یونٹ 9

متماثل مثلثان

CONGRUENT TRIANGLES

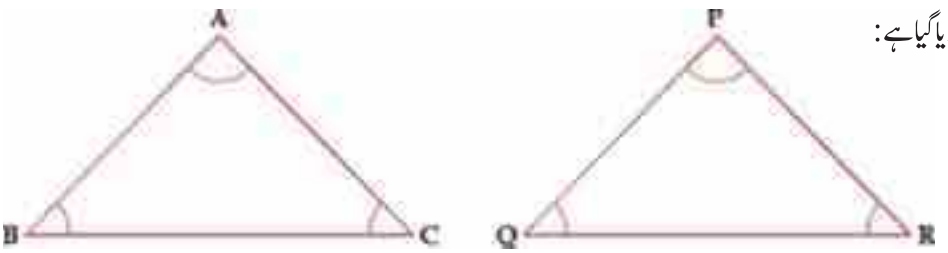
حاصلاتِ تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- مندرجہ ذیل نظریات کو ان کے نتائج کے ساتھ سمجھیں اور ان کو متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیے استعمال کریں۔
- دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور دو زاویہ دوسری مثلث کے متناظرہ ضلع اور زاویوں کے
- متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔
- اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے مخالف اضلاع بھی متماثل ہوتے ہیں۔
- دو مثلثوں کی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسری مثلث کے متناظرہ تین اضلاع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔
- اگر دو قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی مطابقت میں ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسری مثلث کے وتر اور متناظرہ ضلع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثین متماثل ہوں گی۔

تعارف:

ایک مثلث میں چھ عناصر ہیں، تین اضلاع اور تین زاویے۔ اگر ہمیں دو مثلثیں ABC اور PQR دیے جائیں تو ہم ان مثلث کے اطراف اور زاویوں کے درمیان چھ مختلف طریقوں سے (1-1) خط وکتابت قائم کرنے کے لیے ان کی چوٹیوں کو جوڑ سکتے ہیں۔ جیسا کے نیچے دیا گیا ہے:



خط وکتابت (correspondence) میں $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ اس کا مطلب ہے:

(i) $\angle A \leftrightarrow \angle P$ ($\angle A$ اور $\angle P$ باہم مطابق زاویے ہیں)

(ii) $\angle B \leftrightarrow \angle Q$ ($\angle B$ اور $\angle Q$ باہم مطابق زاویے ہیں)

(iii) $\angle C \leftrightarrow \angle R$ ($\angle C$ اور $\angle R$ باہم مطابق زاویے ہیں)

(iv) $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{PQ}$ ($\overline{AB}$ اور $\overline{PQ}$ باہم مطابق اضلاع ہیں)

(v) $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{QR}$ ($\overline{BC}$ اور $\overline{QR}$ باہم مطابق اضلاع ہیں)

(vi) $\overline{CA} \leftrightarrow \overline{RP}$ ($\overline{CA}$ اور $\overline{RP}$ باہم مطابق اضلاع ہیں)

9.1 متماثل مثلثان

ریاضی میں "سائز اور شکل کی ہم آہنگی" کو متماثل کہتے ہیں۔

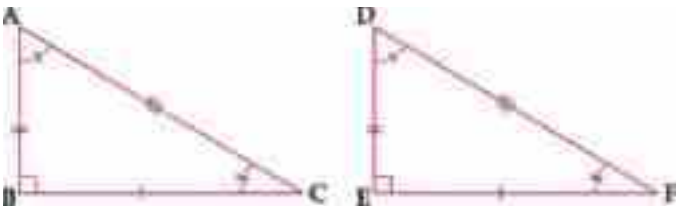
دو کاروں کے رنگ مختلف ہیں اور دی گئی شکل میں ان کی پوزیشن مختلف ہے، لیکن ان کا سائز اور شکل ایک جیسی ہے۔ یہ دونوں کاریں متماثل کہلائیں گی اگر ہم ایک کار کی تصویر دوسری گاڑی پر رکھتے ہیں تو وہ دونوں ایک دوسرے کو اوورلیپ (overlap) کریں گی۔

سرگرمی

تلاش

کیا آپ اپنے کلاس روم یا اسکول میں کسی بھی طرح کی متماثل اشکال یا اشیاء کی شناخت کر سکتے ہیں؟ ڈرائنگ یا تصویریں کھینچ کر ان متماثل اشکال کی فہرست بنائیں۔

دو مثلثیں متماثل کہلاتی ہیں اگر ان کے متعلقہ زاویے اور اضلاع متماثل ہیں۔ آیئے اشکال دیکھیں۔



یہ دو مثلثیں ABC اور DEF متماثل ہیں اور اس طرح لکھی جاتی ہیں:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ΔABC اور ΔDEF کے متعلقہ اضلاع اور زاویے برابر ہیں، پیمائش میں

نوٹ: درج ذیل نتائج مفید ہیں۔

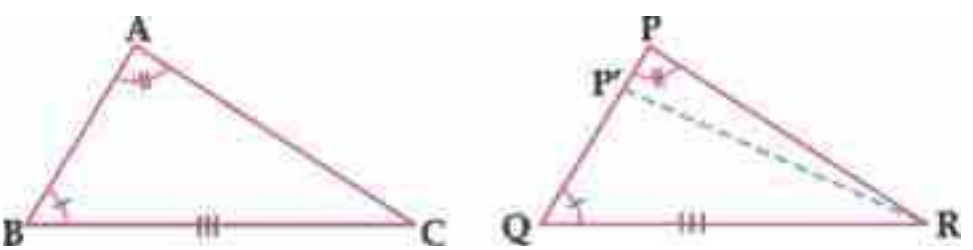
(i) ہم آہنگی کے شناخت: $\Delta ABC \cong \Delta ABC$

(ii) تناسب پراپرٹی $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ پھر $\Delta PQR \cong \Delta ABC$

(iii) ترسیلی پراپرٹی ہم آہنگی کی اگر $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ اور $\Delta PQR \cong \Delta DEF$ پھر $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مسئلہ 9.1.1 (ز-ض-ز ≅ ز-ض-ز)

دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور دو زاویے دوسری مثلث کے متناظرہ ضلع اور زاویوں کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔



معلوم:

$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$

$\angle A \cong \angle P$ اور $\angle B \cong \angle Q$, $m\overline{BC} \cong m\overline{QR}$

مطلوبہ:

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

عمل:

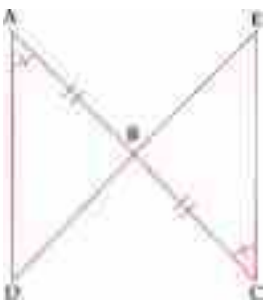
فرض کریں $\overline{PQ} \ncong \overline{AB}$ نقطہ P' لیں PQ پر اس طرح کہ $\overline{AB} \cong \overline{P'Q}$ P کو R سے ملائیں

ثبوت:

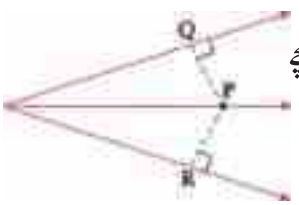
بیانات	دلائل
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ میں	
$\angle A \cong \angle P$ (i)	(i) معلوم
$\angle B \cong \angle Q$ (ii)	(ii) معلوم
$\therefore \quad \angle C \cong \angle R$	دونوں مثلثوں کے دو زاویے متماثل ہیں
اگر $\overline{BA} \ncong \overline{QP}$, نقطہ P' لیں $\overline{QP}$ پر	مفروضہ
اس طرح کہ: $\overline{QP'} \cong \overline{BA}$	
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta P'QR$	
$\overline{BC} \cong \overline{QR}$	(i) معلوم
$\angle B \cong \angle Q$	(ii) معلوم
$\overline{BA} \cong \overline{QP'}$	(iii) قیاس۔
$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta P'QR$	ض۔ز۔ض کا موضوعہ
$\therefore \quad \angle C \cong \angle QRP'$	Δs کے مطابقت سے
مگر $\angle C \cong \angle QRP$	2 میں ثابت کیا گیا (اوپر)
$\therefore \quad \angle QRP' \cong \angle QRP$	مطابقت کی ترسیلی پراپرٹی
یہ تب ممکن ہے جب نقاط P اور P' ایک ہوں	زاویہ عمل موضوعہ کے ذریعے
$\overline{RP'} \cong \overline{RP}$	
لہٰذا $\overline{BA} \cong \overline{QP}$	جیسا کہ P اور P' اتفاق کرتے ہیں
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ میں	(i) معلوم
$\overline{BC} \cong \overline{QR}$ (i)	(ii) معلوم
$\angle B \cong \angle Q$ (ii)	(iii) اوپر ثابت کیا گیا۔
$\overline{BA} \cong \overline{QP}$ (iii)	ض۔ز۔ض کا موضوعہ
$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta PQR$	

Q.E.D.

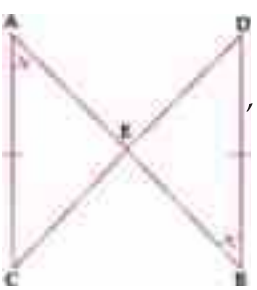
مشق 9.1



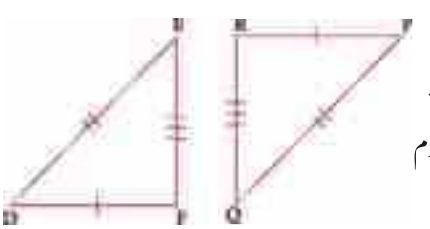
.1 دی گئی شکل میں $m\overline{AB} = m\overline{CB}$ اور $\angle A \cong \angle C$ ثابت کریں کہ $\Delta ABD \cong \Delta CBE$



.2 ایک زاویہ کے خط کے ناصف پر ایک نقطہ سے زاویوں کے بازوؤں پر متوازی الاضلاع کھینچے جاتے ہیں۔ثابت کریں کہ یہ متوازی الاضلاع پیمائش میں برابر ہیں۔



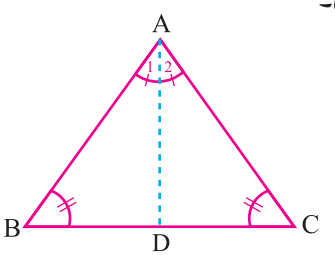
.3 دی گئی شکل میں ہمارے پاس ہے $\Delta ACE \cong \Delta BDE$, اس طرح کہ $m\overline{AC} = m\overline{BD} = 3\ cm$, $m\angle E = (3y - 2)°$, $\angle A = (3x + 1)°$, $m\angle B = (x + 35)$ x, اور y کی رقوم معلوم کریں ۔



.4 دی گئی شکل میں ہمارے پاس ہے $\Delta DEF \cong \Delta PQR$, اس طرح کہ $m\overline{DE} = (6x + 1)$cm, $m\overline{EF}$ =8cm, اور $m\overline{RQ}$ = $m\overline{PQ} = (10x - 19)$cm, اور $(5y - 7)$cm x اور y کی رقوم معلوم کریں۔

مسئلہ 9.1.2

اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے مخالف اضلاع بھی متماثل ہوتے ہیں۔



معلوم:

ΔABC میں، ہمارے پاس ہے $m\angle B \cong m\angle C$

مطلوبہ:

$\overline{AC} \cong \overline{AB}$

عمل: $\angle A$, $\overline{AD}$ کا ناصف کھینچیں جو $\overline{BC}$ سے نقطہ D پر ملتا ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta ADB \leftrightarrow \Delta ADC$	
(i) $m\angle B \cong m\angle C$	(i) معلوم
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) عمل
(iii) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	(iii) مشترک (شناخت کی مطابقت)
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ADC$	ض-ز-ض موضوعہ
$\therefore \overline{AC} \cong \overline{AB}$	Δs کی مطابقت سے

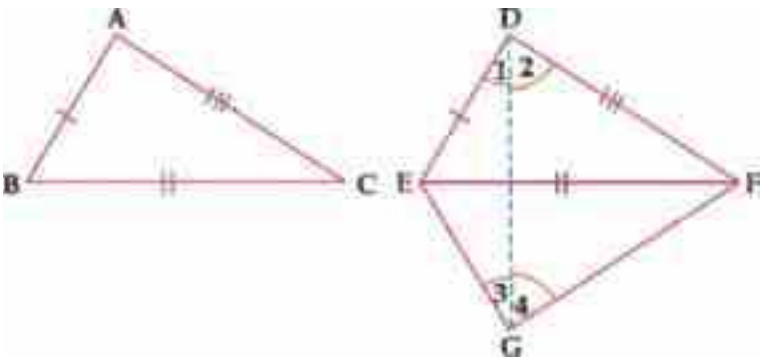
Q.E.D

مشق 9.2

1. ABC ایک مثلث ہے جس میں $m\angle A=35°$ اور $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $m\angle B=100°$ ثابت کریں کہ ΔBDC مساوی الساقین مثلث ہیں۔
2. اگر ایک مثلث کے زاویے کا ناصف اس کے مخالف اضلاع کے عمود پر ہے، تو مثلث ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔
3. ABC ایک مثلث ہے جس میں $m\angle B = 45°$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. ثابت کریں کہ ΔDBC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

مسئلہ 9.1.3

دو مثلثوں کی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسری مثلث کے متناظرہ تین اضلاع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔



معلوم:

$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں

$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$ اور $\overline{CA} \cong \overline{FD}$

مطلوبہ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

عمل: فرض کریں کہ ΔABC کی تینوں اضلاع میں سب سے بڑا $\overline{BC}$ ہے ΔGEF بنائیں اس طرح کہ:

(i) نقطہ G

(ii) $\angle FEG \cong \angle B$

(iii) $\overline{EG} \cong \overline{BA}$ D اور G کو ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta GEF$	
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (i)	i) معلوم
$\angle B \cong \angle GEF$ (ii)	ii) عمل
$\overline{BA} \cong \overline{GE}$ (iii)	iii) عمل
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta GEF$	ض-ز-ض موضوعہ
$\angle A \cong \angle G$ اور $\overline{AC} \cong \overline{GF}$	مثلث کی مطابقت سے
مگر $\overline{DF} \cong \overline{AC}$	معلوم
$\therefore \overline{GF} \cong \overline{DF}$	ترسیلی پراپرٹی

$m\angle 1 = m\angle 3$ میں ΔDEG	مخالف اضلاع کے مطابقت
	$\overline{EG} \cong \overline{BA} \cong \overline{ED}$
اسی طرح ΔGFE میں $m\angle 2 = m\angle 4$	$\overline{DF} \cong \overline{GF}$
$\therefore\ m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	مساوات کی جمع کی پراپرٹی
	$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle D$
یا $m\angle D = m\angle G$	$m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle G$
	پر ثابت کیا گیا۔
مگر $m\angle G = m\angle A$	ترسیلی پراپرٹی
$m\angle A = m\angle D \therefore$	
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں	
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (i)	i) معلوم
$\angle A \cong \angle D$ (ii)	ii) اوپر ثابت کیا گیا
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (iii)	iii) معلوم
$\Delta ABC \cong \Delta DEF \therefore$	ض۔ز۔ض کا موضوعہ

Q.E.D

نتیجہ: مساوی الاضلاع مثلث کے زاویے پیمائش میں برابر ہوتے ہیں۔

مشق 9.3

1. ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ $\overline{BC}$ بنیاد D کا درمیانی نقطہ ہے۔ ثابت کریں کہ $\overline{AD}$, $\angle A$ کو کاٹتا ہے اور $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

2. ABC اور DBC دو مساوی الساقین مثلثیں ہیں ایک مشترک بنیاد $\overline{BC}$ کے ضلع پر ثابت کریں کہ $\overleftrightarrow{AD}$، $\overline{BC}$ کا دائیں ناصف ہے۔

3. PQRS ایک مربع ہے X, Y اور Z بالترتیب $\overline{QR}$, $\overline{PQ}$ اور $\overline{RS}$ کے درمیانی نقاط ہیں۔ ثابت کریں کہ $\Delta PXY \cong \Delta SZY$ ۔

4. ثابت کریں کہ، مساوی الاضلاع مثلث میں کوئی سے دو وسطانیے متماثل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 9.1.4

اگر دو قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی کسی مطابقت میں ایک مثلث کا وتر اور ایک ضع دوسری مثلث کے وتر اور متناظرہ ضلع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوں گی۔ وتر ض ≅ وتر ض۔

معلوم: مطابقت میں

$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ اور $\angle B \cong \angle E$ (rt $\angle$s) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (وتر)

مطلوبہ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

عمل: نقطہ G پر $\overline{DE}$ بنائیں اس طرح کہ $\overline{EG} \cong \overline{AB}$ پھر F اور G ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle DEF + m\angle GEF = 180^o$	ضمیمہ موضوعہ
مگر $m\angle DEF = 90^o$	معلوم
$\therefore m\angle GEF = 90^o$	$180^o - 90^o = 90^o$
$\Delta GEF \leftrightarrow \Delta ABC$	
i. $\overline{GE} \cong \overline{AB}$	عمل
ii. $\angle GEF \cong \angle ABC$	ہر ایک قائمۃ الزاویہ ہے۔
iii. $\overline{EF} \cong \overline{BC}$	معلوم
$\therefore \Delta GEF \cong \Delta ABC$	ض-ز-ض ≅ ض-ز-ض
$\therefore \overline{FG} \cong \overline{AC}$ and $\angle G \cong \angle A$	Δs کے مطابقت سے
$\therefore \overline{FG} \cong \overline{DF}$	$\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (معلوم)
ΔDFG میں $\angle D \cong \angle G$	مخالف اضلاع کے مطابقت
$\therefore \angle D \cong \angle A$	ہر ایک ΔG کے متماثل ہے۔
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں	
i. $\angle A \cong \angle D$	(i) ثابت شدہ
ii. $\angle ABC \cong \angle DEF$	(ii) قائمۃ الزاویہ
iii. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	(iii) معلوم
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$	ز-ز-ض ≅ ز-ز-ض

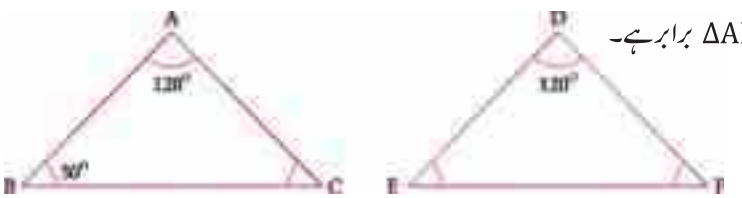
Q.E.D

مشق 9.4

1. ثابت کریں کہ: بنیاد کے راس کے عمود متساوی الساقین مثلث کے مخالف اضلاع کے متماثل ہیں۔
2. ثابت کریں کہ اگر ایک مثلث کے زاویے کے نصاف اس کے مخالف اضلاع کو کاٹیں، تو مثلث ایک متساوی الساقین مثلث ہوگا۔
3. ثابت کریں کہ ایک متساوی الساقین مھلث کی بنیاد کو وسطانیے کاٹتے ہیں وہ عمودی زاویے کو کاٹتی ہے اور بنیاد کے عمود پر ہوتی ہے۔
4. ثابت کریں کہ اگر مثلث کے تین ارتفاع متماثل ہوں، تو مثلث مساوی الاضلاع ہے۔

اعادہ مشق 9

1. اگر $\Delta ABC \cong \Delta DEF, m\angle F$ برابر ہے۔



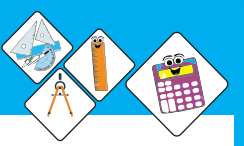
(ا) $90°$
(ب) $60°$
(ج) $30°$
(د) $20°$

2. درج ذیل میں صحیح اور غلط بیانات کی شناخت کریں:

(i) ایک چوکور میں تمام زاویوں کا مجموعہ 36 ہوتا ہے۔ (د/غ)
(ii) ایک مثلث میں تمام زاویوں کا مجموعہ 270 ہوتا ہے۔ (د/غ)
(iii) مساوی الاضلاع مثلث میں، زاویے ایک ہی پیمائش کے ہوتے ہیں۔ (د/غ)
(iv) ایک مثلث میں دو قائمۃ الزاویہ ہوتے ہیں۔ (د/غ)
(v) مساوی الساقین مثلث ہیں، متعلقہ زاویے اور متعلقہ اضلاع پیمائش میں برابر ہوتے ہیں۔ (د/غ)

3. جملوں کو درست بنانے کے لیے خالی جگہ پُر کریں۔

(i) $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں، تو پھر $\overline{AC}$ مطابقت رکھتا ہے _____ سے۔
(ii) $\Delta KLM \leftrightarrow \Delta PQR$ میں، پھر $\angle MKL$ مطابقت رکھتا ہے _____ سے۔
(iii) مساوی الساقین مثلث میں بنیادی زاویہ ہوتا ہے _____۔
(iv) اگر مثلث کے پر زاویہ کے پیمائش $60°$ ہے، تو پھر مثلث ہے _____۔
(v) ایک قائمۃ الزاویہ مثلث میں، قائمۃ الزاویہ کے مخالف ضلع کہلاتا ہے _____۔
(vi) دائیں مثلث میں حادۃ الزاویہ کے مجموعہ کی پیمائش ہے _____۔



4. متعلقہ حروف ا،ب،ج یا پر دائرہ لگائیں درست جواب کے لیے:

(i) مندرجہ ذیل میں سے کون دو مثلثوں کے متماثل ہونے لیے کافی شرط نہیں ہے؟

(ا) ز-ض-ز ≅ ز-ض-ز (ب) وتر-ض ≅ وتر-ض

(ج) ض-ز-ز ≅ ض-ز-ز (د) ز-ز-ز ≅ ز-ز-ز

(ii) a,b,c میں اگر ΔABC تو ∠B ≅ ∠A زاویہ کا ناصف مثلث کو متماثل مثلث میں تقسیم کرے گا۔

(ا) ∠A (ب) ∠B (ج) ∠C (د) کوئی بھی ایک سائیڈ

(iii) _____ کا وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم نہیں کرتا:

(ا) مستطیل (ب) زوزنقہ (bapezium)

(ج) متوازی الاضلاع (د) مربع

(iv) حادۃ زاویہ مثلث میں کتنے حادۃ الزاویہ ہوتے ہیں۔

(ا) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 2 سے زیادہ

خلاصہ

اس یونٹ میں ہم نے درج ذیل مسئلے بیان اور ثابت کیے:

- دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور دو زاویے دوسری مثلث کے متناظرہ ضلع اور زاویوں کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔ (ز-ض-ز ≅ ز-ض-ز)
- اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے مخالف اضلاع بھی متماثل ہوتے ہیں۔
- دو مثلثوں کی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسری مثلث کے متناظرہ تین اضلاع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔ (ض-ض-ض ≅ ض-ض-ض)
- اگر دو قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی کسی مطابقت میں ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسری مثلث کے وتر اور متناظرہ ضلع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوں گی۔
- دو مثلثیں متماثل کہلاتی ہیں اگر ان کے درمیان کوئی مطابقت ہو اس طرح کہ تمام متعلقہ اضلاع اور مثلثیں تماثل ہوں۔ (ض-ض-ض)