یونٹ 5

یک درجی مساواتیں اور غیر مساواتیں
(Linear Equations and Inequalities)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- یک درجی مساواتوں اور غیر مساواتوں کو ناطق عددی سروں کے ساتھ حل کر سکیں اور ان کے حل سیٹ کو عددی خط پر ظاہر کر سکیں۔
- دو یک درجی غیر مساواتوں کو ایک ساتھ دو نا معلوم مقداروں کے ساتھ حل کر سکیں۔
- دو نا معلوم مقداروں میں دو یک درجی غیر مساواتوں سے بننے والے خِطّوں کی جانچ اور شناخت کر سکیں۔
- قابل عمل حل میں نقاط کا استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں معلوم کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

حقیقی دنیا کے مسائل کو ماڈل بنانے اور حل کرنے کے لیے یک درجی مساواتوں اور غیر مساواتوں کو مختلف شعبوں میں وسیع پیمانے پر استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ متغیرات کے درمیان تعلقات کو سمجھنے اور فیصلے کرنے میں مدد کرتی ہیں۔ اس یونٹ میں ہمارا بنیادی مقصد کچھ محدود پابندیوں کے ساتھ زیر غور مقدار کو (زیادہ سے زیادہ یا کم از کم) موافق بنانا ہوگا۔

5.1 یک درجی مساوات (Linear Equation)

ایسی مساوات جو $ax + b = 0$ کی شکل میں ہو جہاں 'a' اور 'b' مستقل مقداریں ہیں، $a \neq 0$ اور 'x' ایک متغیر ہے، اسے ایک متغیر میں یک درجی مساوات کہا جاتا ہے۔ یک درجی مساوات میں متغیر کی سب سے زیادہ قوت ہمیشہ 1 ہوتی ہے۔

> **یاد رکھیے!**
> $ax + b = 0$ جب کہ $a \neq 0$ کو ایک متغیر میں یک درجی مساوات کی معیاری شکل بھی کہا جاتا ہے۔

5.1.1 ایک متغیر میں یک درجی مساوات کو حل کرنا
(Solving a Linear Equation in One Variable)

ایک متغیر میں یک درجی مساوات کو حل کرنے کا مطلب متغیر کی قیمت معلوم کرنا ہوتا ہے جو مساوات کو درست بناتا ہے۔ مساوات کو حل کرنے کے لیے مساوات کے ایک طرف متغیر کو الگ کر کے اس کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

ایک متغیر میں یک درجی مساوات کو حل کرنے کے اقدامات

دونوں اطراف کو مختصر کرنا (اگر ضروری ہو)

- مساوات کے اطراف ایک جیسی رقوم کو اکٹھا کریں۔
- اگر بریکٹیں ہوں تو ان کو کھول کر جملوں کو مختصر کریں۔

متغیر مقدار کو الگ کرنا

- تمام متغیر مقداروں کو مساوات کے ایک طرف اور تمام مستقل مقداروں کو دوسری طرف منتقل کریں۔ ایسا کرنے کے لیے ہم مساوات کے دونوں اطراف رقوم کو جمع اور تفریق کر سکتے ہیں۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

متغیر کے لیے حل کرنا

- جب متغیر رقم الگ ہو جائے تو متغیر کے عددی سر کو مساوات کے دونوں اطراف ضرب یا تقسیم کر کے حل کریں۔

اپنا حل چیک کرنا

- حل کو اصل مساوات میں درج کریں تاکہ یہ یقینی بنایا جاسکے کہ حل درست ہے۔

مثال 1: درج ذیل مساواتوں کو حل کریں اور عددی خط پر ظاہر کریں۔

(i) $3x-5=7$　　　(ii) $\frac{x-2}{5}-\frac{x-4}{2}=2$

حل: (i)

$$3x-5=7$$
$$3x-5+5=7+5$$
$$3x=12$$
$$\frac{3x}{3}=\frac{12}{3}$$
$$x=4$$

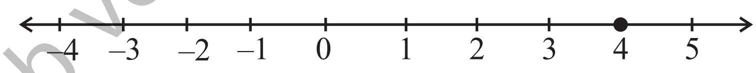
> **یاد رکھیے!**
> ایک متغیر میں یک درجی مساوات کا صرف ایک حل ہوتا ہے۔

پڑتال: دی گئی مساوات میں $x=4$ درج کرنے سے

$$3(4)-5=7$$
$$12-5=7$$
$$7=7$$

پس $x=4$ اس مساوات کا حل ہے کیوں کہ یہ اصلی مساوات کو صحیح ثابت کرتا ہے۔

عددی خط پر حل کا اظہار:



شکل 5.1

(ii)

$$\frac{x-2}{5}-\frac{x-4}{2}=2$$
$$\frac{2(x-2)-5(x-4)}{10}=2$$
$$\frac{2x-4-5x+20}{10}=2$$
$$\frac{-3x+16}{10}=2$$

> **یاد رکھیے!**
> ہم اپنے کام کی درستی کو یقینی بنانے کے لیے یک درجی مساوات کو حل کرنے کے بعد اِس کے حل کو چیک کرتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

$$\frac{-3x+16}{10}\times 10 = 2\times 10$$

$$-3x+16 = 20$$

$$-3x+16-16 = 20-16$$

$$-3x = 4$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

پڑتال: دی گئی مساوات میں $x = -\frac{4}{3}$ درج کرنے سے

$$\frac{-\frac{4}{3}-2}{5} - \frac{-\frac{4}{3}-4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{-4-6}{3}}{5} - \frac{\frac{-4-12}{3}}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-10}{15} - \frac{-16}{6} = 2$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 2$$

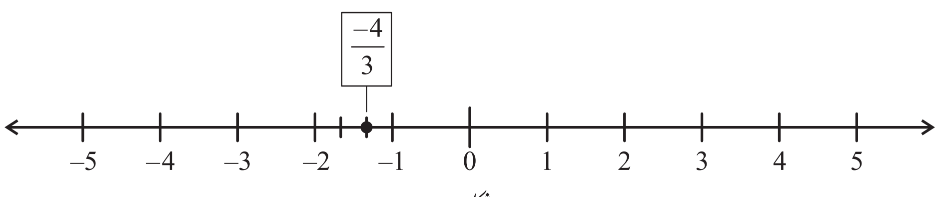
$$\Rightarrow \quad \frac{-2+8}{3} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{3} = 2$$

$$\Rightarrow \quad 2 = 2$$

پس $x = -\frac{4}{3}$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

عددی خط پر حل کا اظہار:



شکل 5.2

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

5.2 یک درجی غیر مساواتیں (Linear Inequalities)

غیر مساواتوں کو درج ذیل چار علامتوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$>$ (بڑا ہے) ، $<$ (چھوٹا ہے) ، $\geq$ (بڑا اور برابر ہے) ، $\leq$ (چھوٹا اور برابر ہے)

مثال کے طور پر:

(i) $ax < b$　　(ii) $ax + b \geq c$　　(iii) $ax + by > c$　　(iv) $ax + by \leq c$

غیر مساواتیں ہیں۔ غیر مساواتیں (i) اور (ii) ایک متغیر میں ہیں جب کہ غیر مساواتیں (iii) اور (iv) دو متغیرات میں ہیں۔ اگر غیر مساواتوں کو مساوی آسان شکل میں تبدیل کیا جائے تو درج ذیل عوامل غیر مساواتوں کی ترتیب کو متاثر نہیں کریں گے:

(i) مستقل مقدار کو دونوں اطراف جمع یا تفریق کرنا۔

(ii) مثبت عدد سے دونوں اطراف کو ضرب یا تقسیم کرنا۔

کیا آپ جانتے ہیں؟
منفی عدد کو دونوں اطراف سے ضرب یا تقسیم کرنے سے غیر مساوات کی ترتیب بدل جاتی ہے۔

مثال 2: $\frac{2}{3}x - 1 < 0$ کو حل کریں اور عددی خط پر ظاہر کریں۔

حل:

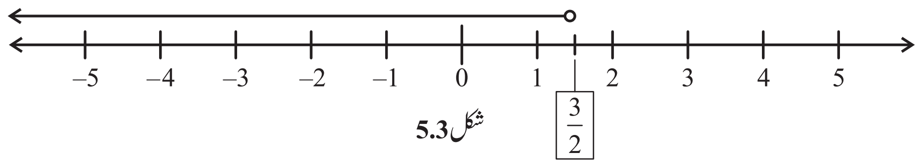
$$\frac{2}{3}x - 1 < 0 \qquad ...(i)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}x < 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x < 3$$

$$\Rightarrow \quad x < \frac{3}{2}$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ $\frac{3}{2}$ سے چھوٹے تمام حقیقی اعداد (i) کا حل ہیں۔ پس $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ یا $-\infty < x < \frac{3}{2}$ دی گئی غیر مساوات کا حل ہے جس کو شکل 5.3 میں ظاہر کیا گیا ہے۔



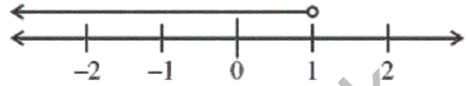
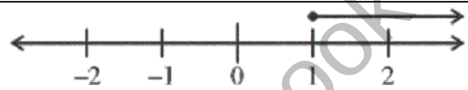
شکل 5.3

ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ غیر مساوات کا حل غیر مساوات کے تمام حل پر مشتمل ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

درج ذیل غیر مساواتیں اور ان کے حل عددی خط پر ظاہر کیے گئے ہیں:

غیر مساوات	حل	حقیقی خط پر اظہار
$x>1$	$(1,\infty)$ or $1<x<\infty$	
$x<1$	$(-\infty,1)$ or $-\infty<x<1$	
$x\geq 1$	$[1,\infty)$ or $1\leq x<\infty$	
$x\leq 1$	$(-\infty,1]$ or $-\infty<x\leq 1$	

5.2.1 دو متغیرات میں غیر مساوات کو حل کرنا
(Solution of a Linear Inequality in Two Variables)

عام طور پر دو متغیرات x اور y میں یک درجی غیر مساوات درج ذیل شکلوں میں سے ایک ہو سکتی ہے:

$$ax+by<c; \quad ax+by>c; \quad ax+by\leq c; \quad ax+by\geq c$$

یہاں a، b، c مستقل مقداریں ہیں اور a ، b دونوں صفر نہیں ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ یک درجی مساوات $ax + by = c$ کا گراف ایک خط ہوتا ہے جو مستوی کو دو متضاد خِطوں (regions) میں تقسیم کرتا ہے جیسا کہ ذیل میں بیان کیا گیا ہے:

(i) مترتب جوڑوں (x, y) کا سیٹ جیسے کہ $ax + by < c$

(ii) مترتب جوڑوں (x, y) کا سیٹ جیسے کہ $ax + by > c$

خطوط (i) اور (ii) کو نصف مستوی کہا جاتا ہے اور خط $ax + by = c$ کو ہر نصف مستوی کی سرحد کہا جاتا ہے۔

نوٹ کریں کہ عمودی خط مستوی کو بائیں اور دائیں نصف مستویوں میں تقسیم کرتا ہے جب کہ غیر عمودی خط مستوی کو اوپر اور نیچے نصف مستویوں میں تقسیم کرتا ہے۔

یاد رکھیے!

x اور y میں یک درجی غیر مساوات کا حل ایک مترتب جوڑا ہوتا ہے جو غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

مثال کے طور پر، مترتب جوڑا $(1, 1)$ غیر مساوات $x + 2y < 6$ کا حل ہے کیونکہ $1 + 2(1) = 3 < 6$ جو کہ درست ہے۔

لامحدود مترتب جوڑے غیر مساوات $x + 2y < 6$ کو درست ثابت کرتے ہیں، لہٰذا اس کا گراف نصف مستوی ہو گا۔

نوٹ کریں کہ یک درجی مساوات $ax + by = c$ کو اوپر بیان کردہ ہر ایک غیر مساوات کی "متعلقہ مساوات" کہا جاتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

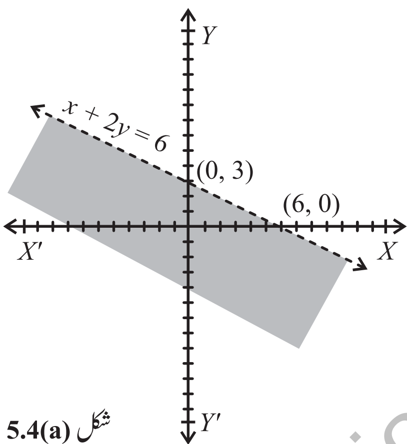
دو متغیرات میں یک درجی غیر مساوات کا گراف بنانے کا طریقہ کار

(i) اگر غیر مساوات میں علامتیں > یا < شامل ہوں تو غیر مساوات کی متعلقہ مساوات کو پہلے 'نقطے' استعمال کر کے گراف بنایا جاتا ہے اور اگر غیر مساوات میں علامتیں $\leq$ یا $\geq$ شامل ہوں تو ایک ٹھوس خط کھینچا جاتا ہے۔

(ii) ایک آزمائشی نقطہ (متعلقہ مساوات کے گراف پر نہیں) کا انتخاب کیا جاتا ہے جو طے کرتا ہے کہ نصف مستوی سرحدی خط کے کس طرف واقع ہے۔

> **کیا آپ جانتے ہیں؟**
> آزمائشی نقطہ ایک ایسا نقطہ ہوتا ہے جس کا انتخاب اس بات کا تعین کرنے کے لیے ہوتا ہے کہ سرحدی خط کا کون سا رُخ غیر مساوات کے حل کے خِطے کو ظاہر کرتا ہے۔ عام طور پر ہم (0،0) کو ایک آزمائشی نقطہ کے طور پر لیتے ہیں۔
> - اگر آزمائشی نقطہ کے ساتھ غیر مساوات درست ہو تو اس نقطہ پر مشتمل خِطہ حل کا حصہ ہوتا ہے۔
> - اگر غیر مساوات غلط ہے تو مخالف خِطہ حل کا خِطہ ہوتا ہے۔

مثال 3: $x + 2y < 6$ کو حل کریں۔



شکل 5.4(a)

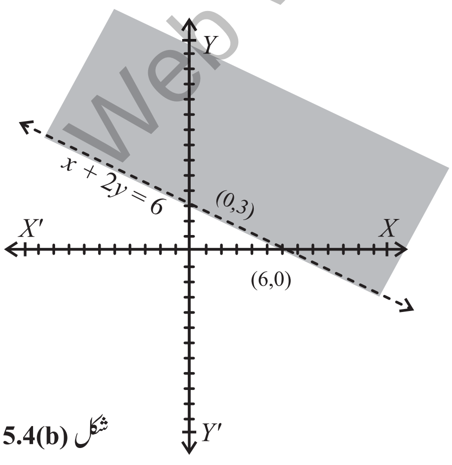
حل: غیر مساوات $x + 2y < 6$ ...(i) کی متعلقہ مساوات

$x + 2y = 6$ ...(ii) ہے۔

خط (ii) x- محور اور y- محور کو بالترتیب (6, 0) اور (0, 3) پر کاٹتی ہے۔ چوں کہ خط (ii) کا کوئی بھی نقطہ غیر مساوات (i) کا حل نہیں ہے، لہٰذا خط (ii) کا گراف نقطوں کا استعمال کر کے ظاہر کیا گیا ہے۔ عام طور پر ہم $O(0, 0)$ کو آزمائشی نقطہ کے طور پر لیتے ہیں کیونکہ یہ خط (ii) پر واقع نہیں ہے۔

$x = 0$ اور $y = 0$ جملہ $x + 2y$ میں درج کرنے سے $0 + 2(0) = 0 < 6$ حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا نقطہ (0, 0) غیر مساوات (i) کو درست ثابت کرتا ہے۔

اس طرح غیر مساوات (i) کے حل سیٹ کا گراف ایک خِطہ ہے جو خط (ii) کے (0, 0) کی طرف واقع ہے، یعنی خط (ii) کے نیچے کا خِطہ۔ خط (ii) کے نیچے کھلی نصف مستوی کا حصہ شکل 5.4 (a) میں سایہ دار خِطے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.4(b)

نوٹ: نقطہ دار خط کے اوپر والے حصے کے تمام نقاط غیر مساوات $x + 2y > 6$ ...(iii) کو درست ثابت کرتے ہیں۔

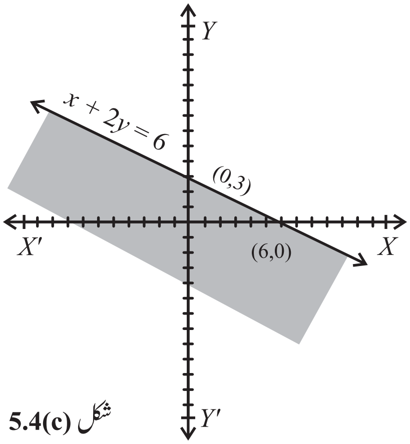
خط (ii) کے اوپر کھلی نصف مستوی کا ایک حصہ شکل 5.4 (b) میں سایہ دار خِطے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

نوٹ 1:

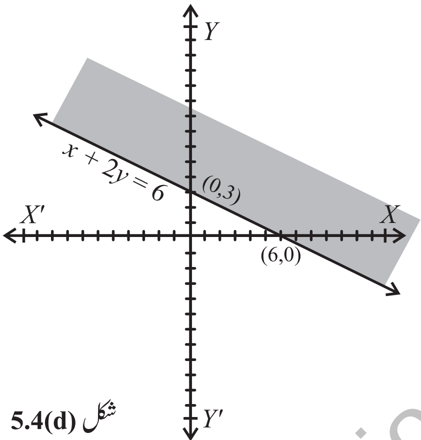
غیر مساوات (iv)... $x + 2y \le 6$ کے گراف میں خط (ii) کا گراف شامل ہے۔ خط (ii) کے نیچے کھلی نصف مستوی خط (ii) کے گراف سمیت غیر مساوات (iv) کا گراف ہے۔ غیر مساوات (iv) کے گراف کا حصہ شکل (c) 5.4 میں سایہ دار خِطے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.4(c)

نوٹ 2:

خط (ii) پر اور اس کے اوپر تمام نقاط غیر مساوات (v) ... $x + 2y \ge 6$ کو درست ثابت کرتے ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ غیر مساوات (v) کا حل سیٹ خط (ii) کے اوپر کے تمام نقاط اور خط (ii) کے تمام نقاط پر مشتمل ہے۔ غیر مساوات (v) کا گراف سایہ دار خِطے کے طور پر شکل (d) 5.4 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.4(d)

نوٹ 3: $x + 2y \le 6$ اور $x + 2y \ge 6$ کے گراف بند نصف مستوی کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 4: xy-مستوی میں درج ذیل یک درجی غیر مساوات‌وں کو حل کریں:

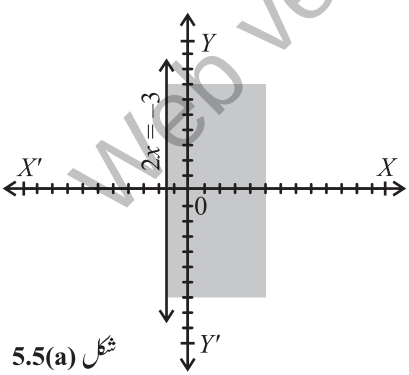
(i) $2x \ge -3$　　(ii) $y \le 2$

حل: (i) xy-مستوی میں غیر مساوات $2x \ge -3$ کو $2x + 0y \ge -3$ سمجھا جاتا ہے اور اس کا حل سیٹ تمام نقاط (x, y) پر مشتمل ہوتا ہے۔

جب کہ $x \ge -\frac{3}{2}$ اور $x, y \in R$

دی گئی غیر مساوات کی متعلقہ مساوات (a)... $2x = -3$ ہے۔

جو کہ ایک عمودی خط (y- محور کے متوازی) ہے اور اس کا گراف شکل (a)5.5 میں دکھایا گیا ہے۔



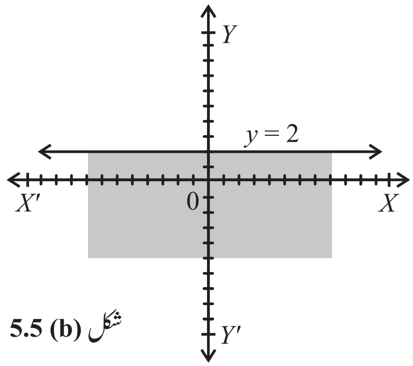
شکل 5.5(a)

اس طرح $2x \ge -3$ کا گراف سرحدی خط (a) اور اس کے دائیں جانب کھلی نصف مستوی پر مشتمل ہے۔

(ii) غیر مساوات $y \le 2$ کی متعلقہ مساوات $y = 2$ ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



شکل 5.5 (b)

جو کہ ایک افقی خط (x- محور کے متوازی) ہے اور اس کا گراف شکل 5.5 (b) میں دکھایا گیا ہے۔ یہاں غیر مساوات $y < 2$ کا حل سیٹ سرحدی خط $y = 2$ کے نیچے کھلی نصف مستوی پر مشتمل ہے۔ اس طرح $y \leq 2$ کا گراف سرحدی خط اور اس کے نیچے کھلی نصف مستوی پر مشتمل ہے۔

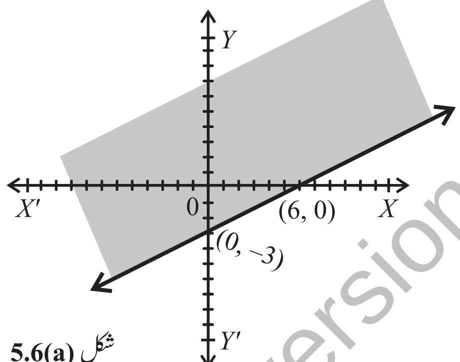
5.2.2 دو متغیرات میں دو یک درجی غیر مساواتوں کو حل کرنا

(Solution of Two Linear Inequalities in Two Variables)

یک درجی غیر مساواتوں کے نظام کا گراف xy- مستوی میں تمام مترتب جوڑوں (x, y) کے سیٹ پر مشتمل ہوتا ہے جو بیک نظام میں موجود تمام غیر مساواتوں کو درست ثابت کرتے ہیں۔ اس طرح کے نظام کا گراف تشکیل دینے کے لیے ہم ہر غیر مساوات کے گراف کو ایک ہی مستوی پر کھینچتے ہیں اور پھر تمام گراف کا تقاطع لیتے ہیں۔ اس طرح حاصل کردہ مشترکہ خِطہ غیر مساواتوں حل کا خِطہ (solution region) کہلاتا ہے۔

مثال 5: غیر مساواتوں کے نظام کا گراف بنا کر حل کا خِطہ معلوم کریں۔

$$x - 2y \leq 6$$
$$2x + y \geq 2$$



شکل 5.6(a)

حل:

$$x - 2y \leq 6 \qquad \ldots(i)$$
$$2x + y \geq 2 \qquad \ldots(ii)$$

درج ذیل (i) کی متعلقہ مساوات ہے

$$x - 2y = 6 \qquad \ldots(iii)$$

x قاطع کے لیے، $y = 0$ کو (iii) میں درج کرنے سے

$$x - 2(0) = 6$$
$$x - 0 = 6$$
$$\Rightarrow \quad x = 6$$

اس سے نقطہ (6, 0) حاصل ہوتا ہے۔

y قاطع کے لیے، $x = 0$ کو (iii) میں درج کرنے سے

$$0 - 2y = 6$$
$$\Rightarrow \quad -2y = 6$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{6}{-2} = -3$$

اس سے نقطہ (0, −3) حاصل ہوتا ہے۔

خط $x - 2y = 6$ کا گراف نقاط (6, 0) اور (0 , −3) کو ملا کر تیار کیا جاتا ہے۔ نقطہ (0 ,0) غیر مساوات $x - 2y < 6$ کو درست ثابت کرتا ہے کیوں کہ $0 - 2(0) = 0 < 6$

اس طرح $x - 2y \leq 6$ کا گراف خط $x - 2y = 6$ اور اوپری نصف مستوی پر مشتمل ہے۔ بند نصف مستوی کو جزوی طور پر شکل 5.6 (a) میں سایہ دار حصے کے ذریعے دکھایا گیا ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

درج ذیل (ii) کی متعلقہ مساوات ہے

$$2x + y = 2 \qquad \ldots(iv)$$

x قاطع کے لیے، $y = 0$ کو (iv) میں درج کرنے سے

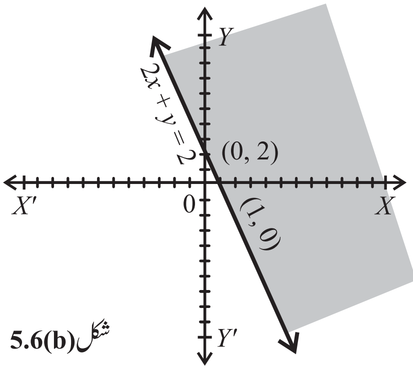
$$2x + 0 = 2$$
$$\Rightarrow \quad 2x = 2$$
$$\Rightarrow \quad x = 1$$

اس سے نقطہ $(1, 0)$ حاصل ہوتا ہے۔

y قاطع کے لیے، $x = 0$ کو (iv) میں درج کرنے سے

$$2(0) + y = 2$$
$$\Rightarrow \quad y = 2$$

اس سے نقطہ $(0, 2)$ حاصل ہوتا ہے۔



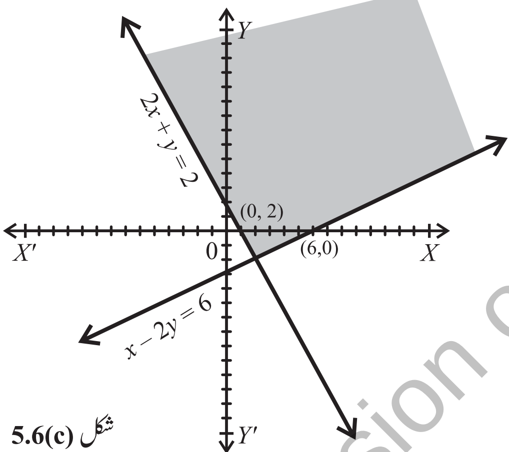
شکل 5.6(b)

ہم نقاط $(1, 0)$ اور $(0, 2)$ کو ملا کر خط $2x + y = 2$ کا گراف کھینچتے ہیں۔ نقطہ $(0, 0)$ دی گئی غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا کیوں کہ

$$2(0) + 0 = 0 \not> 2$$

اس طرح دی گئی غیر مساوات کا گراف خط $2x + y = 2$ کے مرکز کی طرف بند نصف مستوی پر مشتمل اور جزوی طور پر شکل 5.6 (b) میں سایہ دار حصے کے ذریعے دکھایا گیا ہے۔

پس دی گئی غیر مساواتوں کے نظام کے حل کا خِطہ شکل 5.6 (a) اور شکل 5.6 (b) میں دکھائے گئے گراف کا تقاطع ہے جسے شکل 5.6 (c) میں سایہ دار خِطے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.6(c)

Web version of PCTB textbook

مشق 5.1

1۔ درج ذیل مساواتوں کو حل کریں اور عددی خط پر ظاہر کریں۔

(i) $12x + 30 = -6$ (ii) $\frac{x}{3} + 6 = -12$ (iii) $\frac{x}{2} - \frac{3x}{4} = \frac{1}{12}$

(iv) $2 = 7(2x + 4) + 12x$ (v) $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{5}{6}$ (vi) $\frac{-5x}{10} = 9 - \frac{10}{5}x$

2۔ درج ذیل غیر مساواتوں کو حل کریں اور عددی خط پر ظاہر کریں۔

(i) $x - 6 \le -2$ (ii) $-9 > -16 + x$ (iii) $3 + 2x \ge 3$

(iv) $6(x + 10) \le 0$ (v) $\frac{5}{3}x - \frac{3}{4} < \frac{-1}{12}$ (vi) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \le -1 + \frac{1}{2}x$

NOT FOR SALE-PESRP

3۔ درج ذیل یک درجی غیر مساواتوں کے حل کا خِطہ xy-مستوی میں سایہ دار کر کے ظاہر کریں۔

(i) $2x+y\le 6$ (ii) $3x+7y\ge 21$ (iii) $3x-2y\ge 6$

(iv) $5x-4y\le 20$ (v) $2x+1\ge 0$ (vi) $3y-4\le 0$

4۔ درج ذیل یک درجی غیر مساواتوں کے حل کا خِطہ سایہ دار کر کے ظاہر کریں۔

(i) $2x-3y\le 6$, $2x+3y\le 12$ (ii) $x+y\ge 5$, $-y+x\le 1$ (iii) $3x+7y\ge 21$, $x-y\le 2$

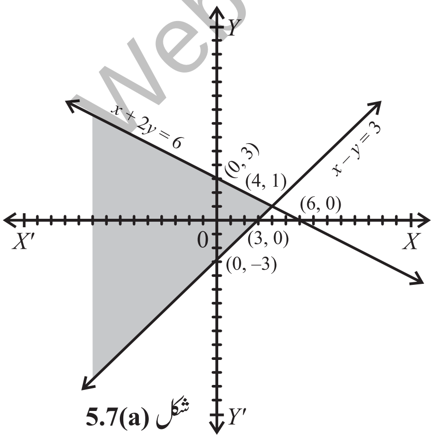
(iv) $4x-3y\le 12$, $x\ge -\frac{3}{2}$ (v) $3x+7y\ge 21$, $y\le 4$ (vi) $5x+7y\le 35$, $x-2y\le 2$

5.3 قابل عمل حل (Feasible Solution)

روزمرہ زندگی سے کسی خاص مسئلے سے نمٹنے کے لیے، مسئلہ سے متعلق ہر یک درجی غیر مساوات کو مسئلہ کی رکاوٹ (problem constraint) کا نام دیا جاتا ہے۔ متعلقہ مسئلہ میں شامل یک درجی غیر مساوات کے نظام کو مسئلہ کی رکاوٹیں کہا جاتا ہے۔ روزمرہ زندگی کے مسائل سے متعلق یک درجی غیر مساوات کے نظام میں استعمال ہونے والے متغیرات غیر منفی (non-negative constraints) ہوتے ہیں اور انہیں غیر منفی رکاوٹیں کہا جاتا ہے۔ یہ غیر منفی رکاوٹیں فیصلہ لینے میں اہم کردار ادا کرتی ہیں۔ لہٰذا ان متغیرات کو تصفیہ کرنے والے متغیرات (decision variables) کہا جاتا ہے۔ ایک ایسا خِطہ جو پہلے ربع تک محدود ہو اسے دی گئی رکاوٹوں کے سیٹ کے لیے قابل عمل خِطہ (feasible solution) کہا جاتا ہے۔ قابل عمل خِطے کے ہر نقطہ کو یک درجی غیر مساوات کے نظام کا ایک قابل عمل حل کہا جاتا ہے۔

مثال 6: درج ذیل غیر مساواتوں کے نظام کے لیے قابل عمل خِطے کو سایہ دار کریں اور اِس کے کونوں کے نقاط بھی معلوم کریں۔

$$x-y\le 3$$
$$x+2y\le 6,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$$



شکل 5.7(a)

حل: غیر مساواتوں (i) ... $x-y\le 3$ اور (ii) ... $x+2y\le 6$ کی متعلقہ مساواتیں (iii) ...$x-y=3$ اور (iv) ... $x+2y=6$ ہیں۔

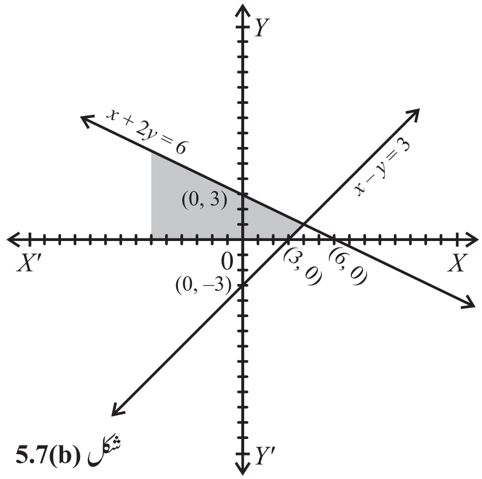
جیسا کہ نقاط $(3,0)$ اور $(0,-3)$ خِطہ (iii) پر واقع ہیں اس لیے ان دونوں نقاط کو ملا کر خط کھینچا گیا ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

اسی طرح خط (iv) نقاط (6, 0) اور (0, 3) کو ملا کر کھینچا گیا ہے۔

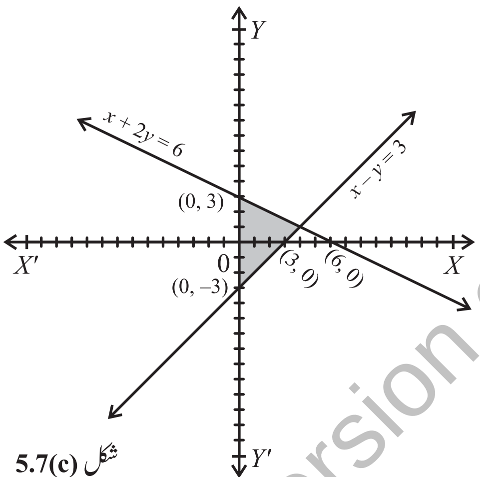
$x = 0$ اور $y = 0$ کو مساوات (iii) اور (iv) میں درج کرنے سے $0 - 0 = 0 < 3$ اور $0 + 2(0) = 0 < 6$ حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں بند نصف مستویاں خطوط (iii) اور (iv) کے مرکز کی طرف ہیں۔

ان دونوں بند نصف مستویوں کو جزوی طور پر شکل 5.7 (a) میں سایہ دار کر کے دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.7(b)

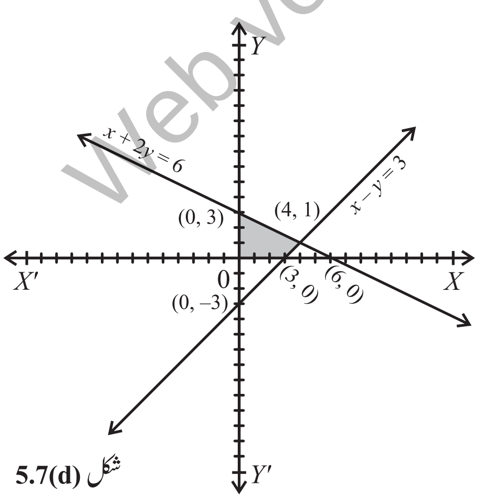
$y \geq 0$ کا گراف اوپر والی بند نصف مستوی ہو گا۔ شکل 5.7 (a) اور اوپر والی بند نصف مستوی کا تقاطع جزوی طور پر شکل 5.7 (b) میں سایہ دار کر کے دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.7(c)

$x \geq 0$ کا گراف نچلی بند نصف مستوی ہو گا۔ شکل 5.7 (a) اور نچلی بند نصف مستوی کا تقاطع جزوی طور پر شکل 5.7 (c) میں سایہ دار کر کے دکھایا گیا ہے۔

آخر میں یک درجی غیر مساواتوں کے نظام کا گراف شکل 5.7 (d) میں دکھایا گیا ہے جو یک درجی غیر مساواتوں کے نظام کے لیے قابل عمل خِطہ ہے۔ نقاط (0, 0)، (3, 0)، (4, 1) اور (0, 3) قابل عمل خِطے کے کونوں کے نقاط ہیں۔



شکل 5.7(d)

یاد رکھیے!

حل کے خِطے کا ایک نقطہ جہاں اس کے دو سرحدی خطوط آپس میں ملتے ہیں، اسے حل کے خِطے کے کونے کا نقطہ یا راس کہا جاتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

قابل عمل حل میں کسی تفاعل کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں
(Maximum and Minimum Values of a Function in the Feasible Solution)

ایسا تفاعل جس کو زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم کیا جائے اسے آبجیکٹو تفاعل (objective function) کہا جاتا ہے۔ نوٹ کریں کہ قابل عمل خِطے میں لاتعداد ممکنہ حل موجود ہوتے ہیں۔ قابل عمل حل جو آبجیکٹو تفاعل کو زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم کرتا ہے اسے نہایت موافق حل (optimal solution) کہا جاتا ہے۔

نہایت موافق حل معلوم کرنے کا طریقہ کار (Procedure for determining optimal solution)

(i) قابل عمل خِطے کا تعین کرنے کے لیے یک درجی غیر مساوات کی رکاوٹوں کے حل کے سیٹ کا گراف بنائیں۔

(ii) قابل عمل خِطے کے کونوں کے نقاط معلوم کریں۔

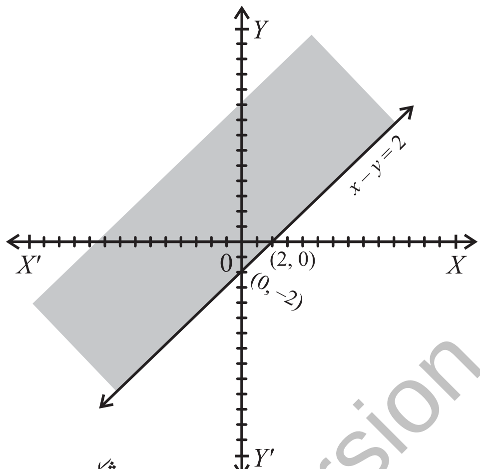
(iii) نہایت موافق حل معلوم کرنے کے لیے ہر کونے کے نقطہ پر آبجیکٹو تفاعل معلوم کریں۔

مثال 7: تفاعل کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں معلوم کریں جس کی وضاحت کی گئی ہے:

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

شرائط کے تابع ;

$$x - y \le 2$$
$$x + y \le 4$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$



شکل 5.8(a)

حل:

$$x - y \le 2 \qquad \ldots(i)$$
$$x + y \le 4 \qquad \ldots(ii)$$

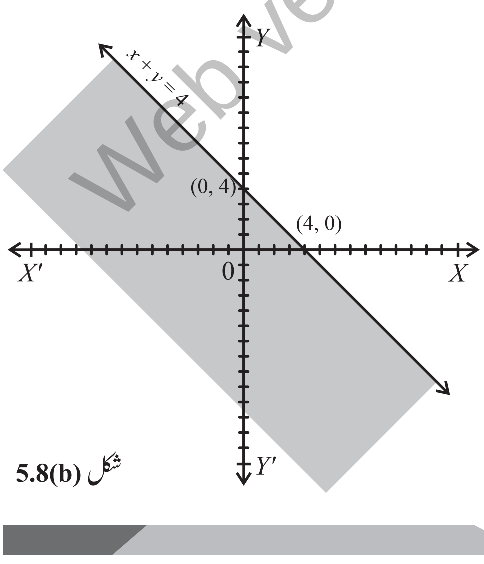
(i) کی متعلقہ مساوات $x - y = 2$ ہے۔

$x - y = 2$ کے x قاطع اور y قاطع بالترتیب $(2, 0)$ اور $(0, -2)$ ہیں۔ خط $x - y = 2$ کا گراف نقاط $(2, 0)$ اور $(0, -2)$ کو ملا کر کھینچا گیا ہے۔

نقطہ $(0, 0)$ غیر مساوات $x - y \le 2$ کو درست ثابت کرتا ہے کیوں کہ

$$0 - 0 = 0 < 2$$

پس $x - y \le 2$ کا گراف خط $x - y = 2$ اور اوپر والی نصف مستوی پر مشتمل ہے جس کو جزوی طور پر شکل 5.8 (a) میں سایہ دار کر کے دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.8(b)

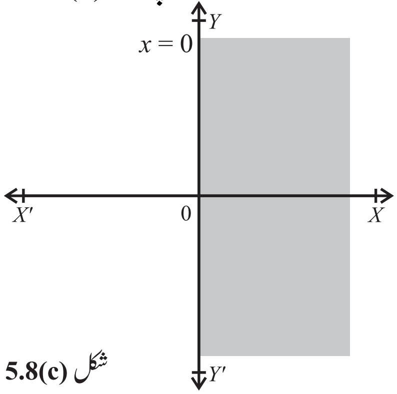
(ii) کی متعلقہ مساوات $x + y = 4$ ہے۔

Web version of PCTB textbook

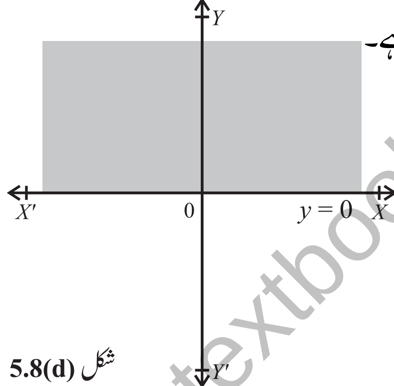
NOT FOR SALE-PESRP

$x + y = 4$ کے x قاطع اور y قاطع بالترتیب $(4, 0)$ اور $(0, 4)$ ہیں۔ خط $x + y = 4$ کا گراف نقاط $(4, 0)$ اور $(0, 4)$ کو ملا کر کھینچا گیا ہے۔

نقطہ $(0, 0)$ غیر مساوات $x + y \leq 4$ کو درست ثابت کرتا ہے۔ بند نصف مستوی کو جزوی طور پر شکل 5.8 (b) میں سایہ دار کر کے دکھایا گیا ہے۔



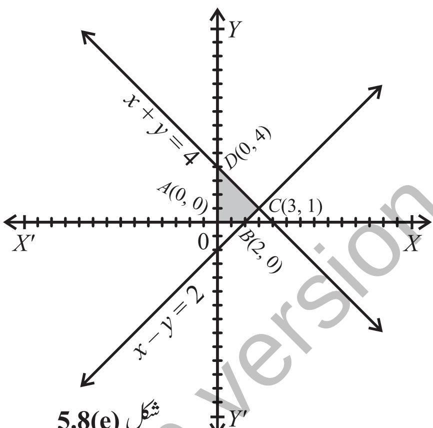
شکل 5.8(c)



شکل 5.8(d)

$x \geq 0$ اور $y \geq 0$ کے گراف بالترتیب اشکال 5.8 (c) اور 5.8 (d) میں سایہ دار کر کے دکھائے گئے ہیں۔

غیر مساوات کے دیے گئے نظام کا قابل عمل خِطہ اشکال 5.8 (a)، 5.8 (b)، 5.8 (c) اور 5.8 (d) میں دکھائے گئے گراف کا تقاطع ہے اور شکل 5.8 (e) میں سایہ دار خِطہ $ABCD$ کے طور پر دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.8(e)

قابل عمل خِطہ کے کونوں کے نقاط $(0, 0)$، $(2, 0)$، $(3, 1)$ اور $(0, 4)$ ہیں۔ اب ہم کونوں کے نقاط پر $f(x, y) = 2x + 3y$ کی قیمتیں معلوم کرتے ہیں۔

$$f(0, 0) = 2(0) + 3(0) = 0$$
$$f(2, 0) = 2(2) + 3(0) = 4$$
$$f(3, 1) = 2(3) + 3(1) = 9$$
$$f(0, 4) = 2(0) + 3(4) = 12$$

پس f کی کم سے کم قیمت کونے کے نقطہ $(0, 0)$ پر 0 اور زیادہ سے زیادہ قیمت کونے کے نقطہ $(0,4)$ پر 12 ہے۔

مشق 5.2

1۔ $f(x, y) = 2x + 5y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$2y - x \leq 8 \quad ; \quad x - y \leq 4 \quad ; \quad x \geq 0 \quad ; \quad y \geq 0$

2۔ $f(x, y) = x + 3y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$2x + 5y \leq 30 \quad ; \quad 5x + 4y \leq 20 \quad ; \quad x \geq 0 \quad ; \quad y \geq 0$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

3۔ $z = 2x + 3y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$2x + y \le 4$ ؛ $4x - y \le 2$ ؛ $x \ge 0$ ؛ $y \ge 0$

4۔ $z = 2x + y$ کی کم سے کم قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$x + y \ge 3$ ؛ $7x + 5y \le 35$ ؛ $0 \le x$ ؛ $y \ge 0$

5۔ $f(x, y) = 2x + 3y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$2x + y \le 10$ ؛ $x + 2y \le 14$ ؛ $x \ge 0$ ؛ $y \ge 0$

6۔ $z = 3x + y$ کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں معلوم کریں۔ جب کہ

$3x + 5y \ge 15$ ؛ $x + 3y \le 9$ ؛ $x \ge 0$ ؛ $y \ge 0$

Web version of PCTB textbook

جائزہ مشق 5

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) درج ذیل میں یک درجی مساوات ہے:

(a) $5x > 7$　(b) $4x - 2 < 1$
(c) $2x + 1 = 1$　(d) $4 = 1 + 3$

(ii) $5x - 10 = 10$ کا حل ہے:

(a) 0　(b) 50
(c) 4　(d) -4

(iii) اگر $7x + 4 < 6x + 6$ ہو تو x کا حل ہے:

(a) $(2, \infty)$　(b) $[2, \infty)$
(c) $(-\infty, 2)$　(d) $(-\infty, 2]$

(iv) عمودی خط مستوی کو تقسیم کرتا ہے:

(a) بائیں نصف مستوی　(b) دائیں نصف مستوی
(c) پوری مستوی　(d) دو آدھی مستویاں

(v) یک درجی غیر مساوات سے بننے والی مساوات کو کہا جاتا ہے:

(a) سہ درجی مساوات　(b) متعلقہ مساوات
(c) دو درجی مساوات　(d) قابلِ عمل خِطہ

(vi) $3x + 4 < 0$ ہے:

(a) مساوات　(b) غیر مساوات
(c) غیر مساوات نہیں　(d) اکائی

NOT FOR SALE-PESRP

(vii) کونے کا نقطہ کہلاتا ہے:

(a) کوڈ (b) راس
(c) خط (d) خِطہ

(viii) (0, 0) کا حل ہے:

(a) $4x + 5y > 8$ (b) $3x + y > 6$
(c) $-2x + 3y < 0$ (d) $x + y > 4$

(ix) حل کا خِطہ جو پہلے ربع تک محدود ہو، کہلاتا ہے:

(a) آبجیکٹو خِطہ (b) قابل عمل خِطہ
(c) حل خِطہ (d) رکاوٹوں کا خِطہ

(x) تفاعل جس کو کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ کیا جائے، کہلاتا ہے:

(a) حل کا تفاعل (b) آبجیکٹو تفاعل
(c) قابل عمل تفاعل (d) ان میں سے کوئی نہیں

2۔ حل کریں اور عددی خط پر ظاہر کریں۔

(i) $\frac{x+5}{3} = 1 - x$ (ii) $\frac{2x+1}{3} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{x-1}{3}$

(iii) $3x + 7 < 16$ (iv) $5(x-3) \geq 26x - (10x + 4)$

3۔ درج ذیل یک درجی غیر مساواتوں کے حل کا خِطہ معلوم کریں۔

(i) $3x + 2y \geq 3 \quad ; \quad 3x - 4y \leq 12$

(ii) $x + 2y \leq 6 \quad ; \quad 2x + y \leq 4$

4۔ $g(x,y) = x + 4y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$x + y \leq 4$ ، $x \geq 0$ اور $y \geq 0$

5۔ $f(x,y) = 3x + 5y$ کی کم سے کم قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$x + 3y \geq 3$ ، $x + y \geq 2$ ، $x \geq 0$ ، $y \geq 0$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP