42° = 109°\ 25'\ 12''$

NOT FOR SALE-PESRP

6.1.3 ڈگری، منٹ اور سیکنڈ سے اعشاریہ ڈگری میں تبدیل کرنا
(Converting from Degrees, Minutes and Seconds to Decimal Degrees)

ڈگری، منٹ اور سیکنڈ (ڈی ایم ایس) سے اعشاری ڈگری میں تبدیل کرنے کے لیے درج ذیل اقدامات کیے جائیں گے۔

- ڈگری کو ایسے ہی لکھ دیں۔
- منٹ سے اعشاری ڈگری میں تبدیل کریں: منٹوں کو 60 سے تقسیم کریں۔
- سیکنڈ سے اعشاری ڈگری میں تبدیل کریں: سیکنڈوں کو 3600 سے تقسیم کریں۔
- تمام مقداروں کو جمع کریں۔

مثال 3: $45°45'45''$ کو اعشاری ڈگری میں تبدیل کریں۔

حل: ڈگریاں: 45 رکھیں

منٹ سے اعشاری ڈگری میں تبدیلی: $\frac{45}{60} = 0.75$ ؛ سیکنڈ سے اعشاری ڈگری میں تبدیلی: $\frac{45}{3600} = 0.0125$

جمع کرنے سے: $45 + 0.75 + 0.0125 = 45.7625$

پس $45°45'45'' = 45.725°$

مثال 4: $94°27'54''$ کو اعشاری ڈگری میں تبدیل کریں۔

حل: ڈگریاں: 94 رکھیں

منٹ سے اعشاری ڈگری میں تبدیلی: $\frac{27}{60} = 0.45$ ؛ سیکنڈ سے اعشاری ڈگری میں تبدیلی: $\frac{54}{3600} = 0.015$

جمع کرنے سے: $94 + 0.45 + 0.015 = 94.465$

پس $94°27'54'' = 94.465°$

6.1.4 دائروی پیمائش (ریڈین) (Circular Measure (Radian))

زاویوں کی پیمائش کا ایک دوسرا نظام ہے جسے دائروی پیمائش کہا جاتا ہے۔ ریڈین جس کی علامت "rad" ہے اکائیوں کے بین الاقوامی نظام (SI) میں زاویے کی اکائی ہے اور یہ زاویے کی پیمائش کی بنیادی اکائی ہے جو ریاضی کی بہت سی شاخوں میں استعمال کی جاتی ہے۔ خاص طور پر تکونیات میں "ریڈین" زاویے کی پیمائش کی اکائی ہے۔ کسی ایسی قوس کے ذریعے دائرے پر مرکز پر بنا ہوا زاویہ جس کی پیمائش اُس دائرے کے رداس کے برابر ہو "ریڈین" کہلاتی ہے۔ ڈگری کے برعکس جس میں دائرے کو 360 برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ موروثی طور پر ریڈین کا تعلق دائرے کی جیومیٹری اور قوس کی لمبائی سے ہے۔

ریڈین کا تاریخی پس منظر:

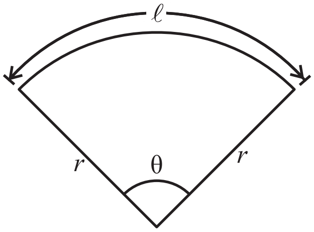
ریڈین میں پیمائش کا تصور ریاضی دانوں نے پہلی دفعہ اٹھارویں صدی میں پیش کیا۔ اِس کے پیچھے بہت پہلے اقلیدس (Euclid) اور ارشمیدس (Archimedes) نے اصول پیش کر دیا تھا۔ لفظ ریڈین کو دائرے کے رداس سے اخذ کیا گیا ہے۔ چوں کہ ریڈین بنیادی طور پر قوس کی لمبائی اور رداس کی نسبت ہے۔ سب سے پہلے سکاٹ لینڈ کے ریاضی دان "جمیز تھومسن (James Thomson)" نے 1873 میں زاویے کی پیمائش کے لیے لفظ ریڈین کا استعمال کیا۔ اُس کے بھائی ولیم تھومسن (William Thomson) جو کہ لارڈ کیلون (Lord Kelvin) کے نام سے جانا جاتا ہے اور طبعیات کا ماہر تھا دونوں ریڈین کی بنیادی ایجاد سے ذاتی طور پر متاثر تھے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

اگر کسی دائرے کا رداس "r" ہو اور قوس کی لمبائی دائرے کے رداس کے برابر ہو تو اُس قوس کے ذریعے بنا ہوا زاویہ θ ایک ریڈین ہو گا۔

$$\theta = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad} \qquad \left(\because \ \theta = \frac{\text{قوس کی لمبائی}}{\text{رداس}} = \frac{\ell}{r} \right)$$



ایک مکمل دائرے میں قوس کی لمبائی محیط ($2\pi r$) کے برابر ہوتی ہے۔ اِس سے مراد:

- مکمل دائرے کے لیے بنا ہوا زاویہ (مکمل گردش) 2π ریڈین یا $360°$ ہوتا ہے۔
- اس لیے $1 \text{ rad} = \dfrac{360^\circ}{2\pi} \approx 57.2958^\circ$ اور
- $1^\circ = \dfrac{2\pi}{360} = 0.01745 \text{ rad}$

ڈگری اور ریڈین کے درمیان تبدیلی:

ریڈین سے ڈگری: $1 \text{ rad} = \dfrac{180}{\pi}$ ڈگری

ڈگری سے ریڈین: $1^\circ = \dfrac{\pi}{180} \text{ rad}$

مثال 5: ریڈین سے ڈگری میں تبدیل کریں:

(i) $\dfrac{5\pi}{3}$ rad　(ii) $\dfrac{7\pi}{6}$ rad　(iii) $\dfrac{11\pi}{6}$ rad　(iv) 1.2 rad

حل:

(i) $\dfrac{5\pi}{3} \text{ rad} = \dfrac{5\pi}{3} \times \dfrac{180^\circ}{\pi} = 300^\circ \qquad \left(\because \ 1 \text{ rad} = \dfrac{180^\circ}{\pi}\right)$

(ii) $\dfrac{7\pi}{6} \text{ rad} = \dfrac{7\pi}{6} \times \dfrac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ$

(iii) $\dfrac{11\pi}{6} \text{ rad} = \dfrac{11\pi}{6} \times \dfrac{180^\circ}{\pi} = 330^\circ$

(iv) $1.2 \text{ rad} = 1.2 \times \dfrac{180^\circ}{\pi} = 68.75^\circ \qquad (\because \ \pi = 3.14159)$

مثال 6: ڈگری سے ریڈین میں تبدیل کریں۔

(i) 15°　(ii) 75°　(iii) 315°　(iv) $15^\circ\,15'$

حل:

(i) $15^\circ = 15 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{12}$ rad یا 0.262 rad

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

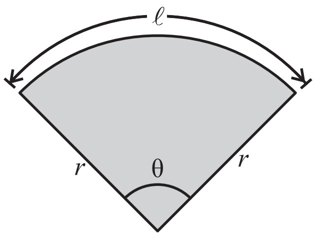
$$75^\circ = 75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12} \text{ rad} \quad \text{یا} \quad 1.309 \text{ rad} \qquad \text{(ii)}$$

$$315^\circ = 315 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{4} \text{ rad} \quad \text{یا} \quad 5.498 \text{ rad} \qquad \text{(iii)}$$

$$15^\circ\, 15' = 15^\circ + \left(\frac{15}{60}\right)^\circ = 15.25^\circ = 15.25 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.266 \text{ rad} \qquad \text{(iv)}$$

چکر	0 چکر	$\frac{1}{12}$ چکر	$\frac{1}{8}$ چکر	$\frac{1}{6}$ چکر	$\frac{1}{4}$ چکر	$\frac{1}{2}$ چکر	1 چکر
ریڈینز	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	2π rad
ڈگریاں	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°

قوس کی لمبائی اور علاقہ کا رقبہ (Arc Length and Area of Sector)



اگر 'r' رداس ہو اور 'ℓ' لمبائی کی قوس کے ذریعے بنایا گیا زاویہ θ (ریڈین) ہو۔

تو علاقہ کی قوس کی لمبائی $= \ell = r\theta$

اور علاقہ کا رقبہ $= A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ:

$$\ell = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$
$$= \frac{\theta}{2\pi} \times 2\pi r \qquad (2\pi \text{ rad} = 360^\circ)$$
$$= r\theta$$

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ:

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$
$$= \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 \qquad (2\pi \text{ rad} = 360^\circ)$$
$$= \frac{1}{2} r^2 \theta$$

پس قوس کی لمبائی $\ell = r\theta$ اور علاقہ کا رقبہ $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

مثال 7: ایک علاقہ کی قوس کی لمبائی معلوم کریں اگر رداس 10 cm اور مرکزی زاویہ $\theta = 60^\circ$ ہو۔

حل: $\theta = 60^\circ$ کو ریڈین میں تبدیل کریں: $\theta = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad

$$\ell = r\theta = 10 \times \frac{\pi}{3} \approx 10.47 \text{ cm}$$

قوس کی لمبائی تقریباً 10.47 cm ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مثال8: ایک علاقہ کا رقبہ معلوم کریں جس میں رداس $r = 8$ cm اور مرکزی زاویہ $\theta = 45°$ ہے۔

حل: $\theta = 45°$ کو ریڈین میں تبدیل کرتے ہیں: $\theta = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ rad

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}\times 8^2 \times \frac{\pi}{4} = 8\pi \, \text{cm}^2 \approx 25.12 \text{ cm}^2$$

پس علاقہ کا رقبہ تقریباً 25.12 cm^2 ہے۔

مثال9: اگر کسی علاقہ میں قوس کی لمبائی 11 cm اور رداس 5 cm ہو تو قوس کے ذریعے بنائے گئے مرکزی زاویہ کی مقدار ریڈین اور ڈگری میں معلوم کریں۔

حل: $\theta = ?$ ؛ $\ell = 11$ cm ؛ $r = 5$ cm

$$\therefore \quad \ell = r\theta$$

$$11 = 5\theta \quad \Rightarrow \theta = \frac{11}{5} = 2.2 \text{ rad}$$

$$\theta = 2.2 \times \frac{180°}{\pi} \approx 126.1°$$

پس قوس کے ذریعے بنائے گئے زاویے کی مقدار ریڈین میں 2.2 rad اور ڈگری میں $126.1°$ ہے۔

Web version of PCTB textbook

مشق 6.1

1۔ درج ذیل زاویے کون سے ربع میں واقع ہیں اور ہر ایک زاویے کے لیے اُس کا کوٹرمینل زاویہ لکھیں:

(i) $65°$ (ii) $135°$ (iii) $-40°$ (iv) $210°$ (v) $-150°$

2۔ درج ذیل کو ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں تبدیل کریں:

(i) $123.456°$ (ii) $58.7891°$ (iii) $90.5678°$

3۔ درج ذیل کو اعشاری ڈگری میں تبدیل کریں:

(i) $65° 32' 15''$ (ii) $42° 18' 45''$ (iii) $78° 45' 36''$

4۔ درج ذیل کو ریڈین میں تبدیل کریں:

(i) $36°$ (ii) $22.5°$ (iii) $67.5°$

5۔ درج ذیل کو ڈگری میں تبدیل کریں:

(i) $\frac{\pi}{16}$ rad (ii) $\frac{11\pi}{5}$ rad (iii) $\frac{7\pi}{6}$ rad

6۔ قوس کی لمبائی اور علاقہ کا رقبہ معلوم کریں اگر:

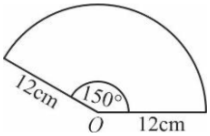
(i) $r = 6$ cm اور مرکزی زاویہ $\frac{\pi}{3}$ ریڈین

(ii) $r = \frac{4.8}{\pi}$ cm اور مرکزی زاویہ $\frac{5\pi}{6}$ ریڈین

NOT FOR SALE-PESRP

7۔ اگر علاقہ کے مرکزی زاویہ کی مقدار $60°$ اور رداس $12\ cm$ ہو تو اُس علاقہ کا رقبہ معلوم کریں اور یہ دائرے کے کُل رقبہ کا کتنا ہو گا؟

8۔ اُس علاقہ کے رقبے کی فی صد معلوم کریں جس کا مرکزی زاویہ $\frac{\pi}{8}$ ریڈین ہو۔



9۔ ایک دائروی علاقہ جس کا رداس $12\ cm$ ہے اور مرکزی زاویہ $150°$ ہے۔ اس علاقے کو کاٹا گیا اور اُس سے ایک کون بنائی گئی۔ اُس کون کی ترچھی اُونچائی اور قاعدے کا رداس معلوم کریں۔

اشارہ : علاقے کی قوس کی لمبائی = کون کا محیط

6.2 تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios)

ایسے تفاعل جو کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں زاویوں اور اضلاع کے تعلق کو ظاہر کریں تکونیاتی تفاعل (Sine, Cosine, Tangent) وغیرہ کہلاتے ہیں اسکی ترقی کی جڑیں انڈین اور اسلامک ریاضی سے ہوتی ہوئی قدیم جیومیٹری تک ملتی ہیں اور اِس نے نشاۃ ثانیہ (Renaissance) کے دوران یورپ میں باضابطہ شکل اختیار کی۔ آج یہ تفاعل کا نظریہ اطلاقی سائنس میں ناگزیر ضرورت بن چکا ہے۔ اب تکونیات سائنس کی بہت سی شاخوں میں جیسا کہ فزکس میں (خاص طور پر ویو تھیوری، انجینئرنگ اور کمپیوٹر گرافک) اس کا استعمال بڑے پیمانے پر کیا جاتا ہے۔

sin، cosine اور tangent کی تاریخ

Nicaea (c. 190 – 120 BC) کا **Hipparchus** کو "تکونیات کا باپ" سمجھا جاتا ہے۔ وہ پہلا شخص تھا جس نے وتر (**chord**) کے افعال کا استعمال کرتے ہوئے فلکیات سے متعلق مسائل کو حل کرنے کے لیے ایک مثلثی جدول مرتب کیا۔ **Hipparchus** نے ایک دائرے کو 360 برابر حصوں میں تقسیم کیا اور اس نظام کو زاویوں کی پیمائش کے لیے استعمال کیا اور ہر حصہ ایک ڈگری کہلاتا ہے۔

اسلامی سنہری دور میں، البطانی **Al-Battani** (**c. 858 – 929 CE**) پہلے لوگوں میں سے تھا جنہوں نے وتر کے افعال کو جدید تفاعل سے تبدیل کیا اور **sine** اور **tangent** کے حسابی جدولوں کو بنایا۔

الخوارزمی **Al-Khwarizmi** (**c. 780–850 CE**)، جو الجبرا میں اپنے کام کے لیے جانا جاتا ہے، اور عمر خیام (**c. 1048 – 1131 CE**) نے کروی تکونیات پر کام کیا، جس کا فلکیات میں اطلاق ہوتا ہے۔

آئزک نیوٹن اور گوٹ فرائیڈ ولہیم لیبنز (**Isaac Newton** and **Gottfried Wilhelm**) (17ویں صدی) نے کیلکولس تیار کیا، جس نے ریاضی کے مزید تجریدی شعبوں میں جیومیٹری سے ہٹ کر تکونیاتی افعال کے استعمال کو مزید وسعت دی۔

تکونیاتی نسبتوں کا اطلاق (Application of Trigonometric Ratios)

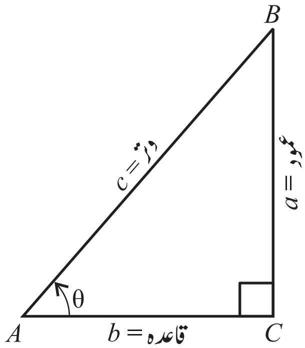
جب ہم کسی کتاب کی موٹائی، پنسل کی لمبائی، کرسی کی اونچائی یا کمرہ جماعت کی لمبائیاں کسی پیمانے یا فیتے کے ذریعے ماپتے ہیں تو یہ براہ راست پیمائش کہلاتی ہے۔ کچھ حالتوں میں براہ راست پیمائش ممکن نہیں ہوتی۔ کیوں کہ یہ مشکل اور خطرناک ہوتی ہیں۔ مثلاً جھنڈے کے پول کے اوپر چڑھ کر اُس کی اونچائی معلوم کرنا بہت مشکل ہے۔ کسی چوٹی کی اونچائی معلوم کرنا بھی بہت مشکل اور خطرناک ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

اس طرح کے مسائل کو ہم تکونیات کی مدد سے بالواسطہ پیمائش کے طریقے سے حل کر سکتے ہیں۔ کسی فاصلے یا اُونچائی کی بالواسطہ پیمائش کے لیے یہ انتہائی کار آمد ہے۔اِس کا سروے، جہاز رانی، انجینئرنگ اور فزیکل سائنس کی بہت سی شاخوں میں بھی اہم کردار ہے۔ تکونیات کے اِن تصورات کو ان مضامین میں مسائل حل کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

6.2.1 ایک حادہ زاویے کی تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios of an Acute Angle)



کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں تکونیاتی نسبتوں کا اطلاق حادہ زاویہ پر ہوتا ہے۔ لیکن اس تصور کو 90° سے بڑے زاویے کے لیے ریاضی کے بہت سے شعبوں اور سائنس میں استعمال کیا جاتا ہے۔

فرض کریں حادہ زاویہ θ کے لحاظ سے قائمۃ الزاویہ مثلث ACB ہے۔

$m\angle ACB = 90^\circ$ کے ساتھ $\theta = m\angle CAB$ (تھیٹا)

مثلث ACB میں ضلع BC عمود جو کہ زاویہ θ کا مخالف ضلع ہے۔ ضلع CA قاعدہ اور ضلع AB وتر کہلاتا ہے۔

فرض کریں کہ $m\overline{BC} = a$ ، $m\overline{AC} = b$ اور $m\overline{AB} = c$ اِس قائمۃ الزاویہ مثلث ACB میں زاویہ θ کے لحاظ سے تکونیاتی نسبتیں درج ذیل ہیں:

$$\sin\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c} \quad : \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c} \quad : \quad \sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \frac{a}{b} \quad : \quad \cot\theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}} = \frac{b}{a}$$

قائمۃ الزاویہ مثلث ACB میں چھے تکونیاتی نسبتیں Sine(sin)، cosine (cos)، Tangent(tan)، Cosecant (cosec یا csc)، Secant (sec) اور Cotangent(cot) ہیں۔

ہم دیکھتے ہیں

$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

$$= \frac{a/c}{b/c} \quad (\text{c سے تقسیم کرنے سے})$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

اِسی طرح

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

ہم دیکھتے ہیں:

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{(i)}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{(ii)}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{(iii)}$$

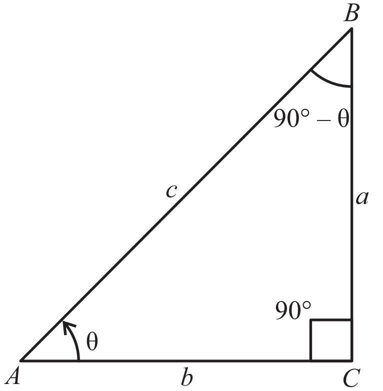
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

6.2.2 کمپلیمنٹری زاویوں کی تکونیاتی نسبتیں

(Trigonometric Ratios of Complementary Angles)

ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ACB جس میں $m\angle A = \theta$ ، $m\angle C = 90^\circ$ اور $m\angle B = 90^\circ - \theta$ زاویہ B کی تکونیاتی نسبتیں استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ



$$\sin\ m\angle B = \sin(90^\circ - \theta) = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \frac{b}{c} \quad \ldots(i)$$

زاویہ A کی تکونیاتی نسبتیں استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\cos\ m\angle A = \cos\ \theta = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \frac{b}{c} \quad \ldots(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\boxed{\sin(90^\circ - \theta) = \cos\ \theta}$$

اسی طرح، ہمارے پاس ہے:

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\ \theta \quad ; \quad \tan(90^\circ - \theta) = \cot\ \theta \quad ; \quad \cot(90^\circ - \theta) = \tan\ \theta$$
$$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta \quad ; \quad \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$

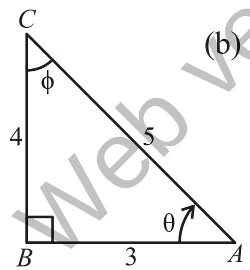
مشق 6.2

1۔ درج ذیل قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں سے ہر ایک کے لیے تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔

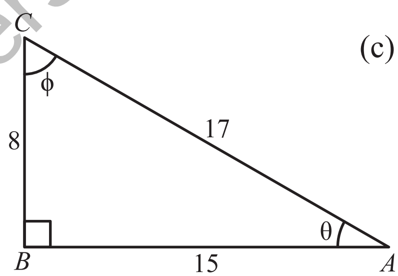
(i) $\sin\theta$　(ii) $\cos\theta$　(iii) $\tan\theta$　(iv) $\sec\theta$　(v) $\operatorname{cosec}\theta$

(vi) $\cot\phi$　(vii) $\tan\phi$　(viii) $\operatorname{cosec}\phi$　(ix) $\sec\phi$　(x) $\cos\phi$

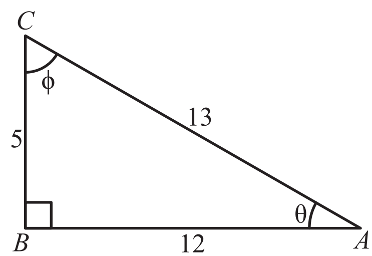
(a)



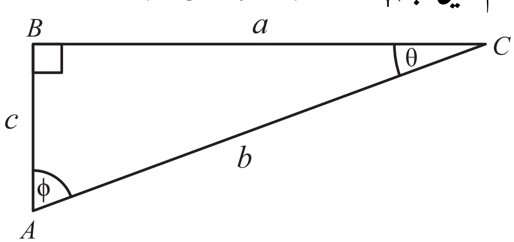
(b)



(c)



2۔ درج ذیل قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں جبکہ $m\angle A = \phi$ اور $m\angle C = \theta$۔



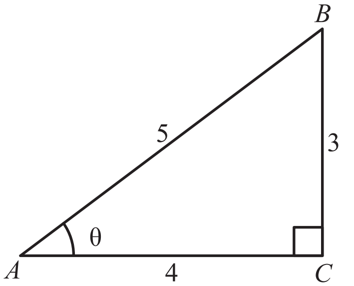
(i) $\sin\theta$　(ii) $\cos\theta$

(iii) $\tan\theta$　(iv) $\sin\phi$

(v) $\cos\phi$　(vi) $\tan\phi$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



3۔ دی گئی شکل سے درج ذیل ثابت کریں۔

(i) $\sin\theta\ \ \text{cosec}\,\theta = 1$

(ii) $\cos\theta\ \ \sec\theta = 1$

(iii) $\tan\theta\ \ \cot\theta = 1$

4۔ خالی جگہ پُر کریں۔

(i) $\sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) =$ ____________

(ii) $\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) =$ ____________

(iii) $\tan 30^\circ = \tan(90^\circ - 60^\circ) =$ ____________

(iv) $\tan 60^\circ = \tan(90^\circ - 30^\circ) =$ ____________

(v) $\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) =$ ____________

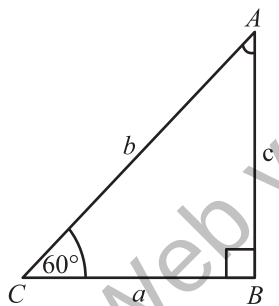
(vi) $\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) =$ ____________

(vii) $\sin 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) =$ ____________

(viii) $\tan 45^\circ = \tan(90^\circ - 45^\circ) =$ ____________

(ix) $\cos 45^\circ = \cos(90^\circ - 45^\circ) =$ ____________

5۔ قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle B = 90^\circ$ اور C ایک حادہ زاویہ ہے جس کی مقدار 60° ہے۔ مزید $\sin m\angle A = \dfrac{a}{b}$ تو درج ذیل تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔



(i) $\dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}}$　　(ii) $\cos 60^\circ$

(iii) $\tan 60^\circ$　　(iv) $\text{cosec}\,\dfrac{\pi}{3}$

(v) $\cot 60^\circ$　　(vi) $\sin 30^\circ$

(vii) $\cos 30^\circ$　　(viii) $\tan\dfrac{\pi}{6}$

(ix) $\sec 30^\circ$　　(x) $\cot 30^\circ$

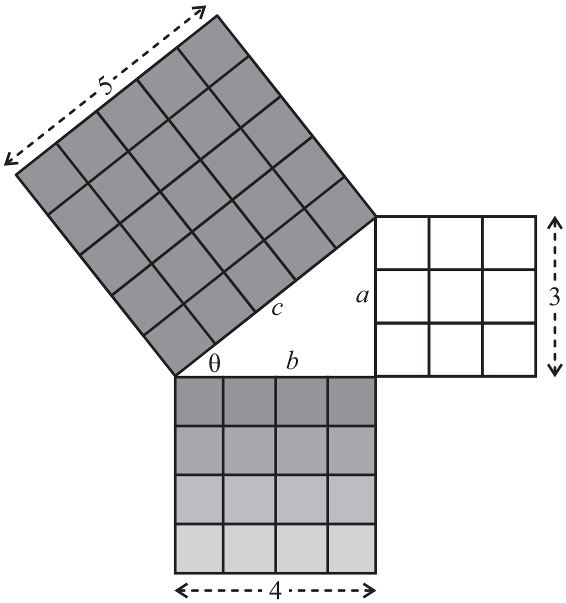
6.3 تکونیاتی اکائیاں (Trigonometric Identities)

بنیادی تکونیاتی اکائیاں (Fundamental Trigonometric Identities)

ہم کچھ تکونیاتی بنیادی اکائیوں کا تذکرہ کریں گے جو تکونیات میں استعمال ہوتی ہیں۔ اِن بنیادی اکائیوں کی جیومیٹری میں اصل بنیاد مسئلہ فیثا غورث ہے۔ ”قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع باقی دو اضلاع کی مقداروں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔“

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



$c^2 = a^2 + b^2$

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$25 = 9 + 16$

دی ہوئی شکل میں عمود کی لمبائی "a" قاعدہ کی لمبائی "b"

اور وتر کی لمبائی "c" کے برابر ہو تو مسئلہ غورث کی رو سے

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2} \quad \ldots\text{(i)}$$

طرفین کو c^2 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1} \quad \ldots\text{(ii)}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

طرفین کو b^2 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta} \quad \ldots\text{(iii)}$$

طرفین کو a^2 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\boxed{1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta} \quad \ldots\text{(iv)}$$

اکائیاں (ii)، (iii) اور (iv) مسئلہ فیثا غورث کی اکائیاں کہلاتی ہیں۔

مثال 10: ثابت کریں: $(\sec^2\theta - 1)\cos^2\theta = \sin^2\theta$

حل:

$$\text{L.H.S} = (\sec^2\theta - 1)\cos^2\theta$$

$$= \tan^2\theta \cdot \cos^2\theta \qquad (\because\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta)$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \cos^2\theta \qquad \left(\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \sin^2\theta = \text{R.H.S}$$

پس $(\sec^2\theta - 1)\cos^2\theta = \sin^2\theta$

مثال 11: ثابت کریں: $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\ \text{cosec}\,\theta$

Web version of PCTB textbook

حل:

L.H.S = tan θ + cot θ

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta\cdot\sin\theta + \cos\theta\cdot\cos\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\,\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\,\cos\theta} \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta = \text{R.H.S.}$$

پس $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

مثال 12: ثابت کریں: $\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta} - \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$

حل:

$$\text{L.H.S} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1+\cos\theta-1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\text{R.H.S} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1-1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

پس L.H.S = R.H.S

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال13: ثابت کریں: $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

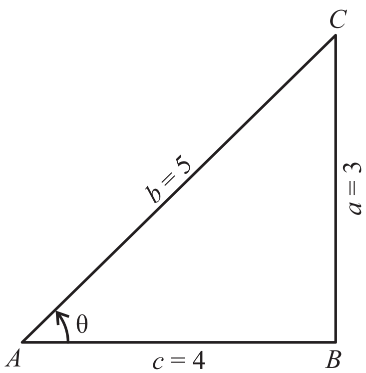
حل:

$$\begin{aligned} L.H.S &= \sin^6\theta + \cos^6\theta \\ &= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3 \\ &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^4\theta + \cos^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta) \\ &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta \\ &= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta = R.H.S \end{aligned}$$

پس $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

مثال14: اگر $\tan\theta = \frac{3}{4}$ ہو تو باقی تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں جب کہ θ پہلے ربع میں واقع ہوں۔

حل: دیا گیا ہے: $\tan\theta = \frac{3}{4} = \frac{a}{c}$



جب کہ: $a = 3, c = 4$

مسئلہ فیثا غورث کی رو سے

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 \\ &= 9 + 16 = 25 \\ \Rightarrow \quad b &= 5 \end{aligned}$$

اس لیے

$\sin\theta = \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$; $\text{coses}\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{5}{3}$

$\cos\theta = \frac{c}{b} = \frac{4}{5}$; $\sec\theta = \frac{b}{c} = \frac{5}{4}$

$\cot\theta = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$

مشق 6.3

1۔ اگر θ پہلے ربع میں ہے تو θ کی باقی تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔

(i) $\sin\theta = \frac{2}{3}$ (ii) $\cos\theta = \frac{3}{4}$ (iii) $\tan\theta = \frac{1}{2}$

(iv) $\sec\theta = 3$ (v) $\cot\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Web version of PCTB textbook
NOT FOR SALE-PESRP

درج ذیل تکونیاتی اکائیوں کو ثابت کریں:

2۔ $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

3۔ $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta}$

4۔ $\dfrac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$

5۔ $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

6۔ $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

7۔ $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

8۔ $(\sec\theta - \tan\theta)^2 = \dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

9۔ $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$

10۔ $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$

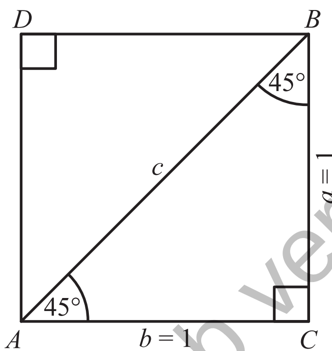
11۔ $\sin^3\theta - \cos^3\theta = (\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta)$

12۔ $\sin^6\theta - \cos^6\theta = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(1 - \sin^2\theta\cos^2\theta)$

6.4 مخصوص زاویوں کی تکونیاتی نسبتوں کی مقداریں

(Values of Trigonometric Ratios of Special Angles)

$45°\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$ کی تکونیاتی نسبتیں



ایک ایسا مربع $ACBD$ لیں جس کے ضلع کی لمبائی ایک اکائی ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ وتر زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔ اس لیے مثلث ABC میں

$m\angle A = m\angle B = 45°$ اور $m\angle C = 90°$

مثلث ABC میں مسئلہ فیثا غورث کی رو سے

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 1 + 1$$
$$c^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2}$$

تکونیاتی نسبتیں:

$$\sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \text{cosec}\, 45° = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

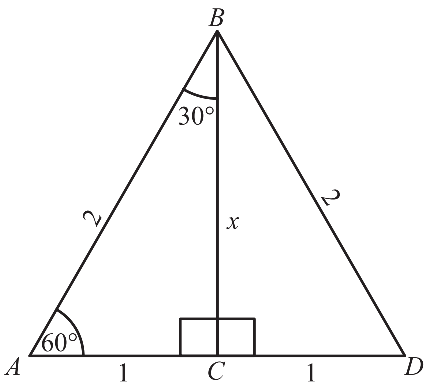
$$\cos 45° = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \sec 45° = \frac{c}{b} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45° = \frac{a}{b} = 1 \quad ; \quad \cot 45° = \frac{b}{a} = 1$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$ اور $60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$ کی تکونیاتی نسبتیں



ایک ایسی مساوی الاضلاع مثلث لیں جس میں اُس کے ضلع کی لمبائی 2 اکائی ہو۔

ضلع AD پر BC عمودی ناصف کھینچا۔ نقطہ C ضلع AD کا درمیانی نقطہ ہے۔

اِس لیے $\quad m\overline{AC} = m\overline{CD}$ جس میں

$m\angle BAC = 60^\circ$ ، $m\angle ABC = 30^\circ$ اور $m\angle ACB = 90^\circ$

فرض کریں $\quad m\overline{BC} = x$ اکائیاں

مثلث ABC میں مسئلہ فیثا غورث کی رو سے

$$2^2 = 1^2 + x^2$$

$$x^2 = 4 - 1 \;\Rightarrow\; x^2 = 3 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{3}\ (m\overline{BC} = \sqrt{3}\ \text{اکائیاں})$$

$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$ کی تکونیاتی نسبتیں

قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle B = 30^\circ$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad ; \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$60^\circ \left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$ کی تکونیاتی نسبتیں

قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle A = 60^\circ$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad ; \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \sec 60^\circ = 2 \quad ; \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

جدول میں اِن نتائج کو ایسے لکھا جاتا ہے۔

θ	$0°$	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

مشق 6.4

1۔ کیلکولیٹر کے استعمال کے بغیر درج ذیل تکونیاتی نسبتوں کی مقداریں معلوم کریں۔

(i) $\sin 30°$ (ii) $\cos 30°$ (iii) $\tan\frac{\pi}{6}$ (iv) $\tan 60°$

(v) $\sec 60°$ (vi) $\cos\frac{\pi}{3}$ (vii) $\cot 60°$ (viii) $\sin 60°$

(ix) $\sec 30°$ (x) $\operatorname{cosec} 30°$ (xi) $\sin 45°$ (xii) $\cos\frac{\pi}{4}$

2۔ پڑتال کریں:

(i) $2\sin 60°\cos 60°$ (ii) $2\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}$

(iii) $2\sin 45° + 2\cos 45°$ (iv) $\sin 60°\cos 30° + \cos 60°\sin 30°$

(v) $\cos 60°\cos 30° - \sin 60°\sin 30°$ (vi) $\sin 60°\cos 30° - \cos 60°\sin 30°$

(vii) $\cos 60°\cos 30° + \sin 60°\sin 30°$ (viii) $\tan\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6} + 1$

3۔ اگر $\sin\frac{\pi}{4}$ اور $\cos\frac{\pi}{4}$ کی قیمت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ہو تو درج ذیل مقداریں معلوم کریں۔

(i) $2\sin 45° - 2\cos 45°$ (ii) $3\cos 45° + 4\sin 45°$

(iii) $5\cos 45° - 3\sin 45°$

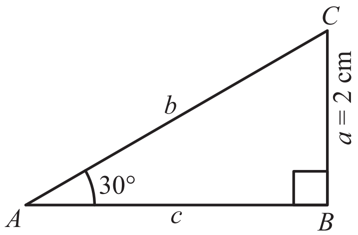
6.5 مثلث کا حل (Solution of a Triangle)

ہم جانتے ہیں کہ کسی مثلث میں تین اضلاع اور تین زاویے ہوتے ہیں۔ اِن چھے اجزا میں سے اگر ہمیں تین مقداریں جس میں کم از کم ایک ضلع معلوم ہو تو پھر ہم باقی مقداریں معلوم کر سکتے ہیں۔

باقی اجزا کی مقداریں معلوم کرنا مثلث کا حل کہلاتا ہے یہاں ہم صرف قائمۃ الزاویہ مثلث کو حل کرنا سیکھیں گے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



پہلی صورت: جب ایک ضلع اور ایک زاویہ کی مقدار دی گئی ہو۔

مثال 15: مثلث ABC حل کیجیے جس میں $m\angle A = 30°$ ، $m\angle B = 90°$ اور $a = 2$ cm

حل: ہمیں b، c اور $m\angle C$ معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

تو
$$m\angle C = m\angle B - m\angle A$$
$$= 90° - 30°$$
$$= 60° \qquad \ldots(i)$$

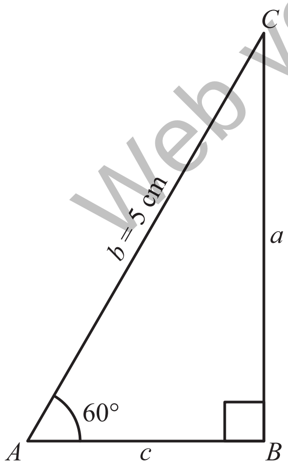
$$\frac{a}{b} = \sin 30°$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2}{b} = \sin 30° \qquad (\because a = 2)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2}{b} = \frac{1}{2} \qquad \left(\because \sin 30° = \frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \quad b = 4 \text{ cm} \qquad \ldots(ii)$$

اور
$$\frac{a}{c} = \tan 30°$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \left(\because a = 2, \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

پس
$$c = 2\sqrt{3} \text{ cm} \qquad \ldots(iii)$$

پس (i)، (ii) اور (iii) مطلوبہ نتائج ہیں۔

دوسری صورت: جب ایک وتر اور ایک زاویہ دیا گیا ہو۔



مثال 16: مثلث ABC حل کریں جب $m\angle A = 60°$ ، $b = 5$ cm اور $m\angle B = 90°$

حل: ہمیں a، c اور $m\angle C$ معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

$$m\angle A = 60°$$
$$m\angle B = 90°$$
$$m\angle C = m\angle B - m\angle A$$
$$= 90° - 60°$$
$$= 30° \qquad \ldots(i)$$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

اب
$$\frac{a}{b} = \sin 60^\circ$$
$$\frac{a}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \left(\because b = 5, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \quad a = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \quad a = 4.33 \text{ cm} \quad \ldots\text{(ii)}$$

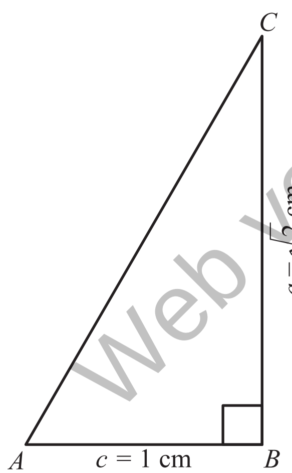
اور
$$\frac{c}{b} = \cos 60^\circ$$
$$\frac{c}{5} = \frac{1}{2} \qquad \left(\because b = 5, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \quad c = \frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow \quad c = 2.5 \text{ cm} \quad \ldots\text{(iii)}$$

پس(i)، (ii)اور(iii)مطلوبہ نتائج ہیں۔

تیسری صورت: جب دو اضلاع کی مقداریں دی گئی ہوں۔

مثال17: مثلث ABC حل کریں جب کہ $a = \sqrt{2}$ cm، $c = 1$ cm اور $m\angle B = 90^\circ$

حل: ہمیں b، $m\angle A$ اور $m\angle C$ معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔



مسئلہ فیثاغورث کی رو سے
$$b^2 = c^2 + a^2$$
یا $$b^2 = (1)^2 + (\sqrt{2})^2$$
یا $$b^2 = 1 + 2$$
یا $$b^2 = 3$$
یا $$b = \sqrt{3} \text{ cm} \quad \ldots\text{(i)}$$

اب
$$\sin m\angle A = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow m\angle A = \sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} = 54.7^\circ$$
$$\Rightarrow \quad m\angle A = 54.7^\circ \quad \ldots\text{(ii)}$$

اور
$$m\angle C = m\angle B - m\angle A$$
$$= 90^\circ - 54.7^\circ$$
$$= 35.3^\circ \quad \ldots\text{(iii)}$$

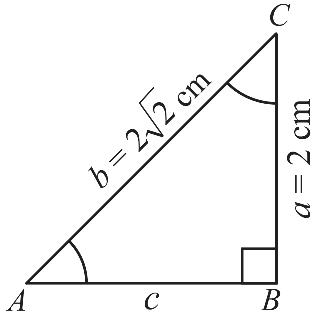
پس(i)، (ii)اور(iii)مطلوبہ نتائج ہیں۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

چوتھی صورت: جب ایک وتر اور ایک ضلع کی مقدار دی گئی ہو۔

مثال 18: مثلث ABC حل کریں جب کہ $a = 2$ cm ، $b = 2\sqrt{2}$ cm اور $m\angle B = 90^{\circ}$

حل: ہمیں $m\angle A$ ، $m\angle C$ اور c معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔



مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$b^2 = a^2 + c^2$$

یا $$c^2 = b^2 - a^2$$

$$= (2\sqrt{2})^2 - (2)^2$$

$$= 8 - 4 = 4$$

یا $$c = 2 \text{ cm} \quad \ldots(i)$$

اب $$\frac{c}{b} = \cos m\angle A$$

یا $$\frac{c}{b} = \cos m\angle A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad m\angle A = 45^{\circ} \quad \ldots(ii)$$

پس $$m\angle C = m\angle B - m\angle A$$

$$= 90^{\circ} - 45^{\circ}$$

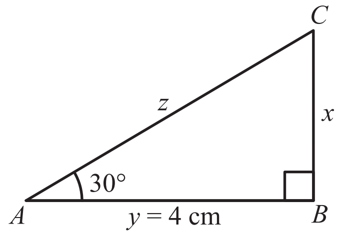
$$= 45^{\circ} \quad \ldots(iii)$$

پس (i)، (ii) اور (iii) مطلوبہ نتائج ہیں۔

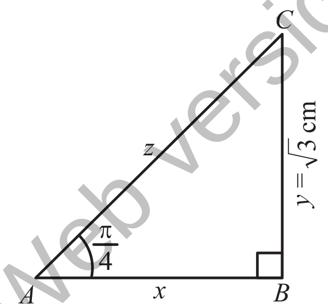
مشق 6.5

1- درج ذیل باقاعدہ قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں x، y ، z کی مقداریں معلوم کریں۔

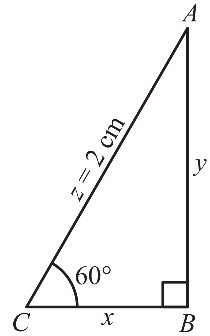
(i)



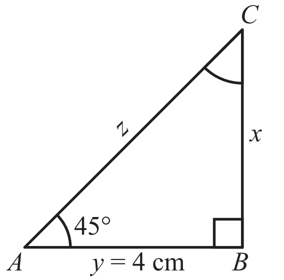
(ii)



(iii)



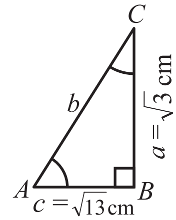
(iv)



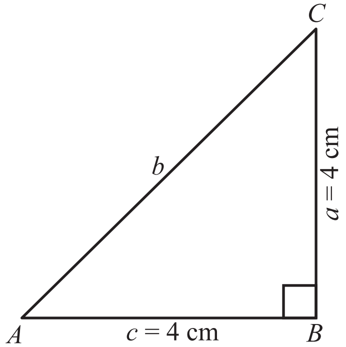
NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

2۔ درج ذیل مثلثوں کے نامعلوم اضلاع اور زاویے معلوم کریں۔

(i)



(ii)



3۔ ایک مربع کھیت کے ہر ضلع کی لمبائی 60 میٹر ہے اُس کھیت کے وتروں کی مقداریں معلوم کریں۔

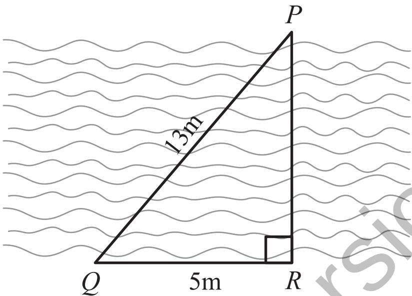
4۔ درج ذیل مثلثوں کو حل کریں جب کہ $m\angle B = 90°$:

(i) $m\angle C = 60°,\ c = 3\sqrt{3}$ cm (ii) $m\angle C = 45°,\ a = 8$ cm

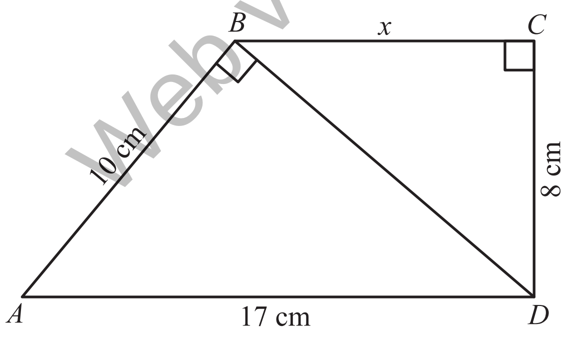
(iii) $a = 12$ cm, $c = 6$ cm (iv) $m\angle A = 60°,\ c = 4$ cm

(v) $m\angle A = 30°,\ c = 4$ cm (vi) $b = 10$ cm, $a = 6$ cm

5۔ فرض کریں Q اور R دو نقاط نہر کے ایک ہی کنارے پر واقع ہے۔ ایک اور نقطہ P نقطہ R کی سیدھ میں دوسرے کنارے پر لیا گیا ہے۔ نہر کی چوڑائی معلوم کریں اور زاویہ PQR کی مقدار ریڈین میں معلوم کریں۔



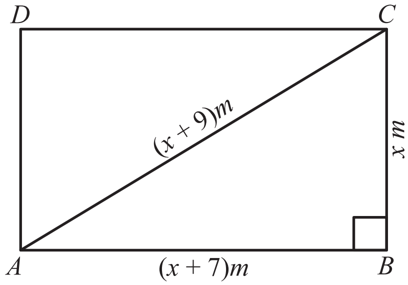
6۔ سامنے دی گئی شکل میں x کی لمبائی معلوم کریں۔



7۔ ایک سیڑھی دیوار کے ساتھ اِس طرح کھڑی کی گئی ہے کہ اُس کا پایا دیوار سے 2 میٹر کے فاصلے پر ہے اگر سیڑھی کی لمبائی 8 میٹر ہو تو دیوار کی بلندی معلوم کریں۔

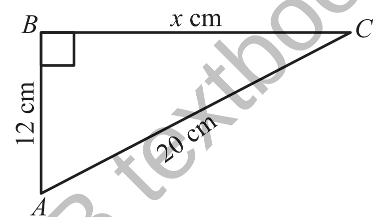
NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

8۔ ایک مستطیلی کھیت کا وتر $(x + 9)$ m اور اضلاع $(x + 7)$ m اور x m ہیں۔ x کی قیمت معلوم کریں۔

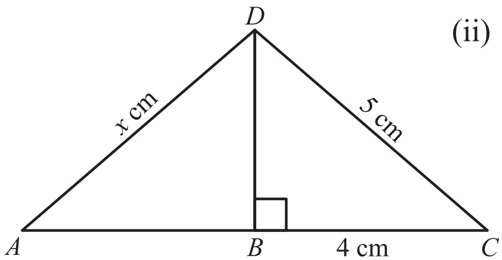


9۔ ہر ایک جزو میں x کی قیمت معلوم کریں۔

(i)



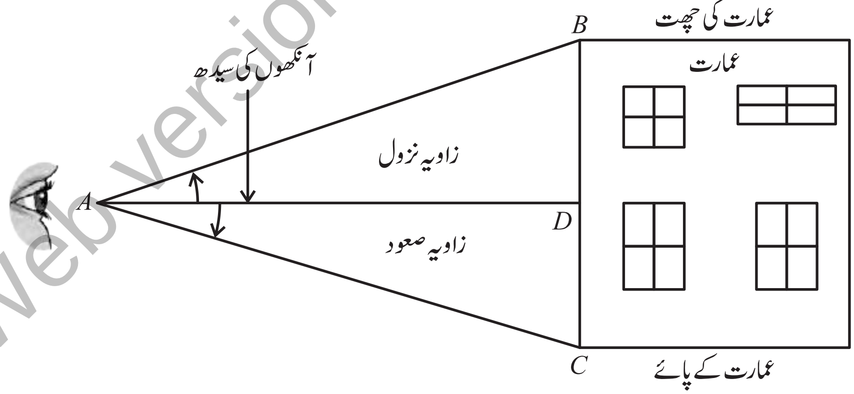
(ii)



$m\overline{AB} = m\overline{BC}$

6.6 زاویہ صعود اور زاویہ نزول
(The Angle of Elevation and the Angle of Depression)

کسی افقی خط AD (آنکھ کی سیدھ) اور نقطہ A (آنکھ) سے عمارت کی چھت تک کھینچے گئے خط AB کے درمیان زاویہ نزول کہلاتا ہے۔

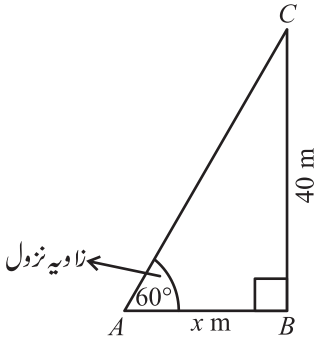


کسی افقی خط AD (آنکھ کی سیدھ) اور نقطہ A (آنکھ) سے عمارت کی بنیاد تک کھینچے گئے خط AC کے درمیان زاویہ صعود کہلاتا ہے۔

مثال 19: جب زمین کی سطح کے کسی نقطہ سے 40 m اونچے ستون کے اوپر والے سرے کو دیکھا جائے تو زاویہ نزول $60°$ بنتا ہے۔ نقطہ اور ستون کے پائے کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



حل: مثلث ABC میں:

$$m\overline{BC} = 40 \text{ m}$$

$$m\angle A = 60^\circ$$

فرض کریں $m\overline{AB} = x$ (نقطہ B ستون $\overline{BC}$ کا پایہ ہے)

قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں

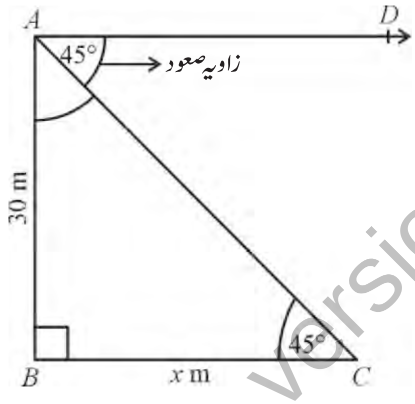
$$\tan 60^\circ = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{40}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{40}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad x = 23.09 \text{ m}$$

پس نقطہ A سے ستون کے پائے کا فاصلہ 23.09 m ہے۔



مثال 20: ایک نگرانی کے مینار (lookout tower) کے اوپر سے کسی عمارت کا زاویہ زمینی سطح پر 45° ہے۔ اگر مینار کی اونچائی 30 m ہو تو ایک آدمی مینار سے کتنا دور ہے؟

حل: مثلث ABC میں، AB مینار ہے اور نقطہ C آدمی کی پوزیشن ہے۔

ہمارے پاس ہے

$$m\overline{AB} = 30 \text{ m}$$

$$m\angle CAD = m\angle C = 45^\circ$$

$$m\overline{BC} = x \text{ m} = ?$$

فرض کریں قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں قاعدہ ہو تو

$$\tan 45^\circ = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{30}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x = 30 \text{ m}$$

پس آدمی مینار سے 30 m دُور ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مشق 6.6

1۔ زمین کی سطح پر 40 m کے فاصلہ سے کسی جھنڈے کی پوسٹ سے اوپر والی سطح کا زاویہ نزول 60° ہے۔ پوسٹ کی بلندی معلوم کریں۔

2۔ ایک مساوی الساقین مثلث میں راسی زاویہ 120° ہے۔ اگر مثلث کے قاعدہ کی لمبائی 10 cm ہو تو اُس کے عمود کی مقدار معلوم کریں۔

3۔ ایک درخت کی اونچائی 72 m ہے۔ اس درخت سے 100 m کے فاصلہ سے اِس کے اوپر والے سرے کا زاویہ نزول معلوم کریں۔

4۔ ایک سیڑھی زمین کے ساتھ 60° کا زاویہ بناتی ہے اور دیوار کے ساتھ 10 m کی بلندی تک پہنچتی ہے۔ اِس سیڑھی کی لمبائی معلوم کریں۔

5۔ سمندر کی سطح سے ایک روشنی کے مینار کی اونچائی 150 m ہے اگر اِس مینار کی اوپر والی سطح سے کسی بحری جہاز کا زاویہ صعود 60° ہو تو اِس مینار اور بحری جہاز کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔

6۔ زمین کی سطح کے ایک نقطہ سے کسی ستون کی اوپر والی سطح کا زاویہ نزول 15° ہے۔ اگر ستون کی طرف 100 m چلنے کے بعد زاویہ نزول کی مقدار 30° ہو جاتی ہے تو ستون کی اونچائی معلوم کریں۔

7۔ اگر 300 m اونچے مینار کا سایہ 450 m ہو تو سورج کے زاویہ نزول کی مقدار معلوم کریں۔

8۔ کسی پہاڑی کی چوٹی کا زاویہ نزول 25° ہے۔ پہاڑی کی طرف 100 m چلنے کے بعد زاویہ نزول کی مقدار 45° ہو جاتی ہے پہاڑی کی اونچائی معلوم کریں۔

9۔ 300 m اونچی پہاڑی کی چوٹی سے نزدیکی دریا کے ساحل پر کسی نقطہ کا زاویہ صعود 70° کا ہے اور دریا کے دوسرے کنارے کا زاویہ صعود 50° کا ہے۔ دریا کی چوڑائی معلوم کریں اور پہاڑی کی بنیاد سے دریا کا فاصلہ معلوم کریں۔

10۔ ایک پتنگ کے ساتھ 120 m لمبا دھاگہ بندھا ہوا ہے۔ اور اس کا زاویہ نزول 50° کا ہے۔ یہ پکڑنے والے کے ہاتھ سے کتنی دور ہے۔ (فرض کریں کہ دھاگہ تنا ہوا ہے)

جائزہ مشق 6

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) ریڈین میں $\tan^{-1} 2$ کی قدر ہے:

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{3\pi}{2}$ (c) $1.11\,\pi$ (d) 1.11

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(ii) قائمۃ الزاویہ مثلث میں، وتر 13 اکائیاں اور ایک زاویہ $\theta = 30°$ ہے۔ مخالف ضلع کی لمبائی ہے:

(a) 6.5 اکائیاں (b) 7.5 اکائیاں (c) 6 اکائیاں (d) 5 اکائیاں

(iii) عمارت سے 50 m دور کھڑا شخص عمارت کی چوٹی کو 45° کی بلندی کے زاویے پر دیکھتا ہے۔ عمارت کی اونچائی ہے:

(a) 50 m (b) 25 m (c) 35 m (d) 70 m

(iv) $\sec^2\theta - \tan^2\theta =$ __________

(a) $\sin^2\theta$ (b) 1 (c) $\cos^2\theta$ (d) $\cot^2\theta$

(v) اگر $\sin\theta = \frac{3}{5}$ اور θ ایک حادہ زاویہ ہو تو $\cos^2\theta =$ __________ ۔

(a) $\frac{7}{25}$ (b) $\frac{24}{25}$ (c) $\frac{16}{25}$ (d) $\frac{4}{25}$

(vi) $\frac{5\pi}{24}$ rad $=$ __________ ۔

(a) 30° (b) 37.5° (c) 45° (d) 52.5°

(vii) $292.5° =$ __________ rad

(a) $\frac{17\pi}{6}$ (b) $\frac{17\pi}{4}$ (c) 1.6π (d) 1.625π

(viii) درج ذیل میں سے کون سی ایک درست تکونیاتی اکائی ہے؟

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ (b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

(c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$ (d) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$

(ix) $\sin 60° =$ __________

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\sqrt{(3)^2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(x) $\cos^2 100\pi + \sin^2 100\pi =$ __________

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

2۔ دیے گئے زاویوں کو:

(a) ریڈین میں تبدیل کریں اور جواب کو π کی شکل میں لکھیں۔

(i) 255° (ii) 75° 45′ (iii) 142.5°

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(b) ریڈین سے ڈگری میں تبدیل کریں اور جواب ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں لکھیں۔

(i) $\frac{17\pi}{24}$ (ii) $\frac{7\pi}{12}$ (iii) $\frac{11\pi}{16}$

3۔ درج ذیل تکونیاتی اکائیوں کو ثابت کریں:

(i) $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

(ii) $\sin\theta\,(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta) = \frac{1}{\sec^2\theta}$

(iii) $\frac{\operatorname{cosec}\theta - \sec\theta}{\operatorname{cosec}\theta + \sec\theta} = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

(iv) $\tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta\,\cos\theta}$

(v) $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} + \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{2}{1-2\sin^2\theta}$

(vi) $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = (\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)^2$

4۔ اگر $\tan\theta = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ہو تو باقی تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں جب θ پہلے ربع میں ہو۔

5۔ زمین پر ایک مقام سے 30 m اونچی عمارت کی چوٹی کا زاویہ $28°$ ہے۔ عمارت کی بنیاد سے مقام کتنا دور ہے؟

6۔ دیوار کے ساتھ لگی ہوئی سیڑھی زمین کے ساتھ $65°$ کا زاویہ بناتی ہے۔ اگر سیڑھی 10 m لمبی ہو تو یہ دیوار پر کتنی اونچائی تک پہنچتی ہے؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP