یونٹ 13

احتمال (Probability)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ایک واقعہ ہونے کا احتمال اور ایک واقعہ رونما نا ہونے کا احتمال معلوم کر سکیں۔
- احتمال سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کر سکیں۔
- احتمال کے تخمینے کے طور پر نسبتی تعدد کو معلوم کر سکیں۔
- نسبتی تعدد اور متوقع تعدد سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

روز مرّہ زندگی میں ہم عام طور پر کہتے ہیں کہ اشیا بنانے والی کمپنیاں اپنی مصنوعات پر گارنٹی دیتی ہیں۔ اِس بات کا امکان ہوتا ہے کہ کچھ مصنوعات گارنٹی کی مدت کو پورا نہیں کرتیں۔

کسی ٹیم کے کرکٹ میچ جیتنے کے امکانات کا فیصلہ اُس کی پچھلی کارکردگی کی بنیاد پر کیا جاتا ہے۔ مذکورہ بالا تمام بیانات میں مکمل یقین کے ساتھ پیش گوئی کا فقدان ہے۔ ایسے حالات میں عددی طور پر کون سی چیز ہمارے لیے آسانی پیدا کرے گی کہ کسی واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کے امکان کیا ہیں؟ وہ احتمال ہے۔ لہٰذا احتمال کسی خاص واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا امکان ہے۔

احتمال کو دیے ہوئے کلیہ کی مدد سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{احتمال} = \frac{\text{موافق نتائج کی تعداد}}{\text{ممکنہ نتائج کی کُل تعداد}}$$

اسے یوں لکھا جاتا ہے

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$P(A)$ = واقعہ A کا احتمال

$n(A)$ = موافق نتائج کی تعداد

$n(S)$ = ممکنہ نتائج کی کُل تعداد

تاریخ

احتمال (Probability) کا لفظ لاطینی لفظ سے ماخوذ کیا گیا ہے۔ اس کا مطلب امکان (Probabilitias) ہے۔

گیرولاموکارڈانو (Girolamo Cardano) کو احتمال کا بانی جانا جاتا ہے۔ وہ ایک اٹلی کا ڈاکٹر اور ریاضی دان تھا۔

احتمال کے بنیادی تصوّرات (Basic Concepts of Probability)

تجربہ (Experiment)

وہ عمل جو نتائج پیدا کرتا ہے۔ مثلاً سکّہ اچھالنا، ڈائس (dice) کا پھینکنا وغیرہ کو تجربہ کہا جاتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

نتائج (Outcomes)

کسی تجربہ کے حاصل کو نتائج کہتے ہیں۔ مثلاً سکّہ اچھالنے کے ممکنہ نتائج ہیڈ اور ٹیل ہوتے ہیں۔ ڈائس کو پھینکنے کے ممکنہ نتائج 1، 2، 3، 4، 5 اور 6 ہوتے ہیں۔

موافق نتیجہ (Favourable Outcome)

ایک ایسا نتیجہ جو اِس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ ہم کتنی بار واقعہ رونما ہونے کی توقع کرتے ہیں۔ مثلاً سکّہ اچھالنے کے وقت ایک موافق نتیجہ رونما ہوتا ہے ہیڈ یا ٹیل۔ جب کہ ڈائس پھینکنے کے وقت 2 کے اضعاف کے تین نتائج ہوتے ہیں جیسا کہ $\{2, 4, 6\}$۔

سیمپل اسپیس (Sample Space)

ایک تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کے سیٹ کو سیمپل اسپیس کہتے ہیں۔ اِس کو "S" سے ظاہر کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر جب سکّہ اُچھالتے ہیں تو سیمپل اسپیس $S = \{H, T\}$ ہو گی۔ جب ڈائس پھینکا جاتا ہے تو سیمپل اسپیس $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہو گی۔

یاد رکھیے!

سیمپل اسپیس کے ہر رُکن کو سیمپل نقطہ کہتے ہیں۔

واقعہ (Event)

کسی تجربہ کے نتائج کے سیٹ کو واقعہ کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر ڈائس پھینکتے وقت جفت عدد کا رونما ہونا ایک واقعہ کہا جاتا ہے۔ جیسا کہ $A = \{2, 4, 6\}$; $n(A) = 3$

یاد دہانی! واقعات کی اقسام

یقینی واقعہ (Certain event): ایسا واقعہ جو یقینی طور پر وقوع پذیر ہوتا ہے۔ یقینی واقعہ کا احتمال 1 ہوتا ہے۔

ناممکن واقعہ (Impossible event): ایسا واقعہ جو کسی بھی تجربے میں واقع نہ ہو سکتا ہو۔ اِس واقعہ کا احتمال 0 ہوتا ہے۔

ممکنہ واقعہ (Likely event): ایسا واقعہ جو ممکنہ طور پر وقوع پذیر ہو گا۔ اس کے واقعہ ہونے کے زیادہ امکانات ہوتے ہیں۔

غیر ممکنہ واقعہ (Unlikely event): ایسا واقعہ جو رونما نہیں ہو گا۔ اس کے وقوع پذیر ہونے کا امکان کم ہوتا ہے۔

مساوی ممکنہ واقعات (Equally likely events): وہ واقعات جن کے وقوع پذیر ہونے کے مساوی امکانات ہوتے ہیں۔ اِن واقعات کا احتمال 0.5 ہوتا ہے۔

13.1 اکیلے واقعہ کا احتمال (Probability of Single Event)

مثال 1: عبدالرحیم ایک ڈائس پھینکتا ہے۔ 3 پر تقسیم ہونے والے عدد کا احتمال کیا ہوتا ہے؟

حل: جب ڈائس پھینکا جاتا ہے تو سیمپل اسپیس ہو گی۔

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \; ; \; n(S) = 6$$

فرض کریں واقعہ "A" 3 پر تقسیم ہونے والا عدد ہے۔

$$A = \{3, 6\}; \; n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

پس 3 پر تقسیم ہونے والے عدد کا احتمال $\frac{1}{3}$ ہے۔

یاد رکھیے!

کسی بھی واقعہ کے لیے احتمال کی سعت ہوتی ہے

$0 \le P(A) \le 1$

برائے اساتذہ!

مختلف رنگوں کی گیندیں یا پنسلیں وغیرہ لے کر تمام اقسام کے واقعات کے تصوّر کو واضح کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال2: اگر ذیشان 2 ڈائس پھینکتا ہے تو احتمال معلوم کریں کہ:

(i) دونوں ڈائس پر جفت اعداد ہوں۔

(ii) دونوں ڈائس پر 3 کے اضعاف ہوں۔

(iii) پہلے ڈائس پر جفت عدد اور دوسرے ڈائس پر ہندسہ "3" ہو۔

(iv) پہلے ڈائس پر ہندسہ کم از کم "3" ہو اور دوسرے ڈائس پر ہندسہ '4' ہو۔

حل: جب دونوں ڈائس کو اکٹھا پھینکا جاتا ہے تو سیمپل اسپیس ہو گی:

2nd \ 1st	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

خود آزمائی!

جب 3 ڈائس اکٹھے پھینکے جاتے ہیں تو کیا آپ کُل سیمپل اسپیس کی تعداد معلوم کر سکتے ہیں؟

(i) دونوں ڈائس پر جفت اعداد

فرض کریں واقعہ " A " میں دونوں ڈائس پر جفت اعداد حاصل ہوں۔

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2) (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$n(A) = 9;\ \ n(S) = 36$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

پس دونوں ڈائس پر جفت اعداد حاصل کرنے کا احتمال $\frac{1}{4}$ ہے۔

(ii) دونوں ڈائس پر 3 کے اضعاف

فرض کریں واقعہ "B" میں دونوں ڈائس پر 3 کے اضعاف حاصل ہوں۔

$$B = \{(3, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)\}$$

$$n(B) = 4;\ \ n(S) = 36$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

پس دونوں ڈائس پر 3 کے اضعاف حاصل کرنے کا احتمال $\frac{1}{9}$ ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(iii) پہلے ڈائس پر جفت عدد اور دُوسرے ڈائس پر ہندسہ 3

فرض کریں واقعہ "C" میں پہلے ڈائس پر جفت اور دُوسرے ڈائس پر ہندسہ "3" ہو۔

$$C = \{(2,3), (4,3), (6,3)\}$$
$$n(C) = 3;\ n(S) = 36$$
$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

پس پہلے ڈائس پر جفت عدد اور دُوسرے ڈائس پر ہندسہ 3 حاصل کرنے کا احتمال $\frac{1}{12}$ ہے۔

(iv) پہلے ڈائس پر کم از کم ہندسہ "3" اور دُوسرے ڈائس پر ہندسہ "4" ہو۔

فرض کریں واقعہ "D" میں پہلے ڈائس پر کم از کم ہندسہ "3" اور دُوسرے ڈائس پر ہندسہ "4" حاصل ہو۔

$$D = \{(3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4)\}$$
$$n(D) = 4;\ n(S) = 36$$
$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

پس پہلے ڈائس پر کم از کم ہندسہ "3" اور دُوسرے ڈائس پر ہندسہ "4" حاصل کرنے کا احتمال $\frac{1}{9}$ ہے۔

13.2 واقعہ وقوع پذیر نا ہونے کا احتمال (Probability of an Event Not Occurring)

بعض اوقات ہم اِس امکان میں دلچسپی رکھتے ہیں کہ سِکہ اُچھالتے وقت ہیڈ نہیں آئے گا۔

اگر واقعہ "A" میں سِکہ اُچھالتے وقت ہیڈ حاصل ہو، تو واقعہ "A'" میں سِکہ اُچھالتے وقت ہیڈ حاصل نا ہونے کا احتمال ہو گا۔

سِکہ اُچھالتے وقت ہیڈ حاصل نا ہونے کے احتمال کو واقعہ کا کمپلیمنٹ کہا جاتا ہے۔ اِس کو $P(A')$ یا $P(A^c)$ لکھا جاتا ہے۔

واقعہ "A" کے کمپلیمنٹ کو دیے گئے کلیہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$P(A') = 1 - P(A)$$

مثال کے طور پر سکّہ اُچھالتے وقت ہیڈ حاصل کرنے کا احتمال

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

برائے اساتذہ! واقعات کے کمپلیمنٹ کو واضح کرنے کے لیے مزید مثالیں دیں۔ اگر ایک سِکہ کو اچھالنے سے متوقع نتیجہ ہیڈ حاصل ہو تو اس کا کمپلیمنٹ ٹیل ہے۔ کمپلیمنٹ اصول بیان کرتا ہے کہ ایک واقع کے احتمال اور اس کے کمپلیمنٹ کا مجموعہ 1 کے برابر ہونا چاہیے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

اور ہیڈ نا حاصل ہونے کا احتمال ہے:

$$P(A') = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

پس ہیڈ حاصل ہونے کا کمپلیمنٹ $\frac{1}{2}$ ہے۔

مثال 3: زبیر ایک ڈائس پھینکتا ہے۔ ہندسہ 6 حاصل نا ہونے کا اِحتمال کیا ہو گا؟

حل: اگر واقعہ "A" میں ہندسہ "6" حاصل ہو

ڈائس اُچھالتے وقت سیمپل اسپیس ہوتی ہے: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$n(S) = 6$$
$$A = \{6\}; n(A) = 1$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

یاد رکھیے!

واقعہ "A" کا احتمال اور واقعہ "A" نہیں کے احتمال کا مجموعہ ہمیشہ 1 ہوتا ہے۔

$P(A) + P(A') = 1$

ہندسہ "6" حاصل نا ہونے کا احتمال معلوم کرنے کے لیے ہم $\frac{1}{6}$ کو 1 میں سے تفریق کرتے ہیں۔

$$P(A') = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

پس ہندسہ 6 حاصل نا ہونے کا احتمال $\frac{5}{6}$ ہے۔

مثال 4: اگر دو ڈائس پھینکے جائیں تو احتمال کیا ہو گا کہ:

(i) دو مرتبہ 6 نا آئے (ii) دونوں ڈائس کا مجموعہ 8 نا ہو

حل: جب دو ڈائس پھینکے جاتے ہیں تو سیمپل اسپیس ہوتی ہے۔

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5),$
$(4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4),$
$(6,5), (6,6)\}$

$n(S) = 36$

(i) دو مرتبہ 6 نا آئے

فرض کریں واقعہ "A" میں دو مرتبہ 6 ہو۔

$$A = \{(6, 6)\}; n(A) = 1$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

اگر واقعہ "A'" میں دو مرتبہ 6 نا ہو۔

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{36-1}{36} = \frac{35}{36}$$

پس دو مرتبہ 6 حاصل نا ہونے کا احتمال $\frac{35}{36}$ ہے۔

(ii) ڈائس کا مجموعہ 8 نا ہو

فرض کریں واقعہ "B" میں دونوں ڈائس کا مجموعہ 8 ہو

$$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

$$n(B) = 5$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

اگر واقعہ "B'" میں دونوں ڈائس کا مجموعہ 8 نا ہو۔

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{36-5}{36} = \frac{31}{36}$$

پس دونوں ڈائس کا مجموعہ 8 حاصل نا ہونے کا احتمال $\frac{31}{36}$ ہے۔

13.3 احتمال سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل
(Real Life Problems Involving Probability)

مثال 5: اگر 3 میزائل A، B اور C ہوں اور اِنہیں ایک ٹارگٹ پر فائر کرنا ہو۔ اگر ٹارگٹ پر فائر کرنے کا احتمال $P(A) = \frac{1}{4}$، $P(B) = \frac{3}{7}$، $P(C) = \frac{5}{9}$ ہو تو احتمال معلوم کریں۔

(i) میزائل A ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا (ii) میزائل B ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا

(iii) میزائل C ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا

حل: (i) میزائل A ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا

چوں کہ $P(A) = \frac{1}{4}$

فرض کریں واقعہ "A'" میں میزائل A ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا۔

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

پس، میزائل A کا ٹارگٹ کو نشانہ نا بنانے کا احتمال $\frac{3}{4}$ ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(ii) میزائل B ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا

چوں کہ $P(B) = \frac{3}{7}$

فرض کریں واقعہ "B'" میں میزائل B ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا۔

$$P(B') = 1 - P(B)$$
$$= 1 - \frac{3}{7}$$
$$= \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$$

پس میزائل B کا ٹارگٹ کو نشانہ نابنانے کا احتمال $\frac{4}{7}$ ہے۔

(iii) میزائل C ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا

اگرچہ $P(C) = \frac{5}{9}$

اگر واقعہ "C'" میں میزائل C ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا۔

$$P(C') = 1 - P(C)$$
$$= 1 - \frac{5}{9} = \frac{9-5}{9} = \frac{4}{9}$$

پس میزائل C کا ٹارگٹ کو نشانہ نابنانے کا احتمال $\frac{4}{7}$ ہے۔

مثال 6: ایک تھیلے میں 5 نیلی گیندیں اور 8 سبز گیندیں ہیں۔ ایک گیند کے منتخب ہونے کا احتمال معلوم کریں جب وہ:

(i) نیلی گیند ہو (ii) سبز گیند ہو (iii) سبز گیند نا ہو

حل: (i) نیلی گیند ہو

فرض کریں واقعہ "A" میں نیلی گیند ہو

نیلی گیندیں $= n(A) = 5$

کُل گیندیں $= n(S) = 5 + 8 = 13$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$
$$= \frac{5}{13}$$

پس نیلی گیند کے منتخب ہونے کا احتمال $\frac{5}{13}$ ہے۔

خود آزمائی!

کیا آپ نیلی گیند منتخب کرنے کا کمپلیمنٹ معلوم کر سکتے ہیں؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(ii) سبز گیند ہو

فرض کریں واقعہ B میں سبز گیند ہو

$$\text{سبز گیندیں} = n(B) = 8$$

$$\text{کُل گیندیں} = n(S) = 5 + 8 = 13$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{8}{13}$$

پس سبز گیند کے منتخب ہونے کا احتمال $\frac{8}{13}$ ہے۔

سوچیں!

اگر ایک شخص کے زندہ رہنے کا احتمال 0.75 ہو تو کیا آپ اِس واقعہ کا کمپلیمنٹ معلوم کر سکتے ہیں؟

(iii) سبز گیند نا ہو

اگر واقعہ "B'" میں سبز گیند نا ہو۔

$$P(B') = 1 - P(B)$$

$$= 1 - \frac{8}{13}$$

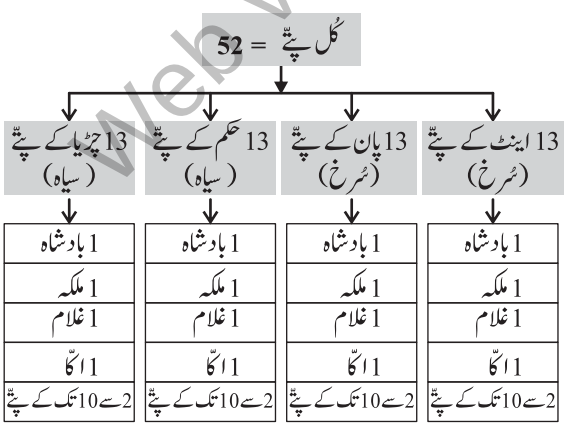
$$= \frac{13-8}{13} = \frac{5}{13}$$

پس سبز گیند منتخب نا ہونے کا احتمال $\frac{5}{13}$ ہے۔

مثال 7: تاش کے 52 پتوں (کارڈز) میں سے ایک پتّہ بے ترتیب منتخب کیا گیا۔ ایک پتّہ منتخب کرنے کا احتمال کیا ہے اگر:

(i) پان کا پتّہ ہو (ii) نا حکم نا ہی پان کا پتّہ ہو

حل: کُل پتّوں کی تعداد $= 52$ ؛ $n(S) = 52$



(i) پان کا پتّہ ہو

اگر واقعہ "A" میں پان کا پتّہ ہو۔

پان کے کُل پتّوں کی تعداد $= 13$ ؛ $n(A) = 13$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

پس پان کا پتّہ منتخب کرنے کا احتمال $\frac{1}{4}$ ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(ii) پتّہ نا حکم ناہی پان کا ہو

فرض کریں واقعہ "B" میں حکم اور پان کا پتّہ ہو۔

حکم اور پان کے پتّوں کی کُل تعداد = 26 ؛ $n(B) = 26$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$= \frac{26}{52}$$

$$= \frac{1}{2}$$

اگر واقعہ "B'" میں نا حکم اور ناہی پان کا پتّہ ہو۔

$$P(B') = 1 - P(B)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

پس نا حکم اور ناہی پان کا پتّہ منتخب کرنے کا احتمال $\frac{1}{2}$ ہے۔

مشق نمبر 13.1

1۔ ارشد ایک ڈائس پھینکتا ہے۔ جس کے اطراف میں L, M, N, O, P, U درج ہو۔ ڈائس پر صحیح حرف آنے کا احتمال کیا ہے؟

2۔ شازیہ نے ڈائس کا ایک جوڑا پھینکا۔ احتمال کیا ہو گا جب کہ:

(i) نقاط کا مجموعہ کم از کم 4 ہو۔ (ii) دونوں نقاط کے درمیان کا حاصل ضرب 5 سے 10 کے درمیان ہو۔

(iii) دونوں نقاط کے درمیان کا فرق 4 کے برابر ہو۔

(iv) پہلے ڈائس پر کم از کم 5 اور دوسرے ڈائس پر کم از کم 4 ہو۔

3۔ "MATHEMATICS" کے لفظ سے بے ترتیب ایک حرف تہجی منتخب کیا گیا ہے۔ احتمال معلوم کریں جب کہ وُہ:

(i) حرف علت ہو (ii) حرف صحیح ہو (iii) حرف E ہو

(iv) حرف A ہو (v) حرف M نہ ہو (vi) حرف T نہ ہو

4۔ اسلم ایک ڈائس پھینکتا ہے۔ ہندسہ 3 یا 4 حاصل ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟ نیز ہندسہ 3 یا 4 حاصل نا ہونے کا احتمال بھی معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

5۔ عبد الہادی نے کارڈز کو 1 تا 30 تک لیبل کیا اور ایک ڈبہ میں ڈال دیا۔ وہ ایک کارڈ بے ترتیب منتخب کرتا ہے۔ منتخب شدہ کارڈ کا احتمال کیا ہے جب کہ وُہ:

(i) عدد 25 ہو (ii) عدد 17 سے 22 کے درمیان ہو (iii) عدد کم از کم 20

(iv) عدد 27 اور 29 نا ہو (v) عدد 12 سے 15 کے درمیان نا ہو۔

6۔ عائشہ کے امتحان پاس کرنے کا احتمال 0.85 ہے۔ عائشہ کے امتحان پاس نا کرنے کا احتمال کیا ہو گا؟

7۔ تابش ایک سکہ اچھالتا ہے اور ایک ڈائس پھینکتا ہے۔ درج ذیل واقعات کا احتمال کیا ہو گا؟

(i) سکہ پر ٹیل اور ڈائس پر کم از کم ہندسہ 4 آئے۔

(ii) سکہ پر ہیڈ اور ڈائس پر ہندسے 2 اور 3 آئیں۔

(iii) سکہ پر ہیڈ اور ٹیل اور ڈائس پر ہندسہ 6 آئے۔

(iv) سکہ پر ٹیل نا آئے اور ڈائس پر ہندسہ 5 نا آئے۔

(v) سکہ پر ہیڈ اور ڈائس پر ہندسے 5 اور 2 نا آئیں۔

8۔ اچھی طرح ملائے گئے تاش کے 52 پتوں میں سے ایک پتّہ منتخب کیا گیا۔ احتمال کیا ہو گا اگر منتخب شدہ پتّہ:

(i) ملکہ ہو (ii) نا ملکہ اور نا ہی غلام ہو۔

9۔ تاش کے 52 پتوں میں سے ایک پتّہ منتخب کیا گیا۔ احتمال کیا ہو گا اگر منتخب شدہ پتّہ:

(i) غلام ہو (ii) اینٹ نا ہو۔

13.4 نسبتی تعدد متوقع احتمال کے طور پر

(Relative Frequency as an Estimate of Probability)

نسبتی تعدد ہمیں بتاتی ہے کہ کیسے ایک مخصوص واقعہ کل تعداد کے مقابلے میں کتنی مرتبہ پیش آتا ہے۔ اس کو درج ذیل طریقہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{نسبتی تعدد} = \frac{\text{مخصوص واقعہ کی تعداد}}{\text{کُل تعداد}} = \frac{x}{N}, \quad \text{جب کہ } N = \Sigma f$$

مثال 8: دیے گئے جدول کا نسبتی تعدد معلوم کریں۔

X	2	3	4	5	6	7	8
f	3	5	6	9	10	8	2

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حل:

X	f	نسبتی تعدد
2	3	$\frac{3}{43} = 0.07$
3	5	$\frac{5}{43} = 0.12$
4	6	$\frac{6}{43} = 0.14$
5	9	$\frac{9}{43} = 0.21$
6	10	$\frac{10}{43} = 0.23$
7	8	$\frac{8}{43} = 0.19$
8	2	$\frac{2}{43} = 0.04$
مجموعہ	$\Sigma f = 43$	

13.5 نسبتی تعدد کا حقیقی زندگی میں اطلاق
(Real Life Application of Relative Frequency)

مثال 9: نویں جماعت کے 80 طلبہ پر ایک سروے کیا گیا۔ اور ان کے پسندیدہ رنگ کے بارے میں پوچھا گیا۔ جوابات یہ ہیں۔

(i) سرخ رنگ: 23 طلبہ (ii) سبز رنگ: 15 طلبہ (iii) گلابی رنگ: 25 طلبہ

(iv) نیلا رنگ: 10 طلبہ (v) سفید رنگ: 7 طلبہ

ہر رنگ کا نسبتی تعدد معلوم کریں۔

ذہن میں رکھیں!
تمام نسبتی تعدد کا مجموعہ ہمیشہ 1 کے تقریباً برابر ہوتا ہے۔

یاد رکھیے!
نسبتی تعدد ایک اندازہ لگایا ہوا احتمال ہے۔ جب ایک تجربہ کو مقررہ تعداد تک دہرایا جاتا ہے۔

حل: طلبہ کی کُل تعداد = 80

(i) سرخ رنگ کا نسبتی تعدد $= \frac{23}{80} = 0.29$

اس کا مطلب ہے کہ 29% طلبہ سرخ رنگ کو ترجیح دیتے ہیں۔

(ii) سبز رنگ کا نسبتی تعدد $= \frac{15}{80} = 0.19$

اس کا مطلب ہے کہ 19% طلبہ سبز رنگ کو ترجیح دیتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(iii) گلابی رنگ کا نسبتی تعدد $= \frac{25}{80} = 0.31$

اس کا مطلب ہے کہ 31% طلبہ گلابی رنگ کو ترجیح دیتے ہیں۔

(iv) نیلے رنگ کا نسبتی تعدد $= \frac{10}{80} = 0.12$

اس کا مطلب ہے کہ 12% طلبہ نیلے رنگ کو ترجیح دیتے ہیں۔

(v) سفید رنگ کا نسبتی تعدد $= \frac{7}{80} = 0.09$

اس کا مطلب ہے کہ 9% طلبہ سفید رنگ کو ترجیح دیتے ہیں۔

مثال 10: عبدالرحمن نے 100 نمبروں میں سے مختلف مضامین میں مختلف نمبر حاصل کیے۔ تفصیل درج ذیل ہے۔

مضمون	اُردو	انگریزی	اسلامیات	ریاضی	سائنس	کمپیوٹر سائنس
حاصل کردہ نمبرز	75	80	72	95	81	85

مندرجہ بالا مواد کا نسبتی تعدد معلوم کریں۔

حل:

مضمون	حاصل کردہ نمبرز	نسبتی تعدد
اُردو	75	$\frac{75}{488} = 0.15$
انگریزی	80	$\frac{80}{488} = 0.16$
اسلامیات	72	$\frac{72}{488} = 0.15$
ریاضی	95	$\frac{95}{488} = 0.19$
سائنس	81	$\frac{81}{488} = 0.17$
کمپیوٹر سائنس	85	$\frac{85}{488} = 0.17$
مجموعہ	$\Sigma f = 488$	

خود آزمائی!

ایک سکول کے 200 طلبہ میں سے 80 کرکٹ، 50 فٹ بال اور 25 والی بال کھیلتے ہیں جب کہ 45 کوئی کھیل نہیں کھیلتے۔ کیا آپ ان طلبہ کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں جو کوئی کھیل نہیں کھیلتے اور ان طلبہ کا نسبتی تعدد معلوم کر سکتے ہیں جو کرکٹ کھیلتے ہیں؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

13.6 متوقع تعدد (Expected Frequence)

برائے اساتذہ!
طلبہ کو متوقع تعدد کے تصور کو احتمال کے اندازہ کے طور پر مختلف روز مرہ زندگی کے مسائل کو استعمال کرتے ہوئے واضح کریں۔

متوقع تعدد ایسا پیمانہ ہے جس سے اندازا لگایا جاتا ہے کہ احتمال پر منحصر کوئی واقعہ کتنی مرتبہ پیش آنا چاہیے۔

واقعہ کا احتمال × کل تجربات کی تعداد = متوقع تعدد

$$= N \times P(A)$$

مثال 11: چھے ڈائس 50 مرتبہ پھینکے گئے۔ مختلف تعداد میں 6 آنے کے احتمال درج ذیل دیے گئے ہیں۔ درج ذیل مواد کی متوقع تعدد معلوم کریں۔

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	0.09	0.10	0.12	0.24	0.10	0.20	0.15

ہر چھکے کے وقوع پذیر ہونے کے متوقع تعدد معلوم کریں۔

حل:

چھے کی تعداد (x)	$P(x)$	متوقع تعدد $= N \times P(x) = 50 \times P(x)$
0	0.09	$50 \times 0.09 = 4.5$
1	0.10	$50 \times 0.10 = 5$
2	0.12	$50 \times 0.12 = 6$
3	0.24	$50 \times 0.24 = 12$
4	0.10	$50 \times 0.10 = 5$
5	0.20	$50 \times 0.20 = 10$
6	0.15	$50 \times 0.15 = 7.5$

13.7 متوقع تعدد کا حقیقی زندگی میں اطلاق

(Real Life Application on Expected Frequency)

مثال 12: ایک ڈائس 300 مرتبہ اُچھالا گیا۔ ہندسہ 1 یا 6 حاصل ہونے کی اوسط تعداد معلوم کریں۔

یاد رکھیے!
تمام متوقع تعدد کا مجموعہ ہمیشہ ایک مقررہ تعداد کے تجربات کے تقریباً برابر ہوتا ہے۔

حل: جب ایک ڈائس پھینکا جاتا ہے تو "S" سیمپل اسپیس ہوتی ہے۔

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad ; \quad n(S) = 6$$

فرض کریں واقعہ "B" میں ہندسہ 1 یا 6 آئے۔

$$B = \{1, 6\} \quad ; \quad n(B) = 2$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

پس $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

اس لیے $E(B) = N \times P(B)$

$= 300 \times \frac{1}{3} = 100$

پس ہندسہ 1 یا 6 حاصل ہونے کی اوسط تعداد 100 ہے۔

مثال 13: اگر خراب بولٹ کا احتمال 0.3 ہو تو کُل 800 بولٹ میں سے غیر ناقص بولٹ کی تعداد معلوم کریں۔

حل: خراب بولٹ کا احتمال $= 0.3$

غیر ناقص بولٹ کا احتمال $= 1 - 0.3 = 0.7$

غیر ناقص بولٹ کی تعداد $= 800 \times 0.7 = 560$

پس غیر ناقص بولٹ کی تعداد 560 ہو گی۔

مشق نمبر 13.2

1۔ ایک محقق نے روسی فوج کی ہارس ریکس سے ہونے والی ہلاکتوں کی تعداد کا مواد جمع کیا۔ جدول درج ذیل ہے۔

ہلاکتوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6
تعداد	60	50	87	40	32	15	10

دیے گئے مواد کی نسبتی تعدد معلوم کریں۔

2۔ 750 نمونوں میں سے ناقص مصنوعات کا جدول درج ذیل دیا گیا ہے۔ دیے گئے جدول کے لیے نسبتی تعدد معلوم کریں۔

ناقص مصنوعات کی تعداد فی نمونہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
نمونوں کی تعداد	120	140	94	85	105	50	40	66	50

3۔ واقفیت عامہ پر ایک کوئز کا مقابلہ منعقد کیا گیا۔ سوالات کے 100 سیٹوں کے لیے 5 سوالات میں سے درست جوابات کی تعداد ذیل میں دی گئی ہے۔

X	0	1	2	3	4	5
f	10	23	15	25	18	9

دیے گئے مواد کے لیے نسبتی تعدد معلوم کریں۔

Web Version of PCTB Textbook

NOT FOR SALE-PESRP

4۔ ایک جماعت کے 108 طلبہ سے ایک سروے کیا گیا۔ اور ان کے پسندیدہ کھانے کے بارے میں پوچھا گیا۔ جوابات درج ذیل ہیں۔

کھانے کی اشیا کا نام	بریانی	تازہ جوس	مُرغی	باربی کیو	مٹھائی
طلبہ کی تعداد	40	07	21	15	25

(i) کتنے فی صد طلبہ بریانی کو پسند کرتے ہیں؟

(ii) کتنے فی صد طلبہ مرغی پسند کرتے ہیں؟

(iii) طلبہ نے کون سا کھانا سب سے کم پسند کیا؟

(iv) طلبہ کون سے کھانے کو سب سے زیادہ ترجیح دیتے ہیں؟

5۔ دو ڈائس کو 500 دفعہ پھینکا گیا، اگر مجموعہ 8 سے زیادہ ہو تو متوقع تعدد کیا ہو گی؟

6۔ اگر ایک شخص تین سکوں کو ایک دفعہ اُچھالے اور کم از کم 2 ہیڈ حاصل کرے تو اسے 120 روپے انعام ملنے کی کیا توقع ہو گی؟

7۔ اگر ایک تجربہ 200 بار دہرایا جاتا ہے۔ تو دیے گئے مواد کی متوقع تعدد معلوم کریں۔

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	0.11	0.21	0.17	0.18	0.09	0.17	0.07

8۔ 6 ڈائس اُچھالتے ہوئے 5 مرتبہ چھکا آنے کا احتمال $\frac{2}{5}$ ہے۔ ڈائس 200 مرتبہ پھینکے گئے ہیں۔ آپ کتنی بار توقع کریں گے کہ یہ 5 چھکے دکھائے گا؟

جائزہ مشق 13

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) سیمپل اسپیس کا ہر رکن کہلاتا ہے:

(a) واقعہ (b) تجربہ (c) سیمپل نقطہ (d) نتائج

(ii) ایک نتیجہ جو اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ ہم کتنی بار واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کی توقع کرتے ہیں کہلاتا ہے:

(a) نتائج (b) موافق نتیجہ (c) سیمپل اسپیس (d) سیمپل نقطہ

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(iii) ہمیں کس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک مخصوص واقعہ کُل تعداد کے مقابلے میں کتنی بار آتا ہے؟

(a) متوقع تعداد (b) نسبتی تعداد کا مجموعہ (c) نسبتی تعداد (d) تعداد

(iv) کسی واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا متوقع احتمال اس طرح بھی جانا جاتا ہے۔

(a) نسبتی تعداد (b) متوقع تعداد (c) حقیقی جماعتی حدود (d) متوقع تعداد کا مجموعہ

(v) تمام متوقع تعداد کا مجموعہ کس مقررہ عدد کے برابر ہے؟

(a) کُل تجربات (b) متوقع تعداد

(c) نتائج (d) واقعات

(vi) کسی خاص واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا امکان کہلاتا ہے:

(a) سیمپل اسپیس (b) متوقع احتمال (c) احتمال (d) متوقع تعداد

(vii) ایسا واقعہ جو رونما ہوگا اور اِس کے ہونے کا امکان زیادہ ہو کہلاتا ہے:

(a) مساوی ممکنہ واقعہ (b) ممکنہ واقعہ (c) غیر ممکنہ واقعہ (d) یقینی واقعہ

(viii) جب چار ڈائس پھینکے جاتے ہیں تو سیمپل اسپیس کی کُل تعداد معلوم کریں۔

(a) 6^2 (b) 6^3 (c) 6^4 (d) 6^6

(ix) اگر ڈائس کا جوڑا پھینکا جائے تو دو بار 2 آنے کا احتمال کیا ہوگا؟

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{5}{6}$ (d) $\frac{1}{36}$

(x) تاش کے 52 پتوں میں سے ایک پتّہ منتخب کیا، غلام اور بادشاہ نا آنے کا کیا احتمال ہوگا؟

(a) $\frac{2}{13}$ (b) $\frac{11}{13}$ (c) $\frac{2}{52}$ (d) $\frac{11}{52}$

2۔ درج ذیل کی وضاحت کریں۔

(i) نسبتی تعداد (ii) متوقع تعداد

3۔ ایک صراحی میں 10 سرخ گیندیں، 5 سبز گیندیں اور 8 نیلی گیندیں ہیں۔

بے ترتیب چناؤ کرتے ہوئے احتمال معلوم کریں:

(i) سبز گیند ہو (ii) سُرخ گیند ہو (iii) نیلی گیند ہو

(iv) سرخ گیند نا ہو (v) سبز گیند نا ہو

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

4۔ تین سکّے ایک ساتھ اُچھالے گئے۔ احتمال معلوم کریں اگر:

(i) تین ہیڈ ہوں (ii) کم از کم دو ٹیل ہوں

(iii) کم از کم دو ہیڈ نا ہوں (iv) دو ہیڈ نا ہوں

5۔ تاش کے 52 پتّوں میں سے ایک پتّہ منتخب کیا گیا۔ احتمال کیا ہو گا اگر:

(i) سرخ رنگ کا بادشاہ اور غلام ہو (ii) 2 چڑیا اور حکم کا 2 نا ہو۔

6۔ چھے سکّے 600 بار اُچھالے گئے۔ نیچے دیے گئے جدول میں ٹیل کے وقوع پذیر ہونے کا ریکارڈ دیا گیا ہے۔

ٹیل کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6
تعدد	110	90	105	80	76	123	16

دیے گئے جدول کا نسبتی تعدد معلوم کریں۔

7۔ 25 اشیا پر مشتمل لاٹ میں سے 18 اشیا ناقص ہیں۔

غیر ناقص اشیا کا نسبتی تعدد معلوم کریں اور غیر ناقص اشیا کی متوقع تعدد بھی معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP