یونٹ 4

تجزی اور الجبری مہارت
(Factorization and Algebraic Manipulation)

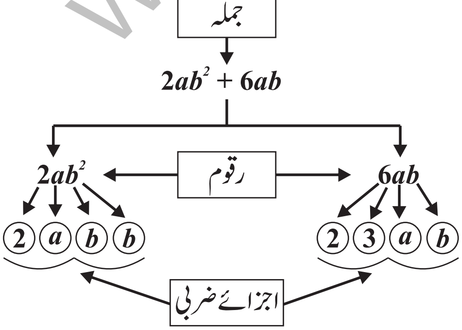
اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- مشترک اجزائے ضربی اور سہ رقمی جملوں کو ٹھوس، تصویری اور علامتی طریقے سے اظہار کر سکیں۔
- دو درجی اور سہ درجی الجبری جملوں کی تجزی کر سکیں:
  - $a^4 + a^2b^2 + b^4$ or $a^4 + b^4$
  - $x^2 + px + q$
  - $ax^2 + bx + c$
  - $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + k$
  - $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k$
  - $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$
  - $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
  - $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
  - $a^3 \pm b^3$
- الجبری جملوں کا عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل معلوم کر سکیں اور عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل کے درمیان تعلق معلوم کر سکیں۔
- الجبری جملوں کا جذر بذریعہ تجزی اور تقسیم معلوم کر سکیں۔
- دو درجی اور سہ درجی الجبری جملوں کی تجزی کے تصورات کو روزمرہ زندگی کے مسائل (جیسے انجینئرنگ، فزکس اور فنانس) پر لاگو کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

الجبری تجزی صرف کمرہ جماعت تک محدود ریاضیاتی مہارت نہیں ہے بلکہ یہ روزمرہ زندگی کے مسائل کو حل کرنے میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔ پیچیدہ الجبری جملوں کو آسان عوامل میں توڑ کر، ہم حساب کتاب کو زیادہ قابل فہم بنا سکتے ہیں اور اہم چیزیں معلوم کر سکتے ہیں۔ الجبری تجزی کا فنانس، انجینئرنگ سائنس، کاروبار اور روزمرہ کی زندگی میں عملی اطلاق ہوتا ہے۔ یہ یونٹ الجبری جملوں کی مہارتوں کو دریافت کرے گا اور یہ ظاہر کرے گا کہ ان طریقوں کو حقیقی دنیا میں کیسے لاگو کیا جا سکتا ہے جس سے ریاضی کو زندگی کے مختلف پہلوؤں میں ایک قیمتی اثاثہ بنایا جا سکتا ہے۔

4.1 مشترک اجزائے ضربی اور سہ رقمی جملوں کا ٹھوس، تصویری اور علامتی طریقے سے اظہار
(Identifying Common Factors and Trinomials Concretely, Pictorially and Symbolically)



4.1.1 مشترک جزو ضربی (Common Factors)

الجبرا میں مشترک جزو ضربی ایک ایسا جملہ ہوتا ہے جو دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کو پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

مثال کے طور پر $2x - 6 = 2(x - 3)$

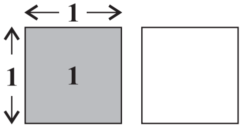
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

یہاں 2 مشترک جز وضربی ہے جو $2x$ اور 6 دونوں پر پورا پورا تقسیم ہوتا ہے۔

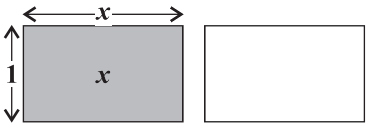
سہ رقمی جملوں کو ٹھوس طریقے سے ظاہر کرنے کے لیے ہم یونٹ ٹائلوں، مستطیلی ٹائلوں اور مربعی ٹائلوں کو مستطیل میں ترتیب دیتے ہیں۔ سہ رقمی جملوں کے اجزائے ضربی کو مستطیل کے اطراف کی لمبائیوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

یونٹ ٹائلیں (Unit Tiles)



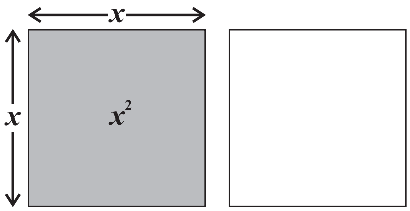
یہاں ایک سُرمئی یونٹ ٹائل 1 کو ظاہر کرتی ہے اور ایک سفید یونٹ ٹائل 1- کو ظاہر کرتی ہے۔
سُرمئی اور سفید دونوں یونٹ ٹائلیں ایک صفر جوڑا بناتی ہیں۔

مستطیلی ٹائلیں (Rectangular Tiles)



سُرمئی مستطیلی ٹائل کو x سے اور سفید مستطیلی ٹائل کو $-x$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔
سُرمئی اور سفید دونوں مستطیلی ٹائلیں بھی ایک صفر جوڑا بناتی ہیں۔

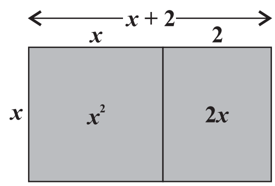
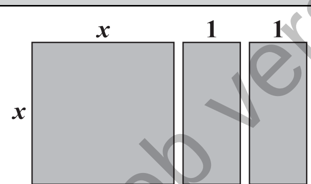
مربعی ٹائلیں (Squared Tiles)



سُرمئی مربعی ٹائل ہر طرف x اکائیوں کی پیمائش کرتی ہے اور اس کا رقبہ $x \times x = x^2$ اکائیاں ہے۔ اس ٹائل کو x^2 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ سفید مربعی ٹائل کو $-x^2$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ سُرمئی اور سفید دونوں مربعی ٹائلیں ایک صفر جوڑا بناتی ہیں۔

مثال 1: $x^2 + 2x$ کے مشترک جز وضربی ٹھوس، تصویری اور علامتی طریقے سے معلوم کریں۔

حل: ہم ایک x^2 ٹائل اور دو x ٹائلوں کو مستطیل میں ترتیب دیتے ہیں۔

علامتی طریقے سے	تصویری طریقے سے	ٹھوس طریقے سے
$x^2 + 2x = x(x + 2)$		

4.1.2 سہ رقمی جملوں کے اجزائے ضربی (Trinomial Factoring)

کسی سہ رقمی جملے کو دو دو رقمی جملوں کے حاصل ضرب کے طور پر لکھنے کو سہ رقمی جملے کے اجزائے ضربی کہا جاتا ہے۔ سہ رقمی ایک ایسا جملہ ہوتا ہے جس کی تین رقمیں ہوتی ہیں اور دو رقمی ایسا جملہ ہوتا ہے جس کی دو رقمیں ہوتی ہیں۔

مثال کے طور پر $x^2 + 4x + 4$ اور $3x^2 - x - 2$ سہ رقمی جملے ہیں جب کہ $x + 2$ اور $3x - 1$ دو رقمی جملے ہیں۔

سرگرمی

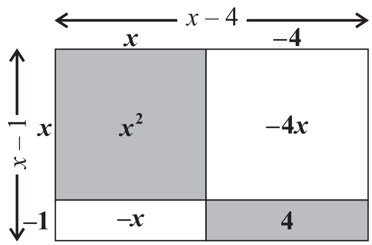
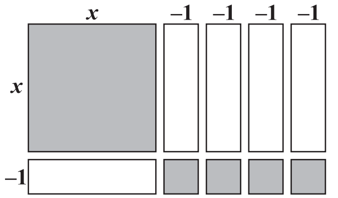
طلبہ کو گروہوں میں تقسیم کریں۔ کچھ سہ رقمی جملے اور مختلف رنگوں کے چارٹ پیپرز سے بنی ہوئی مختلف جسامت کی الجبری ٹائلیں طلبہ میں تقسیم کریں۔ طلبہ سے کہیں کہ دیے گئے جملوں کی تجزی ٹھوس طریقے سے کریں۔

Web version of PCTB textbook

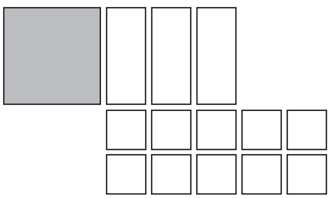
NOT FOR SALE-PESRP

مثال 2: $x^2 - 5x + 4$ کی تجزی ٹھوس، تصویری اور علامتی طریقے سے کریں۔

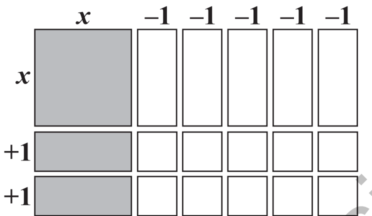
حل:

علامتی طریقے سے	تصویری طریقے سے	ٹھوس طریقے سے
$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$		ہم ایک x^2 ٹائل، پانچ x– ٹائلوں اور چار یونٹ ٹائلوں کو ایک مستطیل میں ترتیب دیتے ہیں۔ 

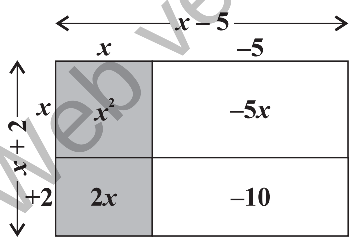
مثال 3: $x^2 - 3x - 10$ کی تجزی ٹھوس، تصویری اور علامتی طریقے سے کریں۔



حل: ہم ایک x^2 ٹائل، تین x– ٹائلوں اور دس 1– ٹائلوں کو ایک مستطیل میں ترتیب دیتے ہیں۔



ہم دیکھتے ہیں کہ ایک بڑی مستطیل بنانے کے لیے چھوٹی مستطیل ٹائلیں کافی نہیں ہیں۔ اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے ہم صفر جوڑا شامل کرتے ہیں۔ دو x ٹائلیں اور دو x– ٹائلیں شامل کرنے سے دیئے گئے جملے میں کوئی تبدیلی نہیں آتی کیوں کہ $2x - 2x = 0$

علامتی طریقے سے	تصویری طریقے سے
$x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$	

4.1.3 دو درجی اور سہ درجی الجبری جملوں کی تجزی

(Factorizing Quadratic and Cubic Algebraic Expressions)

پہلی قسم $x^2 + px + q$ اور $ax^2 + bx + c$ کی قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

درج بالا قسم کے جملوں کی تجزی کرنے کے طریقہ کار کی وضاحت درج ذیل مثالوں میں کی گئی ہے۔

Web version of PCTB textbook

مثال4: $x^2 + 9x + 14$ کی تجزی کیجیے۔

حل: 2+ اور 7+ ایسے دو اعداد ہیں جن کا مجموعہ 9+ اور حاصل ضرب 14+ ہے۔

اجزائے ضربی کی حاصل ضرب	اجزائے ضربی کا مجموعہ
$14 \times 1 = 14$	$14 + 1 = 15$
$7 \times 2 = 14$	$7 + 2 = 9$

$$x^2 + 9x + 14$$
$$= x^2 + 2x + 7x + 14$$
$$= x(x + 2) + 7(x + 2)$$
$$= (x + 2)(x + 7)$$

مثال5: $x^2 - 11x + 24$ کی تجزی کیجیے۔

حل: 8– اور 3– ایسے دو اعداد ہیں جن کا مجموعہ 11– اور حاصل ضرب 24+ ہے۔

پس،

اجزائے ضربی کی حاصل ضرب	اجزائے ضربی کا مجموعہ
$24 \times 1 = 24$	$24 + 1 = 25$
$8 \times 3 = 24$	$8 + 3 = 11$
$(-8) \times (-3) = 24$	$-8 - 3 = -11$
$6 \times 4 = 24$	$6 + 4 = 10$
$12 \times 2 = 24$	$12 + 2 = 14$

$$x^2 - 11x + 24$$
$$= x^2 - 8x - 3x + 24$$
$$= x(x - 8) - 3(x - 8)$$
$$= (x - 8)(x - 3)$$

مثال6: $p^2 + 11p + 18$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$p^2 + 11p + 18$$
$$= p^2 + 9p + 2p + 18 \qquad \because\ 9 + 2 = 11,\ 9 \times 2 = 18$$
$$= p(p + 9) + 2(p + 9)$$
$$= (p + 9)(p + 2)$$

اوپر جن دو درجی سہ رقمی جملوں کی تجزی کی گئی ہے ان میں x^2 کا عددی سر 1 تھا۔ اب ہم ایسی مثالوں کی وضاحت کریں گے جن میں x^2 کا عددی سر 1 نہ ہو۔

مثال7: $2x^2 + 17x + 26$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

پہلا قدم: مستقل رقم اور x^2 کے عددی سر کو ضرب دیں۔

$$2 \times 26 = 52$$

> **یاد رکھیے!**
> ایسا جملہ جس کا درجہ 2 ہو اس کو دو درجی جملہ کہتے ہیں۔

دوسرا قدم: 52 کے تمام اجزائے ضربی معلوم کریں۔

$1, 52$	$-1, -52$
$2, 26$	$-2, -26$
$-4, -13$	$4, 13$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

تیسرا قدم: عادوں کا مجموعہ معلوم کریں جو درمیانی رقم (17) کے برابر ہو۔

$1 + 52 = 53$	$-1 - 52 = -53$
$2 + 26 = 28$	$-2 - 26 = -28$
$4 + 13 = 17$	$-4 - 13 = -17$

چوتھا قدم: دیے گئے جملے میں درمیانی رقم کو تبدیل کریں۔

$$2x^2 + 17x + 26$$
$$= 2x^2 + 4x + 13x + 26$$

پانچواں قدم: پہلی دو اور آخری دو رقموں میں سے مشترک لیں۔

$$= 2x(x + 2) + 13(x + 2)$$

چھٹا قدم: دوبارہ دونوں رقموں میں سے مشترک لیں۔

$$= (x + 2)(2x + 13)$$

خود آزمائی!

درج ذیل جملوں کی تجزی کریں۔

(i) $x^2 + 7x - 18$
(ii) $t^2 - 5t - 24$
(iii) $6y^2 - y - 12$

مثال 8: $3x^2 - 4x - 4$ کی تجزی کیجیے۔

حل: $3x^2 - 4x - 4$

$$= 3x^2 + 2x - 6x - 4 \qquad \because\ 2 \times (-6) = -12,\ +2 - 6 = -4$$
$$= x(3x + 2) - 2(3x + 2)$$
$$= (3x + 2)(x - 2)$$

مشق 4.1

1۔ مشترک جزو ضربی کی شناخت کر کے تجزی کریں۔

(i) $6x + 12$ (ii) $15y^2 + 20y$ (iii) $-12x^2 - 3x$
(iv) $4a^2b + 8ab^2$ (v) $xy - 3x^2 + 2x$ (vi) $3a^2b - 9ab^2 + 15ab$

2۔ تجزی کریں۔

(i) $5x + 15$ (ii) $x^2 + 4x + 3$ (iii) $x^2 + 6x + 8$
(iv) $x^2 + 4x + 4$

3۔ تجزی کریں۔

(i) $x^2 + x - 12$ (ii) $x^2 + 7x + 10$ (iii) $x^2 - 6x + 8$
(iv) $x^2 - x - 56$ (v) $x^2 - 10x - 24$ (vi) $y^2 + 4y - 12$
(vii) $y^2 + 13y + 36$ (viii) $x^2 - x - 2$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

4۔ تجزی کریں۔

(i) $2x^2 + 7x + 3$　　(ii) $2x^2 + 11x + 15$　　(iii) $4x^2 + 13x + 3$

(iv) $3x^2 + 5x + 2$　　(v) $3y^2 - 11y + 6$　　(vi) $2y^2 - 5y + 2$

(vii) $4z^2 - 11z + 6$　　(viii) $6 + 7x - 3x^2$

دوسری قسم: $a^4 + a^2b^2 + b^4$ یا $a^4 + b^4$ کی قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

آیئے پہلے جملے $a^4 + a^2b^2 + b^4$ کی تجزی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&a^4 + a^2b^2 + b^4 \\
&= a^4 + b^4 + a^2b^2 \\
&= (a^2)^2 + (b^2)^2 + a^2b^2 \\
&= (a^2)^2 + (b^2)^2 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2 + a^2b^2 \\
&= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 \\
&= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 \\
&= (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab) \\
&= (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)
\end{aligned}$$

($2a^2b^2$ کو جمع اور تفریق کرنے سے)

یاد رکھیے!

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مثال 9: $x^4 + x^2 + 25$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned}
&x^4 + x^2 + 25 \\
&= x^4 + 25 + x^2 \\
&= (x^2)^2 + (5)^2 + 2(x^2)(5) - 2(x^2)(5) + x^2 \\
&= (x^2 + 5)^2 - 10x^2 + x^2 \\
&= (x^2 + 5)^2 - 9x^2 \\
&= (x^2 + 5)^2 - (3x)^2 \\
&= (x^2 + 5 - 3x)(x^2 + 5 + 3x) \\
&= (x^2 - 3x + 5)(x^2 + 3x + 5)
\end{aligned}$$

($2(x^2)(5)$ کو جمع اور تفریق کرنے سے)

سرگرمی

- مختلف جملے لکھ کر کارڈز تیار کریں۔
- طلبہ کو چھوٹے گروہوں میں تقسیم کریں۔
- ہر گروہ کارڈ اٹھائے گا اور لکھے گئے جملے کی تجزی کرے گا۔
- جو گروہ مقررہ وقت میں سب سے زیادہ جملوں کی درست تجزی مکمل کرے گا وہ جیت جائے گا۔

مثال 10: $x^4 + y^4$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned}
&x^4 + y^4 \\
&= (x^2)^2 + (y^2)^2 \\
&= (x^2)^2 + (y^2)^2 + 2(x^2)(y^2) - 2(x^2)(y^2) \\
&= (x^2 + y^2)^2 - (\sqrt{2}xy)^2 \\
&= (x^2 + y^2 - \sqrt{2}\,xy)(x^2 + y^2 + \sqrt{2}\,xy) \\
&= (x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2)(x^2 + \sqrt{2}\,xy + y^2)
\end{aligned}$$

($2x^2y^2$ کو جمع اور تفریق کرنے سے)

خود آزمائی!

تجزی کریں۔

(i) $64x^4y^4 + z^4$

(ii) $81x^4 + \frac{1}{81x^4} - 11$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 11: $a^4 + 64$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$a^4 + 64$$
$$= (a^2)^2 + (8)^2$$
$$= (a^2)^2 + (8)^2 + 2(a^2)(8) - 2(a^2)(8)$$ ($2(a^2)(8)$ کو جمع اور تفریق کرنے سے)
$$= (a^2 + 8)^2 - 16a^2$$
$$= (a^2 + 8)^2 - (4a)^2$$
$$= (a^2 + 8 - 4a)(a^2 + 8 + 4a)$$
$$= (a^2 - 4a + 8)(a^2 + 4a + 8)$$

تیسری قسم: درج ذیل قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

- $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + k$
- $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k$
- $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$

وضاحت کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کریں:

مثال 12: $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 3$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 3$$
$$= (y + 4)(y + 6) - 3$$ فرض کریں کہ $y = x^2 + 5x$
$$= y^2 + 6y + 4y + 24 - 3$$
$$= y^2 + 10y + 21$$
$$= y^2 + 7y + 3y + 21$$
$$= y(y + 7) + 3(y + 7)$$
$$= (y + 7)(y + 3)$$
$$= (x^2 + 5x + 7)(x^2 + 5x + 3) \quad (\because y = x^2 + 5x)$$

مثال 13: $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 15$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 15$$

دیے گئے جملے کو دوبارہ ترتیب سے لکھیں کیوں کہ $2 + 5 = 3 + 4$

$$[(x + 2)(x + 5)][(x + 3)(x + 4)] - 15$$
$$= (x^2 + 5x + 2x + 10)(x^2 + 4x + 3x + 12) - 15$$
$$= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 15$$
$$= (y + 10)(y + 12) - 15$$ فرض کریں کہ $y = x^2 + 7x$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

$$= y^2 + 12y + 10y + 120 - 15$$
$$= y^2 + 22y + 105$$
$$= y^2 + 15y + 7y + 105$$
$$= y(y + 15) + 7(y + 15)$$
$$= (y + 15)(y + 7)$$
$$(\because y = x^2 + 7x) \qquad = (x^2 + 7x + 15)(x^2 + 7x + 7)$$

مثال 14: $(x-2)(x+2)(x+1)(x-4) + 2x^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل:
$$(x-2)(x+2)(x+1)(x-4) + 2x^2$$
$$[\because (-2) \times 2 = 1 \times (-4)] \qquad = [(x-2)(x+2)][(x+1)(x-4)] + 2x^2$$
$$= (x^2 - 2^2)(x^2 - 4x + x - 4) + 2x^2$$
$$= (x^2 - 4)(x^2 - 3x - 4) + 2x^2$$
فرض کریں کہ $y = x^2 - 4$
$$= y(y - 3x) + 2x^2$$
$$= y^2 - 3xy + 2x^2$$
$$= y^2 - 2xy - xy + 2x^2$$
$$= y(y - 2x) - x(y - 2x)$$
$$= (y - 2x)(y - x)$$
$$(\because y = x^2 - 4) \qquad = (x^2 - 4 - 2x)(x^2 - 4 - x)$$
$$= (x^2 - 2x - 4)(x^2 - x - 4)$$

چوتھی قسم: درج ذیل قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

اس قسم کے جملوں کی تجزی کی وضاحت درج ذیل مثالوں میں کی گئی ہے۔

> **یاد رکھیے!**
> $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
> $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

مثال 15: $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$ کی تجزی کیجیے۔

حل:
$$8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$$
$$= (2x)^3 + 3(2x)^2(5) + 3(2x)(5)^2 + (5)^3$$
$$= (2x + 5)^3$$
$$= (2x + 5)(2x + 5)(2x + 5)$$

مثال 16: $x^3 - 18x^2 + 108x - 216$ کی تجزی کیجیے۔

حل:
$$x^3 - 18x^2 + 108x - 216$$
$$= (x)^3 - 3(x)^2(6) + 3(x)(6)^2 - (6)^3$$
$$= (x - 6)^3$$
$$= (x - 6)(x - 6)(x - 6)$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

پانچویں قسم: $a^3 \pm b^3$ قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

جملہ $a^3 + b^3$ دو مکعبوں کا مجموعہ ہے اور اس کی تجزی درج ذیل طریقے سے کی جاسکتی ہے:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

جملہ $a^3 - b^3$ دو مکعبوں کا فرق ہے اور اس کی تجزی درج ذیل طریقے سے کی جاسکتی ہے:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

مثال17: $8x^3 + 27$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned} & 8x^3 + 27 \\ &= (2x)^3 + (3)^3 \\ &= (2x + 3)[(2x)^2 - (2x)(3) + (3)^2] \\ &= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) \end{aligned}$$

کیا آپ جانتے ہیں؟

$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$
$(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$
$(a + b)^3 \neq a^3 + b^3$
$(a - b)^3 \neq a^3 - b^3$

مثال18: $x^3 - 27y^3$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned} & x^3 - 27y^3 \\ &= (x)^3 - (3y)^3 \\ &= (x - 3y)[(x)^2 + (x)(3y) + (3y)^2] \\ &= (x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2) \end{aligned}$$

مشق 4.2

1۔ درج ذیل جملوں کی تجزی کریں:

(i) $4x^4 + 81y^4$ (ii) $a^4 + 64b^4$ (iii) $x^4 + 4x^2 + 16$
(iv) $x^4 - 14x^2 + 1$ (v) $x^4 - 30x^2y^2 + 9y^4$ (vi) $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$

2۔ درج ذیل جملوں کی تجزی کریں:

(i) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$ (ii) $(x + 2)(x - 7)(x - 4)(x - 1) + 17$
(iii) $(2x^2 + 7x + 3)(2x^2 + 7x + 5) + 1$ (iv) $(3x^2 + 5x + 3)(3x^2 + 5x + 5) - 3$
(v) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) - 3x^2$ (vi) $(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2) - 16x^2$

3۔ تجزی کریں:

(i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ (ii) $27a^3 + 108a^2b + 144ab^2 + 64b^3$
(iii) $x^3 + 18x^2y + 108xy^2 + 216y^3$ (iv) $8x^3 - 125y^3 + 150xy^2 - 60x^2y$

4۔ تجزی کریں:

(i) $125a^3 - 1$ (ii) $64x^3 + 125$ (iii) $x^6 - 27$
(iv) $1000a^3 + 1$ (v) $343x^3 + 216$ (vi) $27 - 512y^3$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

4.2 الجبری جملوں کا عاداعظم (HCF) اور ذواضعاف اقل (LCM)
(Highest Common Factor (HCF) and Least Common Multiple (LCM) of Algebraic Expressions)

4.2.1 عاداعظم (Highest Common Factor (HCF))

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عاداعظم سب سے بڑا الجبری جملہ ہوتا ہے جو ان کو بغیر کچھ باقی چھوڑے تقسیم کرتا ہے۔ ہم درج ذیل دو طریقوں سے دیئے گئے جملوں کا عاداعظم معلوم کر سکتے ہیں:

(a) بذریعہ تجزی　　(b) بذریعہ تقسیم

(a) عاداعظم بذریعہ تجزی معلوم کرنا

مثال 19: $6x^2y,\ 9xy^2$ کا عاداعظم معلوم کریں۔

حل:

$$6x^2y = 2 \times 3 \times x \times x \times y$$
$$9xy^2 = 3 \times 3 \times x \times y \times y$$

عاداعظم $= 3 \times x \times y$ (مشترک عادوں کا حاصل ضرب)

$= 3xy$

مثال 20: کثیر رقمی جملوں $x^3 - 27,\ x^2 + 6x - 27,\ x^2 - 9$ کا عاداعظم بذریعہ تجزی معلوم کریں۔

حل:

$$x^3 - 27 = x^3 - 3^3$$
$$= (x-3)[(x)^2 + (x)(3) + (3)^2]$$
$$= (x-3)(x^2 + 3x + 9)$$
$$x^2 + 6x - 27 = x^2 + 9x - 3x - 27$$
$$= x(x+9) - 3(x+9)$$
$$= (x+9)(x-3)$$
$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2$$
$$= (x-3)(x+3)$$

عاداعظم $= x - 3$

(b) عاداعظم بذریعہ تقسیم معلوم کرنا

مثال 21: کثیر رقمی جملوں $6x^3 - 17x^2 - 5x + 6$ اور $6x^3 - 5x^2 - 3x + 2$ کا عاداعظم بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 6x^3 - 17x^2 - 5x + 6 & 6x^3 - 5x^2 - 3x + 2 \\ & \underline{-6x^3 \mp 17x^2 \mp 5x \pm 6} \\ & 12x^2 + 2x - 4 \end{array}$$

یہاں $12x^2 + 2x - 4 = 2(6x^2 + x - 2)$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

2 دیے گئے دونوں جملوں میں مشترک نہیں ہے اس لیے ہم اسے نظر انداز کرتے ہیں اور صرف $6x^2 + x - 2$ کو لیتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & x - 3 \\ 6x^2 + x - 2 & 6x^3 - 17x^2 - 5x + 6 \\ & \underline{\underset{-}{}6x^3 \underset{-}{+} x^2 \underset{+}{-} 2x} \\ & -18x^2 - 3x + 6 \\ & \underline{\underset{+}{-}18x^2 \underset{+}{-} 3x \underset{-}{+} 6} \\ & 0 \end{array}$$

پس $\quad 6x^2 + x - 2 =$ عاد اعظم

4.2.2 ذواضعاف اقل (Least Common Multiple (LCM))

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا ذواضعاف اقل سب سے چھوٹا الجبری جملہ ہوتا ہے جو دیے گئے دونوں جملوں پر قابل تقسیم ہوتا ہے۔

ذواضعاف اقل بذریعہ تجزی معلوم کرنے کے لیے ہم درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں:

غیر مشترک اجزائے ضربی × مشترک اجزائے ضربی = ذواضعاف اقل

مثال 22: $4x^2y,\ 8x^3y^2$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل:

$4x^2y = 2 \times 2 \times x \times x \times y$

$8x^3y^2 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x \times y \times y$

مشترک اجزائے ضربی $= 2 \times 2 \times x \times x \times y = 4x^2y$

غیر مشترک اجزائے ضربی $= 2 \times x \times y = 2xy$

غیر مشترک اجزائے ضربی × مشترک اجزائے ضربی = ذواضعاف اقل

$= 4x^2y \times 2xy = 8x^3y^2$

مثال 23: کثیر رقمی جملوں $x^2 - 3x + 2$، $x^2 - 1$ اور $x^2 - 5x + 4$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل: جیسا کہ

$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2$

$= x(x - 2) - 1(x - 2)$

$= (x - 2)(x - 1)$

اور $\quad x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

$x^2 - 5x + 4 = x^2 - 4x - x + 4$

$= x(x - 4) - 1(x - 4)$

$= (x - 4)(x - 1)$

مشترک اجزائے ضربی $= x - 1$

غیر مشترک اجزائے ضربی $= (x + 1)(x - 2)(x - 4)$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

غیر مشترک اجزائے ضربی × مشترک اجزائے ضربی = ذواضعاف اقل

$= (x - 1) \times (x + 1)(x - 2)\ (x - 4)$

ذواضعاف اقل $= (x - 1)(x + 1)(x - 2)\ (x - 4)$

4.2.3 عادا عظم اور ذواضعاف اقل کے درمیان تعلق (Relationship Between LCM and HCF)

عادا عظم اور ذواضعاف اقل کے درمیان تعلق کو اس طرح سے ظاہر کیا جاتا ہے:

ذواضعاف اقل × عادا عظم $= p(x) \times q(x)$

یہاں پہلا کثیر رقمی جملہ $= p(x)$

دوسرا کثیر رقمی جملہ $= q(x)$

مثال24: دو کثیر رقمی جملوں کا ذواضعاف اقل اور عادا عظم بالترتیب $x^3 - 10x^2 + 11x + 70$ اور $x - 7$ ہے۔ اگر ایک کثیر رقمی جملہ $x^2 - 12x + 35$ ہو تو دوسرا کثیر رقمی جملہ معلوم کریں۔

حل: ذوضاف اقل $= x^3 - 10x^2 + 11x + 70$

عادا عظم $= x - 7$

$p(x) = x^2 - 12x + 35$

$q(x) = ?$

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ

$$q(x) = \frac{\text{عادِا عظم} \times \text{ذو اضعاف اقل}}{p(x)}$$

$$= \frac{(x^3 - 10x^2 + 11x + 70)(x - 7)}{x^2 - 12x + 35}$$

$$\begin{array}{r|l} & x + 2 \\ x^2 - 12x + 35 & x^3 - 10x^2 + 11x + 70 \\ & \underline{-x^3 \mp 12x^2 \pm 35x} \\ & 2x^2 - 24x + 70 \\ & \underline{-2x^2 \mp 24x \pm 70} \\ & 0 \end{array}$$

پس

$q(x) = (x + 2)(x - 7)$

$= x^2 - 7x + 2x - 14$

$= x^2 - 5x - 14$

مثال25: دو کثیر رقمی جملوں $x^2y + xy^2$ اور $x^2 + xy$ کا ذواضعاف اقل $xy\ (x + y)$ ہے۔ ان کا عادا عظم معلوم کریں۔

حل: ذواضعاف اقل $= xy(x + y)$

عادا عظم $= ?$

پہلا کثیر رقمی جملہ $= x^2y + xy^2$

دوسرا کثیر رقمی جملہ $= x^2 + xy$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ عاداعظم × ذواضعاف اقل = دو کثیر رقمی جملوں کا حاصل ضرب

$$\text{عاداعظم} = \frac{\text{دو کثیر رقمی جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{ذواضعاف اقل}}$$

$$= \frac{(x^2y + xy^2)(x^2 + xy)}{xy(x+y)}$$

$$= \frac{xy(x+y)x(x+y)}{xy(x+y)}$$

$$= x(x+y)$$

مشق 4.3

1۔ عاداعظم بذریعہ تجزی معلوم کریں۔

(i) $21x^2y,\ 35xy^2$ (ii) $4x^2 - 9y^2,\ 2x^2 - 3xy$

(iii) $x^3 - 1,\ x^2 + x + 1$ (iv) $a^3 + 2a^2 - 3a,\ 2a^3 + 5a^2 - 3a$

(v) $t^2 - 3t - 4,\ t^2 + 5t + 4,\ t^2 - 1$ (vi) $x^2 + 15x + 56,\ x^2 + 5x - 24,\ x^2 + 8x$

2۔ درج ذیل جملوں کا عاداعظم بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

(i) $27x^3 + 9x^2 - 3x - 10,\ 3x - 2$ (ii) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15,\ x^2 - 4x + 3$

(iii) $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2,\ 6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$

(iv) $2x^3 - 4x^2 - 16x,\ x^3 - 4x,\ 3x^2 - 6x$

3۔ درج ذیل جملوں کا ذواضعاف اقل بذریعہ تجزی معلوم کریں۔

(i) $2a^2b,\ 4ab^2,\ 6ab$ (ii) $x^2 + x,\ x^3 + x^2$

(iii) $a^2 - 4a + 4,\ a^2 - 2a$ (iv) $x^4 - 16,\ x^3 - 4x$

(v) $16 - 4x^2,\ x^2 + x - 6,\ 4 - x^2$

4۔ دو کثیر رقمی جملوں کا عاداعظم $y - 7$ اور ذواضعاف اقل $y^3 - 10y^2 + 11y + 70$ ہے۔ اگر ایک کثیر رقمی جملہ $y^2 - 5y - 14$ ہو تو دوسرا کثیر رقمی جملہ معلوم کریں۔

5۔ دو کثیر رقمی جملوں $p(x)$ اور $q(x)$ کا ذواضعاف اقل اور عاداعظم بالترتیب $36x^3(x + a)(x^3 - a^3)$ اور $x^2(x - a)$ ہے۔ اگر $p(x) = 4x^2(x^2 - a^2)$ ہو تو $q(x)$ معلوم کریں۔

6۔ دو کثیر رقمی جملوں کا عاداعظم اور ذواضعاف اقل بالترتیب $(x + a)$ اور $12x^2(x + a)(x^2 - a^2)$ ہو تو دونوں جملوں کی حاصل ضرب معلوم کریں۔

4.3 الجبری جملوں کا جذرالمربع (Square Root of an Algebraic Expression)

الجبری جملہ کے جذرالمربع سے مراد ایک ایسی قدر ہے جسے خود سے ضرب کرنے سے اصل جملہ حاصل ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرح جیسے کسی عدد کا جذرالمربع معلوم کیا جاتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال کے طور پر $4a^2$ کا جذرالمربع $\pm 2a$ ہے کیوں کہ $2a \times 2a = 4a^2$ اور $(-2a) \times (-2a) = 4a^2$

الجبری جملے کا جذرالمربع معلوم کرنے کے درج ذیل دو طریقے ہیں:

(a) بذریعہ تجزی (b) بذریعہ تقسیم

(a) جذرالمربع بذریعہ تجزی

مثال26: $36x^4 - 36x^2 + 9$ کا جذرالمربع معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} 36x^4 - 36x^2 + 9 &= 9(4x^4 - 4x^2 + 1) \\ &= 9[(2x^2)^2 - 2(2x^2)(1) + (1)^2] \\ &= 3^2(2x^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

طرفین کا جذرالمربع لینے سے

$$\begin{aligned} \sqrt{36x^4 - 36x^2 + 9} &= \sqrt{3^2(2x^2 - 1)^2} \\ &= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{(2x^2 - 1)^2} \\ &= \pm 3(2x^2 - 1) \end{aligned}$$

(b) جذرالمربع بذریعہ تقسیم

جب کثیر رقمی جملے کا درجہ زیادہ ہو تب تقسیم کے طریقہ سے جذرالمربع معلوم کرنا بہت مفید ہوتا ہے۔

مثال27: $x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9$ کا جذرالمربع معلوم کریں۔

	$x^2 - 6x + 3$
x^2	$x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9$
	$-x^4$
$2x^2 - 6x$	$-12x^3 + 42x^2$
	$\mp 12x^3 \pm 36x^2$
$2x^2 - 12x + 3$	$6x^2 - 36x + 9$
	$-6x^2 \mp 36x \pm 9$
	0

حل: x^2 کو x^2 سے ضرب دینے سے x^4 حاصل ہوتا ہے۔

حاصل تقسیم (x^2) کو 2 سے ضرب دینے سے $2x^2$ حاصل ہوتا ہے۔ اور $2x^2$ کو $-12x^3$ سے تقسیم کرنے سے $-6x$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح جاری رکھنے سے ہم باقی حاصل کرتے ہیں۔

پس $x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9$ کا جذرالمربع $\pm(x^2 - 6x + 3)$ ہے۔

4.3.1 تجزی سے متعلق حقیقی دنیا کے مسائل (Real World Problems of Factorization)

اس حصہ میں ہم دو درجی اور سہ درجی الجبری جملوں کی تجزی کے تصور کو حقیقی دنیا کے مسائل جیسا کہ انجینئرنگ، فزکس اور فنانس پر لاگو کریں گے۔

مثال28: کسی پُرزے کی تیاری کے لیے لاگت کا تفاعل اس طرح ماڈل کیا گیا ہے:

$$C(x) = 5x^2 - 25x + 30$$

یہاں x جزو کی چوڑائی اور $C(x)$ قیمت ہے۔ x کی قیمت معلوم کریں یہاں $C(x)$ کم سے کم ہو۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حل:
$$C(x) = 5x^2 - 25x + 30$$
$$= 5(x^2 - 5x + 6)$$
$$= 5(x^2 - 2x - 3x + 6)$$
$$= 5[x(x-2) - 3(x-2)]$$
$$= 5(x-2)(x-3)$$

اس طرح کم از کم لاگت اس وقت ہوتی ہے جب $x = 2$ یا $x = 3$ ہو۔

مثال29: کیوبک پوٹینشل میں حرکت کرنے والے جسم کی پوٹینشل توانائی $U(x)$ کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے:
$$U(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$
جملہ کی تجزی کرتے ہوئے ان نقاط کو معلوم کریں جہاں توانائی کم سے کم ہو جائے۔

حل:
$$U(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$
$$= (x)^3 - 3(x)^2(2) + 3(x)(2)^2 - (2)^3$$
$$= (x-2)^3$$
$$= (x-2)(x-2)(x-2)$$

پوٹینشل توانائی تفاعل کی تجزی یہ ظاہر کرتی ہے کہ $x = 2$ پر توانائی کم سے کم ہے۔

مثال30: کمپنی کے منافع $P(x)$ کو دو درجی مساوات سے ظاہر کیا گیا ہے:
$$P(x) = -5x^2 + 50x - 120$$
یہاں x تیار شدہ اکائیوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے اور $P(x)$ منافع کو ڈالر میں ظاہر کرتا ہے۔ معلوم کریں کہ منافع کو زیادہ سے زیادہ کرنے کے لیے کتنے یونٹ تیار کرنے چاہییں۔

حل:
$$P(x) = -5x^2 + 50x - 120$$
$$= -5(x^2 - 10x + 24)$$
$$= -5[x^2 - 4x - 6x + 24]$$
$$= -5[x(x-4) - 6(x-4)]$$
$$= -5(x-4)(x-6)$$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ منافع صفر تب ہو گا جب $x = 4$ یا $x = 6$ ہو۔ جیسا کہ x^2 کا عددی سر منفی ہے۔ زیادہ سے زیادہ منافع 4 اور 6 کے درمیانی نقطہ پر ہوتا ہے۔

$$x = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

پس کمپنی کو زیادہ سے زیادہ منافع حاصل کرنے کے لیے 5 اکائیاں بنانے چاہییں۔

مشق 4.4

1۔ درج ذیل جملوں کا جذر المربع بذریعہ تجزی معلوم کریں:

(i) $x^2 - 8x + 16$ (ii) $9x^2 + 12x + 4$

(iii) $36a^2 + 84a + 49$ (iv) $64y^2 - 32y + 4$

(v) $200t^2 - 120t + 18$ (vi) $40x^2 + 120x + 90$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

2۔ درج ذیل جملوں کا جذر المربع بذریعہ تقسیم معلوم کریں:

(i) $4x^4 - 28x^3 + 37x^2 + 42x + 9$

(ii) $121x^4 - 198x^3 - 183x^2 + 216x + 144$

(iii) $x^4 - 10x^3y + 27x^2y^2 - 10xy^3 + y^4$

(iv) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 - 42x + 49$

3۔ x ہزار روپے کی سرمایہ کاری کے بعد ایک سرمایہ کار کی واپسی $R(x)$ روپے میں دو درجی جملہ دیا گیا ہے:

$$R(x) = -x^2 + 6x - 8$$

تجزی کریں اور سرمایہ کاری کی سطحیں معلوم کریں جس کے نتیجے میں صفر کی واپسی ہوتی ہو۔

4۔ کسی شے کی x اکائیاں فروخت کرنے سے روپوں میں کمپنی کا منافع $P(x)$ سہ درجی جملہ کے ذریعہ دیا گیا ہے:

$$P(x) = x^3 - 15x^2 + 75x - 125$$

مساوی نقطہ معلوم کریں جہاں منافع صفر ہو۔

5۔ برقی میدان میں پوٹینشل توانائی $V(x)$ فاصلہ x کے سہ درجی تفاعل کے طور پر مختلف ہوتی ہے:

$$V(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$$

معلوم کریں کہ پوٹینشل توانائی کہاں صفر ہے۔

6۔ ساختی انجینئرنگ میں شہتیر کا انحراف $Y(x)$ دیا گیا ہے:

$$Y(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

یہ مساوات شہتیر کے ساتھ کسی بھی نقطہ x پر عمودی انحراف دیتی ہے۔ صفر انحراف کے نقاط معلوم کریں۔

جائزہ مشق 4

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) $12x + 36$ کی تجزی ہے:

(a) $12(x + 3)$ (b) $12(3x)$ (c) $12(3x + 1)$ (d) $x(12 + 36x)$

(ii) $4x^2 - 12x + 9$ کے اجزائے ضربی ہیں:

(a) $(2x + 3)^2$ (b) $(2x - 3)^2$

(c) $(2x - 3)(2x + 3)$ (d) $(2 + 3x)(2 - 3x)^2$

(iii) a^3b^3 اور ab^2 کا عاد اعظم ہے:

(a) a^3b^3 (b) ab^2 (c) a^4b^5 (d) a^2b

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(iv) $16x^2$، $4x$ اور $30xy$ کا ذواضعاف اقل ہے:

(a) $480x^3y$ (b) $240xy$ (c) $240x^2y$ (d) $120x^4y$

(v) دو کثیر رقمی جملوں کا ____________ = ذواضعاف اقل اور عاد اعظم کا حاصل ضرب

(a) مجموعہ (b) فرق (c) حاصل ضرب (d) حاصل تقسیم

(vi) $x^2 - 6x + 9$ کا جذرالمربع ہے:

(a) $\pm(x-3)$ (b) $\pm(x+3)$ (c) $x-3$ (d) $x+3$

(vii) $(a-b)^2$ اور $(a-b)^4$ کا ذواضعاف اقل ہے:

(a) $(a-b)^2$ (b) $(a-b)^3$ (c) $(a-b)^4$ (d) $(a-b)^6$

(viii) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ کی تجزی ہے:

(a) $(x+1)^3$ (b) $(x-1)^3$
(c) $(x+1)(x^2+x+1)$ (d) $(x-1)(x^2-x+1)$

(ix) سہ درجی کثیر رقمی جملے کا درجہ ہوتا ہے:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(x) $x^3 - 27$ کا ایک جزو ضربی ہے:

(a) $x-3$ (b) $x+3$ (c) x^2-3x+9 (d) a اور c دونوں

2۔ درج ذیل جملوں کی تجزی کریں:

(i) $4x^3 + 18x^2 - 12x$ (ii) $x^3 + 64y^3$
(iii) $x^3y^3 - 8$ (iv) $-x^2 - 23x - 60$
(v) $2x^2 + 7x + 3$ (vi) $x^4 + 64$
(vii) $x^4 + 2x^2 + 9$ (viii) $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) - 360$
(ix) $(x^2 + 6x + 3)(x^2 + 6x - 9) + 36$

3۔ ذواضعاف اقل اور عاد اعظم معلوم کریں۔

(i) $4x^3 + 12x^2,\ 8x^2 + 16x$ (ii) $x^3 + 3x^2 - 4x,\ x^2 - 4x + 3$
(iii) $x^2 + 8x + 16,\ x^2 - 16$ (iv) $x^3 - 9x,\ x^2 - x - 6$

4۔ $16x^4 + 8x^2 + 1$ کا جذرالمربع بذریعہ تجزی اور بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

5۔ حوریہ اپنے قرض کی کل لاگت کا تجزیہ کر رہی ہے، جس کا ماڈل $C(x) = x^2 - 8x + 15$ ہے جہاں x سالوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ حوریہ کے قرض کی ادائیگی کی بہترین مدت کیا ہے؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP