یونٹ 8

دو درجی مساوات

QUADRATIC EQUATION

حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- ایک متغیر میں دو درجی مساوات کو حل کرنا بذریعہ
  - تجزی
  - تکمیل مربع
- بذریعہ تکمیل مربع، دو درجی فارمولا اخذ کرنا۔
- دو درجی فارمولا سے دو درجی مساوات کو حل کرنا۔
- $ax^4 + bx^2 + c = 0$ قسم کی مساواتوں کو دو درجی مساواتوں میں تبدیل کر کے حل کرنا۔
- $ap(x) + \frac{c}{p(x)} = b,$ قسم کی مساواتوں کو حل کریں جہاں a, b and c ناطق اعداد ہیں۔
- $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0,$ قسم کی معکوس مساواتوں کو حل کرنا جہان a, b and c ناطق اعداد ہیں۔
- قوت نمائی مساواتوں جن کے متغیر قوت نماؤں میں ہوں، حل کرنا۔
- $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = k,$ قسم کی مساواتوں کو جبکہ $a + b = c + d$ $k \neq 0.$ حل کرنا۔
- اس قسم کی مساواتوں کو حل کرنا۔
  - $\sqrt{(ax + b)} = cx + d.$
  - $\sqrt{(x + a)} + \sqrt{(x + b)} = \sqrt{(x + c)}$
  - $\sqrt{(x^2 + px + m)} + \sqrt{(x^2 + px + n)} = q$

8.1 دو درجی مساوات اور ان کا حل

8.1.1: واضح کریں، پھر دو درجی مساوات کو اس کی معیاری فارم (شکل) میں بیان کریں۔

ایک کثیر رقمی مساوات جس کی ڈگری 2 ہو دو درجی مساوات کہلاتی ہے۔

$ax^2+bx+c=0,$ دو درجی مساوات کی معیاری فارم (شکل) ہے، جہاں $a \neq 0$ and $a, b, c \in \mathbb{R}$. حقیقی اعداد ہیں۔ یہاں a, x^2 کا عددی سر ا، b, x کا عددی سر ا اور c مستقل مقدار ہے۔ $ax^2+bx+c=0,$ میں، اگر $a=0$ تو یہ یک درجی مساوات $bx+c=0$ میں تبدیل ہو جاتی ہے اور اگر $b=0$ پھر یہ خالص (pure) دو درجی مساوات $ax^2+c=0$ میں تبدیل ہو جاتی ہے

درج ذیل دو درجی مساوات کی مثالیں ہیں۔

(i) $4x^2+4x+1=0,$ (دو درجی مساوات معیاری شکل میں)

(ii) $x^2-4=0,$ (خالص دو درجی مساوات)

8.1.2: ایک متغیر میں دو درجی مساوات کو حل کریں بذریعہ

- تجزی
- تکمیل مربع

یہاں ہم دو طریقوں پر غور کرتے ہیں، دو درجی مساوات کے حل کے لیے۔

(1) طریقہ تجزی (2) طریقہ تکمیل مربع

(a) طریقہ تجزی:

مثال 02 (i) $x^2+2x-15=0$ (ii) $2x^2-5x=12$ کو حل کریں۔

حل 1:

$$x^2+2x-15=0$$
$$\Rightarrow \quad x^2+5x-3x-15=0$$
$$\Rightarrow \quad x(x+5)-3(x+5)=0$$
$$\Rightarrow \quad (x-3)(x+5)=0$$
$$\Rightarrow \quad x-3=0 \quad \text{or} \quad x+5=0$$
$$\Rightarrow \quad x=3 \quad \text{or} \quad x=-5$$

لہٰذا، حل سیٹ $\{-5,3\}$ ہے۔

حل 2:

$$2x^2 - 5x = 12$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 5x - 12 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 8x + 3x - 12 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x(x-4) + 3(x-4) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)(2x+3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x - 4 = 0 \quad \text{یا} \quad 2x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 4 \quad \text{یا} \quad x = \frac{-3}{2}$$

لہٰذا، حل سیٹ $\left\{-\frac{3}{2}, 4\right\}$ ہے۔

مثال 02 خالص دو درجی مساوات $4m^2 - 1 = 0$ کو تجزی طریقہ سے حل کریں۔

حل:

$$4m^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (2m)^2 - (1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (2m-1)(2m-1) = 0 \quad \left[\, a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \,\right]$$
$$\Rightarrow \quad 2m - 1 = 0 \quad \text{یا} \quad 2m + 1 = 0$$
i.e
$$\Rightarrow \quad 2m = 1 \quad \text{یا} \quad 2m = -1$$
$$\Rightarrow \quad m = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad m = --\frac{1}{2}$$

لہٰذا، حل سیٹ $= \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ ہے۔

(b) طریقہ تکمیل مربع:

طریقہ نیچے بیان کیا گیا ہے۔

(i) مساوات کو معیاری شکل میں لکھیں $ax^2+bx+c = 0$

(ii) مساوات کی دونوں اطراف کو معروف عددی سر x^2 سے تقسیم کریں اگر یہ 1 نہیں ہے۔

(iii) مستقل مقدار کو دائیں ہاتھ پر منتقل کریں۔

(iv) جمع کریں $\left(\frac{x \text{ کا عددی سرا}}{2}\right)^2$ کا عددی سے

(v) بائیں ہاتھ والی مساوات کو کامل مربع کے طور پر لکھیں اور پھر دائیں ہاتھ کو حل کریں۔

(vi) معلوم مساوات کی دونوں طرف جذر (square root) لیں، مساوات کا حل تلاش کرنے کے لیے نتیجے میں آنے والی مساوات کو حل کریں اور پھر حل سیٹ لکھیں۔

$2x^2+8x-1=0$ کو حل کریں۔

حل:

$$2x^2+8x-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+8x=1 \quad \ldots \text{(i)}$$

$$\Rightarrow \quad x^2+4x=\frac{1}{2} \quad \ldots \text{(ii)}$$ (مساوات (1) کو 2 سے تقسیم دیں)

مساوات (ii) کی دونوں اطراف پر $\left[\frac{1}{2}\times 4\right]^2=4$ کو جمع کریں۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2+4x+4=\frac{1}{2}+4$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2(2)x+(2)^2=\frac{1}{2}+(2)^2$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2=\frac{1}{2}+4$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x+2=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \quad x+2=\frac{3}{\sqrt{2}}$	$x+2=-\frac{3}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow \quad x+2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$x+2=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow \quad x=-2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$x=-2-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow \quad x=\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}$	$x=\frac{-4-3\sqrt{2}}{2}$

لہٰذا، حل سیٹ $\left\{\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}, \frac{-4-3\sqrt{2}}{2}\right\}$ ہے۔

مشق 8.1

1. درج ذیل دو درجی مساوات کو تجزی طریقے سے حل کریں

(i) $x^2+5x+6=0$ (ii) $6x^2-x-1=0$ (iii) $x^2-11x+30=0$
(iv) $x^2-2x=0$ (v) $x^2-2x-15=0$ (vi) $12x^2-41x+24=0$
(vii) $(x-5)^2-9=0$ (viii) $(3x+4)^2-16=0$

2. درج ذیل میں سے ہر ایک کو تکمیل مربع طریقے سے حل کریں۔

(i) $x^2+6x+1=0$ (ii) $(3x+2)(x+2)=6-2(x+1)$. (iii) $3x^2-8x=-1$
(iv) $24x^2=-10x+21$ (v) $2(x^2-3)-3x=2(x+3)$ (vi) $2x^2+4x-1=0$

3. مساوات $x^2+bx-8=0$ کا ایک جذر (root) 2 ہے۔

(i) b کی رقم کیا ہے؟

(ii) مساوات کا دوسرا جذر کیا ہے؟

8.2 دو درجی فارمولا:

مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کو حل کرنے کے لیے ہم درج ذیل دو درجی فارمولا استعمال کرتے ہیں۔

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ دو درجی فارمولا کہلاتا ہے۔

8.2.1: بذریعہ تکمیل مربع، دو درجی فارمولا اخذ کریں۔

دو درجی مساوات کو معیاری شکل میں لکھیں۔ $ax^2+bx+c=0$ . . . (i)

کو مساوات (i) کی دونوں اطراف پر تقسیم دیں، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\dfrac{ax^2}{a}+\dfrac{bx}{a}+\dfrac{c}{a}=\dfrac{0}{a}$

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

مستقل مقدار $\dfrac{c}{a}$ کو دائیں ہاتھ پر منتقل کریں

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a} \quad . . . \text{(ii)}$$

$\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ کو مساوات (ii) کی دونوں اطراف پر جمع کریں۔

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2(x)\left(\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

8.2.2: دو درجی فارمولا سے دو درجی مساوات کو حل کریں۔

مثال 01 دو درجی فارمولا سے حل کریں

(i) $2x^2-5x-3=0$ (ii) $x^2+x+1=0$

حل 1:

$$2x^2-5x-3=0$$

یہاں $a=2, b=-5$ and $c=-3$

دو درجی فارمولا کو حل کرتے ہوئے۔

$$\because \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(-3)}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-(-24)}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm7}{4}$$

$\Rightarrow \quad x=\frac{5+7}{4}$	$x=\frac{5-7}{4}$
$\Rightarrow \quad x=\frac{12}{4}$	$x=\frac{-2}{4}$
$\Rightarrow \quad x=3$	$x=-\frac{1}{2}$

تو جذر (roots) 3 and $-\frac{1}{2}$ ہیں

لہٰذا، حل سیٹ $\left\{3,-\frac{1}{2}\right\}$ ہے۔

حل 2:

$$x^2+x+1=0$$

یہاں $a=1, b=1$ اور $c=1$

دو درجی فارمولا استعمال کرتے ہوئے۔

$$\because x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},$$

لہٰذا، حل سیٹ $=\left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$ ہے۔

مشق 8.2

درج ذیل مساوات کو دو درجی فارمولا سے حل کریں۔

(i) $x^2-2x=15$	(ii) $10x^2+19x-15=0$	(iii) $x^2=-x+1$
(iv) $2x=9-3x^2$	(v) $9x^2=12x-49$	(vi) $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1=0$
(vii) $3x^2-2x+2=0$	(viii) $6x^2-x-1=0$	(ix) $4x^2-10x=0$
(x) $x^2-1=0$	(xi) $x^2-6x+9=0$	(xii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-4}=4$

8.3 مساواتوں کو دودرجی فارم میں تبدیل کریں۔

متلف قسم کی مساوات ہیں جو دو درجی نہیں ہیں مگر انہیں دو درجی مساوات میں مناسب طریقے سے تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

8.3.1: $ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$ قسم کی مساواتوں کو دودرجی مساواتوں میں تبدیل کر کے حل کریں جہاں چورجی (quartic) دودرجی مساوات

مساوات $ax^4 + bx^2 + c = 0$ لیں، یہ چو درجی یا دو درجی مساوات ہے اور اس کو دو درجی مساوات میں تبدیل کیا جاسکتا ہے $ay^2 + by + c = 0$ جہاں $y = x^2$ طریقہ درج ذیل مثال سے بیان کیا گیا ہے۔

مثال چو درجی مساوات $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$ کو حل کریں۔

حل: $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0 \quad . \; . \; . \; \text{(i)}$

اس مساوات کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$4\left(x^2\right)^2 - 25x^2 + 36 = 0 \quad . \; . \; . \; \text{(ii)}$$

مساوات (ii) میں $y = x^2$ لگائیں"

ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$y^2 - 25y + 36 = 0$$

یہاں $a = 4, b = -25$ and $c = 36$

$$\because \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\therefore \quad y = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(4)(36)}}{2(4)}$$

$$y = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2(4)} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{25 \pm 7}{8}$$

i.e., $y = \frac{25+7}{8}$	$y = \frac{25-7}{8}$
$y = \frac{32}{8} = 4$	$y = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$
لیکن, $y = x^2$, پھر	
$x^2 = 4$	$x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \pm\frac{3}{2}$ | $x = \pm 2$

لہٰذا، حل سیٹ $\left\{\pm 2, \pm\frac{3}{2}\right\}$ = ہے۔

8.3.2 $ap(x) + \frac{c}{p(x)} = b,$ قسم کی مساواتوں کو حل کریں جہاں a, b and c ناطق اعداد ہیں۔

مثال 02 $8\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2$ کو حل کریں۔

حل:

$$8\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2 \ . \ . \ . \ \text{(i)}$$

فرض کریں $\frac{1}{\sqrt{x+3}} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \sqrt{x+3}$ اس رقم کو مساوات (i) میں لگائیں، ہمارے پاس ہے،

$$\Rightarrow \quad 8y - \frac{1}{y} = 2$$

$$\Rightarrow \quad 8y^2 - 1 = 2y$$

$$\Rightarrow \quad 8y^2 - 2y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 8y^2 - 4y + 2y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4y(2y-1) + 1(2y-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (4y+1)(2y-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4y + 1 = 0 \qquad | \qquad 2y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-1}{4} \qquad | \qquad y = \frac{1}{2},$$

$$y = -\frac{1}{4}, \qquad | \qquad y = \frac{1}{2}, \text{ پھر },$$

$$\sqrt{x+3} = -\frac{1}{4} \qquad | \qquad \sqrt{x+3} = \frac{1}{2}$$

دونوں طرف قوت نما 2 ہیں۔

$$\Rightarrow \quad x + 3 = \frac{1}{16} \qquad | \qquad x + 3 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{16} - 3 \qquad\qquad x = \frac{1}{4} - 3$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1-48}{16} \qquad\qquad x = \frac{1-12}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{47}{16} \qquad\qquad x = -\frac{11}{4}$$

تصدیق:

$$8\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2$$

$x = -\frac{11}{4}$ کو مندرجہ بالا مساوات میں لگائیں $x = -\frac{47}{16}$ کو مندرجہ بالا مساوات میں لگائیں۔

$$8\sqrt{\frac{-47}{16}+3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-47}{16}+3}} = 2 \qquad\qquad 8\sqrt{\frac{-11}{4}+3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-11}{4}+3}} = 2$$

$$8\sqrt{\frac{-47+48}{16}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-47+48}{16}}} = 2 \qquad\qquad 8\sqrt{\frac{-11+12}{4}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-11+12}{4}}} = 2$$

$$8\sqrt{\frac{1}{16}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16}}} = 2 \qquad\qquad 8\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2$$

$$8\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 2 \qquad\qquad 8\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

$$2 - 4 = 2 \qquad\qquad 4 - 2 = 2$$

$$-2 \neq 2 \qquad\qquad 2 = 2$$

غیر تصدیق شدہ   تصدیق شدہ

لہٰذا، حل سیٹ = $\left\{-\frac{11}{4}\right\}$ ہے۔

8.3.3: $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$ قسم کی معکوس مساواتوں کو حل کریں، جہاں a, b, c ناطق اعداد ہیں۔

کثیر رقمی مساوات معکوس مساوات کہلاتی ہے اگر یہ x کی جگہ $\frac{1}{x}$ درج کرنے سے تبدیل نہ ہو۔

$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$ قسم کی معکوس مساواتوں کو حل کرنے کا طریقہ جہاں a, b, c ناطق اعداد ہیں کو نیچے مثال سے ظاہر کیا گیا ہے۔

مثال 01 $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$ کو حل کریں۔

حل:

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0 \ldots$ (i)

$x+\frac{1}{x}=y,$ پھر $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ تو مساوات (i) ہو جائے گی۔

$$2\left(y^2-2\right)-9y+14=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2-9y+10=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2-4y-5y+10=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y(y-2)-5(y-2)=0$$

$$\Rightarrow \quad (y-2)(2y-5)=0$$

لہٰذا، حل سیٹ ہے۔

i.e. $y-2=0$	$2y-5=0$
$\Rightarrow \quad y=2$	$y=\frac{5}{2}$
$y=x+\frac{1}{x},$ پھر	$y=x+\frac{1}{x},$ پھر
$x+\frac{1}{x}=2$	$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$
$\Rightarrow \quad x^2+1=2x$	$\Rightarrow \quad \frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$
$\Rightarrow \quad x^2-2x+1=0$	$\Rightarrow \quad 2x^2+2=5x$

$$\Rightarrow \quad 2x^2-5x+2=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2-4x-x+2=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x(x-2)-1(x-2)=0$$
$$\Rightarrow \quad (x-2)(2x-1)=0$$
$$\Rightarrow \quad x-2=0$$
$$\Rightarrow \quad x=2$$
$$\Rightarrow \quad 2x-1=0$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2=0$$
$$\Rightarrow \quad x-1=0$$
$$\Rightarrow \quad x=1$$

حل سیٹ = $\left\{\frac{1}{2}, 2, 1\right\}$

8.3.4: قوت نمائی مساواتوں جن کے متغیر قوت ماؤں میں ہوں، حل کریں۔

ایسی مساواتیں جن میں متغیر قوت نماؤں میں ہو، قوت نمائی مساواتیں کہلاتی ہیں۔ اس قسم کی مساواتوں کا حل نیچے دی گئی مثال سے واضح کیا گیا ہے۔

مثال 02 $7^{1+x}+7^{1-x}=50$ کو حل کریں۔

حل

$$7^{1+x}+7^{1-x}=50 \qquad \ldots (i)$$

$$7.7^{x}+7.7^{-x}-50=0$$ (قوت نماؤں کو تقسیم کریں)

$$\Rightarrow \quad 7.7^{x}+\frac{7}{7^{x}}=50 \qquad \ldots (ii)$$

$y=7^x$ فرض کریں

$\therefore$ مندرجہ ذیل بالا مساوات (ii) درج ذیل میں تبدیل ہوتی ہے۔

$$7y+\frac{7}{y}-50=0,$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2+7-50y=0$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2-50y+7=0$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2-49y-y+7=0$$
$$\Rightarrow \quad 7y(y-7)-1(y-7)=0$$
$$\Rightarrow \quad (7y-1)(y-7)=0$$

$$\Rightarrow \quad 7y-1=0 \qquad\qquad y-7=0$$
$$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{7} \qquad\qquad \Rightarrow \quad y=7$$
$$\text{then } 7^x=7^{-1} \qquad\qquad y=7 \text{ then } 7^x=7^1$$
$$\Rightarrow \quad x=-1 \qquad\qquad x=1$$

لہٰذا، حل سیٹ $\{-1,1\}=$ ہے۔

8.3.5: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=k,$ قسم کی مساواتوں کو جبکہ $a+b=c+d$ اور مستقل مقدار $k\neq 0$ کو حل کریں۔

مثال 01

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=48$

حل

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=48$

دوبارہ ترتیب دے کر۔

$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=48$

$(x^2+4x+x+4)(x^2+2x+3x+6)=48$

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=48 \ldots \text{(i)}$

$x^2+5x=t$ فرض کریں

(i) مساوات میں لگا کر۔

$$\Rightarrow \quad (t+4)(t+6)=48$$
$$\Rightarrow \quad t^2+4t+6t+24=48$$
$$\Rightarrow \quad t^2+10t-24=0$$
$$\Rightarrow \quad t^2+12t-2t-24=0$$
$$\Rightarrow \quad t(t+12)-2(t+12)=0$$
$$\Rightarrow \quad (t+12)(t-2)=0$$

$$\Rightarrow \quad t+12=0 \qquad\qquad t-2=0$$
$$\Rightarrow \quad t=-12 \qquad\qquad t=2$$

مساوات (ii) میں رکھنے سے | مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$\Rightarrow \quad x^2+5x=-12 \qquad\qquad x^2+5x=2$$
$$\Rightarrow \quad x^2+5x+12=0 \qquad\qquad x^2+5x-2=0$$

Here: $a=1, b=5$ and $c=12$,

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{25-48}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{-23}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm i\sqrt{23}}{2}$$

Here: $a=1, b=5$ and $c=-2$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+8}}{2}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$$

لہٰذا، حل سیٹ $\left\{\frac{-5\pm i\sqrt{23}}{2}, \frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}\right\}$ ہے۔

مشق 8.3

درج ذیل مساوات کو حل کریں۔

1. $x^4-8x^2-9=0$
2. $x^4-3x^2-4=0$
3. $12x^4-11x^2+2=0$
4. $\frac{2x+3}{x+1}+6\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)=7$
5. $\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2+1}}+6\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2+1}}=5$
6. $5^{x+1}+5^{2-x}=5^3+1$
7. $2^x+\frac{16}{2^x}=8$
8. $2\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x+1}\right)+2=0$
9. $4\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-4\left(\frac{x}{x-1}\right)+1=0$
10. $9^{x+2}-6\cdot 3^{x+1}+1=0$
11. $2^2+2^{-x+6}-20=0$
12. $(x-1)(x+5)(x+8)(x+2)=880$
13. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$
14. $(x-2)(x+1)(x+3)(x-4)=24$

8.4 جذری مساواتیں

مساوات جس میں متغیر کے جذری جملے شامل ہوں جذری مساواتیں کہلاتی ہیں

جذری مساواتوں کے حل کی تصدیق ہونے چاہیے کیونکہ اس کے جذر خارجی ہو سکتے ہیں۔

8.4.1: اس قسم کی مساوتوں کا حل:

Type (i) $\sqrt{ax+b} = cx + d$ Type (ii) $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{x+c}$

Type (iii) $\sqrt{x^2 + px + m} + \sqrt{x^2 + px + n} = q$

مثال قسم(i) $\sqrt{ax+b} = cx + d$

Solve $\sqrt{217-x} = x-7$

حل

$\sqrt{217-x} = x-7$

دونوں اطراف پر قوت نما 2 لیں

$\left(\sqrt{217-x}\right)^2 = (x-7)^2$

$\Rightarrow \quad 217-x=(x-7)^2$

$\Rightarrow \quad 217-x=x^2-14x+49$

$\Rightarrow \quad x^2-13x-168=0$

$\Rightarrow \quad x^2-21x+8x-168=0$

$\Rightarrow \quad x(x-21)+8(x-21)=0$

$\Rightarrow \quad (x-21)(x+8)=0$

i.e. $x=21$ *or* $x=-8$

تصدیق $:x=21$

$\sqrt{217-x} = x-7$

$\therefore \quad \sqrt{217-21} = 21-7$

$\Rightarrow \quad \sqrt{196} = 14$

$\Rightarrow \quad 14 = 14$

تصدیق

تصدیق $x=-8$

$\sqrt{217-x} = x-7$

$\therefore \quad \sqrt{217-(-8)} = -8-7$

$\Rightarrow \quad \sqrt{225} = 15$

$\Rightarrow \quad 15 \neq -15$

غیر تصدیق شدہ

لہٰذا، حل سیٹ $=\{21\}$

(ii)قسم $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{x+c}$

مثال

Solve: $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

حل

$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

دونوں اطراف پر قوت نما2 لگائیں، ہم حاصل ہوتا ہے۔

$(\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{6x+13})^2$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{x+7})^2 + 2(\sqrt{x+7})(\sqrt{x+2}) + (\sqrt{x+2})^2 = 6x+13$

$\Rightarrow \quad x+7+2\sqrt{(x+7)(x+2)} + x+2 = 6x+13,$

$\Rightarrow \quad 2x+9+2\sqrt{x^2+7x+2x+14} = 6x+13$

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{x^2+9x+14} = 4x+4$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+9x+14} = 2x+2$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+9x+14} = 2(x+1)$

دوبارہ دونوں اطراف پر قوت نما2 لیں

$\left(\sqrt{x^2+9x+14}\right)^2 = [2(x+1)]^2$

$\Rightarrow \quad x^2+9x+14 = 4(x+1)^2$

$\Rightarrow \quad x^2+9x+14 = 4(x^2+2x+1)$

$\Rightarrow \quad x^2+9x+14 = 4x^2+8x+4$

$\Rightarrow \quad 3x^2-x-10 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x^2+5x-6x-10 = 0$

$\Rightarrow \quad x(3x+5)-2(3x+5) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-2)(3x+5) = 0$

$x-2 = 0$

$x=2$

تصدیق:

جب $x=2$

$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

$3x+5 = 0$

i.e. $x = -\frac{5}{3}$

تصدیق:

جب $x = -\frac{5}{3}$

$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

$$\sqrt{-\frac{5}{3}+7}+\sqrt{-\frac{5}{3}+2}=\sqrt{6\left(-\frac{5}{3}\right)+13}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{16}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{\sqrt{3}}\neq\sqrt{3}$$

غیر تصدیق شدہ

$$\sqrt{2+7}+\sqrt{2+2}=\sqrt{6(2)+13},$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{9}+\sqrt{4}=\sqrt{25}$$

$$\Rightarrow \quad 3+2=5$$

$$\Rightarrow \quad 5=5$$

تصدیق شدہ

کیوں: $-\frac{5}{3}$ خارجی جذر ہے اس لیے حل $x=2$، لہٰذا، حل سیٹ $=\{2\}$ ہے۔

قسم (iii): $\sqrt{x^2+px+m}+\sqrt{x^2+px+n}=q$

مثال 01

Solve: $\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$

حل: Put $y=x^2-3x$ لکھیں، معلوم مساوات میں، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$

$$\sqrt{y+21}-\sqrt{y+5}=2$$

$$\sqrt{y+21}=2+\sqrt{y+5}$$

دونوں اطراف پر قوت نما 2 لیں

$$y+21=(2)^2+4\sqrt{y+5}+(\sqrt{y+5})^2$$

$$\Rightarrow \quad y+21=(2)^2+4\sqrt{y+5}+\left(\sqrt{y+5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad y+21=4+4\sqrt{y+5}+y+5$$

$$\Rightarrow \quad 4\sqrt{y+5}=y+21-4-y-5$$

$$\Rightarrow \quad 4\sqrt{y+5}=12$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{y+5}=3$$

دوبارہ دونوں اطراف پر قوت نما 2 لیں، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Rightarrow \quad y+5=9$$

$$\Rightarrow \quad y=4,$$

$y=4$ لیں $y=x^2-3x$ کی جگہ پر ہمارے پاس ہے۔

$$4=x^2-3x,$$
$$\Rightarrow \quad x^2-3x-4=0,$$
$$\Rightarrow \quad x^2-4x+x-4=0,$$
$$\Rightarrow \quad x(x-4)+1(x-4)=0,$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)(x+1)=0,$$
i.e., $x-4=0$
$$\Rightarrow \quad x=4,$$

تصدیق:

جب $x=4$

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$
$$\sqrt{(4)^2-3(4)+21}-\sqrt{(4)^2-3(4)+5}=2$$
$$\sqrt{16-12+21}-\sqrt{16-12+5}=2$$
$$\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$$
$$5-3=2$$
$$2=2$$

$$x+1=0$$
$$x=-1,$$

تصدیق:

جب $x=-1$

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$
$$\sqrt{(-1)^2-3(-1)+21}-\sqrt{(-1)^2-3(-1)+5}=2$$
$$\sqrt{1+3+21}-\sqrt{1+3+5}=2$$
$$\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$$
$$5-3=2$$
$$2=2$$

لہٰذا دونوں جذر معلوم مساوات کو مطمئن کرتے ہیں، لہٰذا حل سیٹ {-1,4} ہے۔

مشق 8.4

درج ذیل مساوات کو حل کریں۔

1. $x+\sqrt{x+5}=7$
2. $\sqrt{x-2}=8-x$
3. $\sqrt{7-5x}+\sqrt{13-5x}=3\sqrt{4-2x}$
4. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=\sqrt{6x+13}$
5. $\sqrt{2x^2+3x+4}+\sqrt{2x^2+3x+9}=5$
6. $\sqrt{y^2-3y+9}-\sqrt{y^2-3y+36}+3=0$

اعادہ مشق 8

1. خالی جگہ پُر کریں۔

(i) کثیر رقمی مساوات جس میں متغیر کی ڈگری ______ ہو دودرجی مساوات کہلاتی ہے۔

(ii) دودرجی مساوات کی معیاری شکل ______ ہوتی ہی۔

(iii) $3^x + 3^{2x} = 1$ ______ مساوات کہلاتی ہے۔

(iv) $3^x = 9$ ______ کا حل ہے۔

(v) $ax^2 + bx + c = 0$ ______ کا حل ہے

2. درست جواب پر (✓) لگائیں۔

(i) دودرجی مساوات کی ڈگری ہے:

(ا) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(ii) دودرجی مساوات کی معیاری شکل ہے:

(ا) $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ (ب) $ax^2 + c = 0, a \neq 0$

(ج) $ax^2 + bx = 0, a \neq 0$ (د) $ax^3 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$

(iii) $ax^2 + bx + c = 0$ کے لیے دودرجی فارمولا ہے۔

(ا) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}$ (ب) $\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(ج) $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (د) $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

(iv) $x^2 + 10x + 24 = 0$ کا حل سیٹ ہے:

(ا) {−6 , −4} (ب) {−6 , 4} (ج) {6 , 4} (د) {6 , −4}

(v) دودرجی مساوات میں رقموں کی تعداد ہے:

(ا) 2 (ب) 3 (ج) 1 (د) 4

(vi) $x^2 - 15x + 56$ کے دو یک درجی فیکٹرز ہیں:

(ا) $(x-7)$ and $(x+8)$ (ب) $(x+7)$ and $(x-8)$

(ج) $(x-7)$ and $(x-8)$ (د) $(x+7)$ and $(x+8)$

(vii) کثیر رقمی مساوات جو $\frac{1}{x}$ کی جگہ a/ an درج کرنے سے تبدیل نہ ہوں کہلاتی ہے۔

(ا) قوت نمائی مساوات (ب) معکوس مساوات

(ج) جذری مساوات (د) ان میں سے کوئی نہیں

(viii) کثیر رقمی مساوات جو $3^x + 3^{2-x} + 6 = 0$ کی جگہ a/an درج کرنے سے تبدیل نہ ہوں کہلاتی ہے۔

(ا) قوت نمائی مساوات (ب) معکوس مساوات

(ج) جذری مساوات (د) ان میں سے کوئی نہیں

(ix) $4x^2 - 16 = 0$ کا حل سیٹ ہے:

(ا) $\{\pm 4\}$ (ب) $\{4\}$ (ج) $\{\pm 2\}$ (د)

(x) $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x + 2 = 0$ قسم کی مساوات کہلاتی ہے:

(ا) معکوس مساوات (ب) جذری مساوات

(ج) قوت نمائی مساوات (د) ان میں سے کوئی نہیں

3. درست اور غلط سوالات:

درج ذیل جملوں کو دھیان سے پڑھیں اور درست کی صورت میں 'د' پر اور غلط کی صورت میں 'غ' پر دائرہ لگائیں۔

(i) ہم دو درجی مساوات تجزی طریقے سے حل ہو سکتی ہے۔ (د/غ)

(ii) ہر چو درجی مساوات کے 2 جذر ہوتے ہیں۔ (د/غ)

(iii) ہر کیوبک مساوات کے 3 جذر ہوتے ہیں۔ (د/غ)

(iv) $ax^2 + bx + c = 0$ میں دو درجی مساوات ہے اگر x $a=0$ and b, c حقیقی اعداد ہیں۔ (د/غ)

(v) خارجی جذر مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔ (د/غ)

(vi) خارجی جذر مساوات کو مطمئن نہیں کرتا۔ (د/غ)

(vii) دو درجی مساوات کا سب سے بڑا قوت نما متغیر کا 2 ہے۔ (د/غ)

خلاصہ

- ایک کثیر رقمی مساوات جس کا متغیر 2 ہو دو درجی مساوات کہلاتی ہے۔
- $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ a, b, c$ حقیقی اعداد ہوں تو یہ دو درجی مساوات کا معیاری شکل کہلاتی ہے۔
- دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ کا فارمولا ہے is $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- قوت نمائی مساوات میں، متغیر قوت نما میں ہوتے ہیں۔
- ایسی مساوات جس میں جذری علامت کے اندر کوئی جملہ ہو جذری مساوات کہلاتی ہے۔