یونٹ 7

خطی یالائن (لینئر) گراف اور اس کے مستعملات

LINEAR GRAPH AND THEIR APPLICATION

حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- دو حقیقی نمبرز کے جوڑے کی بطور مترتب جوڑا (ordered pair) پہچان کر سکیں۔
- مترتب جوڑوں کی مختلف مثالوں کے ذریعے شناخت کر سکیں۔ مثال کے طور پر ایک مترتب جوڑا (2, 3) ہے جو امتحانی ہال میں موجود ایک نشست کو ظاہر کرتا ہے، جو دوسری قطار اور تیسرے کالم کے چوراہے پر ہے۔
- مستطیلی / کارتیسی پلین بیان کریں جو دو عددی خطوط پر مشتمل ہو اور ایک دوسرے کو مشترک نقطہ 0 پر موجود دائیں زاویہ پر کاٹتی ہوں۔
- مستطیلی پلین میں مشترک نقطہ 0 اور کوآرڈینیٹ ایکسز (بالترتیب افقی اور عمودی ایکسز یا z ایکسز، ایکسز کی شناخت کریں۔
- مترتب جوڑے کی مناسبت سے مستوی میں نقطہ (a,b) کی نشاندہی کریں جس میں:
  - 'a' کو بطور x کوآرڈینیٹ (obcissa)
  - 'b' کو بطور y کوآرڈینیٹ (ordinate)
- معلوم نقاط کے سیٹ کو ملا کر مختلف جیومیٹریکل اشکال (مثلاً، قطعہ خط، مثلث اور مستطیل وغیرہ) بنائیں۔
- دو متغیرات میں خطی مساوات کو مطمئن کرنے والے رقموں کے جوڑوں کا جدول بنائیں۔
- دیے گئے جملوں کا گراف حاصل کرنے کے لیے نقاط کے جوڑے پلاٹ کریں۔
- گراف کھینچنے کے لیے مناسب پیمانے کا انتخاب کریں۔

- گراف بنائیں:
  - قسم کی مساوات کا $y = c.$
  - قسم کی مساوات کا $x = a.$
  - قسم کی مساوات کا $y = mx.$
  - قسم کی مساوات کا $y = mx + c.$
- x اور y کی رقوم کے دیے گئے جدول سے گراف کھینچیں۔
- عملی زندگی سے وابستہ مسائل کو حل کرنے کا شعور حاصل کر سکیں۔
- کنورشن گراف کو دو مقداروں سے متعلق خطی گراف سے تعبیر کریں جو براہ راست تناسب میں ہیں۔
- ایک دن کئی گراف کو پڑھیں تا کہ ایک مقدار دوسری سے ملتی ہو۔
- اس قسم کے تبادلوں کے لیے گراف پڑھیں:
  - میل اور کلومیٹر
  - ایکڑ اور ہیکٹر
  - ڈگری سیلسیئس اور فارن ہائیٹ
  - پاکستانی کرنسی اور دوسری کرنسی وغیرہ
- دو متغیرات میں دو خطی لینیئر مساواتوں کو گراف کی مدد سے حل کرنا۔

7.1 کارتیسی مستوی اور خطی گراف

7.1.1: حقیقی اعداد کے مترتب جوڑے کی شناخت کریں۔

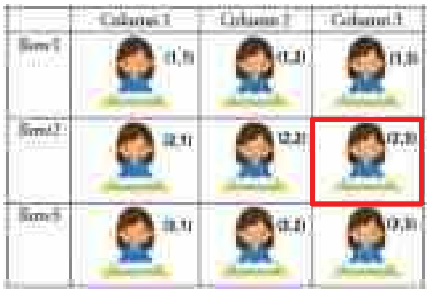
دو حقیقی نمبرز کا ایک جوڑا مترتب جوڑا کہلاتا ہے۔ جس میں اس کے ارکان کو ایک مقررہ خاص ترتیب یا اصول کے مطابق درج کیا گیا ہو۔

7.1.2: مترتب جوڑوں کی مختلف مثالوں کے ذریعے شناخت کریں۔ مثال کے طور پر ایک مترتب جوڑا (2,3) ہے جو امتحانی ہال میں موجود ایک نشست کو ظاہر کرتا ہے۔ جو دوسری قطار اور تیسرے کالم کے چوراہے پر ہے۔

آیئے اپنے گرد نواح کی درج ذیل مثالیں دیکھیں۔ ان مثالوں کی وجہ سے ہم قطاروں اور کالموں کے ذریعے کسی شے کی پوزیشن کو پہچان سکتے ہیں یعنی مترتب جوڑے بناتے ہیں۔ مترتب جوڑا کسی شے یا جگہ کی پوزیشن کی نمائندگی کرتا ہے۔

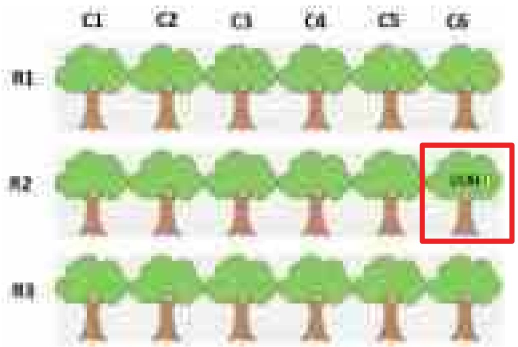
مثال 01

مترتب جوڑا (2,3) امتحانی ہال میں طالب علم کی پوزیشن کو ظاہر کرتا ہے دوسری قطار اور تیسرے کالم کے طور پر اسی طرح ہال میں موجود ہر طالب علم ایک منفرد مترتب جوڑے کے ساتھ ہے۔



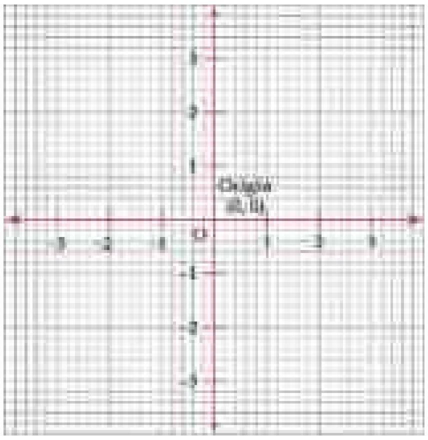
مثال 02

اگر ایک کسان نے برابر فاصلے پر باغ میں درختوں کی منصوبہ بندی کی ہے، تو (2,6) درخت کی نمائندگی کرتا ہے جو باغ میں دوسری قطار اور چھٹے کالم پر واقع ہے۔

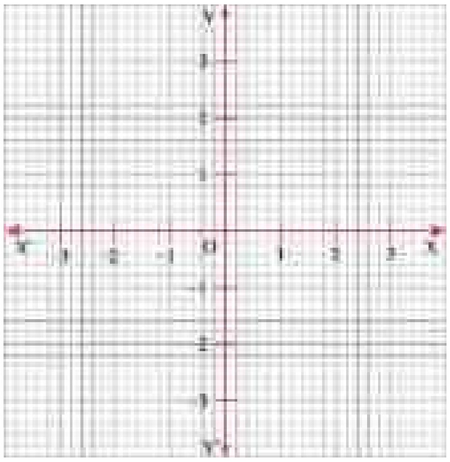


7.1.3: مستطیلی / کارتیسی پلین بیان کریں جو دو عددی خطوط پر مشتمل ہو اور ایک دوسرے کو مشترک نقطہ O پر موجود دائیں زاویہ پر کاٹتی ہوں۔

کارتیسی (مستطیلی) کو آرڈینیٹ سسٹم دو حقیقی عددی خطوط پر مشتمل ہوتا ہے جو مشترک نقطہ O پر موجود دائیں زاویہ پر ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں۔ یہ دو عددی خطوط ہموار سطح کو بیان کرتی ہیں یہ کارتیسی مستوی کہلاتا ہے۔



7.1.4: مستطیل پلین میں مشترک نقطہ O اور کوآرڈینیٹ ایکسز (بالترتیب افقی اور عمدی یا____ ایکسز، ____ ایکسز کی شناخت کریں۔



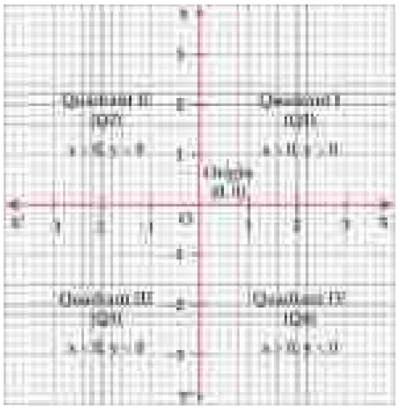
کارتیسی کو آرڈینیٹ سسٹم میں، افقی عددی خط کو x ایکسز اور عمودی عددی خط کو y ایکسز کہا جاتا ہے۔ وہ نقطہ جہاں د ونوں خطوط آپس میں ملتی ہیں اور اصل (origin) کہلاتا ہے اور اسے 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

دی گئی شکل میں افقی خط x ایکسز اور عمودی خط y ایکسز کہلاتا ہے۔ کارتیسی مستوی کا وہ نقطہ جہاں دونوں خطوط ملتے ہیں پلین کا اور اصل (origin) ہے جو کہ 'O' ہے۔

7.1.5: مترتب جوڑے a,b کی مناسبت سے مستوی میں نقطہ کی نشاندہی کریں جس میں

- 'a' کو بطور x کو آرڈینیٹ (abscissa)
- 'b' کو بطور y کو آرڈینیٹ (ordinate)

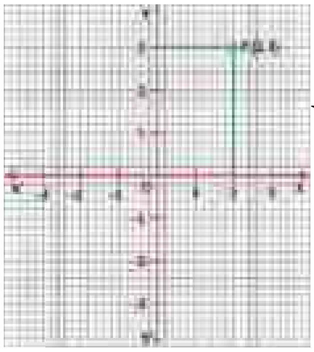
عام طور پر، کارتیسی مستوی کے کسی بھی نقطہ کی نمائندگی مترتب جوڑے (a,b) کے ذریعے کی جا سکتی ہے۔ جہاں 'a' کو آرڈینیٹ (abscissa) ہے اور b کو y کو آرڈینیٹ (ordinate) کہتے ہیں۔



مستوی میں ایک نقطہ تلاش کرنے کے لیے، ہمیں اس کے x کو آرڈینیٹ کا پتہ ہونا چاہیے، جو اس کا y ایکسز اور y کو آرڈینیٹ سے افقی فاصلہ ہے اور x ایکسز سے اس کا عمودی فاصلہ ہے۔

x ایکسز اور y ایکسز کارتیسی مستوی کو چار کو آرڈرنٹس میں تقسیم کرتے ہیں جن کو رومن عدد I,II,III,IV نام دیا گیا ہے۔ کارتیسی مستوی کو xy مستوی بھی کہا جاتا ہے۔

- کو آڈرنیٹ I میں، دونوں x اور y کو آرڈینیٹس مثبت ہوتے ہیں
  x>0 اور y>0
- کو آرڈینیٹ II میں x کو آرڈینیٹ منفی اور y- کو آرڈینیٹ مثبت ہوتا ہے x<0 اور y>0
- کو آرڈینیٹ III میں x اور y- کو آرڈینیٹ منفی ہوتے ہیں x<0 اور y>0
- کو آرڈینیٹ IV میں x- کو آرڈینیٹ مثبت اور y- کو آرڈینیٹ منفی ہوتا ہے x>0 اور y<0
- اور جن (origin) پر x=y=0 ہوتا ہے تو اور یجن کے کو آرڈینیٹس (0,0) ہوتے ہیں۔



کارتیسی مستوی (x,y) میں نقطہ کو گراف میں لگانے کا طریقہ:

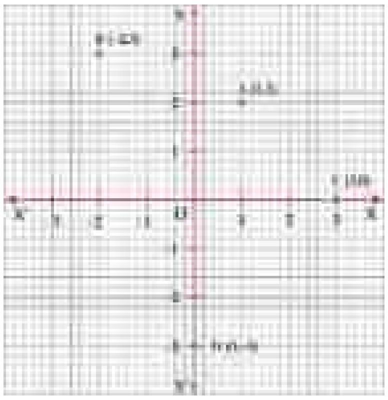
آیئے ہم مثالوں کے ذریعے پڑھیں کے کارتیسی مستوی میں نقطہ کو کس طرح پلاٹ کیا جاتا ہے۔

(2,3) مستوی میں نقطہ (x,y) کو پلاٹ کرنے کے لیے اور یجن سے شروع کریں y ایکسز کی دائیں طرف 2 یونٹ پر پہنچیں اور پھر x ایکسز سے 3 یونٹ اوپر کی طرف جائیں جس طرح شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ہم نقطہ x پر پہنچ جائیں گے جو P کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 01 درج ذیل نقاط کا بیسا اور آرڈینیٹ کا تعین کریں اس میں ربع کا ذکر بھی کریں جس میں نقطہ واقع ہے۔

نقاط کا مقام تلاش کریں۔

(i) A (1, 2)　(ii) B (-2, 3)　(iii) C (3, 0)　(iv) D (0, -3)



حل: پیمانہ (Escale) 5 چھوٹے مربع 1 یونٹ

1) **A (1, 2)**

یہاں ابیسیسا 1 یونٹ اور ڈینیٹ 2 یونٹ ہیں۔ کیونکہ $x > 0$ اور $y > 0$ تو معلوم نقاط ربع (Quadrant) I میں واقع ہیں۔

(ii) **B (–2, 3)**

یہاں ابیسیسا 2 اور اورڈینیٹ 3 ہے۔ $y > 0$ اور $x < 0$ تو دیے گئے نقاط ربع II میں واقع ہیں۔

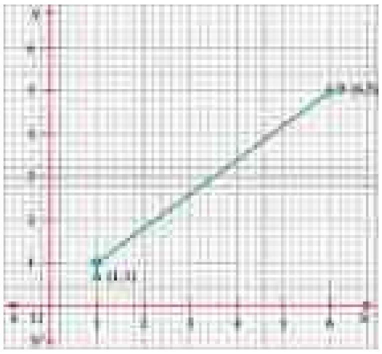
(iii) **C (3, 0)**

یہاں ابیسیسا 3 یونٹ اور اورڈینیٹ 0 یونٹ ہے، اسی لیے نقطہ x ایکسز پر موجود ہے، i.e. اور یجن (origin) کے دائیں طرف۔

(iv) **D(0, -3)**

یہاں، ابسیسا 0 یونٹ اور اورڈینیٹ 3- یونٹ ہے اسی لیے نقطہ y ایکسز پر موجود ہے i.e. اور یجن کے نیچے۔

7.1.6: مختلف جیومیٹریکل اشکال (قطعہ خط، مثلث اور مستطیل وغیرہ) بنائیں۔



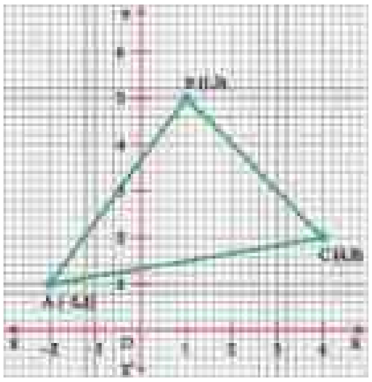
پچھلی جماعتوں میں ہم نے کئی جیومیٹریکل اشکال کے مواد کے بارے میں مطالعہ کیا ہے اور یہ بھی مطالعہ کیا ہے کہ دی گئی معلومات کے مطابق انہیں کس طرح بنایا جائے۔ اب ہم دیے گئے نقاط کا استعمال کرتے ہوئے گراف پیپر پر مختلف جیومیٹریکل اشکال بنائیں گے۔

مثال 01 ایک قطعہ خط AB کھینچیں جس کے اختتامی نقاط A(1,1) اور B(6,5) ہیں۔

طریقہ: پیمانہ: 5 چھوٹے مربع 1 یونٹ۔

پہلے ہم گراف پیپر پر خط کے نقاط ڈھونڈتے ہیں پھر ان کو ملا کر ہمیں قطعہ خط AB حاصل ہوتا ہے جیسا تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

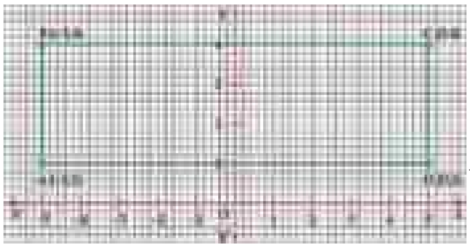
مثال 02 شلث ABC بنائیں جس کے راس A (-2,1), B(1,5) اور C(4, 2) ہے۔



طریقہ: پیمانہ: 5 چھوٹے مربع - 1 یونٹ

پہلے، ہم نقاط A, B, and C کو گراف پیپر پر پلاٹ کریں گے۔
پھر ہم ΔABC بنانے کے لیے ان کو ملائیں گے جس طرح تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 03 ایک مستطیل ABCD بنائیں جس کے راس A (-5, 1), B (-5, 4), C(5, 4) and D (5, 1) ہیں۔



طریقہ: پیمانہ: 5 چھوٹے مربع - 1 یونٹ۔

نقاط A (-5, 1), B (-5, 4), C(5, 4) and D(5, 1) کو گراف پیپر پر پلاٹ کریں۔

گراف پیپر پر نقاط A to B, B to C, C to D and D to A سے ملائیں جس کا نتیجہ ABCD مستطیل ہے۔

7.1.7: دو متغیرات میں خطی مساوات کو مطمئن کرنے والی رقموں کے جوڑوں کا جدول بنائیں۔

یہ نیچے دی گئی مثالوں کی مدد سے بیان کیا جاسکتا ہے:

مثال 03 فرض کریں $x+y=5$ ایک خطی مساوات ہے بالترتیب دو متغیر x and y میں۔

حل: معلوم ہے کہ $x+y=5$ جس کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے: $y=5-x$

اب جدول تیار کریں x کی رقوم لکھیں اور ان سے متعلقہ y کی رقوم حاصل کریں۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	8	7	6	5	4	3	2	...

مشق 7.1

.1 درج ذیل میں سے x اور y کو آرڈینیٹ کی پہچان کریں۔

i. A(-2, 2) ii. B(5, -1) iii. C(4, 0)
iv. D(-5, -6) v. E(3, 4) vi. F($-\sqrt{8}$, $\sqrt{8}$)

.2 ربع (Quadrant) کی نشاندہی کریں جس میں درج ذیل نقاط موجود ہیں۔

i. A(2, -1) ii. B(-3, 3) iii. C($2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$)
iv. D(-2, -4) v. E(5, 4) vi. F$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

.3 درج ذیل نقاط **A, B, C and D** کو **xy** مستوی میں لگائیں۔

i. A(2, 1), B(3, 2), C(-3, 4), D(-4, -5)
ii. A(2, 0), B(0, 2), C(3, -3), D(-3, 3)
iii. A(0, 0), B(-3, -3), C(5, -6), D(-6, 5)

.4 نقاط AB کو ملا کر قطعہ خط (-6, 8) B اور A(4, 6) کھینچیں۔

.5 نقاط ABC کو ملا کر مثلث C(3,-2) اور A(-1,4), B(-3,-6) کھینچیں۔

.6 نقاط ABCD ملا کر مستطیل D(7, 5) اور A(0, -1), B(0, 5), C(7, -1) کھینچیں۔

.7 نقاط OABC ملا کر مربع C(0, 5) اور O(0, 0), A(5, 0), B(5, 5) بنائیں۔

.8 نقاط OABC ملا کر متوازی الاضلاع C (6, 4) اور O(0, 0), A(2, 4), B(5, 0) بنائیں۔

.9 درج ذیل خطی مساوات کا x and y کی چند رقوم کا جدول بنائیں۔

i. $x+y-2=0$ ii. $2x-y-2=4$

iii. $\frac{1}{2}(x+2y)-6=0$ iv. $\frac{2}{3}(x-2y)=-2$

7.1.8: دیے گئے جملوں کا گراف حاصل کرنے کے لیے نقاط کے جوڑے پلاٹ کریں۔

فرض کریں کہ خطی مساوات $y=2x$ دو متغیرات پر مشتمل ہے۔ یہاں x کو آزاد متغیر (independent veriable) اور y کو منحصر متغیر (dependent variable) کہا جاتا ہے۔ کیونکہ y کی رقم x کی رقم پر منحصر ہے۔ دی گئی مساوات کا گراف بنانے کے لیے ہم x اور y کے لیے رقوم کا جدول بناتے ہیں، اور پھر ان مترتب جوڑوں کو کو آرڈینیٹ مستوی پر پلاٹ کرتے ہیں۔ ایک خط کا تعین کرنے کے لیے دو نقاط کافی ہیں۔ تاہم ممکنہ غلطیوں سے بچنے کے لیے دو

7.1.10: گراف بنائیں۔

* $y=c$ قسم کی مساوات کا۔
* $x=a$ قسم کی مساوات کا۔
* $y=mx$ قسم کی مساوات کا۔
* $y=mx+c$ قسم کی مساوات کا۔

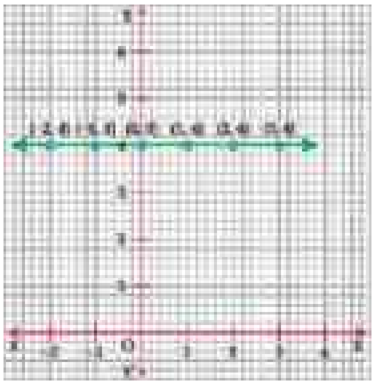
7.1.10:(i)

$y=4$ قسم کی مساوات کا گراف بنائیں۔

مثال 01 کا گراف بنائیں۔پیمانہ 5 چھوٹے مربع 1 یونٹ

حل: گراف بنانے کے لیے جدول بنائیں۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	4	4	4	4	4	4	4	...



$y=4$ کا گراف تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

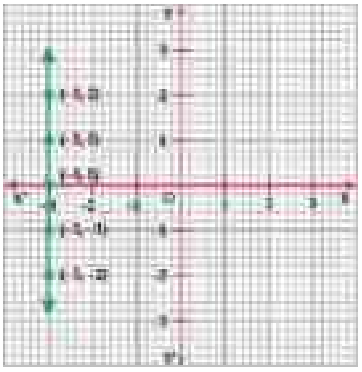
نوٹ:
$y=c$ کا گراف x-axis ایکسز کے متوازی ہے۔

7.1.10:(ii)

مثال 01 $x=-3$ قسم کی مساوات کا گراف بنائیں،پیمانہ 5 چھوٹے مربع-1 یونٹ

طریقہ: گراف بنانے کے لیے جدول بنائیں۔

x	-3	-3	-3	-3	-3	...
y	-2	-1	0	1	2	...

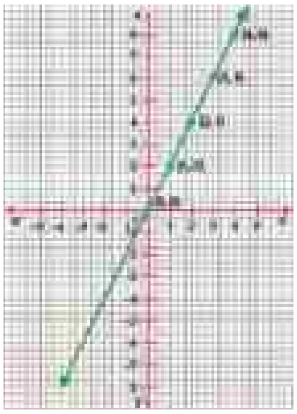


مساوات کا گراف تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

نوٹ:
$x=a$ کا گراف y-axis ایکسز کے متوازی ہوتا ہے۔

x	0	1	2	3	4	...
y	0	2	4	6	8	...

مسلسل مترتب جوڑے (x,y) کو گراف میں جمع کرتے ہوئے جہاں y- کی رقم x- کی رقم سے دوگنا ہے۔ پھر ہم نقاط کے ذریعے ایک کھینچتے ہے تاکہ خط پر موجود تمام نقاط کو دکھایا جاسکے۔ گراف کے ہر سرے پر موجود تیر اشارہ کرتے ہیں کہ خط دونوں سمتوں میں لاتناہی جاری ہے۔ نتیجہ خیز گراف اس طرح نظر آئے گا جیسا کہ دی گئی تصویر میں دکھایا گیا ہے۔



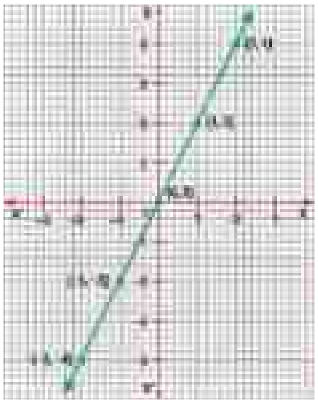
7.1.9: گراف کھینچنے کے لیے مناسب پیمانے کا انتخاب کریں۔

پیمانے کو اس طرح منتخب کیا جانا چاہیے کہ ڈیٹا (data) کی منصوبہ بندی کرنا آسان ہو اور پڑھنے میں آسانی ہو۔ گرڈ یونٹ کے لیے عددی رقم کا تعین کرنے کے لیے جو ہر متغیر کی حد کے لیے بہترین ہے۔

مساوات کا گراف کھینچنے کے لیے ہم ایک پیمانہ منتخب کرتے ہیں جیسے ایک چھوٹا مربع کی لمبائی 1 یونٹ کی نمائندگی کرتی ہے یا دو چھوٹے مربع 1 یونٹ کی نمائندگی کرتے ہیں وغیرہ۔ یہ کاغذ کے سائز کو مدنظر رکھتے ہوئے منتخب کیا جاتا ہے۔ بعض اوقات x and y دونوں کوآڈرینٹ کے لیے ایک ہی پیمانہ استعمال کیا جاتا ہے اور بعض اوقات کو آرڈینیٹ کی رقم کو مدنظر رکھتے ہوئے x and y کو آرڈینیٹ کے لیے مختلف پیمانہ کا استعمال کیا جاتا ہے۔

7.1.10(iii): $y=mx$ قسم کی مساوات کا گراف بنائیں۔

مساوات $y=mx,$ کی رقم (یا اس کا y کوآرڈینیٹ $x,$ کا ایک سے زیادہ اور کی رقم ہے۔ جہاں مسلسل حقیقی سے عدد ہے۔



مثال 01 اگر $y=2x$ کی رقم معلوم کریں اور اس کا گراف بنائیں۔

حل: پیمانہ: 5 چھوٹے مربع-1 یونٹ

گراف بنانے کے لیے جدول بنائیں۔

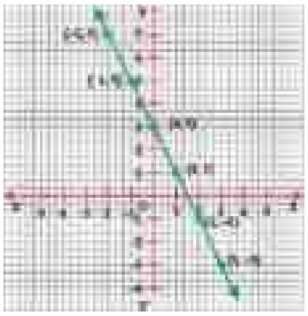
x	-2	-1	0	1	2	...
y	-4	-2	0	2	4	...

نوٹ:
$y = mx$ کا گراف ہمیشہ مشترکہ نقطہ (origin) سے گزرتا کرتا ہے۔

7.1.10(iv): $y=mx+c,$ میں جہاں m اور c کوئی حقیقی اعداد ہیں۔

مثال 01 مساوات $y = -2x+3$ کا گراف بنائیں پیمانہ: 3 چھوٹے مربع-1 یونٹ

گراف بنانے کے لیے جدول بنائیں۔



x	-2	-1	0	1	2	3	...
y	7	5	3	1	-1	-3	...

7.1.11: دیے گئے (مجرد) رقموں کے جدول سے گراف کھینچیں۔

(مجرد) رقوم کے دیے گئے جدول سے گراف کھینچنے کے لیے، x اور y کی رقوم کو نقاط کی شکل جوڑا جاتا ہے جسے پھر گراف پیپر پر پلاٹ کیا جاتا ہے۔

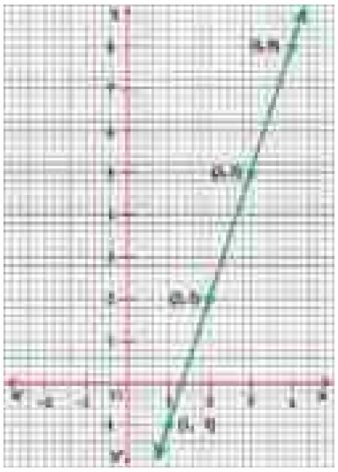
نوٹ:
$y = mx + c$ کا گراف ہمیشہ y-axis پر $y=c$ ایکسز کو کاٹتا ہے۔

مثال 01 نیچے جدول میں دیے گئے نقاط کی رقوم سے گراف بنائیں"

x	1	2	3	4	…
y	-1	2	5	8	…

حل: دیے گئے جدول سے، ہمارے پاس ہے، A(1, -1), B(2,2), C(3, 5) and D(4,8) توہم گراف پیپر پر گراف پلاٹ کرتے ہیں۔

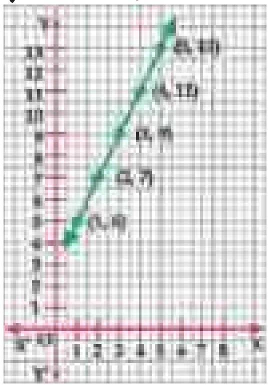
پیمانہ: 5 چھوٹے مربع-1 یونٹ



7.1.12: لاگو حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کریں۔

خطی مساوات کو حقیقی زندگی کے متعدد مسائل کے نمونے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے، جیسے کہ آپ ایک وقت میں کتنا پیسہ کماتے ہیں، یا ایک سائیکل سوار جو فاصلہ طے کرے گا جس میں پیڈلنگ کی مستحکم شرح دی جائے گی۔ ان رشتوں کو ایک کو آرڈینیٹ مستوی پر گراف کرنے سے اکثر آپ کو مسئلہ اور ان کے حل کے بارے میں سوچنے میں مدد مل سکتی ہے۔

مثال وزن (y) کلو میں اور ایک شخص کی عمر (x) سالوں میں جو اس مساوات $y=2x+3$, سے ظاہر کیا جارہا ہے، مساوات کا عمر وزن گراف کھینچیں۔



x(age)	1	2	3	4	5	…
y(weight)	5	7	9	11	13	…

مشق 7.2

1. نیچے دی گئی مساوات کا جدول بنائیں جو رقوم کے جوڑے کے مطمئن کرے : $x + y = 6$

2. مناسب پیمانے کا استعمال کرتے ہو، نیچے دیے گئے جدول سے گراف بنائیں۔

x	0	-1	4	-4
y	2	4	5	-5

3. گراف پلاٹ کریں۔

i. $y = 3$ ii. $x = 3$ iii. $y = 0$

iv. $y = 2x + y$ v. $x = 3.5$ vi. $-y = 2x$

4. نیچے دیے گئے جدول میں نامعلوم کو آرڈینیٹس تلاش کریں۔

S.No	مساوات	x- کو آرڈینیٹ	y- کو آرڈینیٹ
(i)	$y = \frac{1}{2}x$		0
		4	
(ii)	$x = \frac{2}{3}y$	1	
			$\frac{3}{2}$
(iii)	$2x + 4y = 8$	0	?
			$\frac{1}{4}$
(iv)	$2x + y = 6$	1	
			0
(v)	$x - y = 2$		0
		1	?
(vi)	$x - 3y = 6$	3	?
			-1

5. وزن ___ کلو میں اور کسی شخص کی عمر ___ سالوں میں جو مساوات ______ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج ذیل جدول سے عمر و وزن گراف کھینچیں۔

6. عائشہ مسلسل 20 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے دوپہیا گاڑی چلا سکتی ہے اس صورت کے لیے فاصلہ وقت کا گراف بنائیں، خطی گراف کے ذریعے حساب لگائیں:

(ا) عائشہ نے 100 کلومیٹر کی سواری میں جو وقت لیا۔

(ب) کُل فاصلہ جو عائشہ نے 3 گھنٹوں میں طے کیا۔

7.2 کنورشن گراف

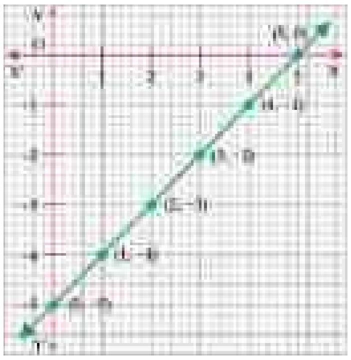
7.2.1: کنورشن گراف کو دو مقداروں سے متعلق خطی گراف سے تعبیر کریں جو براہ راست تناسب میں ہیں۔

یہاں ہم ایک کنورشن گراف لیں گے جو دو مقداروں سے متعلق خطی گراف سے تعبیر ہے اور براہ راست تناسب میں ہے۔

ہم مترتب جوڑوں کا مظاہر کرتے ہیں جو مساوات $y = x - 5$, کے گراف پر واقع ہیں جو جدول کے نیچے دی گئی حسابی اقدار ہیں۔

x	0	1	2	3	4	5
y	-5	-4	-3	-2	-1	0
(x, y)	(0, -5)	(1,-4)	(2, -3)	(3, -2)	(4, -1)	(5, 0)

دی گئی خطی مساوات کے گراف پر نقاط تلاش کریں جس میں x کو آرڈینیٹ کی رقم میں ہر یونٹ کی تبدیلی کے لے y کو آرڈینیٹ کی رقم میں متناسب تدیلی ہوتی ہے۔



7.2.2: ایک دی گئی گراف کو پڑھیں تا کہ ایک مقدار دوسری سے ملتی ہو۔

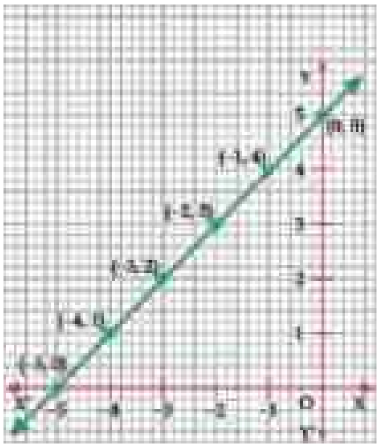
خطی مساوات $y = x - 5$ لیں۔

x کی دی گئی رقم سے ہم y کی متعلقہ رقم پڑھ سکتے ہیں $y = x - 5$ کی مدد سے x, کی دی گئی رقم سے y کی متعلقہ رقم پڑھ سکتے ہیں،

مساوات $y = x - 5$ کو مساوات $x = y + 5$ میں تبدیل کر کے اور متعلقہ کنورشن گراف بنا کر۔ کنورشن گراف میں ہم x y کی اصطلاح میں ظاہر کرتے ہیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے: $x = y + 5$

y	-5	-4	-3	-2	-1	0
x	0	1	2	3	4	5
(y, x)	(-5, 0)	(-4, 1)	(-3, 2)	(-2, 3)	(-1, 4)	(0, 5)

x کے حوالے سے y کا تبادلوں کا گراف پیپر پر کھینچا گیا ہے۔



7.2.3: اس قسم کے تبادلوں کے لیے گراف پڑھیں۔

میل اور کلومیٹر

ایکڑ اور ہیکٹر

ڈگری سیلیسئس اور فارن ہائیٹ

پاکستانی کرنسی اور دوسری کرنسی وغیرہ۔

اگر دونوں مقداریں متعلقہ ہیں یا تو بڑھ رہی ہیں یا کم ہو رہی ہیں، تو تعلق کا گراف سیدھی خط ہو گا جس میں دونوں مقداروں کی سطح کو آرڈینیٹ ایکسز سے ظاہر ہوتی ہے۔

(i) میل اور کلومیٹر کے تبادلوں کے لیے گراف پڑھیں۔

آیئے میل اور کلومیٹر کی قسم کے گراف پر بات کریں، دونوں فاصلہ کے یونٹ ہیں، اگر میل میں فاصلہ x محور (axis) کے ساتھ اور کلومیٹر میں فاصلہ y محور کے ساتھ ظاہر ہوتا ہے۔ آیئے درج ذیل مثالیں دیکھیں۔

مثال 03 میل اور کلو میٹر کے درمیان درج ذیل تبادلوں کے گراف کو تقریباً تبدیل کرنے کے لیے پڑھیں تبدیل کریں:

(i) 2 میل کو کلو میٹر میں

(ii) 5 میل کو کلو میٹر میں

(iii) 3 کلو میٹر کو میل میں

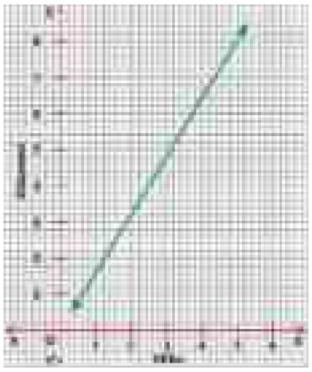
(iv) 7 کلو میٹر کو میل میں

دیے گئے پیمانے کے استعمال سے۔

میل اور کلو میٹر کے درمیان تبادلوں کا گراف۔

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع – 1 میل x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع – 1 کلو میٹر y محور کے ساتھ۔



حل:

(i) 2 میل کو کلو میٹر میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 3.20 کلو میٹر____2 میل۔

(ii) 5 میل کو کلو میٹر میں۔

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 8 کلو میٹر – 5 میل

(iii) 3 کلو میٹر کو میل میں۔

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 1.8 میل---- 3 کلو میٹر۔

(iv) 7 کلو میٹر کو میل میں۔

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 4.20 میل- 7 کلو میٹر

(ii) ایکڑ اور ہیکٹر کے تبادلوں کے لیے گراف پڑھیں۔

آیئے ہم ہیکٹرس اور ایکٹر کی سکل کے گراف پر تبادلہ خیال کریں، دونوں زمین کے رقبے کی اکائی پر اگر ہیکٹرس میں فاصلہ____ محور کے ساتھ اور ایکٹر میں فاصلہ____ محور کے ساتھ اشارہ کیا گیا ہے۔ آیئے درج ذیل مثالیں دیکھیں۔

مثال: ایکڑ اور ہیکٹرس کے درمیان درج ذیل تبادلوں کا گراف پڑھیں۔ تبدیل کریں:

(i) 2ہیکٹرس کو ایکڑ میں۔

(ii) 6ہیکٹرس کو ایکڑ میں

(iii) 10ایکڑ کو ہیکٹرس میں

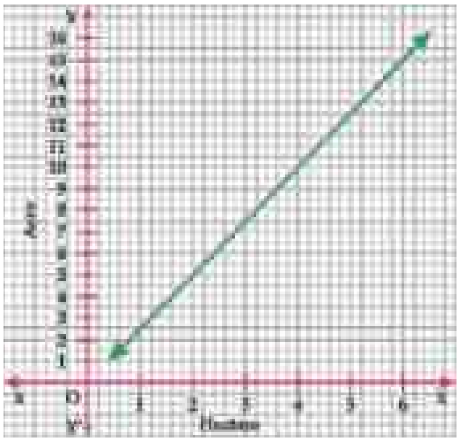
(iv) 8 ایکڑ کو ہیکٹرس میں۔

دیے گئے پیمانے کے استعمال سے

ایکڑ اور ہیکٹرس کے درمیان تبادلوں کا گراف۔

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع - 1ہیکٹرس x محور کے ساتھ۔

2 چھوٹے مربع - 1ایکڑ y محور کے ساتھ۔



حل:

(i) 2ہیکٹرس کو ایکڑ میں۔

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 5ایکڑ - 2ہیکٹرس

(ii) 6ہیکٹرس کو ایکڑ میں۔

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 15ایکڑ - 6ہیکٹرس

(iii) 10ایکڑ کو ہیکٹرس میں۔

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 4ہیکٹرس - 10ایکڑ۔

(iv) 8 ایکڑ کو ہیکٹرس میں:

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 3.20 ہیکٹرس – 8 ایکڑ۔

(iii) ڈگری سیلسیئس اور ڈگری فارن ہائیٹ کا تبادلہ کا گراف پڑھیں۔

آیئے سیلسیئس اور فارن ہائیٹ کی شکل کے گراف پر بات کریں، دونوں درجہ حرارت کے اکائی ہیں اگر سیلسیئس میں درجہ حرارت x محور کے ساتھ اور فارن ہائیٹ میں درجہ حرارت y محور کی ساتھ ظاہر ہوتا ہے۔ آیئے درج ذیل مثالیں دیکھیں۔

مثال سیلسیئس اور فارن ہائیٹ کے درمیان درج ذیل تبادلوں کا گراف پڑھیں اور تبدیل کریں:

(i) 1 سیلسیئس کو فارن ہائیٹ میں

(ii) 3 سیلسیئس کو فارن ہائیٹ میں

(iii) 36 فارن ہائیٹ کو سیلسیئس میں

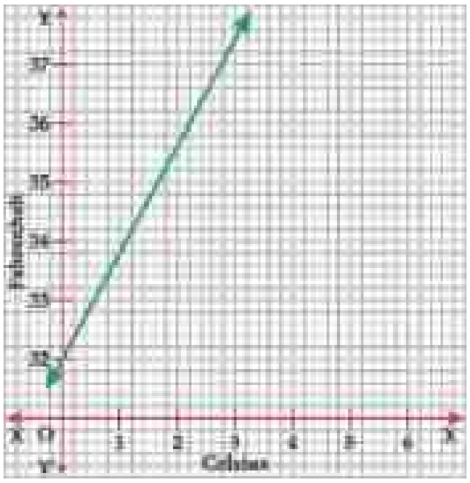
(iv) 37 فارن ہائیٹ کو سیلسیئس میں

دیے گئے پیمانے کی استعمال سے۔

سیلسیئس اور فارن ہائیٹ کے درمیان تبادلوں کا گراف

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع – 1 سیلسیئس x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع – 1 سیلسیئس y محور کے ساتھ۔



حل:

(i) 1 سیلسیئس کو فارن ہائیٹ میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 33.8 فارن ائیٹ 1^{o} Celsius $\cong 33.8^{o}$ سیلسیئس

(ii) 3 سیلسیئس کو فارن ہائیٹ میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دے سکتے ہیں کہ: 37.4 فارن ہائیٹ = ۳ سیلسیئس

(iii) 36 فارن ہائیٹ کو سیلسیئس میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ 2.2 سیلسیئس = 36 فارن ہائیٹ

(iv) 37 فارن ہائیٹ کو سیلسیئس میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 2.8 سیلسیئس = 37 فارن ہائیٹ

(iv) کرنسی کا تبادلوں کا گراف پڑھیں:

مثال 1: ڈالر ($) اور پاکستانی روپے (Rs) کے درمیان درج ذیل تبادلوں کا گراف پڑھیں اور تبدیل کریں:

(i) $2 کو روپے میں

(ii) $5 کو روپے میں

(iii) 360 روپے کو ($) میں

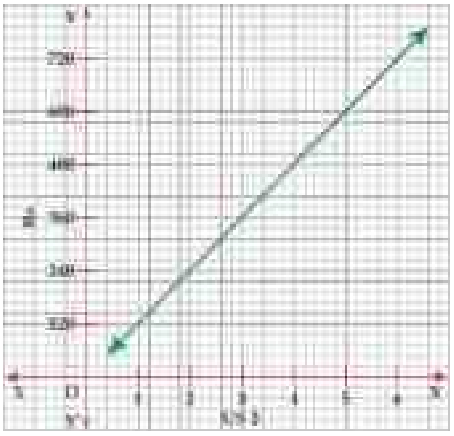
(iv) 720 روپے کو ($) میں

دیے گئے پیمانے کے استعمال سے۔

ڈالر اور پاکستانی روپے کے درمیان تبادلوں کا گراف

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع - x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع 120 روپے y محور کے ساتھ



حل:

(i) $2 کو روپے میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: $2 = 240 روپے

(ii) $5 کو روپے میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیک سکتے ہیں کہ: $5 = 600 روپے

(iii) 360 روپے کو $ میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھن کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 360 روپے = $3

(iv) 720 روپے کو $ میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 720 روپے = $6

7.3 دو متغیر میں مساوات کا گرافک حل:

7.3.1: دو متغیرات میں دو خطی لینیئر مساواتوں کو گراف کی مدد سے حل کرنا۔

ہم نے پہلے ہی دو متغیرات کے ساتھ دو خطی مساوات کی کھوج کا مطالعہ کیا ہے۔ اب اس سیکشن میں دو خطی مساوات کا حل دو متغیرات میں گرافک طور پر تلاش کریں گے۔ ان دو سیدھی خطوں کے درمیان کا نقطہ ان مساوات کا حل ہے۔

مثال 03 دی گئی مساوات کے لیے گرافک طور پر حل سیٹ تلاش کریں. $x + y = 3$ and $x - y = 5$.

حل: دی گئی مساوات مندرجہ ذیل ہیں:

$x+y = 3 \ldots$ (1)

and $x-y = 5 \ldots$ (2)

مساوات (1) اور (2) سے، ہم ان کو y کے طور پر لکھ سکتے ہیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے:

$y = 3-x \ldots$ (3)

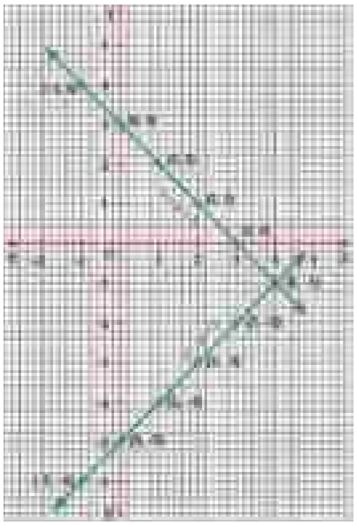
and $y = x-5 \ldots$ (4)

اب ہر خطی مساوات کے لیے جدول بنائیں، مساوات (3) کے لیے جدول مندرجہ ذیل ہے:

x	-1	0	1	2	3	4	…
y	4	3	2	1	0	-1	…

مساوات (4) کے لیے جدول مندرجہ ذیل ہے:

x	-1	0	1	2	3	4	…
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	…



دونوں جدول کے نقاط کو استعمال کرتے ہوئے ایک سیدھے خط کھینچیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ دی گئی مساوات کا گراف سیدھی خط 4اور

l_1 and l_2 ہے، جو نقطہ (4, -1), پر ملتی ہے۔

مثال کے طور پر l_2 intersect l_1 کو نقطہ (4,-1) پر کاٹتی ہے۔

لہٰذا حل سیٹ.{(4,-1)} ہے۔

مثال 02 $y=2x+4$ and $y=2x-2$

دی گئی مساوات کا گراف طور پر حل سیٹ لاش کریں

حل: دی گئی مساوات درج ذیل ہیں:

$$y = 2x + 4 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{and} \quad y = 2x - 2 \quad \dots \quad (2)$$

اب ہر خطی مساوات کے لیے الگ سیٹ بنائیں۔

مساوات(i) کے لیے جدول درج ذیل ہے:

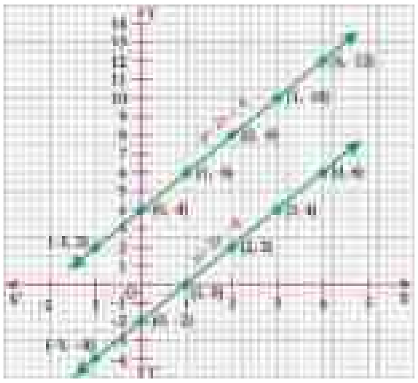
x	-1	0	1	2	3	4
y	2	4	6	8	10	12

مساوات(ii) کے لیے جدول درج ذیل ہے:

x	-1	0	1	2	3	4
y	-4	-2	0	2	4	6

اب ایک ہی گراف پر دونوں مساوات کے لیے ان نقاط کو تلاش کریں اور پھر دونوں مساوا کے نقاط کو جوڑ کر دو خطوط بنائیں"

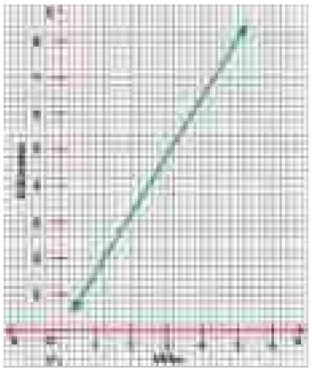
ہم دیکھ سکتے ہیں کہ سیدھی خطوط ان مساوات سے حاصل ہوتی ہیں جن کا کوئی مشترکہ نقطہ نہیں ہوتا۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ خطوط کسی بھی مقام پر آپس میں نہیں ملتی ہیں۔ لہٰذا اس کا حل سیٹ خالی ہے۔



اس طرح، حل سیٹ ______ ہے۔

مشق 7.3

.1 میل اور کلومیٹر کے درمیان تبادلوں کا گراف پڑھیں اور تبدیل کریں۔



(i) 1 میل کو کلومیٹر میں (ii) 2 کلومیٹر کو میل میں

(iii) 3 میل کو کلومیٹر میں (iv) 8 کلومیٹر کو میل میں

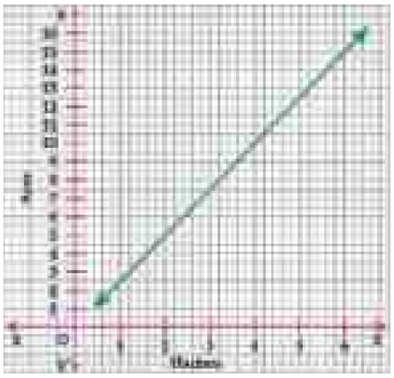
دیے گئے پیمانے کے استعمال سے۔

میل اور کلومیٹر کے درمیان تبادلوں کا گراف:

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع 1 میل x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع 1 کلومیٹر y محور کے ساتھ

.2 دیے گئے ہیکٹرس اور ایکڑ کے درمیان تبادلوں کا گراف پڑھیں اور تبدیل کریں۔



(i) 2 ہیکٹرس کو ایکڑ میں (ii) 5 ایکڑ کو ہیکٹرس میں

(iii) 5 ہیکٹرس کو ایکڑ میں (iv) 15 ایکڑ کو ہیکٹرس میں

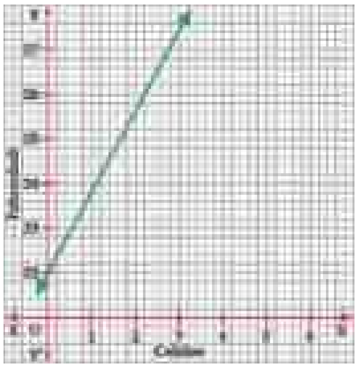
دیے گئے پیمانے کے استعمال سے۔

ہیکٹرس اور ایکڑ کے درمیان تبادلوں کا گراف

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع – 1 ہیکٹرس x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع – 1 ایکڑ y محور کے ساتھ۔

.3 سیلیسئس اور فارن ہائیٹ کے درمیان تبادلوں کا گراف پڑھیں اور تبدیل کریں:



(i) 2 سیلیسئس کو فارن ہائیٹ میں (ii) 32 فارن ہائیٹ کو سیلیسئس میں

(iii) 1.80 سیلیسئس کو فارن ہائیٹ میں (iv) 36.4 فارن ہائیٹ کو سیلیسئس میں

دیے گئے پیمانہ کے استعمال سے۔

سیلیسئس اور فارن ہائیٹ کے درمیان تبادلوں کا گراف:

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع – 1 سیلیسئس x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع – 1 فارن ہائیٹ y محور کے ساتھ۔

4. دیے گئے سعودی ریال اور پاکستانی روپے (Rs) کے درمیان تبادلوں کا گراف پڑھیں اور تبدیل کریں۔

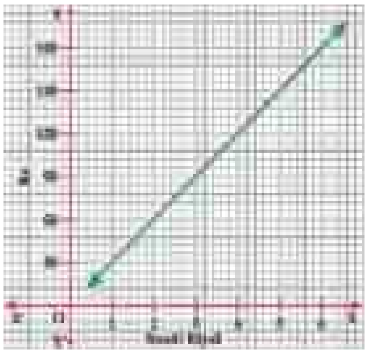
(i) 3 سعودی ریال کے روپے میں

(ii) 5.2 سعودی ریال کو روپے میں۔

(iii)150 روپے کو سعودی ریال میں

(iv) 78 روپے کو سعودی ریال میں۔

دیے گئے پیمانے کے استعمال سے۔



سعودی ریال اور پاکستانی روپے (Rs) کے درمیان تبادلوں کا گراف:

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع۔ 1 سعودی ریال x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع – 30 روپے y محور کے ساتھ۔

5. گرافکیل طریقہ سے مندرجہ ذیل مساوات کو حل کریں

i. $3x - 11 = y;\ x - 3y = 9$

ii. $x + y = 4;\ 2x - 1 = 5y$

iii. $2x = y + 5;\ x = 2y + 1$

iv. $y = 3x - 5;\ x + y = 11$

v. $2x + y = 3;\ x - y = 0$

vi. $2x + 2 = y;\ y = x - 1$

vii. $5 = x + 4y;\ 2x + 3y = 0$

viii. $3x = 5y - 2;\ 3x + 5y = 8$

ix. $\frac{x+2}{5} + y = 6;\ y = 2x - 12$

x. $3x - 2y = 13;\ 2x + 3y = 13$

Review Exercise 7

.1 صحیح اور غلط سوالات۔

درج ذیل جملوں کو دھیان سے پڑھیں اور 'د' یا 'غ' جو بھی ہو اس پر دائرہ لگائیں۔

(i) کارتیسی مستوی کو xy مستوی بھی کہا جاتا ہے۔ (د/غ)

(ii) دوسرے ربع میں y and x دونوں مثبت ہوتے ہیں۔ (د/غ)

(iii) نقطہ $(1, -2)$ پہلے ربع میں موجود ہوتا ہے۔ (د/غ)

(iv) $(-3, -4)$ چوتھے ربع میں واقع ہوتا ہے۔ (د/غ)

.2 درج ذیل میں سے درست جواب پر () لگائیں:

(i) نقطہ $(-3, -4)$ واقع ہے ______ میں۔

(ا) پہلا ربع (ب) دوسرا ربع (ج) تیسرا ربع (د) چوتھا ربع۔

(ii) دو کو آرڈینیٹ محور ایک دوسی کو زاویہ ______ پر کاٹتے ہیں۔

(ا) 45 (ب) 90 (ج) 180 (د) 270

(iii) خط $y = 4$ متوازی ہے ______ کے:

(ا) x محور (ب) محور (ج) دونوں محور (د) ان میں سے کوئی نہیں۔

(iv) خط $x=-5$ متوازی ہے ______ کے

(ا) x محور (ب) y محور (ج) دونوں محور (د) کوئی نہیں۔

(v) خط $x=-5$ محور پر نقاط ہیں:

(ا) $(-5, 5)$ (ب) $(0, -5)$ (ج) $(-5, 0)$ (د) $(5, 0)$

(vi) خط $x=2$ and $x=5$ کا حل سیٹ ہے:

(ا) $\{(2, 5)\}$ (ب) $\{2, 5\}$ (ج) $\{(0, 5)\}$ (د) $\{\ \}$

(vii) کو آرڈینیٹ محور باہمی طور پر ہیں:

(ا) متوازی الاضلاع (ب) متوازی (ج) 30 پر کاٹنا (د) 45 پر کاٹنا۔

خلاصہ

- مترتب جوڑے کارتیسی مستوی میں نقاط کی پوزیشن کو ظاہر کرتا ہے۔
- 2 جہتی کارتیسی کو آرڈینیٹ سسٹم سے مراد دو متوازی الاضلاع خطوط ہیں۔ مثال کے طور پر x محور اور y محور۔ دونوں محور ایک دوسرے کو ایک خاص نقطہ پر کاٹتے ہیں .i.e اور یجن(origin) (0,0) کہلاتا ہے۔
- مستوی محور سے چار ربع میں تقسیم ہوتا ہے۔
- کارتیسی مستوی کو xy مستوی بھی کہاجاتا ہے۔
- ربع I میں دونوں x y کو آرڈینیٹ مھبت ہیں. $x > 0$ $y > 0$.
- ربع II میں x کو آرڈینیٹ (abscissa) منفی اور y کو آرڈینیٹ (ordinate) مثبت ہوتا ہے. $x < 0$ and $y > 0$.
- ربع III میں دونوں xy کو آرڈینیٹ منفی ہوتے ہیں. $x<0$ and $y<0$.
- ربع IV میں x کو آرڈینیٹ مثبت اور y کو آرڈینیٹ منفی ہوتا ہے. $x > 0$ and $y < 0$.
- مشترکہ نقطہ (origin) پر $x = y = 0$ تو مشترک نقطہ (origin) کے نقطہ (0،0) ہوتا ہے۔
- عام طپر پر، مترتب جوڑے () کی مناسبت سے مستوی میں نقطہ کی نشاندہی کریں جس میں (a, b) کو آرڈینیٹ (absisssa) اور x کو آرڈینیٹ (ordinate) ہے
- $x = a$ کا گراف y محور کے متوازی ے۔
- $y = c$ کا گراف x کے محور کے متوازی ہے۔
- $y = mx$ کا گراف ہمیشہ مشتک نقط (origin) سے گذرتا ہے۔
- $y = mx + c$ کا گراف y پر. $y = c$ محور کو کاٹتا ہے۔