یونٹ 3

سیٹ اور تفاعل
(Sets and Functions)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- سابقہ واقفیت
  - ریاضی کو نمونوں، ساخت اور تعلق کے مطالعہ کے طور پر بیان کر سکیں۔
  - وین اشکال کا استعمال کرتے ہوئے سیٹوں کی شناخت کریں اور تین سیٹوں (تحتی سیٹ، متراکب سیٹ اور غیر مشترک سیٹ) پر قوانین کا اطلاق کر سکیں۔
- دو یا تین سیٹوں کو وین اشکال میں استعمال کرتے ہوئے درجہ بندی اور فہرست بندی کے مسائل کو حل کر سکیں۔مزید سیٹوں کو حقیقی دنیا کے مسائل پر لاگو کر سکیں۔
- تجزیاتی اور وین اشکال کے طریقوں کے ذریعے تین سیٹوں کے یونین اور تقاطع کی خصوصیات / قوانین کی تصدیق اور اطلاق کر سکیں۔
- سیٹ تھیوری کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل پر لاگو کر سکیں (جیسے آبادیاتی درجہ بندی میں اور شاپنگ مالز میں مصنوعات کی درجہ بندی میں)۔
- کارتیسی حاصل ضرب ، ثنائی ربط اور اس کے ڈومین اور رینج کی وضاحت کر سکیں۔
- سمجھیں کہ کسی ربط کو جدول، مرتب جوڑے اور گراف کے ذریعے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔
- علامات کو پہچانیں اور تفاعل کی قیمت اور اس کے ڈومین اور رینج کا تعین کر سکیں۔
- وین اشکال کا استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی اقسام (اِن ٹو، آن ٹو، وَن۔ٹو۔وَن، اِن جیکٹو، سرجیکٹِو اور بائی جیکٹِو) کی شناخت کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

اس یونٹ میں، ہم سیٹ تھیوری اور تفاعل کے کچھ بنیادی تصورات کا اعادہ کریں گے، ریاضی کو بطور ایک لازمی مطالعہ سمجھتے ہوئے، جو نمونوں، ساخت اور ربط کا تجزیہ کرتی ہے۔ طلبہ مختلف اقسام کے سیٹوں کی پہچان، دو اور تین سیٹوں کے یونین اور تقاطع کے قوانین اور ان کو وین اشکال سے ظاہر کرنا سیکھیں گے۔ مزید برآں وہ سیٹ تھیوری کو حقیقی دنیا کے مسائل میں لاگو کریں گے تاکہ آبادیاتی درجہ بندی اور مصنوعات کی درجہ بندی کے تصور کو بہتر سمجھ سکیں۔ درجہ بندی مختلف سیٹوں کے مابین ربط کو سمجھنے میں مدد دیتی ہے۔ طلبہ ثنائی ربط اور تفاعل کو بھی دریافت کریں گے اور ان کو مختلف طریقوں بشمول جدول، مترتب جوڑے اور گراف سے ظاہر کرنا سیکھیں گے۔

3.1 ریاضی نمونوں، ساختوں اور روابط کے طور پر

(Mathematics as the Study of Patterns, Structures and Relationships)

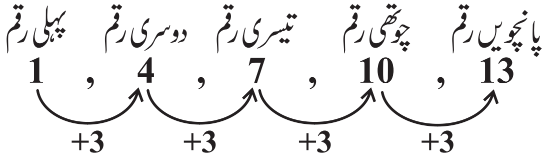
ریاضی نمونوں، ساختوں اور روابط کی سائنس ہے، بشمول مختلف شاخوں کے جو ہماری دنیا کے منطقی اور مقداری پہلوؤں کی کھوج اور

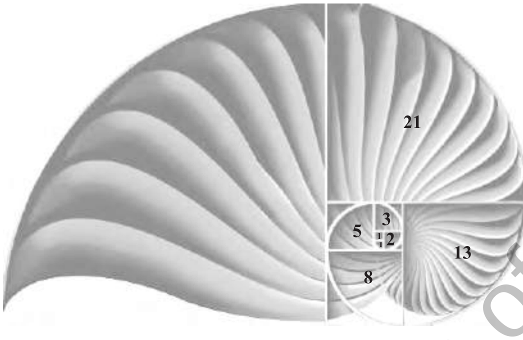
NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

تجزیہ کرتی ہیں۔ ریاضی کی طاقت ان روابط پر مبنی ہے جو نمونوں اور ساخت کے درمیان تفہیم کو بہتر بناتے ہیں اور ان کی عمومی شکلیں فراہم کرتے ہیں۔

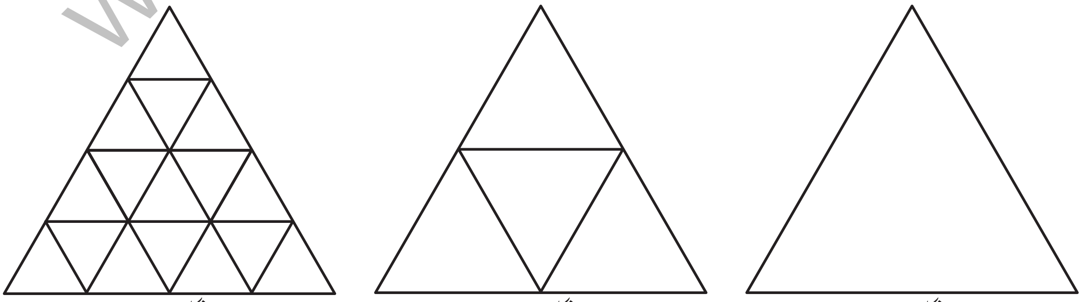
ایک ریاضیاتی نمونہ اعداد، اشکال یا علامتوں کا ایک متوقع نظام ہے جو ایک مخصوص اصول یا ربط کی پیروی کرتا ہے۔ عملی طور پر نمونے ساختی علم سیکھنے کی کنجی ہیں جو عددی اور جیومیٹری کے روابط پر مشتمل ہیں۔ مثال کے طور پر اعداد کے درج ذیل عددی نمونے کو دیکھیں۔





اوپر دیے گئے نمونے میں ہر رقم پچھلی رقم میں 3 کا اضافہ کر کے حاصل کی جاتی ہے۔ یہ پیشن گوئی کی قابل قاعدہ یا نمونہ مسلسل جاری رہتا ہے، جس سے یہ ایک سلسلہ بنتا ہے جہاں ہر رقم مستقل شرح سے بڑھتی ہے۔ ایک اور مشہور سلسلے کی مثال پر غور کریں:

... ,0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 جسے فیبوناکی (Fibonacci) سلسلہ کہا جاتا ہے۔ یہ سلسلہ دو ابتدائی رقموں، 0 اور 1 سے شروع ہوتا ہے۔ اس سلسلے کی ہر رقم پچھلی دو رقموں کو جمع کر کے حاصل کی جاتی ہے۔ فیبوناکی سلسلے کا کلیہ یہ ہے $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ جہاں $F_0 = 0$ اور $F_1 = 1$ یہ بالترتیب پہلی اور دوسری رقمیں ہیں۔ یہ نمونہ فطرت میں بار بار نظر آتا ہے۔ ریاضی کی ساخت کا مطالعہ ریاضی کی مہارت کے لیے ضروری ہے۔ ریاضی کی ساخت عموماً عددی، جیومیٹری اور منطقی ربط کا ایک قاعدہ ہوتی ہے جو کسی خاص ڈومین میں مستقل رہتا ہے۔ ساخت اشیا یا عناصر کا ایک مجموعہ ہے، جس میں ان کے درمیان مخصوص روابط کو بیان کیا گیا ہے۔ ایک مثلث پر غور کریں جو چھوٹی مثلثوں پر مشتمل ہے جیسا کہ شکل (iii) میں دکھایا گیا ہے۔

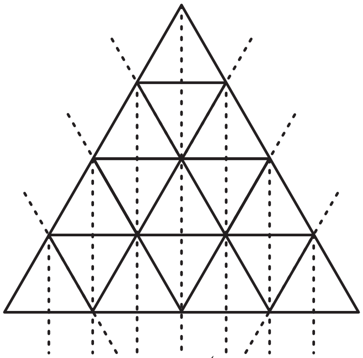


شکل (iii)　　　شکل (ii)　　　شکل (i)

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

چھوٹی مثلثوں کو ترتیب دے کر ایک بڑی مثلث بنانے کا نمونہ واضح ہے۔ ہم آسانی سے پوشیدہ ساخت کو پہچان سکتے ہیں: بڑی مثلث کو کئی قطاروں پر مشتمل سمجھا جاسکتا ہے، جہاں ہر قطار میں چھوٹی مثلثوں کی تعداد کم ہوتی جاتی ہے (مثلاً، پہلی قطار میں 7 مثلثیں، دوسری میں 5 مثلثیں، تیسری میں 3 مثلثیں اور سب سے اوپر 1 مثلث)۔


شکل (iv)

قطاروں کی تکرار اور چھوٹی مثلث کے درمیان مکانی ربط اہم ساختی خصوصیات ہیں۔ چھوٹی مثلثوں کی سیدھ ہم آہنگی کا احساس پیدا کرتی ہے کیوں کہ ہر قطار ایک ہی سائز کی مثلثوں سے بنی ہوتی ہے۔ ایک ہی وقت میں یہ ترتیب متوازی اور عمودی روابط کو ظاہر کرتی ہے جب بڑی مثلث کی بنیاد کے حوالے سے دیکھا جائے جیسا کہ شکل (iv) میں دکھایا گیا ہے۔ ان نمونوں اور ساختوں کو سمجھنے سے ہم منطقی دلائل بنا سکتے ہیں۔

3.2 بنیادی تعریفیں (Basic Definitions)

ہم سیٹ کے تصور سے واقف ہیں کیوں کہ یہ لفظ روزمرہ گفتگو میں اکثر استعمال ہوتا ہے، جیسے پانی کا سیٹ، چائے کا سیٹ اور صوفہ سیٹ۔ حیرت کی بات ہے کہ ریاضی دانوں نے اس عام لفظ کو ایک ریاضیاتی تصور میں اس حد تک ترقی دی ہے کہ یہ جدید ریاضی کی اکثر شاخوں میں استعمال ہونے والی زبان بن چکا ہے۔ سیٹوں کا مطالعہ روابط، تفاعل اور خاص طور پر شماریات میں احتمال اور دیگر اہم تصورات کو سمجھنے میں مدد کرتا ہے۔ سیٹ کو واضع اور مختلف اشیا، اعداد یا ارکان کا مجموعہ قرار دیا جاتا ہے، تاکہ ہم یہ فیصلہ کر سکیں کہ کوئی چیز اس مجموعے کا حصہ ہے یا نہیں۔

جارج کینٹر ایک جرمن ریاضی دان تھا (1918-1845) جس نے سیٹ تھیوری کی ترقی میں نمایاں کردار ادا کیا، جو کہ ریاضی کا ایک اہم شعبہ ہے۔ اس نے دکھایا کہ کس طرح دو سیٹوں کا موازنہ ان کے اراکین کو ایک دوسرے سے ملا کر کیا جائے۔ کینٹر نے لامحدود سیٹوں کی مختلف اقسام کی وضاحت کی اور ثابت کیا کہ قدرتی اعداد سے زیادہ حقیقی اعداد ہیں۔ اس کے ثبوت سے معلوم ہوا کہ لامحدودیت کے کئی سائز ہیں۔ مزید بر آں، اس نے اصلی اور توصیفی اعداد کے تصورات کو ان کے ریاضی کے عمل کے ساتھ متعارف کرایا۔

بڑے انگریزی حروف تہجی A, B, C, X, Y, Z وغیرہ، عام طور پر سیٹوں کے نام کے طور پر استعمال ہوتے ہیں اور چھوٹے انگریزی حروف تہجی a, b, c, x, y, z وغیرہ، سیٹوں کے ارکان یا عناصر کے طور پر استعمال ہوتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

ایک سیٹ کو بیان کرنے کے تین مختلف طریقے ہیں۔

(i) **بیانیہ طریقہ (Descriptive Method)**: ایک سیٹ کو الفاظ میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر، انگریزی حروفِ تہجی کے تمام حروفِ علت کا سیٹ۔

(ii) **اندراجی طریقہ (Tabular Method)**: ایک سیٹ کو بریکٹ میں اس کے عناصر کی فہرست دے کر بیان کیا جا سکتا ہے۔
اگر A اوپر بیان کیا گیا سیٹ ہے، تو ہم اسے یوں لکھ سکتے ہیں: $A = \{a, e, i, o, u\}$

اندراجی طریقہ کو روسٹر طریقہ بھی کہا جاتا ہے۔

(iii) **ترقیم سیٹ ساز (Set-builder Method)**: بعض اوقات سیٹ کو بیان کرنے کے لیے ترقیم سیٹ ساز کا استعمال زیادہ آسان یا مفید ہوتا ہے۔ اس میں کسی بھی سیٹ کے رکن کے لیے ایک علامت یا حرف استعمال کیا جاتا ہے اور تمام ارکان کی مشترکہ خصوصیت بیان کی جاتی ہے۔ دیے گئے سیٹ کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$A = \{x \mid$ انگریزی حروفِ تہجی کا ایک حرفِ علت ہے $x\}$

درج بالا سیٹ A کو ہم اس طرح پڑھتے ہیں: تمام x کا سیٹ جب کہ x ایک انگریزی حروفِ تہجی کا ایک حرفِ علت ہے۔

سیٹ کی رکنیت کے لیے "$\in$" یہ علامت استعمال ہوتی ہے۔ اس طرح $a \in A$ کا مطلب ہے a سیٹ A کا ایک رکن ہے یا a سیٹ A میں شامل ہے۔ جب کہ $c \notin A$ کا مطلب ہے کہ c سیٹ A میں شامل نہیں ہے یا c سیٹ A کا رکن نہیں ہے۔

سیٹ کے ارکان کچھ بھی ہو سکتے ہیں: لوگ، ممالک، دریا، یا ہماری سوچ کی اشیا۔ الجبرا میں ہم عموماً اعداد کے سیٹ کو استعمال کرتے ہیں۔ ان سیٹوں کے نام اور تفصیل درج ذیل ہیں:

قدرتی اعداد کا سیٹ $= N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

مکمل اعداد کا سیٹ $= W = \{0, 1, 2, \ldots\}$

صحیح اعداد کا سیٹ $= Z = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$

طاق اعداد کا سیٹ $= O = \{\pm1, \pm3, \pm5, \ldots\}$

جفت اعداد کا سیٹ $= E = \{0, \pm2, \pm4, \ldots\}$

مفرد اعداد کا سیٹ $= P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

ناطق اعداد کا سیٹ $= Q = \{x \mid x = \frac{p}{q}$ اور جب کہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0\}$

غیر ناطق اعداد کا سیٹ $= Q' = \{x \mid x \neq \frac{p}{q}$ اور جب کہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0\}$

تمام حقیقی اعداد کا سیٹ $= R = Q \cup Q'$

ایسا سیٹ جس میں صرف ایک رکن ہو، یک رکنی سیٹ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر $\{3\}$، $\{a\}$ اور $\{$ہفتہ$\}$ یک رکنی سیٹ ہیں۔ وہ سیٹ جس میں کوئی رکن نہ ہو (یعنی ارکان کی تعداد صفر ہو) خالی سیٹ کہلاتا ہے۔ خالی سیٹ کو علامت $\emptyset$ یا $\{\ \}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

یاد رکھیے!
سیٹ $\{0\}$ ایک یک رکنی سیٹ ہے جس میں صرف صفر بطور واحد رکن موجود ہے اور یہ خالی سیٹ نہیں ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مساوی سیٹ: دو سیٹ A اور B مساوی ہیں اگر ان میں بالکل ایک جیسے ارکان ہوں یا اگر سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا رکن ہو۔ اگر دو سیٹ A اور B برابر ہیں تو ہم $A = B$ لکھتے ہیں۔ اس طرح، سیٹ $\{1، 2، 3\}$ اور $\{2، 1، 3\}$ مساوی سیٹ ہیں۔

مترادف سیٹ: دو سیٹ A اور B مترادف سیٹ کہلاتے ہیں اگر ان میں ارکان کی تعداد برابر ہو۔ مثال کے طور پر اگر $A = \{a, b, c, d, e\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ہو تو A اور B مترادف سیٹ ہیں۔ مترادف سیٹ کو ظاہر کرنے کے لیے علامت ~ استعمال کی جاتی ہے۔ اس طرح ہم لکھ سکتے ہیں $A \sim B$ ۔

> **یاد رکھیے!**
> کسی بھی سیٹ کے تحتی سیٹ کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے:
> $A \subseteq B$ اگر $\forall\, x \in A \Rightarrow x \in B$

تحتی سیٹ: اگر سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا بھی رکن ہو تو سیٹ A کو سیٹ B کا تحتی سیٹ کہتے ہیں۔ علامتی طور پر اسے $A \subseteq B$ لکھا جاتا ہے ۔ سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے۔

ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ سیٹ B سیٹ A کا ایک سپر (فوقی) سیٹ ہے۔ اس کو علامتی طور پر ایسے لکھتے ہیں:

$B \supseteq A$ (سیٹ B سیٹ A کا سپر سیٹ ہے)۔

واجب تحتی سیٹ: اگر سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہو اور سیٹ B کا کم از کم ایک رکن ایسا ہے جو سیٹ A کا رکن نہ ہو تو سیٹ A کو سیٹ B کا واجب تحتی سیٹ کہتے ہیں ۔ علامتی طور پر اسے $A \subset B$ لکھا جاتا ہے۔ سیٹ A سیٹ B کا واجب تحتی سیٹ ہے۔

غیر واجب تحتی سیٹ: اگر سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہو اور $A = B$ پھر ہم کہہ سکتے ہیں کہ سیٹ A سیٹ B کا غیر واجب تحتی سیٹ ہے۔ اس تعریف سے ہم یہ بھی اخذ کرسکتے ہیں کہ ہر سیٹ اپنا ہی غیر واجب تحتی سیٹ ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $A = \{a, b, c\}$، $B = \{c, a, b\}$ اور $C = \{a, b, c, d\}$ ہو تو واضح طور پر $A \subset C$، $B \subset C$ لیکن $A = B$ غور کریں کہ A اور B سیٹوں میں سے ہر ایک دوسرے کا غیر واجب تحتی سیٹ ہے کیوں کہ $A = B$

> **یاد رکھیے!**
> جب ہم واجب تحتی سیٹ اور غیر واجب تحتی سیٹ میں فرق نہیں کرتے تو پھر ہم یہ علامت $\subseteq$ استعمال کرتے ہیں . یہ دیکھنا آسان ہے کہ:
> $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

یونیورسل سیٹ: ایسا سیٹ جس میں زیر غور تمام اشیا یا ارکان شامل ہوں اسے یونیورسل سیٹ یا کائناتی سیٹ کہا جاتا ہے۔ اسے U سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

پاور سیٹ: سیٹ S کے پاور سیٹ کو $P(S)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ سیٹ S کے تمام ممکنہ تحتی سیٹوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر:

(i) اگر $C = \{a, b, c, d\}$ ہو تو

$$P(C) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

(ii) اگر $D = \{a\}$ ہو تو $P(D) = \{\phi\,, \{a\}\}$

اگر S ایک متناہی سیٹ ہے جس میں $n(S) = m$ سیٹ S کے عناصر کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے، تو $n\{P(S)\} = 2^m$ پاور سیٹ کے ارکان کی تعداد ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مشق 3.1

1۔ درج ذیل کو ترقیم سیٹ ساز میں لکھیے۔

(i) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots, 484\}$　(ii) $\{2, 4, 8, 16, \ldots, 256\}$

(iii) $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 1000\}$　(iv) $\{6, 12, 18, \ldots, 120\}$

(v) $\{100, 102, 104, \ldots, 400\}$　(vi) $\{1, 3, 9, 27, 81, \ldots\}$

(vii) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$　(viii) $\{5, 10, 15, \ldots, 100\}$

(ix) 100 – اور 1000 کے درمیان تمام صحیح اعداد کا سیٹ

2 درج ذیل کو اندراجی طریقہ میں لکھیے۔

(i) $\{x \mid x$ ضعف ہے 3 کا $\wedge\, x \leq 35\}$　(ii) $\{x \mid x \in R \wedge 2x + 1 = 0\}$

(iii) $\{x \mid x \in P \wedge x < 12\}$　(iv) $\{x \mid x$، 128 کا مقسوم علیہ ہے$\}$

(v) $\{x \mid x = 2^n, n \in N \wedge n < 8\}$　(vi) $\{x \mid x \in N \wedge x + 4 = 0\}$

(vii) $\{x \mid x \in N \wedge x = x\}$　(viii) $\{x \mid x \in Z \wedge 3x + 1 = 0\}$

3۔ درج ذیل سیٹوں میں سے ہر ایک کے دو واجب تحتی سیٹ لکھیں۔

(i) $\{a, b, c\}$　(ii) $\{0, 1\}$　(iii) N　(iv) Z

(v) Q　(vi) R　(vii) $\{x \mid x \in Q \wedge 0 < x \leq 2\}$

4۔ کیا کوئی ایسا سیٹ ہوتا ہے جس کا کوئی واجب تحتی سیٹ نہیں ہوتا؟ اگر ایسا ہے تو اس سیٹ کا نام لکھیے۔

5۔ $\{a, b\}$ اور $\{\{a, b\}\}$ میں کیا فرق ہے؟

6۔ درج ذیل سیٹوں میں سے ہر ایک کے پاور سیٹ کے ارکان کی تعداد کیا ہے؟

(i) $\{\ \}$　(ii) $\{0, 1\}$　(iii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(iv) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$　(v) $\{a, \{b, c\}\}$　(vi) $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$

7۔ درج ذیل سیٹوں میں سے ہر ایک کا پاور سیٹ لکھیں:

(i) $\{9, 11\}$　(ii) $\{+, -, \times, \div\}$　(iii) $\{\phi\}$　(iv) $\{a, \{b, c\}\}$

3.3 سیٹوں پر عوامل (Operations on Sets)

جس طرح اعداد پر جمع اور منفی وغیرہ کے عوامل کیے جاتے ہیں اسی طرح سیٹوں پر یونین اور تقاطع وغیرہ کے عوامل کیے جاتے ہیں۔ ہم ان سے پہلے ہی واقف ہیں۔ اہم خصوصیات کا جائزہ ذیل میں دیا گیا ہے:

دو سیٹوں کا یونین (Union of Two Sets)

دو سیٹوں A اور B کے یونین کو $A \cup B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ ایک ایسا سیٹ ہوتا ہے جو ان دونوں سیٹوں کے تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ علامتی طور پر ہم اسے یوں لکھتے ہیں:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

اس طرح اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ہو تو $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

دو سیٹوں کا تقاطع (Intersection of Two Sets)

دو سیٹوں A اور B کے تقاطع کو $A \cap B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ ایک ایسا سیٹ ہوتا ہے جو ان دونوں سیٹوں کے مشترک ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ علامتی طور پر ہم اسے یوں لکھتے ہیں:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

اس طرح، درج بالا سیٹوں A اور B کے لیے، $A \cap B = \{2, 3\}$

یاد رکھیے!
علامت $\vee$ کا مطلب ہے "یا"۔
علامت $\wedge$ کا مطلب ہے "اور"۔

غیر مشترک سیٹ (Disjoint Sets)

اگر دو سیٹوں کا تقاطع خالی سیٹ ہو تو سیٹوں کو غیر مشترک سیٹ کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر، اگر طاق قدرتی اعداد کا سیٹ $= S_1$ اور جفت قدرتی اعداد کا سیٹ $= S_2$ ہو تو S_1 اور S_2 غیر مشترک سیٹ کہلاتے ہیں۔ اسی طرح کالج کے آرٹس کے طلبہ کا سیٹ اور سائنس کے طلبہ کا سیٹ غیر مشترک سیٹ ہیں۔

متراکب سیٹ (Overlapping Sets)

اگر دو سیٹوں کا تقاطع غیر خالی سیٹ ہو اور نہ ہی کوئی دوسرے سیٹ کا تحتی سیٹ ہو تو ایسے سیٹوں کو متراکب سیٹ کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $L = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ اور $M = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ہو تو L اور M متراکب سیٹ ہیں۔

دو سیٹوں کا فرق (Difference of Two Sets)

سیٹ A اور سیٹ B کے درمیان فرق کو $A - B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو کہ ان تمام ارکان پر مشتمل ہے جو سیٹ A سے تعلق رکھتے ہیں لیکن سیٹ B سے تعلق نہیں رکھتے ہیں۔ علامتی طور پر

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \text{ اور } B - A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$$

مثال کے طور پر اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ اور $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ہو

تو $A - B = \{1, 2, 3\}$ اور $B - A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

نوٹ کریں کہ: $A - B \neq B - A$

سیٹ کا کمپلیمنٹ (Complement of a Set)

سیٹ A کے کمپلیمنٹ کو A' یا A^c سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یونیورسل سیٹ U کے لحاظ سے ایسا سیٹ ہے جس میں U کے وہ تمام ارکان شامل ہیں جو سیٹ A کے رکن نہیں۔ علامتی طور پر:

$$A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

نوٹ:
کمپلیمنٹ اور دو سیٹوں کے فرق کی تعریف کے پیش نظر یہ واضح ہے کہ کسی بھی سیٹ A کے لیے، $A' = U - A$

مثال کے طور پر اگر $U = Z$ ہو تو $E' = O$ اور $O' = E$۔

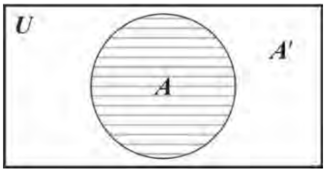
مثال کے طور پر اگر انگریزی زبان کے حروف تہجی کا سیٹ $= U$ اور حروفِ صحیح کا سیٹ $= C$، حروفِ علت کا سیٹ $= W$ ہو تو

$C' = W$ اور $W' = C$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

3.3.1 وین اشکال کا استعمال کرتے ہوئے سیٹوں کی شناخت
(Identification of Sets Using Venn Diagram)

سیٹ کے بنیادی تصورات اور سیٹوں کے درمیان تعلق کو بصری طور پر بیان کرنے میں وین اشکال بہت مفید ہیں۔ یہ اشکال سب سے

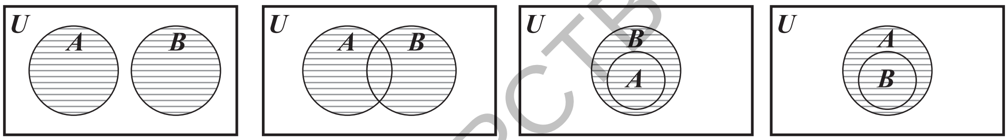


پہلے ایک انگریز منطق دان اور ریاضی دان جان وین (1834 تا 1883عیسوی) نے استعمال کی تھیں۔ ملحقہ شکل میں، مستطیل یونیورسل سیٹ U کو ظاہر کرتا ہے اور لکیر دار گول حصہ سیٹ A کو ظاہر کرتا ہے اور مستطیل کا بقیہ حصہ A' یا $U - A$ کو ظاہر کرتا ہے۔

ذیل میں کچھ مزید اشکال دی گئی ہیں جو مختلف صورتوں میں دو سیٹوں پر بنیادی عوامل کو ظاہر کرتی ہیں (نیچے دکھائے گئے لکیر دار حصے ہر صورت میں متعلقہ عامل کے نتیجہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔

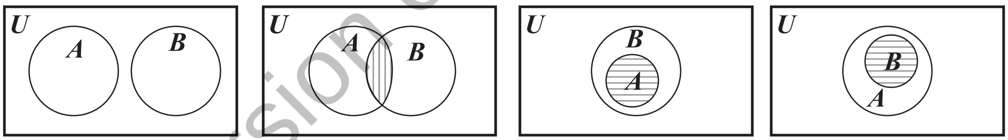
	غیر مشترک سیٹ	متراکب سیٹ	$A \subseteq B$	$B \subseteq A$

$A \cup B$



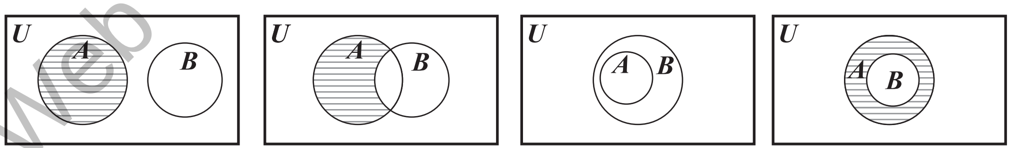
	غیر مشترک سیٹ	متراکب سیٹ	$A \subseteq B$	$B \subseteq A$
$A \cup B$	• $A \cap B = \phi$ • $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$	• $A \cap B \neq \phi$ • $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$	• $A \cup B = B$ • $n(A \cup B) = n(B)$	• $A \cup B = A$ • $n(A \cup B) = n(A)$

$A \cap B$



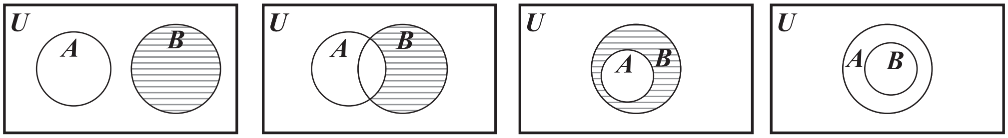
	غیر مشترک سیٹ	متراکب سیٹ	$A \subseteq B$	$B \subseteq A$
$A \cap B$	• $A \cap B = \phi$ • $n(A \cap B) = 0$	• $A \cap B \neq \phi$	• $A \cap B = A$ • $n(A \cap B) = n(A)$	• $A \cap B = B$ • $n(A \cap B) = n(B)$

$A - B$



	غیر مشترک سیٹ	متراکب سیٹ	$A \subseteq B$	$B \subseteq A$
$A - B$	• $A - B = A$ • $n(A - B) = n(A)$	• $n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$	• $A - B = \phi$ • $n(A - B) = 0$	• $A - B \neq \phi$ • $n(A - B) = n(A) - n(B)$

$B - A$



	غیر مشترک سیٹ	متراکب سیٹ	$A \subseteq B$	$B \subseteq A$
$B - A$	• $B - A = B$ • $n(B - A) = n(B)$	• $n(B-A) = n(B) - n(A \cap B)$	• $B - A \neq \phi$ • $n(B - A) = n(B) - n(A)$	• $B - A = \phi$ • $n(B - A) = 0$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

3.3.2 تین سیٹوں پر عوامل (Operations on Three Sets)

اگر A، B اور C تین دیے گئے سیٹ ہوں تو ان پر یونین اور تقاطع کے درج ذیل عوامل ہو سکتے ہیں:

(i) $A \cup (B \cup C)$ (ii) $(A \cup B) \cup C$ (iii) $A \cap (B \cup C)$

(iv) $(A \cap B) \cap C$ (v) $A \cup (B \cap C)$ (vi) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

(vii) $(A \cup B) \cap C$ (viii) $(A \cap B) \cup C$ (ix) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

3.3.2.1 یونین اور تقاطع کی خصوصیات (Properties of union and intersection)

اب ہم دو یا تین سیٹوں کے یونین اور تقاطع کی بنیادی خصوصیات بیان کرتے ہیں۔

خصوصیات (Properties)

(i) $A \cup B = B \cup A$ (یونین کی خاصیت مبادلہ)

(ii) $A \cap B = B \cap A$ (تقاطع کی خاصیت مبادلہ)

(iii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (یونین کی خاصیت تلازم)

(iv) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (تقاطع کی خاصیت تلازم)

(v) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (یونین کی تقاطع پر خاصیت تقسیمی)

(vi) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (تقاطع کی یونین پر خاصیت تقسیمی)

(vii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(viii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(ڈی مارگن کے قوانین)

سیٹوں کی خصوصیات کی تصدیق (Verification of the Properties Using Sets)

فرض کریں $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{2, 3, 4, 5\}$ اور $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(i)

$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\}$; $B \cup A = \{2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore \quad A \cup B = B \cup A$

(ii)

$A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\}$; $B \cap A = \{2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3\}$

$= \{2, 3\}$; $= \{2, 3\}$

$\therefore \quad A \cap B = B \cap A$

طلبہ خصوصیات (iii) اور (iv) کی خود تصدیق کریں۔

(v)

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{1, 2, 3\} \cup [\{2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}] \\ &= \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \ldots (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= [\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\}] \cap [\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}] \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \ldots (b) \end{aligned}$$

(a) اور (b) سے $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

طلبہ خصوصیت (vi) کی خود تصدیق کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(vii) فرض کریں اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$(A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad \ldots(a)$$
$$A' = U - A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$B' = U - B = \{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$A' \cap B' = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$= \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad \ldots(b)$$

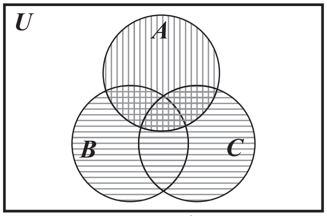
(a)اور(b) سے $(A \cup B)' = A' \cap B'$

طلبہ خصوصیت (viii) کی خود تصدیق کریں۔

وین اشکال کی مدد سے خصوصیات کی تصدیق

(i)اور(ii) کی تصدیق بہت آسان ہے، اس لیے خود کریں۔

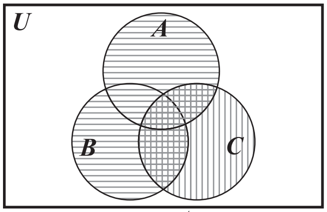
(iii) شکل (1) میں سیٹ A کو عمودی لکیر دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے اور $B \cup C$ کو افقی لکیر دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ سیٹ $A \cup (B \cup C)$ کو اُفقی، عمودی اور دُوہرے لکیر دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل(1)

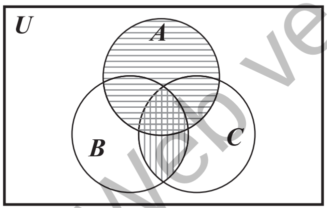
شکل(2) میں $A \cup B$ کو افقی لکیر دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے اور C کو عمودی لکیر دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ $A \cup (B \cup C)$ افقی، عمودی اور دوہرے لکیر دار حصے کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل(1) اور(2) سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$



شکل(2)

(iv) شکل(3) میں $A \cap (B \cap C)$ کو دوہرے لکیر دار حصہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

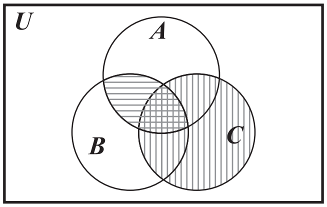


شکل(3)

شکل(4) میں $(A \cap B) \cap C$ کو دوہرے لکیر دار حصہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

چوں کہ شکل(3) اور شکل(4) میں یہ حصے ایک جیسے ہیں،

پس $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

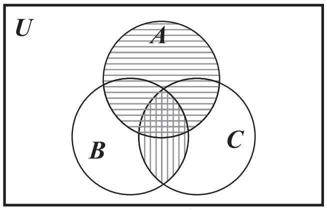


شکل(4)

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(v) شکل(5) میں $A \cup (B \cap C)$ کو افقی لکیر دار حصے، عمودی لکیر دار حصے اور دوہرے لکیر دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے۔

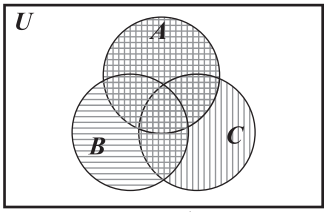


شکل(5)

شکل(6) میں $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ کو دوہرے لکیر دار حصہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

چوں کہ شکل(5) اور شکل(6) میں یہ حصے ایک جیسے ہیں،

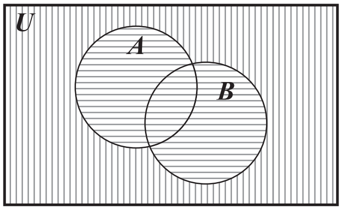
پس $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



شکل(6)

طلبہ خصوصیت (vi) کی خود تصدیق کریں۔

(vii) شکل(7) میں $(A \cup B)'$ کو عمودی لکیر دار حصہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔



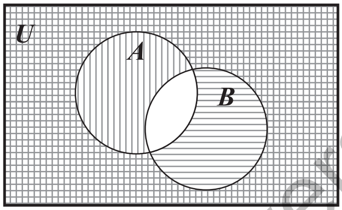
شکل(7)

شکل(8) میں $A' \cap B'$ کو دوہرے لکیر دار حصہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

چوں کہ شکل(7) اور شکل(8) میں یہ حصے ایک جیسے ہیں،

پس $(A \cup B)' = A' \cap B'$

طلبہ خصوصیت (viii) کی خود تصدیق کریں۔



شکل(8)

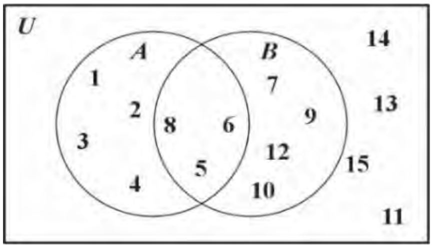
نوٹ :
اوپر دی گئی وین اشکال میں صرف متراکب سیٹوں پر غور کیا گیا ہے۔ اسی طرح دیگر صورتوں کی تصدیق بھی کی جاسکتی ہے۔

مثال 1- ملحقہ وین شکل پر غور کریں جو دو غیر خالی سیٹوں A اور B کو ظاہر کرتی ہے۔

(a) سیٹ A اور B میں مشترک ارکان کی تعداد معلوم کریں۔

(b) صرف سیٹ B کے وہ تمام ارکان معلوم کریں جو سیٹ A میں موجود نہ ہو۔

(c) سیٹ A اور B کا یونین معلوم کریں۔



Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حل۔ وین شکل میں فراہم کردہ معلومات سے ہم لکھ سکتے ہیں

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
$B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$

(a) A اور B دونوں سیٹوں میں موجود ارکان سیٹوں کا تقاطع ہیں

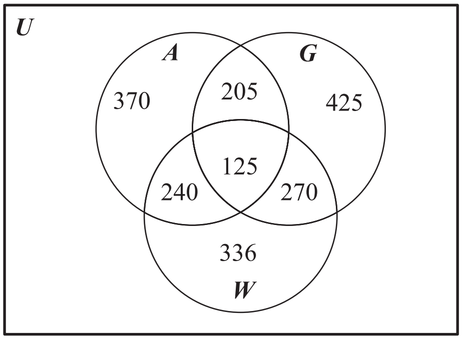
$A \cap B = \{5, 6, 8\}$

(b) وہ ارکان جو صرف سیٹ B میں ہیں، سیٹ A میں نہیں، سیٹوں کا فرق ہے

$B - A = \{7, 9, 10, 12\}$

(c) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \cup \{5, 6, 7, 8, 9, 10,12\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,12\}$

مثال 2: ملحقہ وین شکل پر غور کریں جس میں ایک آئی ٹی ادارے میں مختلف کورسز میں داخلہ لینے والے طلبہ کو ظاہر کیا گیا ہے۔



$U =$ آئی ٹی ادارے میں داخلہ لینے والے طلبہ

$A =$ اپلائیڈ روبو ٹکس میں داخلہ لینے والے طلبہ

$G =$ گیم ڈویلپمنٹ میں داخلہ لینے والے طلبہ

$W =$ ویب ڈیزائننگ میں داخلہ لینے والے طلبہ

(a) کتنے طلبہ نے اپلائیڈ روبو ٹکس کورس میں داخلہ لیا؟

(b) گیم ڈویلپمنٹ میں داخلہ لینے والے طلبہ کی کل تعداد معلوم کریں۔

(c) گیم ڈویلپمنٹ اور ویب ڈیزائننگ کورس میں کتنے طلبہ نے داخلہ لیا؟

(d) ان تمام طلبہ کی تعداد معلوم کریں جنھوں نے ویب ڈیولپمنٹ کے کورس میں داخلہ لیا لیکن اپلائیڈ روبو ٹکس کے کورس میں داخلہ نہیں لیا۔

(e) آئی ٹی کے ادارے میں کتنے طلبہ داخل ہیں؟

(f) تینوں کورسز میں کتنے طلبہ نے داخلہ لیا؟

حل: (a) سیٹ A اپلائیڈ روبو ٹکس پروگرام میں داخلہ لینے والے طلبہ کی کل تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

کُل تعداد $= 370 + 205 + 125 + 240 = 940$

پس، اپلائیڈ روبو ٹکس کورس میں طلبہ کی کل تعداد 940 ہے۔

(b) گیم ڈویلپمنٹ میں داخلہ لینے والے طلبہ کی کل تعداد کو سیٹ G کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔

کُل تعداد $= 205 + 125 + 270 + 425 = 1025$

پس، گیم ڈویلپمنٹ میں داخلہ لینے والے طلبہ کی تعداد 1025 ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(c) گیم ڈویلپمنٹ اور ویب ڈیزائننگ کورس دونوں میں کل طلبہ کا اندراج ہے سیٹ G اور W کا تقاطع ہے۔

$$G \cap W = 125 + 270 = 395$$

پس، 395 طلبہ نے گیم ڈویلپمنٹ اور ویب ڈیزائننگ کورس دونوں میں داخلہ لیا ہے۔

(d) وہ طلبہ جو ویب ڈویلپمنٹ کورس میں داخل ہیں لیکن اپلائیڈ روبوٹکس میں نہیں وہ سیٹ W میں موجود قیمتوں 336 اور 270 کا مجموعہ ہیں۔

کُل تعداد $= 336 + 270 = 606$

لہٰذا، 606 طلبہ ایسے ہیں جنہوں نے ویب ڈویلپمنٹ کورسز میں داخلہ لیا لیکن اپلائیڈ روبوٹکس میں نہیں۔

(e) آئی ٹی کے ادارے میں داخلہ لینے والے طلبہ کی کل تعداد دائروں کے اندر موجود تمام قیمتوں سے ظاہر ہوتی ہے۔

کُل تعداد $= 370 + 205 + 125 + 240 + 425 + 270 + 336 = 1971$

آئی ٹی کے ادارے میں کل 1971 طلبہ داخل ہیں۔

(f) جن طلبہ نے تینوں کورسز میں داخلہ لیا ہے وہ تمام سیٹوں کی تقاطع ہے جس کو 125 سے ظاہر کیا گیا ہے۔

3.3.3 حقیقی دنیا میں اطلاق (Real-World Applications)

اس حصّے میں ہم سیٹ تھیوری کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل پر لاگو کرنا سیکھیں گے، جیسے کہ وین اشکال کا استعمال کرتے ہوئے درجہ بندی اور کیٹلاگ بنانے کے مسائل کو حل کرنا۔ ہم کچھ حقیقی زندگی کی صورتحال کا بھی جائزہ لیں گے، جیسے کہ آبادی کی درجہ بندی اور شاپنگ مالز میں مصنوعات کی درجہ بندی کرنا۔

اس مقصد کے لیے ہم سیٹ کی کارڈینلٹی کے تصور کا استعمال کرتے ہیں۔ کارڈینلٹی کسی سیٹ کے عناصر کی کل تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔ کارڈینلٹی دراصل سیٹ کے سائز کو ظاہر کرتی ہے۔ کسی غیر خالی سیٹ A کے لیے، کارڈینلٹی کو $n(A)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ تو $n(A) = 6$ کسی سیٹ کی کارڈینلٹی معلوم کرنے کے لیے ہم درج ذیل اصول استعمال کرتے ہیں جسے دو یا تین مجموعوں کے لیے **اصول شمولیت واخراج** کہا جاتا ہے۔

دو سیٹوں کے لیے اصول شمولیت واخراج (Principle of Inclusion and Exclusion for Two Sets)

اگر A اور B دو متناہی سیٹ ہوں تو

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

اور $A \cup B$ ، $A \cap B$ بھی متناہی سیٹ ہیں۔

تین سیٹوں کے لیے اصول شمولیت واخراج (Principle of Inclusion and Exclusion for Three Sets)

اگر A ، B اور C تین متناہی سیٹ ہوں تو

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

اور $A \cup B \cup C$ ، $A \cap B$ ، $A \cap C$ ، $B \cap C$ اور $A \cap B \cap C$ بھی متناہی سیٹ ہیں۔

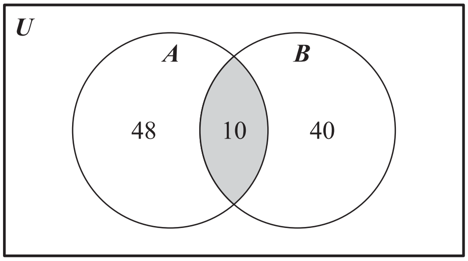
NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

مثال 3: ایک اسپورٹس کلب میں 98 سیکنڈری اسکول کے طلبہ ہیں۔ 58 طلبہ سوئمنگ کلب میں شامل ہوئے اور 50 نے رسہ کشی کلب میں شمولیت اختیار کی۔ دونوں کھیلوں میں کتنے طلبہ نے حصہ لیا؟

حل۔ اگر اسکول کے اسپورٹس کلب میں کل طلبہ $= U$

طلبہ جنہوں نے سوئمنگ کلب میں حصہ لیا $= A$

طلبہ جنہوں نے رسہ کشی کلب میں حصہ لیا $= B$



سوال کی عبارت سے ہم لکھ سکتے ہیں:

$$n(U) = n(A \cup B) = 98,\ n(A) = 58,\ n(B) = 50$$

ہم دونوں کلبوں میں حصہ لینے والے طلبہ کی کل تعداد معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

$$n(A \cap B) = ?$$

دو سیٹوں کے لیے اصول شمولیت واخراج کا استعمال کرتے ہوئے۔

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \quad n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 58 + 50 - 98$$

$$= 10$$

پس دونوں کلبوں میں 10 طلبہ نے حصہ لیا۔

وین شکل ہر سپورٹس کلب میں طلبہ کی تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال 4: سلیم جو ایک اسکول ٹیچر ہے، اُس کے گھر میں ایک چھوٹی لائبریری ہے جس میں 150 کُتب ہیں۔ ان کے پاس ان کُتب کی دو اہم قسمیں ہیں: اسلامی اور سائنسی۔ انہوں نے 70 کُتب کو اسلامی کُتب اور 90 کُتب کو سائنس کی کُتب میں درجہ بندی کیا۔ 15 کُتب ایسی ہیں جو نہ تو اسلامی اور نہ ہی سائنسی کُتب کے زمرے میں آتی ہیں۔ کتنی کُتب اسلامی اور سائنسی دونوں زمروں میں درجہ بندی کی گئی ہیں؟

حل: لائبریری میں کُتب کی کل تعداد $= U$

اسلامی زمرے میں 70 کُتب ہیں $= A$

سائنسی زمرے میں 90 کُتب ہیں $= B$

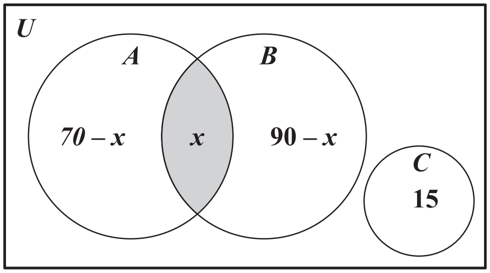
15 کُتب ایسی ہیں جو کسی بھی زمرے میں شامل نہیں ہیں $= C$

کُتب کی تعداد جو دونوں زمروں سے تعلق رکھتی ہیں $= x$

اگلے صفحے پر دی گئی وین شکل ان کُتب کی تعداد ہے جن کی اسلامی اور سائنسی دونوں زمروں میں درجہ بندی کی گئی ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook



چوں کہ $n(U) = 150$

اس لیے $70 - x + x + 90 - x + 15 = 150$

$$\Rightarrow \quad 175 - x = 150$$

$$\Rightarrow \quad x = 25$$

پس 25 کُتب کی اسلامی اور سائنسی دونوں زمروں میں درجہ بندی کی گئی ہیں۔

مثال 5: ایک کالج میں 45 اساتذہ ریاضی یا فزکس یا کیمسٹری پڑھاتے ہیں۔ یہاں مختلف مضامین پڑھانے والے اساتذہ کے بارے میں معلومات دی گئی ہے۔

- 18 ریاضی پڑھاتے ہیں۔
- 12 فزکس پڑھاتے ہیں۔
- 8 کیمسٹری پڑھاتے ہیں۔
- 6 ریاضی اور فزکس دونوں پڑھاتے ہیں۔
- 4 فزکس اور کیمسٹری دونوں پڑھاتے ہیں۔
- 2 ریاضی اور کیمسٹری دونوں پڑھاتے ہیں۔

کتنے اساتذہ تینوں مضامین پڑھاتے ہیں؟

حل۔ اگر کالج میں اساتذہ کی کل تعداد $= U$

اساتذہ جو ریاضی پڑھاتے ہیں $= M$

اساتذہ جو فزکس پڑھاتے ہیں $= P$

اساتذہ جو کیمسٹری پڑھاتے ہیں $= C$

اوپر دیے گئے سوال کی عبارت سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$n(M \cup P \cup C) = 45,\ n(M) = 18,\ n(P) = 12,\ n(C) = 8,\ n(M \cap P) = 6,$$
$$n(P \cap C) = 4,\ n(M \cap C) = 2$$

ہم تمام مضامین پڑھانے والے اساتذہ کی کل تعداد معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

$$n(M \cap P \cap C) = ?$$

تین سیٹوں کے لیے اصول شمولیت و اخراج کا استعمال کرتے ہوئے

$$n(M \cup P \cup C) = n(M) + n(P) + n(C) - n(M \cap P) - n(P \cap C) - n(M \cap C) + n(M \cap P \cap C)$$

$$\Rightarrow \quad n(M \cap P \cap C) = n(M \cup P \cup C) - n(M) - n(P) - n(C) + n(M \cap P) + n(P \cap C) + n(M \cap C)$$

$$= 45 - 18 - 12 - 8 + 6 + 4 + 2 = 19$$

پس 19 اساتذہ تینوں مضامین پڑھاتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 6: ایک شاپنگ مال میں 130 صارفین کا سروے کیا گیا جس میں ان سے خریداری کی ترجیحات کے بارے میں پوچھا گیا۔

سروے کے نتائج نے درج ذیل اعداد و شمار ظاہر کیے:

- 57 صارفین نے گارمنٹس کی خریداری کی
- 50 صارفین نے کا سنگھار کا سامان خریدا
- 46 صارفین نے الیکٹرانکس کی اشیا خریدی
- 31 صارفین نے گارمنٹس اور سنگھار دونوں کا سامان خریدا
- 25 صارفین نے گارمنٹس اور الیکٹرانکس دونوں کی خریداری کی
- 21 صارفین نے کا سنگھار اور الیکٹرانکس دونوں کی خریداری کی
- 12 صارفین نے تینوں مصنوعات یعنی گارمنٹس، سنگھار اور الیکٹرانکس کی خریداری کی

(a) کتنے صارفین نے کم از کم ایک مصنوعات خریدی: گارمنٹس، سنگھار یا الیکٹرانکس؟

(b) کتنے صارفین نے صرف ایک مصنوعات خریدی: گارمنٹس، سنگھار یا الیکٹرانکس؟

(c) کتنے صارفین نے تین میں سے کوئی بھی مصنوعات نہیں خریدی؟

حل- فرض کریں

$U =$ شاپنگ مال میں سروے کیے گئے صارفین کی کل تعداد

$G =$ صارفین جنہوں نے گارمنٹس خریدے

$C =$ صارفین جنہوں نے سنگھار کا سامان خریدا

$E =$ صارفین جنہوں نے الیکٹرانکس کی اشیا خریدیں

اوپر دیے گئے سوال کی عبارت سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$n(U) = 130,\ n(G) = 57,\ n(C) = 50,\ n(E) = 46,\ n(G \cap C) = 31,$$
$$n(G \cap E) = 25,\ n(C \cap E) = 21 \text{ اور } n(G \cap C \cap E) = 12.$$

(a) ہم ان صارفین کی کل تعداد معلوم کرنا چاہتے ہیں جنہوں نے کم از کم ایک مصنوعات خریدی ہیں: گارمنٹس یا سنگھار کا سامان یا الیکٹرانکس۔

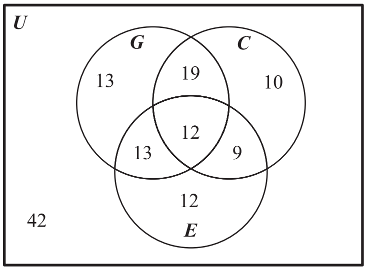
تین سیٹوں کے لیے اصول شمولیت و اخراج کا استعمال کرتے ہوئے

$$n(G \cup C \cup E) = n(G)+n(C)+n(E) - n(G \cap C) - n(G \cap E) - n(C \cap E)+n(G \cap C \cap E)$$
$$= 57 + 50 + 46 - 31 - 25 - 21 + 12 = 88$$

پس 88 صارفین نے کم از کم ان مصنوعات میں سے ایک خریدی: گارمنٹس، سنگھار کا سامان یا الیکٹرانکس۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook



(b) وہ صارفین جنہوں نے صرف گارمنٹس کی خریداری کی

$= n(G) - n(G \cap C) - n(G \cap E) + n(G \cap C \cap E)$

$= 57 - 31 - 25 + 12 = 13$

وہ صارفین جنہوں نے صرف سنگھار کا سامان خریدا

$= n(C) - n(G \cap C) - n(C \cap E) + n(G \cap C \cap E)$

$= 50 - 31 - 21 + 12 = 10$

وہ صارفین جنہوں نے صرف الیکٹرانکس کی خریداری کی

$= n(E) - n(G \cap E) - n(C \cap E) + n(G \cap C \cap E)$

$= 46 - 25 - 21 + 12 = 12$

لہٰذا جن صارفین نے صرف ایک مصنوعات خریدی: گارمنٹس، سنگھار یا الیکٹرانکس

$= 13 + 10 + 12 = 35$

(c) چوں کہ سروے کیے گئے صارفین کی کل تعداد 130 تھی اور 88 صارفین نے کم از کم ان مصنوعات میں سے ایک خریدی: گارمنٹس، سنگھار یا الیکٹرانکس۔ جن صارفین نے تین میں سے کوئی بھی مصنوعات نہیں خریدی ان کا حساب اس طرح لگایا جا سکتا ہے:

$n(G \cup C \cup E)' = n(U) - n(G \cup C \cup E)$

$= 130 - 88 = 42$

لہٰذا 42 صارفین نے تین میں سے کوئی بھی مصنوعات نہیں خریدیں۔

چیلنج!

درج بالا وین شکل مثال 6 میں پیش کردہ منظر نامے کی وضاحت کرتی ہے۔ کیا آپ ہر دائرے کے اندر موجود قیمتوں کی وضاحت فراہم کر سکتے ہیں؟

مشق 3.2

1۔ یونیورسل سیٹ پر غور کریں $U = \{x \mid x$ کا 2 ضعف ہے $\wedge\ 0 < x \leq 30\}$،

$A = \{x \mid x$ کا 6 ضعف ہے$\}$ اور $B = \{x \mid x$ کا 8 ضعف ہے$\}$

(i) سیٹ A اور B کے تمام ارکان کو اندراجی طریقہ میں لکھیں۔ (ii) $A \cap B$ معلوم کریں

(iii) وین اشکال بنائیں

2۔ فرض کریں $U = \{x \mid x$ ایک صحیح عدد ہے $\wedge\ 0 < x \leq 150\}$،

$G = \{x \mid x = 2^m$ ایک صحیح عدد m کے لیے$\}$ اور $H = \{x \mid x$ ایک مربع ہے$\}$

(i) سیٹ G اور H کے تمام ارکان کو اندراجی طریقہ میں لکھیں۔ (ii) $G \cup H$ معلوم کریں۔

(iii) $G \cap H$ معلوم کریں۔

3۔ فرض کریں $P = \{x \mid x$ ایک مفرد عدد ہے $\wedge\ 0 < x \leq 20\}$ اور

$Q = \{x \mid x$ کا ایک مقسوم علیہ ہے 210 $\wedge\ 0 < x \leq 20\}$

(i) $P \cap Q$ معلوم کریں (ii) $P \cup Q$ معلوم کریں

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

4۔ سیٹوں کے درج ذیل جوڑوں کے لیے یونین اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کو ثابت کریں:

(i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{4, 6, 8, 10\}$

(ii) N, Z

(iii) $A = \{x \mid x \in R \wedge x \geq 0\}$ ، $B = R$

5۔ اگر $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ ، $A = \{a, b, c, d, g, h\}$ اور $B = \{c, d, e, f, j\}$ ہو تو ان سیٹوں کے لیے ڈی مورگن کے قوانین کو ثابت کریں۔ وین اشکال بھی بنائیں۔

6۔ اگر $U = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ اور $A = \{1, 3, 5, \ldots, 19\}$ ہو تو درج ذیل کو ثابت کریں۔

(i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap U = A$ (iii) $A \cap A' = \phi$

7۔ 55 طلبہ کی کلاس میں 34 کرکٹ کھیلنا پسند کرتے ہیں اور 30 ہاکی کھیلنا پسند کرتے ہیں۔ نیز ہر طالب علم کم از کم دو میں سے ایک کھیل کھیلنا پسند کرتا ہے۔ کتنے طلبہ دونوں کھیل کھیلنا پسند کرتے ہیں؟

8۔ 500 ملازمین کے گروہ میں 250 اردو بول سکتے ہیں 150 انگریزی بول سکتے ہیں 50 پنجابی بول سکتے ہیں 40 اردو اور انگریزی بول سکتے ہیں 30 انگریزی اور پنجابی دونوں بول سکتے ہیں اور 10 اردو اور پنجابی بول سکتے ہیں۔ کتنے لوگ تینوں زبانیں بول سکتے ہیں؟

9۔ کھیلوں کے مقابلوں میں 19 لوگ نیلی شرٹس پہنتے ہیں 15 سبز قمیضیں پہنتے ہیں 3 نیلی اور سبز قمیضیں پہنتے ہیں 4 ٹوپی اور نیلی قمیض پہنتے ہیں اور 2 ٹوپی اور سبز قمیضیں پہنتے ہیں۔ نیلی یا سبز قمیض یا ٹوپی والے لوگوں کی کل تعداد 34 ہے۔ کتنے لوگ ٹوپی پہنے ہوئے ہیں؟

10۔ ایک تربیتی نشست میں 17 شرکا کے پاس لیپ ٹاپ، 11 کے پاس ٹیبلیٹ، 9 کے پاس لیپ ٹاپ اور ٹیبلیٹ، 6 کے پاس لیپ ٹاپ اور کُتب اور 4 کے پاس ٹیبلیٹ اور کُتب ہیں۔ 8 شرکاء کے پاس تینوں اشیا ہیں۔ لیپ ٹاپ، ٹیبلیٹ یا کُتب کے ساتھ شرکا کی کل تعداد 35 ہے۔ کتنے شرکا کے پاس کُتب ہیں؟

11۔ ایک شاپنگ مال میں 1 سے 150 لیبل والے 150 ملازمین ہیں جو یونیورسل سیٹ U کو ظاہر کرتے ہیں۔ ملازمین درج ذیل زمروں میں آتے ہیں:

- سیٹ A: 40 ملازمین جن کی تنخواہ کی حد 30 ہزار تا 45 ہزار ہے، جس پر 50 سے 89 تک کا لیبل لگایا گیا ہے۔
- سیٹ B: 50 ملازمین جن کی تنخواہ کی حد 50 ہزار تا 80 ہزار ہے، جس کا لیبل 101 سے 150 تک ہے۔
- سیٹ C: 60 ملازمین جن کی تنخواہ کی حد 100 ہزار تا 150 ہزار ہے، 1 سے 49 اور 90 سے 100 تک کا لیبل لگا ہوا ہے۔

(a) $(A' \cup B') \cap C$ معلوم کریں (b) $n\{A \cap (B' \cap C')\}$ معلوم کریں

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

12۔ ایک سیکنڈری اسکول میں 125 طلبہ میں سے ہر ایک درج ذیل میں سے کم از کم ایک کھیل میں حصہ لیتا ہے: کرکٹ، فٹ بال یا ہاکی۔

- 60 طلبہ کرکٹ کھیلتے ہیں۔
- 70 طلبہ فٹ بال کھیلتے ہیں۔
- 40 طلبہ ہاکی کھیلتے ہیں۔
- 25 طلبہ کرکٹ اور فٹ بال دونوں کھیلتے ہیں۔
- 15 طلبہ فٹ بال اور ہاکی دونوں کھیلتے ہیں۔
- 10 طلبہ کرکٹ اور ہاکی دونوں کھیلتے ہیں۔

(a) کتنے طلبہ تینوں کھیل کھیلتے ہیں؟

(b) تمام کھیلوں میں شرکت کی تقسیم کو ظاہر کرنے کے لیے وین اشکال بنائیں۔

13۔ ایک سروے کیا گیا جس میں 130 لوگوں سے ان کے پسندیدہ کھانے کے بارے میں پوچھا گیا۔ سروے کے نتائج نے درج ذیل اعداد و شمار ظاہر کیے:

- 40 لوگوں نے کہا کہ وہ نہاری کو پسند کرتے ہیں۔
- 65 لوگوں نے کہا کہ انھیں بریانی پسند ہے۔
- 50 لوگوں نے کہا کہ انھیں قورمہ پسند ہے۔
- 20 لوگوں نے کہا کہ انھیں نہاری اور بریانی پسند ہے۔
- 35 لوگوں نے کہا کہ انھیں بریانی اور قورمہ پسند ہے۔
- 27 لوگوں نے کہا کہ انھیں نہاری اور قورمہ پسند ہے۔
- 12 لوگوں نے کہا کہ انھیں تینوں کھانے نہاری، بریانی اور قورمہ پسند ہیں۔

(a) کم از کم کتنے لوگوں کو نہاری، بریانی یا قورمہ پسند ہے؟

(b) کتنے لوگوں کو نہاری، بریانی یا قورمہ پسند نہیں آیا؟

(c) کتنے لوگ درج بالا کھانوں میں سے صرف ایک کو پسند کرتے ہیں: نہاری، بریانی یا قورمہ؟

(d) وین اشکال بنائیں۔

3.4 ثنائی ربط (Binary Relations)

روزمرہ زندگی میں، ربط کا مطلب دو افراد یا اشیا کے درمیان تعلق کی ایک تجریدی قسم ہے، مثال کے طور پر، (استاد، شاگرد)، (ماں، بیٹا)، (شوہر، بیوی)، (بھائی، بہن)، (دوست، دوست) اور (گھر، مالک)۔ ریاضی میں بھی کچھ عوامل دو اعداد کے درمیان ربط کا تعین کرتے ہیں، مثال کے طور پر:

$(5, 4)$: > ؛ $(25, 5)$: مربع ؛ $(2, 4)$: جذر ؛ $(2 \times 2, 4)$: مساوی

درج بالا مثالوں میں > ، مربع ، جذر اور مساوی ربط کی مثالیں ہیں۔ ریاضی میں، ایک ربط مترتب جوڑوں کا کوئی بھی سیٹ ہوتا ہے۔ مترتب جوڑوں کے عناصر کے درمیان ربط کا ذکر ممکن بھی ہے اور ناممکن بھی۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(i) اگر A اور B دو غیر خالی سیٹ ہوں تو ان کا کارتیسی حاصل ضرب ایک ایسا سیٹ ہوتا ہے جو تمام مترتب جوڑوں (x, y) پر مشتمل ہوتا ہے جب کہ $x \in A$ اور $y \in B$ اور اس کو ہم علامتی طور پر $A \times B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔
$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$ لکھ سکتے ہیں۔

(ii) کارتیسی حاصل ضرب $A \times B$ کا ہر تحتی سیٹ ثنائی ربط یا صرف ربط کہلاتا ہے۔ عام طور پر ایک ربط کو حرف r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(iii) تمام مترتب جوڑوں کے پہلے ارکان کا سیٹ جو کہ ثنائی ربط بناتا ہے، اس سیٹ کا ڈومین کہلاتا ہے۔ کسی بھی ربط r کی ڈومین کو Dom r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(iv) تمام مترتب جوڑوں کے دوسرے ارکان کا سیٹ جو کہ ثنائی ربط بناتا ہے، اس سیٹ کی رینج کہلاتا ہے۔ کسی بھی ربط r کی رینج کو Range r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

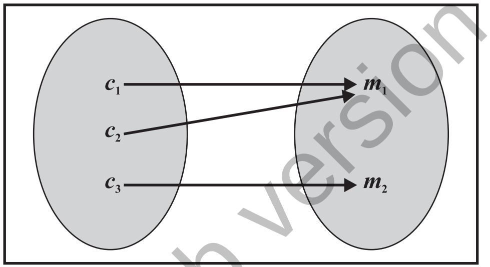
(v) اگر A ایک غیر خالی سیٹ ہے تو $A \times A$ کے کسی بھی تحتی سیٹ کو A میں ربط کہا جاتا ہے۔

مثال 7: فرض کریں c_1, c_2, c_3 تین بچے ہوں اور m_1, m_2 دو آدمی ایسے ہوں کہ دونوں c_1, c_2 کا باپ m_1 ہو اور c_3 کا باپ m_2 ہو۔ ربط معلوم کریں {(بچہ، باپ)}۔

حل: $C =$ بچوں کا سیٹ $= \{c_1, c_2, c_3\}$ اور $F =$ باپ کا سیٹ $= \{m_1, m_2\}$

C اور F کی کارتیسی حاصل ضرب:

$$C \times F = \{(c_1, m_1), (c_1, m_2), (c_2, m_1), (c_2, m_2), (c_3, m_1), (c_3, m_2)\}$$



$r =$ مترتب جوڑوں کا سیٹ (بچہ، باپ)
$= \{(c_1, m_1), (c_2, m_1), (c_3, m_2)\}$

مثال 8: فرض کریں $A = \{1, 2, 3\}$۔ ایسا ربط r معلوم کریں کہ xry جب صرف اور صرف $x < y$ ہو۔ نیز اس کی ڈومین اور رینج بھی معلوم کریں۔

حل: $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

واضح طور پر مطلوبہ ربط یہ ہے: $r = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

Dom $r = \{1, 2\}$, Range $r = \{2, 3\}$

3.4.1 ربط بطور جدول، مترتب جوڑا اور گراف (Relation as Table, Ordered Pair and Graphs)

ہم نے یہ سیکھا ہے کہ ریاضی میں **ربط** کارتیسی حاصل ضرب کا کوئی بھی تحتی سیٹ ہوتا ہے، جس میں تمام مترتب جوڑے شامل ہوتے ہیں۔ ہر مترتب جوڑے میں دو محددات x اور y شامل ہوتے ہیں۔ x محدد کو عرض کہا جاتا ہے اور y محدد کو طول کہا جاتا ہے جو اکثر ایک مدخل اور ایک مخرج کو ظاہر کرتے ہیں۔ اب ہم ربط کو تین مختلف طریقوں سے بیان کرتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مترتب جوڑے ایک ربط کو مترتب جوڑوں کے سیٹ کی صورت میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً ایک پانی کی ٹینکی کو دیکھیں جس میں پہلے سے 1 لٹر پانی موجود ہے۔ ہر منٹ کے بعد ٹینکی میں 1 لٹر اضافی پانی ڈالا جاتا ہے۔ اس صورت حال کو ربط $r = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جب کہ x (منٹوں میں) وہ وقت ہے جو ٹینکی بھرنے کے شروع ہونے کے بعد سے گزرا ہے اور y ٹینکی میں موجود پانی کی کل مقدار (لٹروں میں) ہے۔

جب $x = 0$ ، $y = 1$ اور $x = 1$ ، $y = 2$

مترتب جوڑے میں یہ ربط اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے

$$\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$$

درج بالا ربط کو جدول کی صورت میں درج ذیل انداز میں پیش کیا جاسکتا ہے:

جدول

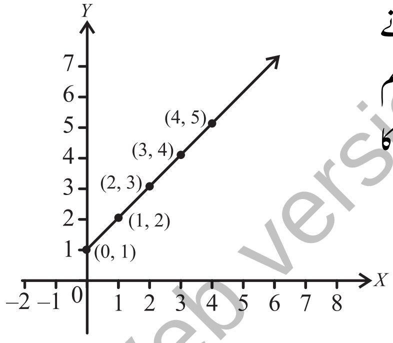
x (وقت منٹوں میں)	$y = x + 1$ (پانی لٹروں میں)
0	$y = 0 + 1 = 1$
1	$y = 1 + 1 = 2$
2	$y = 2 + 1 = 3$
3	$y = 3 + 1 = 4$
4	$y = 4 + 1 = 5$
5	$y = 5 + 1 = 6$

گراف: ہم روابط کو بصری طور پر بھی ایک گراف بنا کر ظاہر کر سکتے ہیں۔ خاکہ بنانے کے لیے، ہم مترتب شدہ جوڑوں کا استعمال کرتے ہیں۔ ہر مترتب جوڑے (x, y) کو ہم کارتیسی مستوی میں ایک نقطے کے طور پر ظاہر کرتے ہیں، جہاں x مترتب شدہ جوڑے کا پہلا رکن ہے اور y دوسرا رکن ہے۔

ربط کو گراف کے طور پر ان نقاط سے گزرنے والے خط کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے،

$$\{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$$

جیسا کہ دی گئی شکل میں دکھایا گیا ہے۔



3.4.2 تفاعل اور اس کی ڈومین اور رینج (Function and its Domain and Range)

تفاعل (Function)

ایک بہت اہم اور خاص قسم کا ربط ایک تفاعل ہوتا ہے جس کی وضاحت ذیل میں کی گئی ہے۔

فرض کریں کہ A اور B دو ایسے غیر خالی سیٹ ہیں کہ

(i) f ایک ربط ہے جو A سے B تک ہے، یعنی f تحتی سیٹ ہے $A \times B$ کا۔

(ii) $\text{Dom } f = A$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(iii) اگر f کے کسی بھی دو جوڑوں کا پہلا رکن برابر نہ ہو تو f کو A سے B تک ایک تفاعل کہا جاتا ہے۔

تفاعل f کو اس طرح بھی لکھا جاتا ہے:

$$f : A \to B$$

اس کو ایسے پڑھا جاتا ہے کہ f ایک تفاعل ہے جو A سے B کی جانب ہے۔ ہر مترتب جوڑے کے پہلے ارکان کا سیٹ f کی ڈومین (domain) کہلاتا ہے اور تمام دوسرے ارکان کا سیٹ f کی رینج (range) کو ظاہر کرتے ہیں۔ یہاں f کا ڈومین A ہے اور f کی رینج B ہے۔

اگر (x, y) کو f کا ایک رکن سمجھا جائے جب کہ یہ مترتب جوڑوں کے سیٹ کے طور پر ہو تو ہم $y = f(x)$ لکھتے ہیں۔
y کو f کی قیمت x کے لیے یا f کے تحت x کی تصویر کہا جاتا ہے۔

مثال 9: اگر $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$، ایک تفاعل $f : A \to B$ کو بیان کریں،

$$f = \{(x, y) \mid y = 2x + 3, x \in A \wedge y \in B\}$$

تفاعل f کی قیمت، اس کی ڈومین، کوڈومین اور رینج معلوم کریں۔

حل: ہمیں دیا گیا ہے $y = 2x + 3$; $x \in A$ اور $y \in B$ تو تفاعل کی قیمت

$$f = \{(0, 3), (1, 5), (2, 7), (3, 9), (4, 11)\}$$

$$\text{Dom } f = \{0, 1, 2, 3, 4\} = A$$

$\Rightarrow$ اور $\text{Co-domain } f = B$

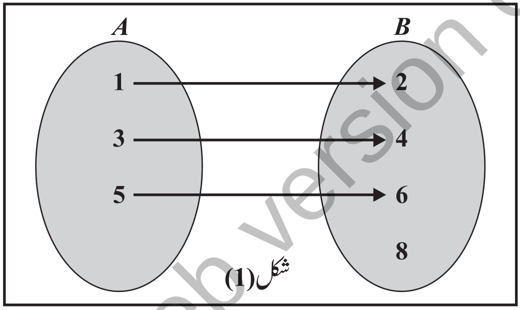
$$\Rightarrow \quad \text{Range } f = \{3, 5, 7, 9, 11\} \subseteq B$$

تفاعل کی اقسام (Types of Functions)

اس حصے میں ہم مختلف اقسام کے تفاعل پر گفتگو کریں گے۔

(i) ان ٹو تفاعل (Into Function)

اگر سیٹ A سے B کی جانب f ایسا تفاعل ہو کہ $\text{Range } f \subset B$ یعنی $\text{Range } f \neq B$، تب f کو A سے B کی جانب اِن ٹو تفاعل کہتے ہیں۔ شکل (1) میں f واضح طور پر ایک تفاعل ہے۔ لہٰذا f سیٹ A سے B کی جانب ان ٹو تفاعل ہے۔



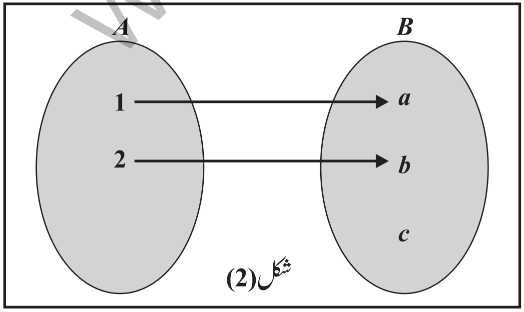
شکل (1)

$f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

(ii) ون۔ون تفاعل یا اِن جیکٹو تفاعل

(One - One) Function (Injective Function)

اگر ایک تفاعل f جو کہ A سے B کی جانب اس طرح ہو کہ اس کے



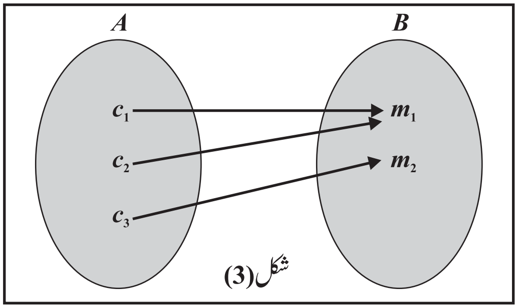
شکل (2)

$f = \{(1, a), (2, b)\}$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

کسی بھی دو مترتب جوڑوں کے دوسرے ارکان ایک جیسے نہ ہوں، تو اسے اِن جیکٹو تفاعل کہا جاتا ہے؛ شکل (2) میں دکھایا گیا تفاعل ایک ایسا ہی تفاعل ہے۔



شکل(3)

$f = \{(c_1, m_1), (c_2, m_1), (c_3, m_2)\}$

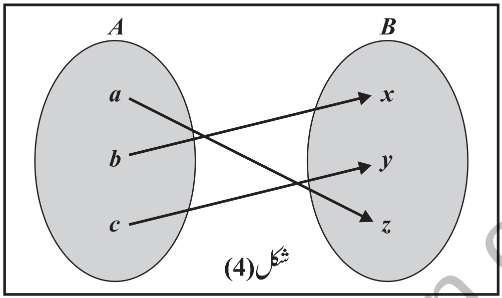
(iii) آن ٹو تفاعل یا سرجیکٹو تفاعل

Onto Function (Surjective function)

اگر ایک تفاعل $f: A\to B$ ایسا ہو کہ Range $f = B$ ہو، یعنی سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A کے ارکان کی تصویر ہو تو تفاعل f کو آن ٹو تفاعل یا سرجیکٹو تفاعل کہا جاتا ہے۔

(iv) ون-ون اور آن ٹو تفاعل یا بائی جیکٹو تفاعل

(One – One) and onto Function (or Bijective Function)



شکل(4)

$f = \{(a, z), (b, x), (c, y)\}$

ایک تفاعل f کو سیٹ A سے سیٹ B تک بائی جیکٹو تفاعل کہا جاتا ہے اگر یہ ون-ون اور آن ٹو دونوں ہو۔ ایسے تفاعل کو سیٹ A اور B کے درمیان (1-1) کی مطابقت بھی کہا جاتا ہے۔ (a, z)، (b, x) اور (c, y) مطابقت رکھنے والے ارکان کے جوڑے ہیں، یعنی اس صورت میں $f = \{(a, z), (b, x), (c, y)\}$ جو سیٹ A اور B کے درمیان ایک بائی جیکٹو تفاعل یا (1-1) مطابقت ہے۔

3.4.3 تفاعل کی علامت (Notation of Function)

ہم جانتے ہیں کہ ترقیم سیٹ ساز لامتناہی سیٹوں کے لیے زیادہ موزوں ہے۔ یہی معاملہ ایک ایسے تفاعل کے ساتھ بھی ہے جو لامحدود مترتب جوڑوں پر مشتمل ہو۔ مثال کے طور پر، درج ذیل تفاعل پر غور کریں:

$$f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), \ldots\}$$

$$\text{Dom } f = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

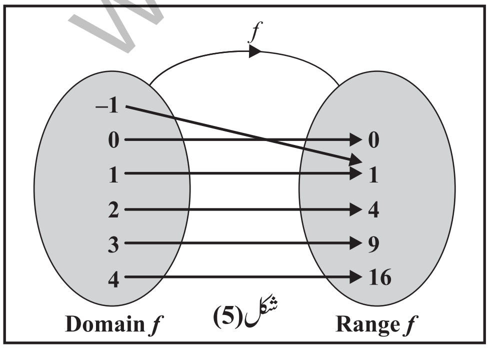
اور

$$\text{Range } f = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$$

اس تفاعل کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$f = \{(x, y) \mid y = x^2 \wedge x \in N\}$$

تفاعل کے لیے نقشہ سازی کا خاکہ شکل (5) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل(5)

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

3.4.4 خطی اور دو درجی تفاعل (Linear and Quadratic Functions)

تفاعل $\{(x, y) \mid y = mx + c\}$ کو خطی تفاعل کہا جاتا ہے کیوں کہ اس کا گراف (جیومیٹری میں اظہار) ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $y = mx + c$ شکل والی مساوات ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے۔ تفاعل $\{(x, y) \mid y = ax^2 + bx + c\}$ کو دو درجی تفاعل کہا جاتا ہے۔ ہم یونٹ 10 میں ان کا جیومیٹری میں اظہار کا مطالعہ کریں گے۔

مثال 10: اگر $f(x) = 2x - 1$ اور $g(x) = x^2 - 3$ ہو تو معلوم کریں:

(i) $f(1)$　　(ii) $f(-3)$　　(iii) $f(7)$

(iv) $g(1)$　　(v) $g(-3)$　　(vi) $g(4)$

حل:

(i) $f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$　　(ii) $f(-3) = 2 \times (-3) - 1 = -7$

(iii) $f(7) = 2 \times 7 - 1 = 13$　　(iv) $g(1) = (1)^2 - 3 = -2$

(v) $g(-3) = (-3)^2 - 3 = 6$　　(vi) $g(4) = (4)^2 - 3 = 13$

مثال 11: فرض کریں $f(x) = ax + b + 3$، جب کہ a اور b مستقل اعداد ہیں۔ اگر $f(1) = 4$ اور $f(5) = 9$ ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = ax + b + 3$

اگر $f(1) = 4$

تب $a \times 1 + b + 3 = 4$

$\Rightarrow a + b = 1$　...(i)

اسی طرح، $f(5) = 9$

$\Rightarrow a \times 5 + b + 3 = 9$

$\Rightarrow 5a + b = 6$　...(ii)

مساوات (i) کو مساوات (ii) سے تفریق کریں، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(5a + b) - (a + b) = 6 - 1$$

$$5a + b - a - b = 5$$

$$4a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

مساوات (i) میں $a = \frac{5}{4}$ رکھنے سے $\frac{5}{4} + b = 1$

$$b = 1 - \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

پس $a = \frac{5}{4}$ اور $b = -\frac{1}{4}$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

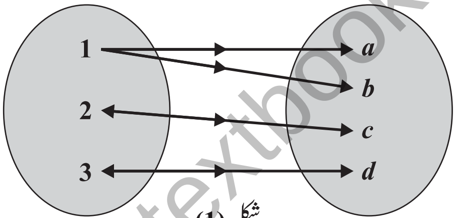
مشق 3.3

1۔ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ کے لیے درج ذیل ربط A میں معلوم کریں۔ ہر ربط کی ڈومین اور رینج بھی معلوم کریں۔

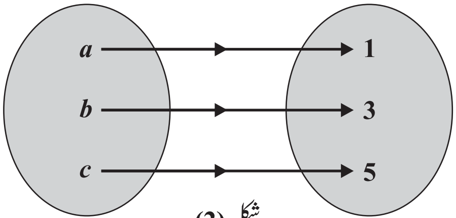
(i) $\{(x, y) \mid y = x\}$　　(ii) $\{(x, y) \mid y + x = 5\}$

(iii) $\{(x, y) \mid x + y < 5\}$　　(iv) $\{(x, y) \mid x + y > 5\}$

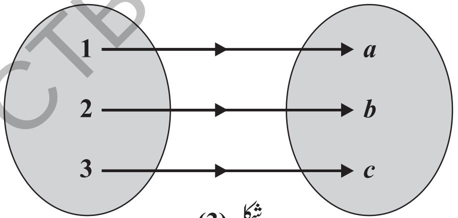
2۔ درج ذیل میں سے کون سی اشکال تفاعل کو ظاہر کرتی ہیں اور کس قسم کے تفاعل ہیں؟



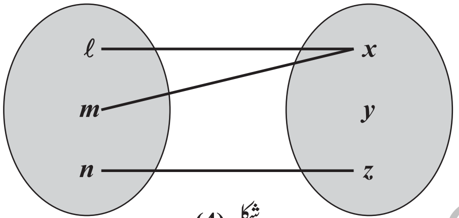
شکل(1)



شکل(2)



شکل(3)



شکل(4)

3۔ اگر $g(x) = 3x + 2$ اور $h(x) = x^2 + 1$ ہو تو درج ذیل معلوم کریں:

(i) $g(0)$　　(ii) $g(-3)$　　(iii) $g\left(\frac{2}{3}\right)$

(iv) $h(1)$　　(v) $h(-4)$　　(vi) $h\left(-\frac{1}{2}\right)$

4۔ فرض کریں $f(x) = ax + b + 1$ جب کہ a اور b مستقل اعداد ہیں۔ اگر $f(3) = 8$ اور $f(6) = 14$ ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

5۔ فرض کریں $g(x) = ax + b + 5$ جب کہ a اور b مستقل اعداد ہیں۔ اگر $g(-1) = 0$ اور $g(2) = 10$ ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

6۔ فرض کریں $f(x) = 5x + 2$ اگر $f(x) = 32$ ہو، تو x کی قیمت معلوم کریں۔

7۔ فرض کریں $f(x) = cx^2 + d$ جب کہ c اور d مستقل اعداد ہیں۔ اگر $f(1) = 6$ اور $f(-2) = 10$ ہو تو c اور d کی قیمتیں معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

جائزہ مشق 3

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) سیٹ $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, ...\right\}$ کی ترقیم سیٹ ساز صورت ہے:

(a) $\left\{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in W\right\}$　(b) $\left\{x \mid x = \frac{1}{2n+1}, n \in W\right\}$

(c) $\left\{x \mid x = \frac{1}{n+1}, n \in W\right\}$　(d) $\{x \mid x = 2n+1, n \in W\}$

(ii) اگر $A = \{\ \}$ ہو تو $P(A)$ برابر ہے:

(a) $\{\ \}$　(b) $\{1\}$　(c) $\{\{\ \}\}$　(d) ϕ

(iii) اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$، $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{3, 4, 5\}$ ہو تو $U - (A \cap B)$ برابر ہے:

(a) $\{1, 2, 4, 5\}$　(b) $\{2, 3\}$　(c) $\{1, 3, 4, 5\}$　(d) $\{1, 2, 3\}$

(iv) اگر A اور B متراکب سیٹ ہوں تو $n(A - B)$ برابر ہے:

(a) $n(A)$　(b) $n(B)$　(c) $A \cap B$　(d) $n(A) - n(A \cap B)$

(v) اگر $A \subseteq B$ اور $B - A \neq \phi$ ہو، تو $n(B - A)$ برابر ہے:

(a) 0　(b) $n(B)$　(c) $n(A)$　(d) $n(B) - n(A)$

(vi) اگر $n(A \cup B) = 50$، $n(A) = 30$ اور $n(B) = 35$ ہو تو $n(A \cap B)$ برابر ہے:

(a) 23　(b) 15　(c) 9　(d) 40

(vii) اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{x, y, z\}$ ہو تو سیٹ A اور B کے کارتیسی حاصل ضرب میں کل ________ ارکان ہیں۔

(a) 13　(b) 12　(c) 10　(d) 6

(viii) اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ہو تو $f(a + 1)$ کی قیمت ہے:

(a) $a + 1$　(b) $a^2 + 1$　(c) $a^2 + 2a + 1$　(d) $a^2 - a$

(ix) فرض کریں $f(x) = 3x+1$، اگر $f(x)=28$ ہو تو x کی قیمت معلوم کریں:

(a) 9　(b) 27　(c) 3　(d) 18

(x) فرض کریں $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{a, b\}$ دو غیر خالی سیٹ ہیں اور $f: A \rightarrow B$ ایک تفاعل ہے جس کو اس طرح بیان کیا گیا ہو: $f = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$، تو درج ذیل میں سے کون سا انتخاب درست ہے؟

(a) f اِن جیکٹو ہے　(b) f سر جیکٹو ہے　(c) f بائی جیکٹو ہے　(d) f صرف اِن ٹو ہے

2۔ درج ذیل کو اندراجی طریقے میں لکھیں۔

(i) $\{x \mid x = 2n, n \in N\}$　(ii) $\{x \mid x = 2m+1, m \in N\}$

(iii) $\{x \mid x = 11n, n \in W \wedge n < 11\}$　(iv) $\{x \mid x \in E \wedge 4 < x < 6\}$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(v) $\{x \mid x \in O \wedge 5 < x < 7\}$　　(vi) $\{x \mid x \in Q \wedge x^2 = 2\}$

(vii) $\{x \mid x \in Q \wedge x = -x\}$　　(viii) $\{x \mid x \in R \wedge x \notin Q'\}$

3۔ فرض کریں $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ اور $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$۔

درج ذیل ہر سیٹ کے ارکان کی فہرست بنائیں۔

(i) A'　(ii) B'　(iii) $A \cup B$　(iv) $A - B$

(v) $A \cap C$　(vi) $A' \cup C'$　(vii) $A' \cup C$　(viii) U'

4۔ وین اشکال کا استعمال کرتے ہوئے، اگر ضروری ہو تو درج ذیل کے برابر یک رکنی سیٹ معلوم کریں:

(i) A'　(ii) $A \cap U$　(iii) $A \cup U$

(iv) $A \cup \phi$　(v) $\phi \cap \phi$

5۔ وین اشکال کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کو ثابت کریں۔

(i) $A - B = A \cap B'$　(ii) $(A - B)' \cap B = B$

6۔ ذیل میں دیے گئے سیٹ A ، B اور C کے لیے خصوصیات کو ثابت کریں:

(i) یونین کی خاصیت تلازم　(ii) تقاطع کی خاصیت تلازم

(iii) یونین کی تقاطع پر خاصیت تقسیمی　(iv) تقاطع کی یونین پر خاصیت تقسیمی

(a) $A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\},\ C = \{5, 6, 7, 9, 10\}$

(b) $A = \phi,\ B = \{0\},\ C = \{0, 1, 2\}$

(c) $A = N,\ B = Z,\ C = Q$

7۔ درج ذیل سیٹوں کے لیے ڈی مورگن کے قوانین کو ثابت کریں:

$U = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$، $A = \{2, 4, 6, \ldots, 20\}$ اور $B = \{1, 3, 5, \ldots, 19\}$

8۔ فرض کریں $P = \{x \mid x = 5m, m \in N\}$ اور $Q = \{x \mid x = 2m, m \in N\}$ ہے۔ $P \cap Q$ معلوم کریں۔

9۔ یونین اور تقاطع کی مناسب خصوصیات کی مدد سے، درج ذیل نتائج اخذ کریں:

(i) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B)$　(ii) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$

10۔ اگر $g(x) = 7x - 2$ اور $s(x) = 8x^2 - 3$ ہو تو معلوم کریں۔

(i) $g(0)$　(ii) $g(-1)$　(iii) $g\left(-\frac{5}{3}\right)$　(iv) $s(1)$　(v) $s(-9)$　(vi) $s\left(\frac{7}{2}\right)$

11۔ فرض کریں $f(x) = ax + b$ ، جب کہ a اور b مستقل اعداد ہیں۔ اگر $f(-2) = 3$ اور $f(4) = 10$ ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

12۔ فرض کریں $k(x) = 7x - 5$ اگر $k(x) = 100$ ہو تو x کی قیمت معلوم کریں۔

13۔ فرض کریں $g(x) = mx^2 + n$ ، جب کہ m اور n مستقل اعداد ہیں۔ اگر $g(4) = 20$ اور $g(0) = 5$ ہو تو m اور n کی قیمتیں معلوم کریں۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

14۔ ایک شاپنگ مال میں 1 سے 100 کے لیبل والی مختلف اقسام کے 100 اشیا ہیں، جو یونیورسل سیٹ U کو ظاہر کرتے ہیں۔ اشیا کی درجہ بندی درج ذیل ہے:

- سیٹ A: الیکٹرانکس، 1 سے 30 تک کے لیبل والی 30 اشیا پر مشتمل ہے۔
- سیٹ B: کپڑوں میں 31 سے 55 تک کے لیبل والی 25 اشیا شامل ہیں۔
- سیٹ C: سنگھار کی اشیا، جس میں 76 سے 100 تک کے لیبل والی 25 اشیا شامل ہیں۔
- ہر سیٹ کو اندراجی طریقہ میں لکھیں اور تینوں سیٹوں کا یونین معلوم کریں۔

15۔ سالانہ امتحان میں شامل ہونے والے 180 طلبہ میں سے 120 نے ریاضی کا امتحان پاس کیا، 90 نے سائنس کا امتحان پاس کیا اور 60 نے ریاضی اور سائنس دونوں ٹیسٹ پاس کیے۔

(a) کتنے طلبہ نے ریاضی یا سائنس کا امتحان پاس کیا؟
(b) کتنے طلبہ نے دونوں ٹیسٹوں میں سے کوئی بھی پاس نہیں کیا؟
(c) کتنے طلبہ نے سائنس کا امتحان پاس کیا لیکن ریاضی کا امتحان نہیں؟
(d) سائنس کے امتحان میں کتنے طلبہ فیل ہوئے؟

16۔ ایک شہر کے سافٹ ویئر ہاؤس میں، جہاں 300 سافٹ ویئر ڈویلپرز کام کرتے ہیں، ایک سروے کیا گیا تاکہ یہ معلوم کیا جا سکے کہ کون سی پروگرامنگ زبانیں زیادہ پسند کی جاتی ہیں۔ سروے کے نتائج درج ذیل ہیں:

- 150 ڈویلپرز کو پائتھن پسند ہے۔
- 130 ڈویلپرز کو جاوا پسند ہے۔
- 120 ڈویلپرز کو PHP پسند ہے۔
- 70 ڈویلپرز کو پائتھن اور جاوا دونوں پسند ہیں۔
- 60 ڈویلپرز کو پائتھن اور PHP دونوں پسند ہیں۔
- 50 ڈویلپرز کو جاوا اور PHP دونوں پسند ہیں۔
- 40 ڈویلپرز کو تینوں زبانیں پسند ہیں: پائتھن، جاوا اور PHP۔

(a) کتنے ڈویلپرز ان زبانوں میں سے کم از کم ایک استعمال کرتے ہیں؟
(b) کتنے ڈویلپرز صرف ایک زبان استعمال کرتے ہیں؟
(c) کتنے ڈویلپرز ان میں سے کوئی بھی زبان استعمال نہیں کرتے؟
(d) کتنے ڈویلپرز صرف PHP استعمال کرتے ہیں؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP