یونٹ
11

لوسائی اور بناوٹ
(Loci and Construction)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- دو اضلاع اور ان کے درمیانی زاویہ دیے جانے پر مثلث بنا سکیں۔
- ایک ضلع اور دو زاویے دیے جانے پر مثلث بنا سکیں۔
- دو اضلاع اور اِن میں سے ایک کے متقابلہ زاویہ دیے جانے پر مثلث بنا سکیں۔
- دی گئی مثلث کے زاویہ کا ناصف، عمودی ناصف، وسطانیہ، ارتفاع کھینچ سکیں اور ہم آہنگی کی تصدیق کر سکیں۔
- لوسائی اور نقاط کے سیٹ کے لیے لوسائی کے تقاطع کو دو رُخی سطح پر کھینچ سکیں جو کہ:
  - دیے گئے نقطہ سے مقررہ فاصلے پر ہو۔
  - دیے گئے خط سے مقررہ فاصلہ پر ہو۔
  - دو دیے گئے نقاط سے مساوی فاصلے پر ہو۔
  - دیے گئے دو متقاطع خطوط سے مساوی فاصلے پر ہو۔
- لوسائی اور لوسائی کے تقاطع کے استعمال سے حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

لوکس (لوسائی کی جمع) نقاط کا ایسا مجموعہ ہے جو ایک مقررہ قاعدے کی پیروی کرتا ہے۔ لوسائی نمونہ کو سمجھنے اور پیشن گوئی کرنے میں مفید ہے۔ مثال کے طور پر دو افراد جو کمرے میں ایک دُوسرے سے مقررہ فاصلے پر چل رہے ہیں۔ اِن کے ممکنہ مقامات وہ ہیں جہاں ہر شخص ایک مخصوص راستہ بناتا ہے۔ لوسائی کے مطالعہ سے ہم پیشن گوئی کر سکتے ہیں کہ ایک شخص کسی بھی وقت دُوسرے سے مل سکتا ہے۔ لوسائی کے تصوّر کو استعمال کرتے ہوئے ہم سٹیلائٹ کی زمین کے گرد چکر لگانے کی پیش گوئی کر سکتے ہیں کہ وہ کس خاص وقت پر کہاں ہوں گے۔ یہ مواصلات اور GPS ٹیکنالوجی جیسے شعبوں میں مدد کرتا ہے۔ لوسائی دو رُخی سطحوں میں مثلث، دائرہ، متوازی خطوط، عمودی ناصف اور زاویہ کے ناصف ہوتے ہیں۔

یاد رکھیے!

اِضلاع کے حوالے سے مثلث کی تین قسمیں ہیں:

مختلف الاضلاع مثلث (Scalene triangle):
تمام اضلاع مختلف لمبائیوں کے ہوتے ہیں۔

متساوی الساقین مثلث (Isosceles triangle):
دو اضلاع لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔

مساوی الاضلاع مثلث (Equilateral triangle):
تمام اضلاع لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔

زاویوں کے حوالے سے مثلث کی تین اقسام ہیں:

حادہ زاویہ مثلث (Acute angled triangle):
تمام زاویے 90° سے کم ہوتے ہیں۔

منفرجہ زاویہ مثلث (Obtuse angled triangle):
ایک زاویہ 90° سے زیادہ پیمائش کا ہوتا ہے۔

قائمۃ الزاویہ مثلث (Right angled triangle):
ایک زاویہ 90° کے برابر ہوتا ہے۔

11.1 مثلثان کی بناوٹ (Construction of Triangles)

مثلث ایک بند شکل ہے جس کے تین اضلاع اور تین زاویے ہوتے ہیں۔ ہم درج ذیل صورتوں میں مثلث بناتے ہیں۔

(a) جب تینوں اضلاع کی پیمائش دی گئی ہو۔
(b) جب دو اضلاع اور اِن کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو۔
(c) جب ایک ضلع اور دو زاویوں کی پیمائش دی گئی ہو۔
(d) جب دو اضلاع اور اُن میں سے ایک کے متقابلہ زاویے کی پیمائش دی گئی ہے۔

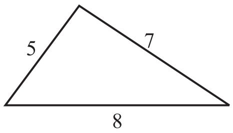
NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مسئلہ غیر مساوی مثلث

مثلث کے کسی بھی دو اضلاع کا مجموعہ ہمیشہ تیسرے ضلع کی پیائش سے بڑا ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر ہم دی گئی شکل میں دیکھ سکتے ہیں کہ اگر ہم کسی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کو جمع کریں تو یہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑی ہوگی۔ یعنی

$8 < 7 + 5$، $7 < 8 + 5$ اور $5 < 8 + 7$



اہم حقیقت

- ایک متساوی الاضلاع مثلث، ایک حادہ زاویہ مثلث ہوتی ہے۔
- ایک قائمۃ الزاویہ مثلث، متساوی الاضلاع مثلث نہیں ہو سکتی۔

(a) مثلث بنائیں جب کہ تین اضلاع کی پیائش دی گئی ہو

مثال 1: ایک مثلث بنائیں جس کے اضلاع کی پیائش 5.3 cm، 5.9 cm اور 6.2 cm ہو۔

حل: **مدارج عمل:**

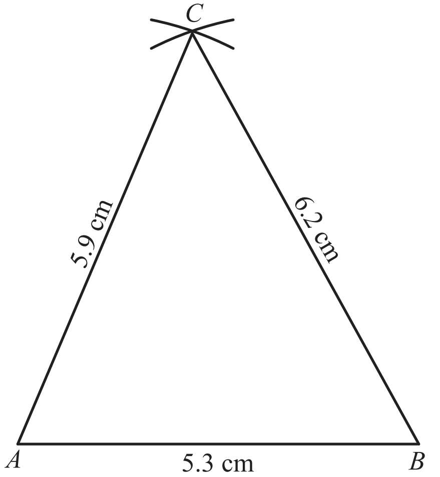
(i) ایک قطعہ خط AB، 5.3 cm کھینچیں۔

(ii) پرکار کی مدد سے A اور B کو مرکز مان کر بالترتیب 5.9 cm اور 6.2 cm رداس کی دو قوسیں کھینچیں۔

(iii) یہ دونوں قوسیں ایک دُوسرے کو نقطہ C پر قطع کرتی ہیں۔

(iv) A اور B کو C سے ملائیں۔

پس ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔



نوٹ:

زاویے 30°، 45°، 60°، 75°، 90°، 105°، 120°، 135° اور 150° پرکار کی مدد سے بنائے جاسکتے ہیں۔ جب کہ دیگر زاویے پروٹریکٹر سے کھینچے جاتے ہیں۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

جب تین اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہوں تو کسی بھی لمبائی کو پہلے کھینچا جاسکتا ہے۔

(b) مثلث بنائیں جب کہ دو اضلاع کی پیائش اور اُن کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو

مثال 2: ایک مثلث BCD بنائیں جس میں دو اضلاع کی لمبائیاں 5.5 cm اور 4.2 cm ہوں اور اُن کا درمیانی زاویہ 60° ہو۔

حل: **مدارج عمل:**

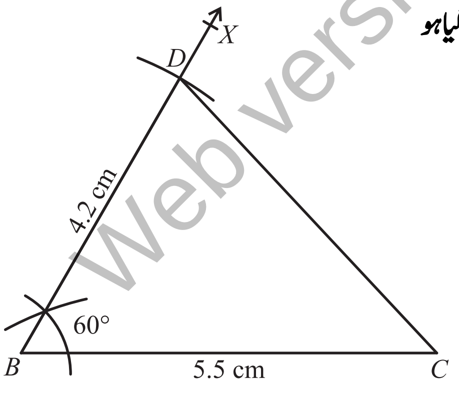
(i) ایک قطعہ خط BC کھینچیں جس کی لمبائی 5.5 cm ہو۔

(ii) نقطہ B پر پُرکار کی مدد سے 60° کا زاویہ کھینچیں اور اِس زاویہ سے شعاع BX کھینچیں۔

(iii) نقطہ B کو مرکز مان کر 4.2 cm رداس کی ایک قوس کھینچیں جو شعاع BX کو نقطہ D پر قطع کرے۔

(iv) C اور D کو ملائیں۔

پس ΔBCD مطلوبہ مثلث ہے۔



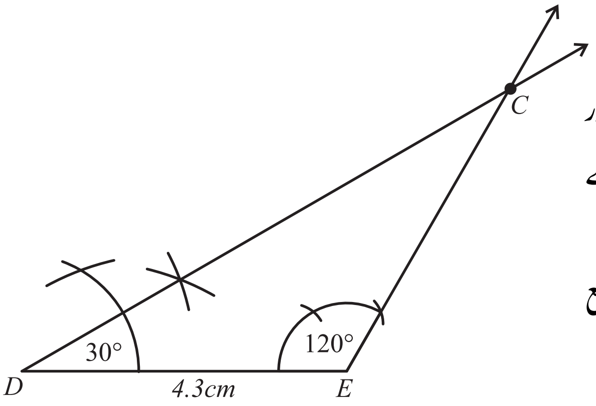
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(c) مثلث بنائیں جب کہ ایک ضلع کی لمبائی اور دو زاویوں کی پیمائش دی گئی ہو

مثال 3: ایک مثلث CDE بنائیں جب $m\overline{DE} = 4.3\text{ cm}$ ، $m\angle D = 30°$ اور $m\angle E = 120°$ ہو۔

حل: **مدارج عمل:**



(i) $m\overline{DE} = 4.3\text{ cm}$ کھینچیں۔

(ii) پُرکار کی مدد سے نقطہ D اور E پر بالترتیب $30°$ اور $120°$ کے زاویے کھینچیں۔ دونوں زاویوں کے راسوں D اور E سے دو شعاعیں کھینچیں۔

(iii) یہ دونوں شعاعیں ایک دُوسرے کو نقطہ C پر قطع کرتی ہیں۔

لہٰذا ΔCDE مطلوبہ مثلث ہے۔

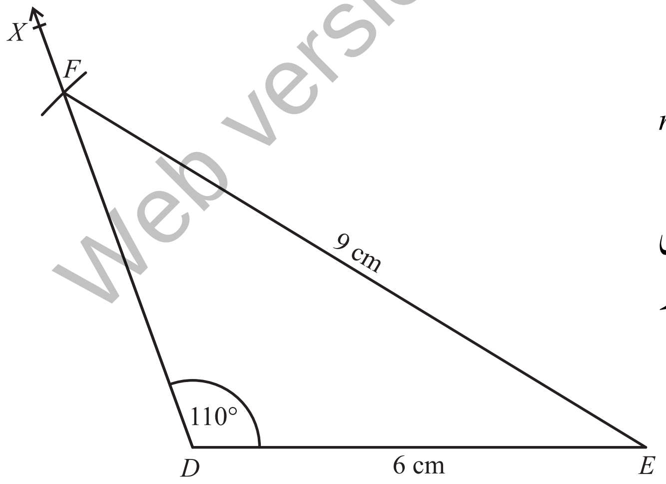
(d) مثلث بنائیں جب کہ دو اضلاع اور اُن میں سے ایک کے مخالف زاویے کی پیمائش دی گئی ہو

دی گئی دو صورتوں پر غور کریں:

(i) اگر ایک زاویہ کی پیمائش $90°$ سے زیادہ یا اِس کے برابر ہو۔ (ii) اگر زاویہ کی پیمائش $90°$ سے کم ہو۔

مثال 4: ایک مثلث DEF بنائیں جب $m\overline{DE} = 6\text{ cm}$ ، $m\angle D = 110°$ اور $m\overline{EF} = 9\text{ cm}$ ہو۔

حل: **مدارج عمل:**



(i) $m\overline{DE} = 6\text{ cm}$ کھینچیں۔

(ii) پروٹریکٹر کی مدد سے $m\angle D = 110°$ بنائیں اور اِس زاویہ سے $\overrightarrow{DX}$ کھینچیں۔

(iii) نقطہ E کو مرکز مان کر 9 cm رداس کی ایک قوس کھینچیں جو $\overrightarrow{DX}$ کو نقطہ F پر قطع کرے۔

(iv) E اور F کو ملائیں۔

لہٰذا ΔDEF مطلوبہ مثلث ہے۔

اگر دیا گیا مخالف زاویہ منفرجہ ہو تو صرف ایک مثلث ممکن ہوتی ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 5: مثلثان DEF اور ′DEF بنائیں جب $m\overline{DE} = 6\text{ cm}$ ، $m\angle D = 30^\circ$ اور $m\overline{EF} = 3.6\text{ cm}$ ہو۔

حل: **مدارج عمل:**

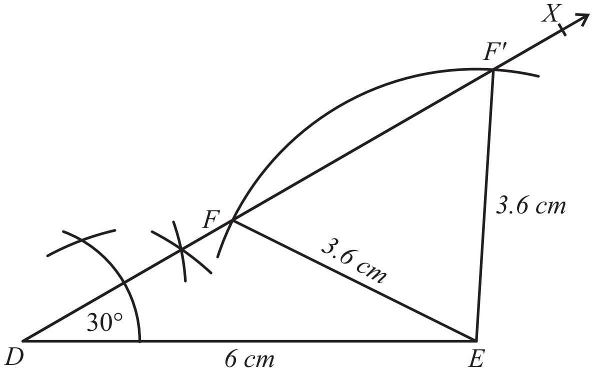
(i) $m\overline{DE} = 6\text{ cm}$ کھینچیں۔

(ii) پُرکار کی مدد سے نقطہ D پر °30 کا زاویہ بنائیں اور اس پر $\overrightarrow{DX}$ کھینچیں۔

(iii) نقطہ E کو مرکز مان کر 3.6 cm رداس کی ایک قوس کھینچیں۔

(iv) یہ قوس $\overrightarrow{DX}$ کو دو نقاط F اور ′F پر قطع کرتی ہے۔

(v) F اور ′F کو E سے ملائیں۔



اِس طرح ہمیں دو مثلثان DEF اور ′DEF حاصل ہوئی ہیں۔ یہ مبہم (غیر واضح) صورت کہلاتی ہے۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

مبہم صورت SSA (ض۔ض۔ز) میں اُس وقت وقوع پذیر ہوتی ہے۔ جب ہمیں دو اضلاع اور اِن میں سے ایک کا مخالف زوایہ °90 سے کم دیا جاتا ہے۔

مثال 6: اوپر دی گئی مثال کو اگر ہم اِس طرح لیں:

(a) $m\overline{EF} = 3\text{ cm}$ (b) $m\overline{EF} = 2.5\text{ cm}$

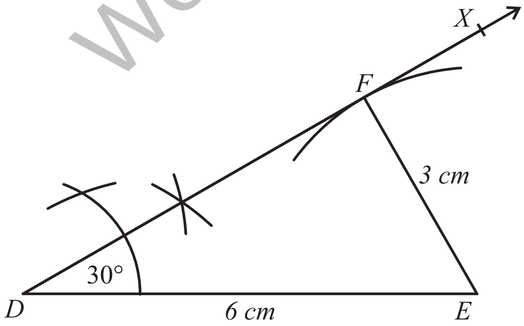
مدارج عمل:

مثال 5 کے اقدام (i) اور (ii) کو دہرائیں۔

صورت (a)

(i) نقطہ E کو مرکز مان کر 3 cm رداس کی ایک قوس کھنچیں جو کہ $\overrightarrow{DX}$ کو نقطہ F پر قطع کرتی ہے۔

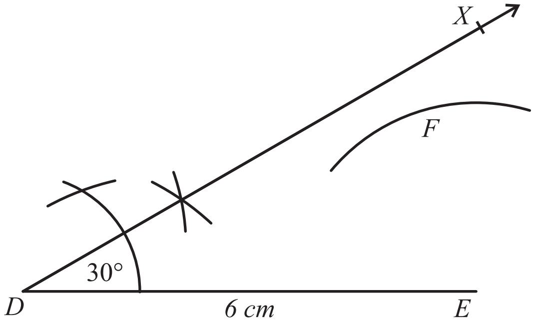
(ii) E کو F سے ملائیں۔ یہاں $\overline{EF}$ ، $\overrightarrow{DX}$ پر عمود ہو گا۔



پس ΔDEF مطلوبہ مثلث ہے جو کہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

صورت (b)



(i) اگر ہم $m\overline{EF} = 2.5$ cm، 3 cm سے کم لیں اور نقطہ E کو مرکز مان کر 2.5 cm رداس کی ایک قوس لگائیں۔

(ii) یہ قوس $\overrightarrow{DX}$ کو قطع نہیں کرتی۔

لہٰذا اِس صورت میں کوئی مثلث نہیں بن سکتی۔

> **یاد رکھیے!**
> جب حادہ زاویہ دیا جاتا ہے تو ہم تین صورتوں پر غور کرتے ہیں۔
> - اگر $m\overline{EF} > 3$ cm ہو تو دو مثلثان ممکن ہوتی ہے۔
> - اگر $m\overline{EF} < 3$ cm ہو تو کوئی مثلث ممکن نہیں ہوتی ہے۔
> - اگر $m\overline{EF} = 3$ cm ہو تو صرف ایک مثلث ممکن ہوتی ہے۔

11.2 مثلث کے عمودی ناصف اور وسطانیے
(Perpendicular Bisectors and Medians of a Triangle)

عمودی ناصف (Perpendicular Bisector): عمودی ناصف ایک ایسا خط ہے جو ایک قطعہ خط کو قائمہ زاویہ پر قطع کرتا ہے اور اِس کو دو برابر حصّوں میں تقسیم کرتا ہے۔ دُوسرے الفاظ میں، یہ قطعہ خط کو اس کے وسطی نقطہ (Mid point) پر قطع کرتا ہے اور اِس کے ساتھ قائمہ زاویہ بناتا ہے۔

وسطانیہ (Median): مثلث کا وسطانیہ ایک ایسا قطعہ خط ہوتا ہے جو مثلث کے کسی راس کو مخالف ضلع کے درمیانی نقطہ سے ملاتا ہے۔

ہم نقطہ (Point of Concurrency): ہم نقطہ وہ واحد مقام ہے۔ جہاں کسی ہندسی شکل میں تین یا زیادہ خطوط، شعاعیں یا قطعات خط آپس میں قطع کرتے یا ملتے ہیں۔ یہ تصوّر عام طور پر مثلث میں اِستعمال ہوتا ہے۔ جہاں متعدد اہم قسم کے ہم آہنگی نقاط موجود ہوتے ہیں۔

مثال 7: مثلث EFG کے عمودی ناصف اور ان کے وسطانیے کھینچیں۔ جس میں $m\overline{EF} = 5$ cm، $m\overline{FG} = 2.5$ cm اور $m\overline{EG} = 4.3$ cm ہو۔

حل: پہلے ہم عمودی ناصف اور پھر وسطانیے کھینچیں گے۔

مدارجِ عمل:

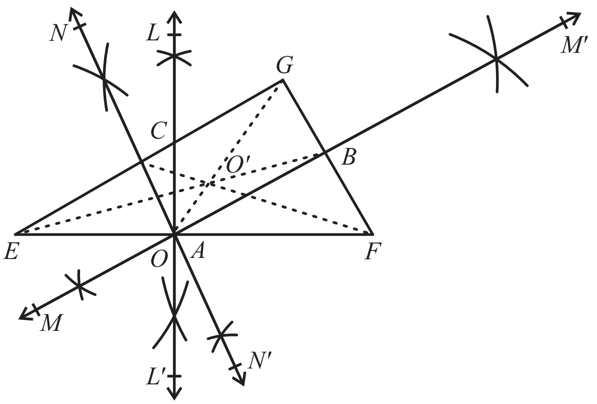
(i) مثلث GEF بنائیں جیسا کہ پچھلی مثالوں میں بیان کیا گیا ہے۔

(ii) نقطہ E کو مرکز مان کر $m\overline{EF}$ کے نصف سے زیادہ رداس کی دو قوسیں، ایک $\overline{EF}$ کے اوپر اور ایک $\overline{EF}$ کے نیچے کھینچیں۔

(iii) اِس طرح نقطہ F کو مرکز مان کر $m\overline{EF}$ کے نصف سے زیادہ رداس کی دو قوسیں، ایک $\overline{EF}$ کے اوپر اور ایک $\overline{EF}$ کے نیچے کھینچیں۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook



(iv) اقدام (ii) اور (iii) کی اِن قوسوں کے نقاط تقاطع سے ایک خط کھینچیں جس سے ہمیں نقطہ A پر ضلع $\overline{EF}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{LL'}$ حاصل ہوتا ہے۔

(v) B اور C پر بالترتیب اضلاع FG اور EG کے دو مزید عمودی ناصف $\overleftrightarrow{MM'}$ اور $\overleftrightarrow{NN'}$ کھینچیں۔

(vi) نقطہ G کو مخالف وسطی نقطہ A سے ملائیں تا کہ $\overline{GA}$ وسطانیہ حاصل ہو۔

(vii) نقطہ F کو مخالف وسطی نقطہ C سے ملائیں تا کہ $\overline{FC}$ وسطانیہ حاصل ہو اور نقطہ E کو مخالف وسطی نقطہ B سے ملائیں تا کہ $\overline{EB}$ وسطانیہ حاصل ہو۔ پس، ہم دیکھتے ہیں کہ عمودی ناصف $\overleftrightarrow{LL'}$، $\overleftrightarrow{MM'}$ اور $\overleftrightarrow{NN'}$ نقطہ O پر ہم آہنگ ہیں اور وسطانیے $\overline{GA}$، $\overline{EB}$ اور $\overline{FC}$ نقطہ O پر ہم آہنگ ہیں۔

محاصرہ مرکز (Circumcentre)

مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف کے ہم نقطہ کو محاصرہ مرکز کہتے ہیں۔

مرکز نما (Centroid)

مثلث کے وسطانیوں کے ہم نقطہ کو مثلث کا مرکز نما کہا جاتا ہے۔

11.3 مثلث کے زاویہ کا ناصف (Angle Bisector of a Triangle)

مثلث کے زاویہ کا ناصف وہ خط یا شعاع ہوتی ہے جو ایک زاویہ کو دو برابر حصّوں میں تقسیم کر کے دو چھوٹے زاویے بناتی ہے۔ جو متماثل ہوتے ہیں (ہر ایک کی پیمائش اصل زاویہ کی نصف مقدار ہوتی ہے)۔

مثال 8: مثلث FGH کے زاویوں کے ناصف کھینچیں اگر $m\overline{FG} = 5.2\text{cm}$ ، $m\overline{GH} = 4.1\text{cm}$ اور $m\angle FGH = 120°$ ہو۔

حل: پہلے ہم مثلث FGH بناتے ہیں پھر اس کے ناصف زاویے کھینچتے ہیں۔

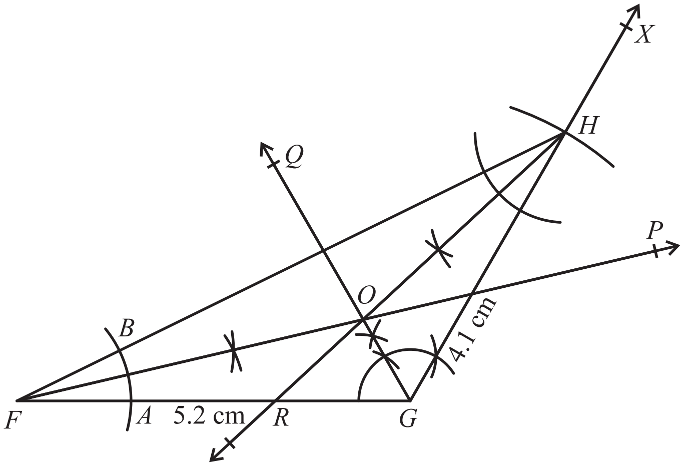
مدارج عمل:

(i) دی گئی لمبائیوں اور زاویے کے مطابق ΔFGH بنائیں۔

(ii) نقطہ F کو مرکز مان کر مناسب رداس کی قوس کھینچیں جو $\overline{FG}$ اور $\overline{FH}$ کو بالترتیب نقاط A اور B پر قطع کرے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



(iii) نقاط A اور B کو مراکز مان کر مناسب رداس کی دو قوسیں کھینچیں۔

(iv) نقطہ F سے ایک شعاع کھینچیں جو قدم (iii) میں قوسوں کے نقطہ تقاطع سے گزرے جو زاویہ F کا مطلوبہ ناصف $\overrightarrow{FP}$ ہے۔

(v) دو مزید زاویوں G اور H پر بالترتیب ناصف $\overrightarrow{GQ}$ اور $\overrightarrow{HR}$ کھینچیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ تمام زاویوں کے ناصف $\overrightarrow{FP}$ ، $\overrightarrow{GQ}$ اور $\overrightarrow{HR}$ ایک نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ یعنی مثلث کے ناصف زاویے ہم آہنگ ہیں۔

محصور مرکز (Incentre)

مثلث کے زاویوں کے ناصف جس نقطہ پر ملتے ہیں اُسے مثلث کا محصور مرکز کہا جاتا ہے۔

11.4 مثلث کے ارتفاع (اونچائی) (Altitudes of Triangle)

ارتفاع ایک ایسی شعاع ہے جو مثلث کے راس سے اِس کے مخالف ضلع پر عمود ہوتی ہے۔ مثلث کے تین ارتفاع ہوتے ہیں۔ جو ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں یعنی مثلث کے ارتفاع ہم آہنگ ہوتے ہیں۔

عمودی مرکز (Orthocentre)

مثلث کے ارتفاعات کا ہم آہنگ نقطہ عمودی مرکز کہلاتا ہے۔

مثال 9: مثلث GHI بنائیں جس میں $m\overline{GH} = 5.7\ cm$ ، $m\angle G = 68°$ اور $m\angle H = 50°$ ہو ثابت کریں کہ مثلث GHI کے ارتفاع کا ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

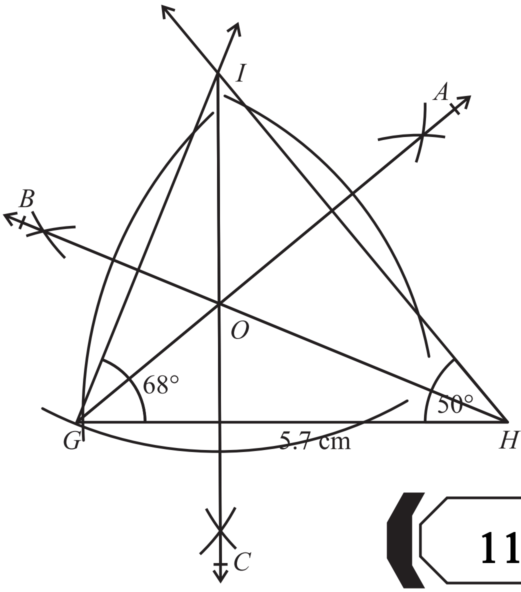
حل: پہلے ہم دی گئی پیمائشوں کو استعمال کرتے ہوئے مثلث GHI بناتے ہیں۔ پھر مثلث کے ارتفاع کھینچتے ہیں۔

مدارج عمل:

(i) دی گئی پیمائشوں کے مطابق مثلث GHI بنائیں۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook



(ii) نقطہ G سے مخالف ضلع HI پر ایک عمود $\overrightarrow{GA}$ کھینچیں۔

(iii) دو مزید عمود $\overrightarrow{HB}$ اور $\overrightarrow{IC}$ کھینچیں۔ پہلا عمود نقطہ H سے ضلع GI پر اور دوسرا نقطہ I سے مخالف ضلع GH پر ہے۔

اِس طرح $\overrightarrow{GA}$ ، $\overrightarrow{HB}$ اور $\overrightarrow{IC}$ مثلث GHI کے ارتفاع ہیں اور یہ ایک ہی نقطہ "O" پر قطع کرتے ہیں۔ یعنی مثلث GHI کے ارتفاع ہم نقطہ ہیں۔

مشق 11.1

1۔ دی گئی پیمائشوں سے ΔABC بنائیں اور تصدیق کریں کہ مثلث کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں:

(i) $m\overline{AB} = 5$ cm ، $m\overline{BC} = 6$ cm اور $m\overline{AC} = 7$ cm

(ii) $m\overline{AB} = 7.1$ cm ، $m\angle B = 135°$ اور $m\overline{BC} = 6.5$ cm

2۔ درج ذیل پیمائشوں سے ΔLMN بنائیں اور تصدیق کریں کہ مثلث کے وسطانیے ہم نقطہ ہوتے ہیں:

(i) $m\overline{LM} = 4.9$ cm ، $m\angle L = 51°$ اور $m\angle M = 38°$

(ii) $m\overline{MN} = 4.8$ cm ، $m\angle N = 30°$ اور $m\overline{LM} = 8.1$ cm

3۔ تصدیق کریں کہ درج ذیل پیمائشوں سے ΔABC کے زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

(i) $m\overline{AB} = 4.5$ cm ، $m\angle A = 45°$ اور $m\overline{AC} = 5.3$ cm

(ii) $m\overline{AB} = 6$ cm ، $m\angle A = 150°$ اور $m\angle B = 60°$

4۔ مثلث DEF کی پیمائشیں دی گئی ہیں $m\overline{DE} = 4.8$ cm ، $m\overline{EF} = 4$ cm اور $m\angle E = 45°$ ۔ مثلث DEF کے عمود کھینچیں اور عمودی مرکز معلوم کریں۔

5۔ درج ذیل مثلثان بنائیں اور معلوم کریں کہ کیا کوئی مبہم صورت موجود ہے؟

(i) ΔBCD: $m\overline{BC} = 5$ cm ، $m\angle B = 62°$ اور $m\overline{CD} = 4.7$ cm

(ii) ΔKLM: $m\overline{LM} = 6$ cm ، $m\angle M = 42°$ اور $m\overline{LN} = 5$ cm

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

11.5 لوکس اور بناوٹ (Loci and Construction)

لوکس (لوسائی کی جمع) نقاط کا ایسا مجموعہ ہے جو ایک مقررہ قاعدے کا پابند ہے۔ جیومیٹری میں، لوکس عام طور پر نقاط کی کسی دوسرے نقطہ یا ہندسی اشکال کے لحاظ سے پوزیشن بیان کرنے کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔ یہاں کچھ عام قسم کے لوکس کی تفصیل سے وضاحت کی جائے گی۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

لاطینی زبان میں لفظ لوکس کی تعریف انگریزی اصطلاح معینہ مقام سے ہوتی ہے۔

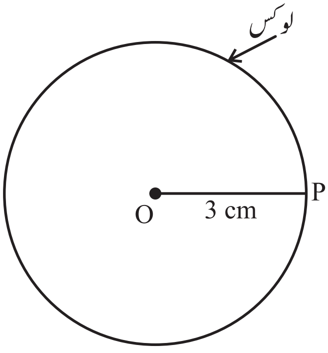
یاد رکھیے!

مساوی فاصلہ: فرض کریں A ایک مقررہ نقطہ ہے اور B نقاط کا مجموعہ ہے۔ اگر A، B کے تمام نقاط سے مساوی فاصلے پر ہو تو A کو B سے ہم فاصلہ کہا جاتا ہے۔

11.5.1 دو سطحی لوکس (Loci in Two Dimension)

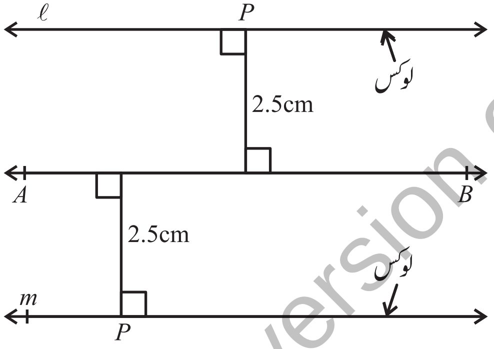
ہم دو رُخی سطح میں لوسائی (دائرہ، متوازی خطوط، عمودی ناصف، زاویہ کا ناصف) کا مطالعہ کرتے ہیں اور ان کو حقیقی زندگی میں استعمال کرتے ہیں۔

دائرہ (Circle)

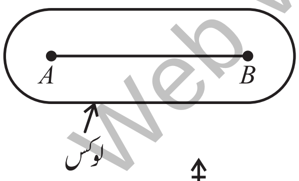


ایک نقطہ کا لوسائی جو کسی معین نقطہ سے مستقل فاصلہ پر ہو۔ دائرہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر نقطہ P کا لوسائی جس کا فاصلہ معین نقطہ O سے 3 cm ہو ایک دائرہ بناتا ہے جس کا مرکز O ہے اور رداس 3 cm ہے۔

متوازی خطوط (Parallel Lines)

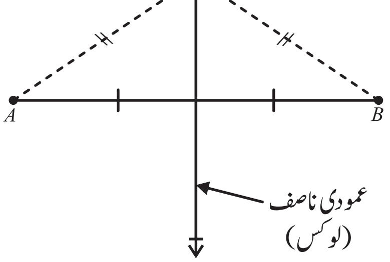


ایک نقطہ کا لوکس جو کسی معین خط سے مستقل فاصلے پر ہو۔ متوازی خطوط ہوتے ہیں جیسے ℓ اور m۔ مثلاً نقطہ P کا لوکس جس کا فاصلہ خط AB سے 2.5 cm ہو۔ متوازی خطوط ہوتے ہیں۔ جو خط AB سے 2.5 cm کے فاصلے پر ہوتے ہیں۔



مثال کے طور پر، قطعہ خط سے مساوی فاصلہ پر نقاط کا لوکس ایک بیضوی شکل بناتا ہے۔ ہم اِس قسم کے لوکس کو ایک قطعہ خط کے اِرد گرد راستے کا سوچ سکتے ہیں۔

عمودی ناصف (Perpendicular Bisector)



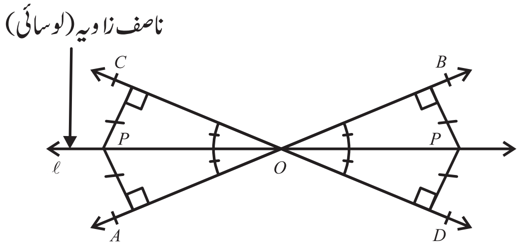
ایک نقطہ کا لوکس جو دو معین نقاط سے برابر فاصلے پر ہوں۔ عمودی ناصف کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر نقطہ P کا لوکس معین نقاط A اور B سے برابر فاصلے پر ہو، قطعہ خط AB کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

زاویہ کا ناصف (Angle Bisector)

ایک نقطہ کا لوسائی جو دو باہم تقاطع خطوط سے برابر فاصلے پر ہو زاویہ کا ناصف کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر نقطہ P کا لوسائی دونوں متقاطع خطوط AB اور CD جو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں سے برابر فاصلے پر ہے۔ $\angle AOC$ اور $\angle BOD$ کا ناصف "ℓ" ہے۔



یاد رکھیے!

- نقاط کا لوکس جو ایک معین نقطہ سے مساوی فاصلہ پر ہو دائرہ ہوتا ہے۔ اور دو معین نقاط سے مساوی فاصلہ پر ہو عمودی ناصف ہوتا ہے۔
- نقاط کا لوکس جو معین خط سے مساوی فاصلہ پر ہو متوازی خطوط ہوتے ہیں اور دو معین متقاطع خطوط سے مساوی فاصلہ پر ہو زاویہ کا ناصف ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

11.5.2 لوسائی کا تقاطع (Intersection of Loci)

اگر دو یا دو سے زیادہ لوسائی ایک نقطہ P پر قطع کرتے ہوں تو نقطہ P لوسائی کی تمام دی گئی شرائط کو پورا کرتا ہے۔ اِس کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی جائے گی:

مثال 10: ایک مستطیل $ABCD$ بنائیں، جس میں $m\overline{AB} = 3.5$ cm اور $m\overline{BC} = 2.3$ cm ہو تمام نقاط کا لوسائی کھینچیں جو کہ:

(i) نقطہ A سے 2 cm کے فاصلے پر ہوں۔ (ii) A اور B سے برابر فاصلے پر ہوں۔

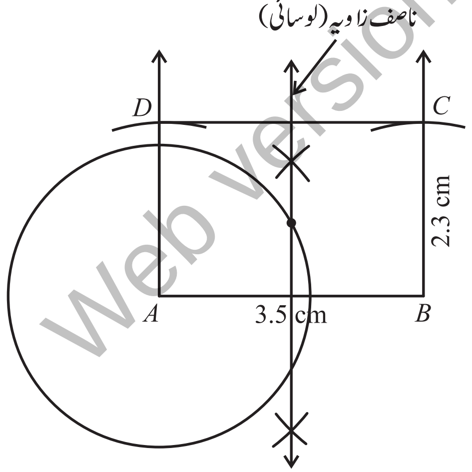
مستطیل کے اندر نقطہ P پر ایک نشان لگائیں جو نقطہ A سے 2 cm کے فاصلے پر ہو اور A اور B سے برابر فاصلے پر ہو۔

حل: دی گئی پیمائشوں کے مطابق مستطیل $ABCD$ بنائیں۔

(i) نقطہ A کو مرکز مان کر 2 cm رداس کا ایک دائرہ کھینچیں۔

(ii) $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف کھینچیں۔

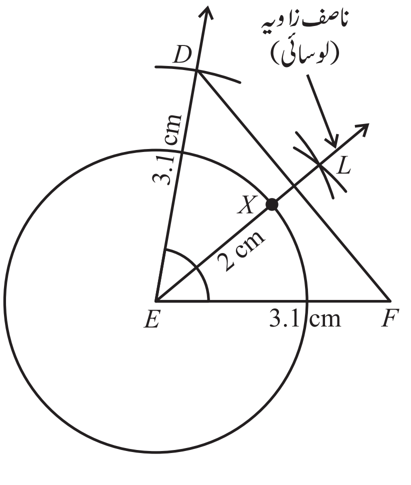
یہ دونوں لوسائی مستطیل کے اندر نقطہ P پر ایک دُوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ جو نقطہ A سے 2 cm اور A اور B سے مساوی فاصلہ پر ہے۔



مثال 11: ایک متساوی الساقین مثلث DEF بنائیں جس کا عمودی زاویہ نقطہ E پر 80° ہو اور $m\overline{EF} = m\overline{DE} = 3.1$ cm ہو۔ تمام نقاط کا لوسائی کھینچیں جو کہ:

(i) نقطہ E سے 2 cm کے فاصلے پر ہو۔

NOT FOR SALE-PESRP



(ii) $\overline{DE}$ اور $\overline{EF}$ سے مساوی فاصلے پر ہوں۔ مثلث کے اندر نقطہ X کی نشان دہی کریں جو نقطہ E سے 2 cm ہو اور $\overline{ED}$ اور $\overline{EF}$ سے مساوی فاصلے پر ہو۔

حل: دی گئی پیمائشوں کے مطابق مثلث DEF بنائیں۔

(i) نقطہ E کو مرکز مان کر 2 cm رداس کا ایک دائرہ کھینچیں۔

(ii) زاویہ DEF کا ناصف زاویہ کھینچیں۔ یہ دونوں لوسائی مثلث کے اندر نقطہ X پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ جو نقطہ E سے 2 cm اور $\overline{ED}$ اور $\overline{EF}$ سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

مثال 12: ایک میدان LMN مثلثی شکل میں ہے۔ جس میں $m\overline{LM} = 69$ m ، $m\angle L = 60°$ اور $m\angle M = 45°$ ہو۔

(i) دی گئی پیمائشوں سے مثلث LMN بنائیں۔

(ii) تمام نقاط کا لوکس کھینچیں جو L اور M سے برابر فاصلے پر ہوں۔ $\overline{LN}$ اور $\overline{LM}$ سے برابر فاصلے پر ہوں اور مثلثی میدان کے اندر $\overline{LM}$ سے 13 m کے فاصلے پر ہوں۔

(iii) میدان کے اندر نقاط P اور Q پر دو درخت لگانے ہیں۔

(a) نقطہ P کی پوزیشن پر نشان لگائیں جو کہ نقاط L اور M سے برابر فاصلے پر ہو اور $\overline{LM}$ اور $\overline{LN}$ سے برابر فاصلے پر ہو۔

(b) نقطہ Q کی پوزیشن پر نشان لگائیں جو کہ $\overline{LM}$ اور $\overline{LN}$ سے برابر فاصلے پر ہو اور $\overline{LM}$ سے 13 m کے فاصلے پر ہو۔

(c) $m\overline{PQ}$ معلوم کریں۔

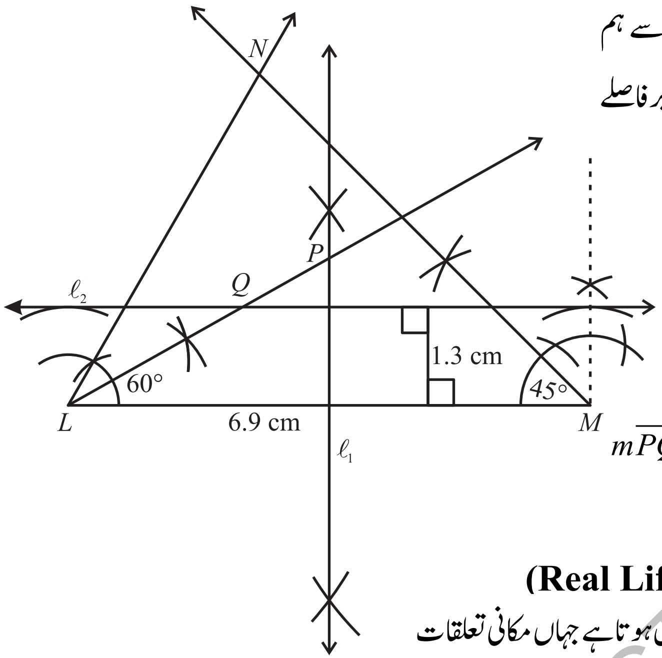
حل:

(i) دی گئی پیمائشوں کی 10 m = 1 cm کے سکیل کے مطابق مثلث LMN بنائیں۔

(ii) $\overline{LM}$ کا عمودی ناصف ℓ_1 کھینچیں۔ زاویہ MLN کا ناصف کھینچیں۔ مثلث LMN کے اندر $\overline{LM}$ سے 1.3 cm کے فاصلے پر ایک متوازی خط ℓ_2 کھینچیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



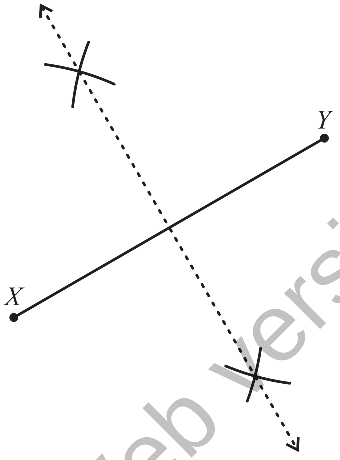
(iii) (a) نقطہ P لگائیں جو کہ L اور M سے ہم فاصلہ ہو اور $\overline{LM}$ اور $\overline{LN}$ سے بھی برابر فاصلے پر ہو۔

(b) نقطہ Q لگائیں جو $\overline{LM}$ اور $\overline{LN}$ سے برابر فاصلے پر ہو اور $\overline{LM}$ سے 1.3 cm کے فاصلے پر ہو۔

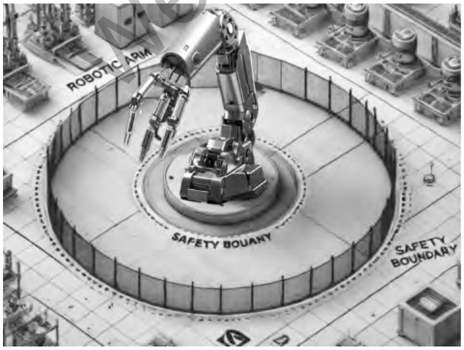
(c) $m\overline{PQ} = 1.3 \times 10 = 13 \text{ m}$

11.6 لوسائی کا حقیقی زندگی میں اطلاق
(Real Life Application of Loci)

لوسائی کا تصور مختلف شعبوں میں وسیع پیمانے پر استعمال ہوتا ہے جہاں مکانی تعلقات ، فاصلے یا مخصوص پابندیاں اہمیت رکھتی ہیں۔ یہاں مختلف انداز میں لوسائی کے استعمال کی وضاحت کرنے کے لیے تفصیلی مثالیں دی گئی ہیں۔



(i) ایک پارک میں پانی کے دو ذرائع دو مختلف جگہوں پر ہیں۔ ایک فائر ہائیڈرنٹ کو اِن دونوں ذرائع سے برابر فاصلہ پر لگانا ہے۔ فرض کریں پارک میں پانی کے دو ذرائع کو X اور Y سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\overline{XY}$ کا ناصف کھینچیں تاکہ وہ لوکس (مقام) معلوم ہو سکے جو دونوں ذرائع X اور Y سے ہم فاصلہ ہو۔



(ii) ایک کارخانے میں ایک روبوٹک بازو کو ایک مخصوص علاقے میں کام کرنے کے لیے نصب کیا گیا۔ تاکہ وہ دیگر آلات سے نہ ٹکرائے۔ روبوٹ کا ممکنہ لوکس ایک معین جگہ ہوگی۔ جیسے کہ ایک دائرہ یا مستطیلی خطہ ، جو یہ یقینی بناتا ہے کہ وہ اپنے مخصوص علاقہ کے اندر محفوظ طریقے سے کام کرے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مشق 11.2

1۔ دو نقاط A اور B کے درمیان فاصلہ 8.2 cm ہے۔ نقطہ A سے 5 cm کے فاصلے پر نقاط کا لوسائی بنائیں۔

2۔ $m\overline{CD} = 5.7$ cm کے قطعہ خط سے 2.2 cm کے فاصلے پر لوسائی بنائیں۔

3۔ $m\angle ABC = 105°$ بنائیں۔ نقطہ P کا لوسائی بنائیں جو $\overline{BA}$ اور $\overline{BC}$ سے برابر فاصلے پر حرکت کرتا ہو۔

4۔ دو نقاط E اور F کے درمیان فاصلہ 5.4 cm ہے۔ نقطہ P کا لوسائی بنائیں جو E اور F سے برابر فاصلے پر حرکت کرتا ہو۔

5۔ ایک جزیرے پر دو شہر A اور B ہیں جن کا درمیانی فاصلہ 8 km ہے۔ کاشف شہر A سے 6.8 km کے فاصلے پر جزیرے پر رہتا ہے اور شہر B سے 7.3 km کے فاصلے پر رہتا ہے۔ جزیرے پر اِن نقاط کی نشان دہی کریں۔ جہاں کاشف رہ سکتا ہے۔

6۔ ایک مثلث CDE بنائیں جس میں $m\overline{CD} = 7.6$ cm، $m\angle D = 45°$ اور $m\overline{DE} = 5.9$ cm ہو۔ تمام نقاط کا لوسائی کھینچیں جو کہ:

(a) C اور D سے برابر فاصلے پر ہوں (b) $\overline{CD}$ اور $\overline{CE}$ سے برابر فاصلے پر ہوں

(c) نقطہ X کی نشان دہی کریں جہاں یہ دونوں لوسائی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

7۔ مثلث LMN بنائیں جس میں $m\overline{LM} = 7$ cm، $m\angle L = 70°$ اور $m\angle M = 45°$ ہو۔ مثلث LMN کے اندر ایک ایسا نقطہ معلوم کریں جو L اور M سے برابر فاصلے پر ہو اور L سے 3 cm کے فاصلے پر ہو۔

8۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث RST بنائیں۔ جس میں $m\overline{RS} = 6.8$ cm، $m\angle S = 90°$ اور $m\overline{ST} = 7.5$ cm ہو۔ مثلث RST کے اندر ایک ایسا نقطہ معلوم کریں جو $\overline{RS}$ اور $\overline{RT}$ سے برابر فاصلے پر ہو اور R سے 4.5 cm کے فاصلے پر ہو۔

9۔ ایک مستطیل $UVWX$ بنائیں جس میں $m\overline{UV} = 7.2$ cm اور $m\overline{VW} = 5.6$ cm۔ نقاط کا لوسائی بنائیں جو $\overline{UV}$ سے 2 cm اور W سے 3.5 cm کے فاصلے پر ہوں۔

10۔ تصوّر کریں دو سیل ٹاور نقاط A اور B محد داتی مستوی پر واقع ہیں۔ ایک آلہ GPS مستوی پر کسی جگہ نصب ہے اور دونوں ٹاورز سے سگنل وصول کر رہا ہے۔ جہاز رانی کو یقینی بنانے کے لیے آلہ کو اِس جگہ پر نصب کیا گیا جو دونوں ٹاورز سے برابر فاصلے پر ہو۔ اِس راستہ کا لوسائی بنائیں۔

11۔ ماہر وبائی امراض لوسائی کا استعمال انفیکشن زدہ علاقوں کی نشان دہی کے لیے کرتے ہیں۔ خاص طور پر متعدی بیماریوں کے لیے، تاکہ پھیلاؤ کی پیشن گوئی اور حفاظتی اقدامات کیے جاسکیں۔ ایک بیماری کے پھیلاؤ کی صورت میں حکام ایک قرنطینہ علاقہ تعین کریں گے جو انفیکشن ذرائع سے 10 km کے اندر ہو گا۔ بیماری کے پھیلاؤ کی نگرانی اور کنٹرول کرنے کے لیے

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

قرنطینہ کے علاقے کی وضاحت کرتے ہوئے ماخذ سے 10 km کے فاصلے پر نقاط کا لوکس بنائیں۔

12۔ خزانہ ایک جزیرے پر کسی جگہ دفن ہے۔ خزانہ نقطہ A سے 24 km کے فاصلے پر ہے اور نقاط B اور C سے ہم فاصلہ ہیں۔ پیمانہ (سکیل) 10 km = 1 cm استعمال کرتے ہوئے وہ مقام معلوم کریں جہاں خزانہ دفن ہو سکتا ہے۔

13۔ سارہ کے گھر کے باغ میں ایک سیب کا درخت ہے جو کیلے کے درخت سے 90 m کے فاصلے پر ہے۔ سارہ ایک آم کا درخت M لگانا چاہتی ہے جو سیب کے درخت سے 64 m اور کیلے کے درخت سے 54 m اور 82 m کے درمیانی فاصلے پر ہو۔ پیمانہ (سکیل) 10 m = 1 cm استعمال کرتے ہوئے وہ مقام معلوم کریں جہاں آم کا درخت لگایا جائے۔

جائزہ مشق 11

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) ایک مثلث بنائی جا سکتی ہے۔ اگر کسی دو اضلاع کا مجموعہ تیسرے ضلع کی پیمائش سے __________ ہو:

(a) کم (b) زیادہ (c) برابر (d) زیادہ اور برابر

(ii) ایک متساوی الاضلاع مثلث __________:

(a) متساوی الساقین ہو سکتی ہے (b) قائمۃ الزاویہ ہو سکتی ہے
(c) منفرجہ زاویہ ہو سکتی ہے (d) اِس کا ہر زاویہ °50 کا ہوتا ہے

(iii) اگر دو زاویوں کا مجموعہ °90 سے کم ہو، تو مثلث __________ ہوتی ہے۔

(a) متساوی الاضلاع (b) حادہ زاویہ (c) منفرجہ زاویہ (d) قائمۃ الزاویہ

(iv) وہ قطعہ خط جو ایک مثلث کے ضلع کے وسطی نقطہ کو مخالف راس سے ملاتا ہے، کہلاتا ہے:

(a) وسطانیہ (b) عمودی ناصف (c) زاویہ کا ناصف (d) دائرہ

(v) مثلث کے ناصف زاویے __________ پر قطع کرتے ہیں۔

(a) ایک نقطہ (b) دو نقاط (c) تین نقاط (d) چار نقاط

(vi) تمام نقاط کا لوکس جو کسی معین نقطہ سے برابر فاصلے پر ہو __________ کہلاتا ہے۔

(a) دائرہ (b) عمودی ناصف (c) زاویہ کا ناصف (d) متوازی خطوط

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(vii) نقاط کا لوسائی جو دو معین نقاط سے برابر فاصلے پر ہوں، __________ کہلاتا ہے۔

(a) دائرہ (b) عمودی ناصف (c) زاویہ کا ناصف (d) متوازی خطوط

(viii) نقاط کا لوسائی جو کسی معین خط سے برابر فاصلے پر ہوں، __________ کہلاتا ہے۔

(a) دائرہ (b) عمودی ناصف (c) زاویہ کا ناصف (d) متوازی خطوط

(ix) نقاط کا لوسائی جو دو باہم ملتے خطوط سے برابر فاصلے پر ہوں، __________ کہلاتا ہے۔

(a) دائرہ (b) عمودی ناصف (c) زاویہ کا ناصف (d) متوازی خطوط

(x) تمام نقاط کا سیٹ جو کسی معین نقطہ B سے 2 km سے زیادہ کے فاصلے پر ہوں ایک دائرے کے باہر کا علاقہ جس کا رداس __________ اور مرکز B ہوتا ہے۔

(a) 1 km (b) 1.9 km (c) 2 km (d) 2.1 km

2۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بنائیں جس کے اضلاع کی لمبائیاں 6 cm، 8 cm اور 10 cm ہو۔

3۔ ایک مثلث ABC بنائیں جس میں $m\overline{AB} = 5.3$ cm، $m\angle A = 30°$ اور $m\angle B = 120°$ ہو۔ تمام نقاط کا لوسائی بنائیں جو A اور B سے برابر فاصلے پر ہوں۔

4۔ ایک مثلث بنائیں جس میں $m\overline{DE} = 7.3$ cm، $m\angle D = 42°$ اور $m\overline{EF} = 5.4$ cm ہو۔

5۔ ایک مثلث XYZ بنائیں جس میں $m\overline{YX} = 8$ cm، $m\overline{YZ} = 7$ cm اور $m\overline{XZ} = 6.5$ cm ہو۔ اِن تمام نقاط کے لوسائی بنائیں جو $\overline{XY}$ اور $\overline{XZ}$ سے مساوی فاصلے پر ہوں۔

6۔ ایک مثلث FGH بنائیں جس میں $m\overline{FG} = m\overline{GH} = 6.4$ cm اور $m\angle G = 122°$ ہو۔ تمام نقاط کا لوسائی بنائیں جو کہ:

(a) F اور G سے مساوی فاصلہ پر ہوں (b) $\overline{FG}$ اور $\overline{GH}$ سے مساوی فاصلے پر ہوں۔

(c) نقطہ کی نشان دہی کریں جہاں دونوں لوکس ایک دُوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

7۔ دو گھروں Q اور R کا درمیانی فاصلہ 73 m ہے۔ پیمانہ (سکیل): 1 cm = 10 m استعمال کرتے ہوئے، نقطہ P کا لوسائی بنائیں جو اِس طرح حرکت کرتا ہے کہ یہ:

(i) Q سے 32 m کے فاصلے پر ہوں (ii) Q اور R کو ملانے والے خط سے 48 m کے فاصلے پر ہوں

8۔ ایک میدان مستطیل $ABCD$ کی شکل میں ہے جس میں $m\overline{AB} = 70$ m اور $m\overline{BC} = 60$ m ہو۔ پیمانہ (سکیل) 1 cm = 10 m استعمال کرتے ہوئے مستطیل $ABCD$ بنائیں۔ میدان کے اندر وہ خطہ دکھائیں جو نقطہ C سے 30 m سے کم فاصلے پر ہو اور $\overline{AB}$ سے 25 m سے زیادہ فاصلے پر ہو۔

Web version of PCTBtextbook

NOT FOR SALE-PESRP