یونٹ 2

لوگارتھم (Logarithms)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- عام ترقیم میں دیے گئے اعداد کو سائنسی ترقیم میں اور اس کے برعکس لکھ سکیں۔
- ایک عدد کے لوگارتھم کی وضاحت کر سکیں۔
- عام اور قدرتی لوگارتھم کے درمیان فرق معلوم کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

لوگارتھم ایک طاقت ور ریاضیاتی آلہ ہے جو پیچیدہ حساب کتاب کو آسان بنانے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ خاص طور پر وہ حساب کتاب جو تیزی سے بڑھنے یا کم ہونے کے عمل سے متعلق ہوں۔ اس کا استعمال بینک کاری، سائنس، انجینئرنگ اور انفارمیشن ٹیکنالوجی سمیت مختلف شعبوں میں وسیع پیمانے پر ہوتا ہے۔ کیمسٹری میں pH اسکیل جو کسی محلول کی تیزابیت یا اساسیت کی پیمائش کرتا ہے وہ لوگارتھم پر مبنی ہوتا ہے۔ یہ غیر خطی مواد کو تجزیے کے لیے خطی شکل میں تبدیل کرنے، قوت نمائی مساواتوں کو حل کرنے اور بہت بڑے یا چھوٹے اعداد کو مؤثر طریقے سے حل کرنے میں مدد کرتا ہے۔

2.1 سائنسی ترقیم (Scientific Notation)

سائنسی ترقیم ایک ایسا طریقہ ہے جو بہت بڑے یا بہت چھوٹے اعداد کو زیادہ آسان شکل میں ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ عام طور پر سائنس، انجینئرنگ اور ریاضی میں پیچیدہ حساب کتاب کو آسان بنانے میں استعمال ہوتا ہے۔

سائنسی ترقیم میں ایک عدد کو $a \times 10^n$ لکھا جاتا ہے۔ جبکہ $1 \le a < 10$ اور n ایک صحیح عدد ہے۔ یہاں "a" عددی سر یا بنیادی عدد کہلاتا ہے۔

> **یاد رکھیے!**
> اگر عدد 1 سے بڑا ہو تو n مثبت ہے اور اگر عدد 1 سے چھوٹا ہو تو n منفی ہوتا ہے۔

2.1.1 اعداد کو عام ترقیم سے سائنسی ترقیم میں تبدیل کرنا

(Conversion of Numbers from Ordinary Notation to Scientific Notation)

مثال 1: 78,000,000 کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل:

مرحلہ 1: 1 اور 10 کے درمیان عدد حاصل کرنے کے لیے اعشاریہ کو منتقل کیجیے: 7.8

مرحلہ 2: اعشاریہ کو جتنے مقامات پر آپ نے منتقل کیا ہے، ان کی تعداد گنیے: 7 مقامات

مرحلہ 3: سائنسی ترقیم میں لکھیے: $78{,}000{,}000 = 7.8 \times 10^7$

چوں کہ ہم نے اعشاریہ کو بائیں طرف منتقل کیا ہے اس لیے قوت نما مثبت ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مثال 2: 0.0000000315 کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل: **مرحلہ 1:** 1 اور 10 کے درمیان عدد حاصل کرنے کے لیے اعشاریہ کو منتقل کیجیے: 3.15

مرحلہ 2: اعشاریہ کو جتنے مقامات پر آپ نے منتقل کیا ہے، ان کی تعداد گنیے: 8 مقامات

مرحلہ 3: سائنسی ترقیم میں لکھیے:

$$0.0000000315 = 3.15 \times 10^{-8}$$

چوں کہ ہم نے اعشاریہ کو دائیں طرف منتقل کیا ہے اس لیے قوت نما منفی ہے۔

> **خود آزمائی!**
> درج ذیل کو سائنسی ترقیم میں تبدیل کریں:
> (i) 29,000,000
> (ii) 0.000006

2.1.2 اعداد کو سائنسی ترقیم سے عام ترقیم میں تبدیل کرنا

(Conversion of Numbers from Scientific Notation to Ordinary Notation)

مثال 3: 3.47×10^{6} کو عام ترقیم میں لکھیے۔

حل: **مرحلہ 1:** حصوں کی شناخت کریں: عدد: 3.47

قوت نما: 6

مرحلہ 2: چوں کہ قوت نما مثبت 6 ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ کو 6 مقامات دائیں طرف منتقل کیجیے۔ $3.47 \times 10^{6} = 3,470,000$

> **یاد رکھیے!**
> اگر قوت نما مثبت ہے تو اعشاریہ دائیں طرف منتقل ہو گا۔ اگر قوت نما منفی ہے تو اعشاریہ بائیں طرف منتقل ہو گا۔

> **خود آزمائی!**
> درج ذیل کو عام ترقیم میں تبدیل کریں:
> (i) 5.63×10^{3}
> (ii) 6.6×10^{-5}

مثال 4: 6.23×10^{-4} کو عام ترقیم میں لکھیے۔

حل: **مرحلہ 1:** حصوں کی شناخت کریں: عدد: 6.23

قوت نما: 4 −

مرحلہ 2: چوں کہ قوت نما منفی 4 ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ کو 4 مقامات بائیں طرف منتقل کیجیے۔

$$6.23 \times 10^{-4} = 0.000623$$

مشق 2.1

1۔ درج ذیل اعداد کو سائنسی ترقیم میں لکھیے:

(i) 2000000　(ii) 48900　(iii) 0.0042

(iv) 0.0000009　(v) 73×10^{3}　(vi) 0.65×10^{2}

2۔ درج ذیل کو عام ترقیم میں لکھیے:

(i) 8.04×10^{2}　(ii) 3×10^{5}　(iii) 1.5×10^{-2}

(iv) 1.77×10^{7}　(v) 5.5×10^{-6}　(vi) 4×10^{-5}

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

3۔ روشنی کی رفتار تقریباً 3×10^8 میٹر فی سیکنڈ ہے۔ اسے عام ترقیم میں لکھیے۔

4۔ خطِ استوا پر زمین کا محیط 40،075،000 میٹر ہے۔ اس کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

5۔ مریخ کا قطر 6.779×10^3 کلومیٹر ہے۔ اس عدد کو عام ترقیم میں لکھیے۔

6۔ زمین کا قطر 1.2756×10^4 کلومیٹر ہے۔ اس عدد کو عام ترقیم میں لکھیے۔

2.2 لوگارتھم (Logarithm)

لوگارتھم دو یونانی الفاظ logos اور arithmos پر مشتمل ہے جس کا مطلب نسبت یا تناسب ہے۔ اسکاٹ لینڈ کے ریاضی دان جان نیپیئر (John Napier) نے لوگارتھم کا لفظ متعارف کروایا۔ یہ پیچیدہ حساب کتاب کو آسان بنانے کا ایک طریقہ ہے خاص طور پر وہ جو بڑے اعداد کی ضرب اور تقسیم پر مشتمل ہوں۔ آج کل لوگارتھم ریاضی میں بنیادی حیثیت کے طور پر سائنس، مالیات (فنانس) اور ٹیکنالوجی میں استعمال ہوتا ہے۔

2.2.1 حقیقی عدد کا لوگارتھم (Logarithm of a Real Number)

سادہ الفاظ میں ایک حقیقی عدد کا لوگارتھم ہمیں بتاتا ہے کہ دوسرا عدد حاصل کرنے کے لیے ایک عدد کو خود سے کتنی بار ضرب کرنا ہو گا۔

لوگارتھم کی عام شکل یہ ہوتی ہے:

$$\log_b(x) = y$$

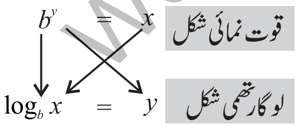
جب کہ:

- b اساس ہے،
- x وہ نتیجہ یا عدد ہے جس کا لوگارتھم لیا جا رہا ہے،
- y قوت نما ہے یا x کا لوگارتھم b اساس کے ساتھ

اس کا مطلب یہ ہے کہ:

$$b^y = x$$

دوسرے الفاظ میں جب b کا قوت نما y ہو تو یہ x کے برابر ہوتا ہے۔ لوگارتھمی شکل اور اس کے مساوی قوت نمائی شکل کے درمیان تعلق نیچے دیا گیا ہے:



$$\log_b(x) = y \iff b^y = x$$ جبکہ $b > 0,\ x > 0$ اور $b \neq 1$

مثال 5: $\log_2 8 = 3$ کو قوت نمائی شکل میں تبدیل کیجیے۔

حل: $\log_2 8 = 3$

اس کی قوت نمائی شکل: $2^3 = 8$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 6: $\log_{10}100 = 2$ کو قوت نمائی شکل میں کیجیے۔

حل: $\log_{10}100 = 2$

اس کی قوت نمائی شکل : $10^2 = 100$

مثال 7: x کی قیمت معلوم کریں:

(i) $\log_5 25 = x$ (ii) $\log_2 x = 6$

حل:

(i) $\log_5 25 = x$

اس کی قوت نمائی شکل:

$5^x = 25$

$\Rightarrow 5^x = 5^2$

$x = 2$

(ii) $\log_2 x = 6$

اس کی قوت نمائی شکل:

$2^6 = x$

$x = 64$

مثال 8: درج ذیل کو لوگارتھمی شکل میں لکھیے:

(i) $3^4 = 81$ (ii) $7^0 = 1$

حل:

(i) $3^4 = 81$

اس کی لوگارتھمی شکل: $\log_3 81 = 4$

(ii) $7^0 = 1$

اس کی لوگارتھمی شکل: $\log_7 1 = 0$

مشق 2.2

1۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کو لوگارتھمی شکل میں لکھیے:

(i) $10^3 = 1000$ (ii) $2^8 = 256$ (iii) $3^{-3} = \frac{1}{27}$

(iv) $20^2 = 400$ (v) $16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ (vi) $11^2 = 121$

(vii) $p = q^r$ (viii) $(32)^{\frac{-1}{5}} = \frac{1}{2}$

2۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کو قوت نمائی شکل میں لکھیے:

(i) $\log_5 125 = 3$ (ii) $\log_2 16 = 4$ (iii) $\log_{23} 1 = 0$

(iv) $\log_5 5 = 1$ (v) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ (vi) $\frac{1}{2} = \log_9 3$

(vii) $5 = \log_{10} 100000$ (viii) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTBtextbook

3۔ درج ذیل ہر ایک میں x کی قیمت معلوم کریں:

(i) $\log_x 64 = 3$ (ii) $\log_5 1 = x$ (iii) $\log_x 8 = 1$

(iv) $\log_{10} x = -3$ (v) $\log_4 x = \frac{3}{2}$ (vi) $\log_2 1024 = x$

2.3 عام لوگارتھم (Common Logarithm)

عام لوگارتھم ایسے لوگارتھم ہوتے ہیں جن کی اساس 10 ہوتی ہے۔ ان کو $\log_{10}$ یا log کے طور پر لکھا جاتا ہے (جب لوگارتھم کی اساس نہ لکھی ہو تو اسے عام طور پر اساس 10 ہی سمجھا جاتا ہے)۔

مثال کے طور پر:

$$10^1 = 10 \Leftrightarrow \log 10 = 1$$
$$10^2 = 100 \Leftrightarrow \log 100 = 2$$
$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log 1000 = 3$$
$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1 \Leftrightarrow \log 0.1 = -1$$
$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01 \Leftrightarrow \log 0.01 = -2$$
$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0.001 \Leftrightarrow \log 0.001 = -3$$

تاریخ

انگریزی ریاضی دان ہنری برگز (Henry Briggs) نے نیپیئر (Napier) کے کام کو آگے بڑھایا اور عام لوگارتھم تیار کیا۔ اس نے لوگارتھم جدول بھی متعارف کروایا۔

2.3.1 لوگارتھم کا خاصہ اور مینٹیسا (Characteristic and Mantissa of Logarithm)

ایک عدد کا لوگارتھم دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے: **خاصہ** اور **مینٹیسا**۔ ان کو سمجھنے کا آسان طریقہ یہ ہے:

(a) خاصہ (Characteristic)

خاصہ لوگارتھم کا صحیح عددی حصہ ہوتا ہے۔ یہ ہمیں بتاتا ہے کہ عدد کتنا بڑا یا چھوٹا ہے۔

خاصہ معلوم کرنے کا طریقہ

(i) 1 سے بڑے عدد کے لیے:

نقطہ اعشاریہ کے بائیں طرف ہندسوں کی تعداد -1 = خاصہ

مثال کے طور پر $\log 567 = 3 - 1 = 2$ کا خاصہ

(ii) 1 سے چھوٹے عدد کے لیے:

(نقطہ اعشاریہ اور پہلے غیر صفر ہندسے کے درمیان صفر کی تعداد $+1$) $-$ = خاصہ

مثال کے طور پر $\log 0.0123 = -(1 + 1) = -2$ یا $\bar{2}$ کا خاصہ

یاد رکھیے!

جب خاصہ منفی ہو تو ہم اسے بار کے ساتھ لکھتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 9: درج ذیل کا خاصہ معلوم کیجیے:

(i) $\log 725$ (ii) $\log 9.87$ (iii) $\log 0.00045$ (iv) $\log 0.54$

حل:

(i) $\log 725$

خاصہ $= 3 - 1 = 2$

(ii) $\log 9.87$

خاصہ $= 1 - 1 = 0$

(iii) $\log 0.00045$

خاصہ $= -(3 + 1) = \bar{4}$

(iv) $\log 0.54$

خاصہ $= -(0 + 1) = \bar{1}$

اعداد کے لوگارتھم کا خاصہ انھیں سائنسی ترقیم میں تبدیل کر کے بھی معلوم کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر:

لوگارتھم کا خاصہ	سائنسی ترقیم	عدد
2	7.25×10^2	725
0	9.87×10^0	9.87
−4	4.5×10^{-4}	0.00045
−1	5.4×10^{-1}	0.54

(b) مینٹیسا (Mantissa)

مینٹیسا لوگارتھم کا کسری حصہ ہوتا ہے اور یہ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر $\log 5000 = 3.698$ میں مینٹیسا 0.698 ہے۔

2.3.2 عدد کا عام لوگارتھم معلوم کرنا (Finding Common Logarithm of a Number)

فرض کریں کہ ہم 13.45 کا عام لوگارتھم معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ لوگارتھم کو معلوم کرنے کا مرحلہ وار طریقہ ذیل میں دیا گیا ہے:

مرحلہ 1: صحیح عددی اور کسری حصوں کو الگ کیجیے۔

صحیح عددی حصہ = 13

کسری حصہ = 45

> **یاد رکھیے!**
> $\log$ (عدد) = خاصہ + مینٹیسا

مرحلہ 2: عدد کا خاصہ معلوم کیجیے۔

1− نقطہ اعشاریہ کے بائیں طرف ہندسوں کی تعداد = خاصہ

$= 2 - 1 = 1$

مرحلہ 3: عام لوگارتھم جدول (مکمل جدول کتاب کے آخر میں دیا گیا ہے) میں، قطار نمبر 13 اور کالم نمبر 4 کے تقاطع میں دیکھیں جو 1271 ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مرحلہ 4: اوسط فرق (Mean difference) تلاش کیجیے: قطار نمبر 13 اور کالم نمبر 5 کے تقاطع کو لوگارتھم جدول کے اوسط فرق میں دیکھیں جو کہ 16 ہے۔

لوگارتھم جدول

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	اوسط فرق								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27

مرحلہ 5: مرحلہ 3 اور مرحلہ 4 میں حاصل ہونے والے اعداد کو جمع کریں۔ یعنی $1271 + 16 = 1287$ پس 0.1287 دیے گئے عدد کا مینٹیسا ہے۔

مرحلہ 6: آخر میں، بالترتیب مرحلہ 2 اور مرحلہ 5 میں حاصل ہونے والے خاصہ اور مینٹیسا کو یکجا کیجیے جو کہ 1.1287 ہے۔

لہٰذا $\log 13.45 = 1.1287$

مثال 10: درج ذیل اعداد کا لوگارتھم معلوم کیجیے۔

(i) $\log 345$ (ii) $\log 5.678$ (iii) $\log 0.0036$ (iv) $\log 0.0478$

حل: (i) $\log 345$

خاصہ $= 3 - 1 = 2$

مینٹیسا $= 0.5378$ (لوگارتھم جدول کی قطار نمبر 34 اور کالم نمبر 5 کے تقاطع میں دیکھیے)

لہٰذا $\log(345) = 2 + 0.5378 = 2.5378$

(ii) $\log 5.678$

خاصہ $= 1 - 1 = 0$

مینٹیسا $= 0.7542$ $(7536 + 6 = 7542)$

لہٰذا $\log(5.678) = 0 + 0.7542 = 0.7542$

(iii) $\log 0.0036$

خاصہ $= -(2 + 1) = -3$

مینٹیسا $= 0.5563$ (لوگارتھم جدول کی قطار نمبر 36 اور کالم نمبر 0 کے تقاطع میں دیکھیے)

لہٰذا $\log(0.0036) = -3 + 0.5563 = -2.443$

(iv) $\log 0.0478$

خاصہ $= -(1 + 1) = -2$

مینٹیسا $= 0.6794$ (لوگارتھم جدول کی قطار نمبر 47 اور کالم نمبر 8 کے تقاطع میں دیکھیے)

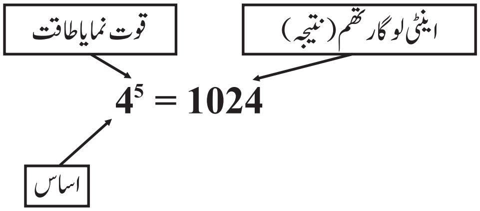
لہٰذا $\log(0.0478) = -2 + 0.6794 = -1.3206$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

2.3.3 اینٹی لوگارتھم کا تصور (Concept of Antilogarithm)

اینٹی لوگارتھم ایک لوگارتھم کا اُلٹ آپریشن ہوتا ہے۔ اینٹی لوگارتھم اس عدد کو تلاش کرنے میں مدد کرتا ہے جس کی لوگارتھمی قیمت دی گئی ہو۔



آسان الفاظ میں:

اگر $b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$ ہو تو x معلوم کرنے کے عمل کو y کا اینٹی لوگارتھم کہا جاتا ہے۔

جدول کا استعمال کرتے ہوئے کسی عدد کا اینٹی لوگارتھم معلوم کرنا

آیئے ہم 2.1245 کا اینٹی لوگارتھم معلوم کرتے ہیں۔

اینٹی لوگارتھم کو معلوم کرنے کے لیے مرحلہ وار طریقہ ذیل میں دیا گیا ہے:

> **یاد رکھیے!**
> اینٹی لوگارتھم عدد یا نتیجہ کے لیے ایک دوسرا لفظ ہے۔ مثال کے طور پر $64 = 4^3$ میں نتیجہ 64 اینٹی لوگارتھم ہے۔

مرحلہ 1: خاصہ اور مینٹیسا کو الگ کیجیے:

خاصہ = 2 ; مینٹیسا = 0.1245

مرحلہ 2: اینٹی لوگارتھم جدول (کتاب کے آخر میں دیا گیا ہے) سے مینٹیسا کی متعلقہ قدر معلوم کیجیے:

قطار نمبر 12. اور کالم نمبر 4 کے تقاطع کو دیکھیں جو کہ 1330 ہے۔

مرحلہ 3: اوسط فرق معلوم کیجیے:

قطار نمبر 12. اور کالم نمبر 5 کے تقاطع کو اینٹی لوگارتھم جدول میں اوسط فرق میں دیکھیں جو کہ 2 ہے۔

اینٹی لوگارتھم جدول

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	اوسط فرق 1	2	3	4	5	6	7	8	9
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3

مرحلہ 4: مرحلہ 2 اور مرحلہ 3 میں حاصل ہونے والے اعداد کو جمع کریں یعنی $1330 + 2 = 1332$

مرحلہ 5: نقطہ اعشاریہ لگایئے:

چوں کہ خاصہ 2 ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ حوالہ کے مقام سے دائیں طرف 2 ہندسوں کے بعد ہوگا۔ یعنی $1_\wedge 33.2$

اس طرح اینٹی لوگارتھم $(2.1245) = 133.2$

> **یاد رکھیے!**
> بائیں طرف سے پہلے غیر صفر ہندسے اور اس کے اگلے ہندسے کے درمیان کی جگہ کو حوالہ کا مقام کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر 1332 میں حوالہ کا مقام 1 اور 3 کے درمیان ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 11: درج ذیل میں x کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\log x = 0.2568$ (ii) $\log x = -1.4567$ (iii) $\log x = -2.1234$

حل: (i) $\log x = 0.2568$

خاصہ = 0 ؛ مینٹیسا = 0.2568

0.2568 کی جدول میں قدر = 1803 + 3 = 1806

لہٰذا $x =$ اینٹی لوگارتھم $(0.2568) = 1.806$ (حوالہ کے مقام پر نقطہ اعشاریہ لگائیں کیونکہ خاصہ 0 ہے۔)

(ii) $\log x = -1.4567$

چوں کہ مینٹیسا منفی ہے اس لیے ہم 2 کو جمع اور تفریق کرتے ہیں۔

$$\log x = -2 + 2 - 1.4567$$
$$= -2 + 0.5433 = \bar{2}.5433$$

یہاں خاصہ = $\bar{2}$ اور مینٹیسا = 0.5433

0.5433 کی جدول میں قدر = 3491 + 2 = $3_\wedge493$

$x =$ اینٹی لوگارتھم $(\bar{2}.5433)$

$= 0.03493$

چوں کہ خاصہ $\bar{2}$ ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ حوالہ کے مقام سے بائیں طرف 2 ہندسوں سے پہلے ہو گا۔

(iii) $\log x = -2.1234$

چوں کہ مینٹیسا منفی ہے اس لیے ہم 3 کو جمع اور تفریق کرتے ہیں۔

$$\log x = -3 + 3 - 2.1234$$
$$= -3 + 0.8766 = \bar{3}.8766$$

یہاں خاصہ = $\bar{3}$ اور مینٹیسا = 0.8766

0.8766 کی جدول میں قدر = 7516 + 10 = $7_\wedge526$

$x =$ اینٹی لوگارتھم $(\bar{3}.8766)$

$= 0.007526$

> **تاریخ**
> سوئس ریاضی دان اور طبیعیات دان لیون ہارڈ آیلر (Leonhard Eular) نے قدرتی لوگارتھم کی اساس کے لیے 'e' متعارف کرایا۔

چوں کہ خاصہ $\bar{3}$ ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ حوالہ کے مقام سے بائیں طرف 3 ہندسوں سے پہلے ہو گا۔

2.3.4 قدرتی لوگارتھم (Natural Logarithm)

اساس e والے لوگارتھم کو قدرتی لوگارتھم کہا جاتا ہے جبکہ e ایک ریاضیاتی مستقل مقدار ہے جو تقریباً 2.71828 ہوتی ہے۔ اس کو ln سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قدرتی لوگارتھم ریاضی خاص طور پر کیلکولس، بڑھنے / گھٹنے والے تفاعل اور قدرتی مظاہر کی وضاحت کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر $\ln e^2 = 2$ یعنی کہ اساس e پر e^2 کا لوگارتھم 2 ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

عام اور قدرتی لوگارتھم کے درمیان فرق

عام لوگارتھم	قدرتی لوگارتھم
1۔ عام لوگارتھم کی اساس 10 ہوتی ہے۔	1۔ قدرتی لوگارتھم کی اساس e ہوتی ہے۔
2۔ اس کو $\log_{10}(x)$ یا صرف $\log(x)$ لکھا جاتا ہے۔	2۔ اس کو $\ln(x)$ لکھا جاتا ہے۔
3۔ عام لوگارتھم کا روزمرہ زندگی کے حساب کتاب میں بڑے پیمانے پر خاص طور پر سائنس اور انجینئرنگ میں اطلاق ہوتا ہے۔	3۔ قدرتی لوگارتھم کا عام طور پر اعلیٰ درجے کی ریاضی، کیلکولس اور بڑھنے / گھٹنے کے عوامل پر اطلاق ہوتا ہے۔

مشق 2.3

1۔ درج ذیل میں دیے گئے اعداد کا خاصہ لکھیے:

(i) 5287　(ii) 59.28　(iii) 0.0567
(iv) 234.7　(v) 0.000049　(vi) 145000

2۔ درج ذیل میں دیے گئے اعداد کا لوگارتھم معلوم کیجیے:

(i) 43　(ii) 579　(iii) 1.982
(iv) 0.0876　(v) 0.047　(vi) 0.000354

3۔ اگر $\log 3.177 = 0.5019$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے:

(i) $\log 3177$　(ii) $\log 31.77$　(iii) $\log 0.03177$

4۔ x کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\log x = 0.0065$　(ii) $\log x = 1.192$　(iii) $\log x = -3.434$
(iv) $\log x = -1.5726$　(v) $\log x = 4.3561$　(vi) $\log x = -2.0184$

2.4 لوگارتھم کے قوانین (Laws of Logarithm)

لوگارتھم کے قوانین کو لوگارتھم کے قواعد یا خصوصیات کے طور پر بھی جانا جاتا ہے۔ یہ قوانین لوگارتھمی جملوں کو آسان بنانے اور لوگارتھمی مساواتوں کو حل کرنے میں مدد کرتے ہیں۔

1۔ **ضرب کا قانون (Product Law)**

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

دو اعداد کے حاصل ضرب کا لوگارتھم دونوں اعداد کے انفرادی لوگارتھم کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

ثبوت: فرض کیا $m = \log_b x \quad \ldots \text{(i)}$

اور $n = \log_b y \quad \ldots \text{(ii)}$

(i) اور (ii) کو قوت نمائی شکل میں لکھنے سے:

$$x = b^m \quad \text{اور} \quad y = b^n$$

x اور y کو ضرب دینے سے

$$x.y = b^m . b^n = b^{m+n}$$

لوگارتھمی شکل میں لکھنے سے

$$\log_b xy = m + n$$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y \qquad \text{[(i) اور (ii) سے]}$$

2۔ تقسیم کا قانون (Quotient Law)

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

دو اعداد کی کسر کا لوگارتھم شمار کنندہ کے لوگارتھم اور مخرج کے لوگارتھم کے فرق کے برابر ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کیا $m = \log_b x \quad \ldots \text{(i)}$

اور $n = \log_b y \quad \ldots \text{(ii)}$

(i) اور (ii) کو قوت نمائی شکل میں لکھنے سے:

$$x = b^m \quad \text{اور} \quad y = b^n$$

x کو y پر تقسیم کرنے سے:

$$\frac{x}{y} = \frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$$

لوگارتھمی شکل میں لکھنے سے:

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = m - n$$

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

سرگرمی

- طلبہ کو چھوٹے گروہوں میں تقسیم کریں۔
- گروہوں کے درمیان لوگارتھمی جملوں کے کارڈز کو بے ترتیب کرکے تقسیم کریں۔
- ہر گروہ اس بات کی نشان دہی کرے گا کہ کس جملے پر لوگارتھم کا کون سا قانون لاگو ہوگا۔
- کام مکمل کرنے کے بعد ہر گروہ اپنے نتائج پیش کرے گا۔

3۔ قوت نما کا قانون (Power Law)

$$\log_b x^n = n.\log_b x$$

کسی عدد کے قوت نما کا لوگارتھم قوت نما اور عدد کے لوگارتھم کی حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

ثبوت: فرض کیا $\quad m = \log_b x \quad \dots$ (i)

قوت نمائی شکل میں لکھنے سے:

$$x = b^m$$

دونوں اطراف کی قوت n لینے سے:

$$x^n = (b^m)^n = b^{nm}$$

لوگارتھمی شکل میں لکھنے سے:

$$\log_b x^n = nm$$

$$\log_b x^n = n.\log_b x \qquad \text{[مساوات (i) سے]}$$

4. اساس کی تبدیلی کا قانون (Change of Base Law)

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

یہ قانون لوگارتھم کی اساس کو "b" سے کسی دوسری اساس "a" میں تبدیل کرنے کی اجازت دیتا ہے۔

ثبوت:

فرض کیا $\quad m = \log_b x \quad \dots$ (i)

قوت نمائی شکل میں لکھنے سے

$$b^m = x$$

طرفین کا $\log_a$ لینے سے:

$$\log_a b^m = \log_a x$$

$$m \log_a b = \log_a x$$

$$m = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad \text{[مساوات (i) سے]}$$

2.4.1 لوگارتھم کا اطلاق (Applications of Logarithm)

لوگارتھم کا بہت سے شعبوں میں وسیع طور پر اطلاق ہوتا ہے۔ یہاں لوگارتھم کے اطلاق کے بارے میں کچھ مثالیں دی گئی ہیں۔

مثال 12: درج ذیل کو لوگارتھم کے قوانین کی مدد سے پھیلا کر لکھیں۔

(i) $\log_3 (20)$　　(ii) $\log_2 (9)^5$　　(iii) $\log_{32} 27$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حل:

(i) $\log_3(20)$
$= \log_3(2\times 2\times 5)$
$= \log_3(2^2\times 5)$
$= \log_3(2)^2 + \log_3 5$
$= 2\log_3 2 + \log_3 5$

(ii) $\log_2 (9)^5$
$= \log_2 (3^2)^5$
$= \log_2 (3)^{10}$
$= 10 \log_2 3$

(iii) $\log_{32} 27$
$= \dfrac{\log 27}{\log 32}$
$= \dfrac{\log 3^3}{\log 2^5}$
$= \dfrac{3\log 3}{5\log 2}$
$= \dfrac{3}{5}\log_2 3$

مثال 13: درج ذیل کو لوگارتھم کے قوانین کی مدد سے پھیلا کر لکھیے:

(i) $\log_2\left(\dfrac{x-y}{z}\right)^3$ (ii) $\log_5\left(\dfrac{xy}{z}\right)^8$

حل:

(i) $\log_2\left(\dfrac{x-y}{z}\right)^3 = 3\log_2\left(\dfrac{x-y}{z}\right)$
$= 3\left[\log_2(x-y) - \log_2 z\right]$

(ii) $\log_5\left(\dfrac{xy}{z}\right)^8 = 8\log_5\left(\dfrac{xy}{z}\right)$
$= 8\left[\log_5(xy) - \log_5 z\right]$
$= 8\left[\log_5 x + \log_5 y - \log_5 z\right]$

مثال 14: درج ذیل کو واحد لوگارتھم کی شکل میں لکھیں:

(i) $2\log_3 10 - \log_3 4$ (ii) $6\log_3 x + 2\log_3 11$

حل:

(i) $2\log_3 10 - \log_3 4$
$= \log_3 (10)^2 - \log_3 4$
$= \log_3 100 - \log_3 4$
$= \log_3\left(\dfrac{100}{4}\right)$
$= \log_3 25$

(ii) $6\log_3 x + 2\log_3 11$
$= \log_3 x^6 + \log_3 (11)^2$
$= \log_3 x^6 + \log_3 (121)$
$= \log_3 (121x^6)$

مثال 15: ڈیسیبل (Decibel) اسکیل کا کلیہ $L = 40\log_{10}\left(\dfrac{I}{I_o}\right)$ آواز کی شدت کی پیمائش کرتا ہے۔ اگر کسی آواز کی شدت (I) حوالہ کی شدت (I_o) کا 10^6 گنا ہو تو ڈیسیبل میں آواز کی سطح کیا ہو گی؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حل:

$$L = 40\log_{10}\left(\frac{I}{I_o}\right)$$

$I = 10^6 I_o$ درج کرنے سے

$$L = 40\log_{10}\left(\frac{10^6 I_o}{I_o}\right)$$

$$L = 40\log_{10}(10)^6$$

$$L = 40 \times 6\log_{10}10$$

$$L = 40 \times 6 \qquad (\because \log_{10}10 = 1)$$

L = 240 ڈیسیبلز

کیا آپ جانتے ہیں؟

$ln(0) =$ غیر واضح
$ln(1) = 0$
$ln(e) = 1$

مشق 2.4

1۔ کیلکولیٹر کا استعمال کیے بغیر درج ذیل کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\log_2 18 - \log_2 9$ (ii) $\log_2 64 + \log_2 2$ (iii) $\frac{1}{3}\log_3 8 - \log_3 18$

(iv) $2\log 2 + \log 25$ (v) $\frac{1}{3}\log_4 64 + 2\log_5 25$ (vi) $\log_3 12 + \log_3 0.25$

2۔ درج ذیل کو واحد لوگارتھم کی شکل میں ظاہر کیجیے:

(i) $\frac{1}{2}\log 25 + 2\log 3$ (ii) $\log 9 - \log\frac{1}{3}$

(iii) $\log_5 b^2 . \log_a 5^3$ (iv) $2\log_3 x + \log_3 y$

(v) $4\log_5 x - \log_5 y + \log_5 z$ (vi) $2\ln a + 3\ln b - 4\ln c$

3۔ درج ذیل لوگارتھموں کو پھیلا کر لکھیے:

(i) $\log\left(\frac{11}{5}\right)$ (ii) $\log_5\sqrt{8a^6}$ (iii) $\ln\left(\frac{a^2b}{c}\right)$

(iv) $\log\left(\frac{xy}{z}\right)^{\frac{1}{9}}$ (v) $\ln\sqrt[3]{16x^3}$ (vi) $\log_2\left(\frac{1-a}{b}\right)^5$

4۔ درج ذیل مساواتوں میں x کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\log 2 + \log x = 1$ (ii) $\log_2 x + \log_2 8 = 5$

(iii) $(81)^x = (243)^{x+2}$ (iv) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x-6} = 27$

(v) $\log(5x - 10) = 2$ (vi) $\log_2(x+1) - \log_2(x-4) = 2$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

5۔ لوگارتھم جدول کی مدد سے درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{3.68 \times 4.21}{5.234}$ (ii) $4.67 \times 2.11 \times 2.397$

(iii) $\frac{(20.46)^2 \times (2.4122)}{754.3}$ (iv) $\frac{\sqrt[3]{9.364} \times 21.64}{3.21}$

6۔ زلزلوں کی شدت کی پیمائش کا کلیہ $M = \log_{10}\left(\frac{A}{A_o}\right)$ ہے۔ اگر 10,000 طول موج (A) اور 10 طول موج کا حوالہ (A_o) ہو تو زلزلے کی شدت کتنی ہو گی؟

7۔ عبداللہ نے ایک بچت اسکیم میں 100,000 روپے کی سرمایہ کاری کی اور سالانہ 5% کی شرح سے منافع حاصل کیا تاکہ اس سرمایہ کاری کی کل مالیت t سالوں کے بعد y روپے ہو جائے۔ اسے ایک مساوات $y = 100,000\,(1.05)^t,\ t \geq 0$ کی شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔ معلوم کریں کہ کتنے سالوں کے بعد سرمایہ کاری دوگنی ہو جائے گی۔

8۔ حوریہ ایک ایسے پہاڑ پر چڑھ رہی ہے جہاں درجہ حرارت (T) ہر 100 m اونچائی بڑھنے پر 3% (یا 0.97 کا جزو) کم ہو جاتا ہے۔ ابتدائی درجہ حرارت (T_i) سطح سمندر پر $20\ °C$ ہے۔ کلیہ $T = T_i \times 0.97^{\frac{h}{100}}$ کو استعمال کرتے ہوئے 500 m کی اونچائی (h) پر درجہ حرارت معلوم کریں۔

جائزہ مشق 2

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) 5.2×10^6 کی معیاری شکل ہے:

(a) 52,000 (b) 520,000 (c) 5,200,000 (d) 52,000,000

(ii) 0.00034 کی سائنسی ترقیم ہے:

(a) 3.4×10^3 (b) 3.4×10^{-4} (c) 3.4×10^4 (d) 3.4×10^{-3}

(iii) عام لوگارتھم کی اساس ہوتی ہے:

(a) 2 (b) 10 (c) 5 (d) e

(iv) $\log_2 2^3 =$ __________

(a) 1 (b) 2 (c) 5 (d) 3

(v) $\log 100 =$ __________

(a) 2 (b) 3 (c) 10 (d) 1

(vi) اگر $\log 2 = 0.3010$ ہو تو $\log 200$ ہے:

(a) 1.3010 (b) 0.6010 (c) 2.3010 (d) 2.6010

(vii) $\log (0) =$ __________

(a) مثبت (b) منفی (c) صفر (d) غیر واضح

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(viii) $\log 10,000 =$ __________

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

(ix) $\log 5 + \log 3 =$ ___________

(a) $\log 0$ (b) $\log 2$ (c) $\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (d) $\log 15$

(x) $3^4 = 81$ کی لوگارتھمی شکل ہے:

(a) $\log_3 4 = 81$ (b) $\log_4 3 = 81$

(c) $\log_3 81 = 4$ (d) $\log_4 81 = 3$

2۔ درج ذیل اعداد کو سائنسی ترقیم میں لکھیے:

(i) 0.000567 (ii) 734 (iii) 0.33×10^3

3۔ درج ذیل اعداد کو عام ترقیم میں لکھیے:

(i) 2.6×10^3 (ii) 8.794×10^{-4} (iii) 6×10^{-6}

4۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کو لوگارتھمی شکل میں لکھیے:

(i) $3^7 = 2187$ (ii) $a^b = c$ (iii) $(12)^2 = 144$

5۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کو قوت نمائی شکل میں لکھیے:

(i) $\log_4 8 = x$ (ii) $\log_9 729 = 3$ (iii) $\log_4 1024 = 5$

6۔ درج ذیل میں x کی قیمت معلوم کریں:

(i) $\log_9 x = 0.5$ (ii) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3x} = 27$ (iii) $\left(\frac{1}{32}\right)^{2x} = 64$

7۔ درج ذیل کو واحد لوگارتھم کی شکل میں لکھیے:

(i) $7 \log x - 3\log y^2$ (ii) $3 \log 4 - \log 32$

(iii) $\frac{1}{3}(\log_5 8 + \log_5 27) - \log_5 3$

8۔ درج ذیل کو لوگارتھم کے قوانین کی مدد سے پھیلا کر لکھیے:

(i) $\log (x\, y\, z^6)$ (ii) $\log_3 \sqrt[6]{m^5 n^3}$ (iii) $\log \sqrt{8x^3}$

9۔ درج ذیل کی قیمتیں لوگارتھم جدول کی مدد سے معلوم کیجیے:

(i) $\sqrt[3]{68.24}$ (ii) 319.8×3.543 (iii) $\frac{36.12 \times 750.9}{113.2 \times 9.98}$

10۔ سال 2016 میں ایک شہر کی آبادی 22 ملین تھی اور ہر سال % 2.5 کی شرح سے بڑھ رہی تھی۔ تفاعل $p(t) = 22(1.025)^t$ ملین میں 2016 کے بعد t سالوں میں آبادی معلوم کرتا ہے۔ دیے گئے تفاعل کا استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں کہ کتنے سالوں میں آبادی 35 ملین تک پہنچ جائے گی۔

Web version of PCTBtextbook

NOT FOR SALE-PESRP