یونٹ 5

الجبرا توڑ پھوڑ

ALGEBRAIC MANIPULATION

حاصلاتِ تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- اجزاء ضربی سے الجبرا ظہارات کا مشترک عاد اعظم HCF اور ذو اضعاف اقل (LCM) معلوم کر سکیں گے۔
- بذریعہ تقسیم مشترک عاد اعظم HCF اور ذو اضعاف اقل (LCM) معلوم کر سکیں گے۔
- عاط اعظم وار ذو اضعاف اقل کے بیچ میں تعلق جان پائیں گے۔
- عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل (حساب) حل کریں گے۔
- عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل کو استعمال کر کے جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم پر مشتمل کسوری اظہار مختصر کریں گے۔
- بذریعہ اجزاء ضربی اور بذریعہ تقسیم جذر المربع معلوم کر پائیں گے۔

تعارف:

الجبری توڑ پھوڑ کا تعلق آلجبری اظہارات کی ہیرا پھیری سے ہے۔اکثر مختصر صورت میں یا ایسی صورت جو زیادہ آسانی سے سمجھا جا سکے ۔یہ الجبری اظہار کے مسئلے (حساب) حل کرنے میں ایک بنیادی، ضروری اور اہم مہارت ہے۔

اس یونٹ میں ہم الجبری اظہارات کی بذریعہ اجزاء ضربی اور تقسیم عاد اعظم (HCF) اور ذواضعاف اقل (LCM) معلوم کرنے اور روزمرہ زندگی میں استعمال پر بحث کریں گے۔

5.1 عاد اعظم HCF اور ذواضعاف اقل LCM۔

5.1.1 بذریعہ اجزاء ضربی عاد اعظم اور ذواضعاف اقل معلوم کرنا۔

(a) بذریعہ اجزاء ضربی عاد اعظم معلوم کرنا۔ دیئے گئے اظہارات کا عاد اعظم HCF کرنے کے لیے، پہلے ہم کثیر رقصی اظہارات کے اجزاء ضربی معلوم کریں گے۔ پھر ہم ان کے عام (مشترکہ) اجزاء کو ضرب کریں گے۔ مشترکہ اجزاء کی اس حاصل ضرب کو بذریعہ اجزاء ضربی عاد اعظم HCF کی طرح جانا جاتا ہے۔

نوٹ: مشترک جزو ضربی نہ ہونے کی حالت میں عاد اعظم HCF 1 ہو گا۔

مثال 01: اجزاء ضربی کے استعمال سے مندرجہ ذیل کا عاد اعظم HCF معلوم کریں۔

(i) x^2+x-20 اور $x^2+12x+35$

(ii) $(x+1)^2, x^2-1$ اور x^2+4x+3

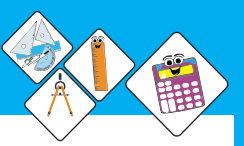
حل (i): ہم دیئے گئے اظہارات x^2+x-20 اور $x^2+12x+35$ کے اجزاء معلوم کریں کے جو اس طرح ہیں۔۔

$$x^2+x-20 = x^2+5x-4x-20$$
$$= x(x+5)-4(x+5)$$
$$=(x+5)(x-4)$$

اور $x^2+12x+35 = x^2+7x+5x+35$
$$= x(x+7)+5(x+7)$$
$$= (x+5)(x+7)$$

دونو اظہارات میں $(x+5)$ مشترک جزو ضربی ہے۔

اس لیے عاد اعظم HCF $= x+5$ ہے۔ $\therefore$



حل (ii): ہم دیے گئے اظہار کے اجزاء ضربی معلوم کریں گے۔

جو ہیں۔ $(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$

$x^2-1 = (x+1)(x-1)$

اور $x^2+4x+3 = x^2+3x+x+3$

$= x(x+3)+1(x+3)$

$= (x+3)(x+1)$

تینوں اظہارات میں مشترکہ جزو ضربی $(x+1)$ ہے۔

اس لیے $x+1$ = عاد اعظم HCF ہے۔

مثال 02: اجزاء ضربی کا طریقہ استعمال کر کے مندرجہ ذیل اظہارات کا عاد اعظم معلوم کریں۔

a^6-b^6 ,a^3-b^3

حل:

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^6-b^6 = (a^2)^3-(b^2)^3$

$= (a^2-b^2)\{(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2\}$

$= (a-b)(a+b)\{(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2-a^2b^2\}$

$= (a-b)(a+b)\{(a^2+b^2)^2-(ab)^2\}$

$= (a-b)(a+b)(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$

عاد اعظم $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab)$ = HCF ہے۔

(b) بذریعہ اجزاء ضربی ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

دو یا زیادہ کثیر رقمی اظہارات کی ذواضعاف اقل LCM وہ چھوٹے سے چھوٹے درجے کا اظہار ہے جو دیے گئے کثیر رقمی اظہارات سے تقسیم ہوتا ہو۔ بذریعہ اجزاء ضربی ذواضعاف اقل LCM معلوم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل فارمولا استعمال کریں گے۔

ذواضعاف اقل (مشترک اجزاء ضربی کا حاصل ضرب) × (غیر مشترک اجزاء)

مثال 01: x^2+x-6 اور x^3-8 کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔ ضربی کا حاصل ضرب)

حل: اب x^2+x-6 اور x^3-8 اجزاء ضربی معلوم کریں۔

$\therefore \quad x^3-8 = (x)^3-(2)^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$

اور $x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6 = x(x+3)-2(x+3)$

$= (x+3)(x-2)$

مشترک جذو ضربی $= (x-2)$ ہے۔

غیر مشترک جذو ضربی $= (x+3)(x^2+2x+4)$ ہے۔

$\because$ ذواضعاف اقل LCM (مشترک اجزاء ضربی) x (غیر مشترک اجزء ضربی)

$\therefore \quad LCM = (x-2)(x^2+2x+4)(x+3) = (x^3-8)(x+3)$

مثال 02: $x^3-1,\ x^3-2x^2+x$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

اب x^3-2x^2+x اور x^3-1 کے اجزاء ضربی معلوم کریں۔

$\therefore \quad x^3-1=(x)^3-(1)^3=(x-1)(x^2+x+1)$

اور $x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$

$\because$ ذواضعاف اقل = مشترک اجزاء x غیر مشترک اجزاء

$\therefore$ ذواضعاف اقل $= x(x-1)\ (x+x+1)$

5.1.2 عاد اعظم HCF اور ذواضعاف اقل کے درمیان تعلق جاننا۔

دو کثیر رقمی اظہاریے $p(x)$ اور $q(x)$ کا عاد اعظم HCF اور ذواضعاف اقل LCM کے تعلق کو ذیل کی طرح ظاہر کرتے ہیں۔

عاد اعظم (HCF) × (ذواضعاف اقل) = (پہلی کثیر رقم) × (دوسری کثیر رقم)

$p(x)=x^2-5x+6$ and $q(x)=x^2-9$

مثال 01 مندرجہ ذیل دیے گئے کثیر رقمی اظہاریوں $q(x)$ اور $p(x)$ کے عاد اعظم اور ذواصفاف اقل معلوم کریں اور تعلق کی تصدیق کریں۔

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2-5x+6 \\ &= x^2-3x-2x+6 \\ &= x(x-3)-2(x-3) \\ &= (x-3)\ (x-2) \end{aligned}$$

اور $q(x)=x^2-9=(x-3)\ (x+3)$

اس طرح عاد اعظم H.C.F $= (x-3)$ ہے۔

اور ذواضعاف اقل L.C.M $= (x-2)(x^2-9)=(x-2)(x-3)(x+3)$ ہے۔

اب $p(x)$ اور $q(x)$ کی حاصل ضرب معلوم کریں"

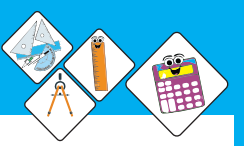
اس لیے۔ $p(x)\times q(x)=(x^2-5x+6)\times(x^2-9)$ ... (i)

$\text{LCM}\times\text{HCF}=(x-2)(x-3)(x+3)\times(x-3)$

$\Rightarrow \quad =(x^2-5x+6)\times(x^2-9)$ ... (ii)

نتیجہ (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ

ذواضعاف اقل x عاد اعظم، $\text{LCM}\times\text{HCF}=p(x)\times q(x)$



مثال 02: مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کا فارمولا کی مدد سے ذواضعاف اقل LCM معلوم کریں۔

$p(x)=^{2} x+14x+48$ اور $q(x)= x^2+8x+12$

حل: اب پہلی ہم $p(x)$ اور $q(x)$ عاد اعظم معلوم کریں گی۔

$$p(x)= x^2+14x+48$$
$$= x^2+8x+6x+48$$
$$= x(x+8)+6(x+8)$$
$$= (x+6)\ (x+8)$$

$$q(x) = x^2+8x+12 \qquad \text{اور}$$
$$= x^2+6x+2x+12$$
$$= x(x+6)+2(x+6)$$
$$= (x+2)\ (x+6)$$

اس لیے عاد اعظم HCF $p(x)$ and $q(x)$ is $(x+6)$ ہے۔

$$\because \quad \text{LCM} = \frac{p(x)\times q(x)}{\text{HCF}}$$

$$\therefore \quad \text{LCM} = \frac{(x^2+14x+48)\times(x^2+8x+12)}{(x+6)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{LCM} = \frac{(x+6)(x+8)(x+2)(x+6)}{(x+6)}$$

اس لیے ذواضعاف اقل $\boxed{\text{LCM} = (x+2)\ (x+6)\ (x+8).}$ ہے۔

5.1.3 اجزاء ضربی یا تقسیم کے طریقے سے عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل معلوم کرنا۔

دو یا زیادہ الجبری اظہاریوں کا بذریعہ تقسیم عاد اعظم HCF معلوم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل مثالی طریقہ سمجھنے میں مدد کریں گے۔

مثال 01: مندرجہ ذیل اظہاریوں کا بذریعہ تقسیم عاد اعظم HCF معلوم کریں۔

$2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ and $2x^3 + 9x^2 + 11x + 2$.

حل: اصل تقسیم سے ہمیں ملے گا۔

$$
\begin{array}{r}
1 \\
2x^3+7x^2+4x-4 \overline{)\ 2x^3+9x^2+11x+2} \\
\underline{-2x^3 \pm 7x^2 \pm\ 4x\ \ 4} \\
2x^2+\ 7x+6
\end{array}
$$

دوبارہ،

$$
\begin{array}{r}
x \\
2x^2+7x+6 \overline{)\ 2x^3+7x^2+4x-4} \\
\underline{-2x^3 \pm 7x^2 \pm 6x+0} \\
-2x-4
\end{array}
$$

$-2x-4$ میں سے مشترک -2 خارج کرنے سے

$$
\begin{array}{r}
2x+3 \\
x+2 \overline{)\ 2x^2+7x+6} \\
\underline{-2x^2 \pm 4x+0} \\
3x+6 \\
\underline{-3x \pm 6} \\
0\quad 0
\end{array}
$$

مطلوبہ عاد اعظم HCF $x + 2$ ہے۔

مثال 02: مندرجہ ذیل اظہارات کا بذریعہ تقسیم عاد اعظم معلوم کریں۔

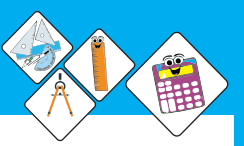
$x^2 + 2x+1$, $x^2 - 1$ اور $x^2+ 4x+ 3$

حل: پہلے ہم دو اظہارات کا عاد اعظم معلوم کریں گے پھر ان کے عاد اعظم سے تیسرے اظہار کا عاد اعظم معلوم کریں گے۔

اب اصل تقسیم سے ہمیں ملے گا۔

$$
\begin{array}{r}
1 \\
x^2+2x+1 \overline{)\ x^2+4x+3} \\
\underline{x^2 \pm 2x \pm 1} \\
2x+2
\end{array}
$$

$2x+2$ میں سے مشترک $2+$ خارج کرنے سے



دوبارہ

$$
\begin{array}{r|l}
x+1 & \\
\hline
x^2+2x+1 & \\
-x^2 \pm x & +0 \\
\hline
x+1 & \\
-x \pm 1 & \\
\hline
0 & 0
\end{array}
$$

تو x^2+2x+1 اور x^2+4x+3 کا عادِ اعظم $x+1$ ہے۔ ∴

اب ہم $x+1$ اور x^2-1 کا عادِ اعظم معلوم کریں گے۔

$$
\begin{array}{r|l}
x-1 & \\
\hline
x^2-1 & \\
-x^2 \pm x & \\
\hline
-x-1 & \\
x+1 & \\
\hline
0 & 0
\end{array}
$$

تینوں کثیر رقمی اظہاریوں کا عادِ اعظم ____ ہے۔

اب ہم بذریعہ تقسیم ذوضعاف اقل معلوم کریں گی۔

مندرجہ ذیل فارمولا کی مدد سے دو یا زیادہ کثیر رقمیوں کا ذوضعاف اقل معلوم کریں گے۔

$$\text{ذوضعاف اقل} = \frac{\text{کثیر رقمیوں کا حاصل ضرب}}{\text{کثیر رقمیوں کا عادِ اعظم}}$$

مثال 03 $x^3-6x^2+11x-6$ اور x^3-4x+3 کا ذواضعاف اقل LCM معلوم کریں۔

حل: $x^3-6x^2+11x-6$ اور x^3-4x+3

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \\
\hline
x^3-4x+3 & x^3-6x^2+11x-6 \\
-x^3 & \mp 4x \pm 3 \\
\hline
 & -6x^2+15x-9
\end{array}
$$

$-6x^2+15x-9 = -3(2x^2-5x+3)$، -3 خارج کرنے سے omit میں سے

x^3-4x+3 کو 2 سے ضرب دینے

$$
\begin{array}{r|l}
x+5 & \\
\hline
2x^2-5x+3 & 2x^3-8x+6 \\
-2x^3 \pm 3x & \mp 5x^2 \\
\hline
 & 5x^2-11x+6
\end{array}
$$

کو 2 سے ضرب دینے سے, $10x^2-22x+12$

$$2x^2-5x+3\overline{)\,10x^2-22x+12}\quad(5$$
$$-10x^2 \mp 25x \pm 15$$
$$3x-3$$

$3x-3=3$ میں سے 3 خارج کرنے سے $(x-1)$

$$x-1\overline{)\,2x^2-5x+3}\quad(2x-3$$
$$-2x^2 \mp 2x$$
$$-3x+3$$
$$3x \pm 3$$
$$0\quad 0$$

تو $HCF = x-1$ ہے عاد اعظم ہے۔ $\therefore$

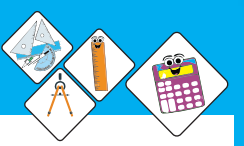
اب ہمیں معلوم ہے کہ $= \dfrac{p(x).q(x)}{HCF}$

تو $\text{LCM} = \dfrac{(x^3-6x^2+11x-6)(x^3-4x+3)}{x-1}$ $\therefore$

اب $x^3-6x^2+11x-6$ کو $x-1$ سے تقسیم کریں۔

$$x-1\overline{)\,x^3-6x^2+11x-6}\quad(x^2-5x+6$$
$$-x^3 \mp x^2$$
$$-5x^2+11x$$
$$-5x^2 \pm 5x$$
$$6x-6$$
$$-6x \pm 6$$
$$0\quad 0$$

اسی طرح $\boxed{\text{LCM} = (x^3-4x+3)(x^2-5x+6).}$ ذو اضعاف اقل ہے۔



5.1.4 حقیقی زندگی کے مسائل (حساب) جو عاد اعظم HCF اور ذواضعاف اقل LCM سے وابستہ ہیں۔

مثال 01: ردا کے پاس دو کپڑے کے ٹکڑے ہیں۔ ایک 45 انچ چوڑا اور دوسرا 90 انچ چوڑا ہے۔ وہ دونوں پٹیوں کو برابر چوڑائی میں کاٹنا چاہتے ہے، تو وہ کتنے چوڑائی کی پٹیاں کاٹے گی۔

حل: یہ مسئلہ (حساب) عاد اعظم سے حل ہو سکتا ہے۔ کیوں کہ وہ بڑی سے بڑی ممکنہ پٹیوں کے لیے کپڑا کاٹ رہی ہے یا تقسیم کر رہی ہے۔

اس لیے 45 اور 90 کا عاد اعظم

HCF of 45 and 90

$45 = 3 \times 3 \times 5$

$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

HCF = مشترک اجزاء کی حاصل ضرب

$HCF = 3 \times 3 \times 5$

عاد اعظم (HCF) 45 ہے۔

اس لیے ردا کو 45 انچ چوڑا ٹکڑا کاٹنا چاہئے۔

مثال 02: سرفراز ہر 8 دن بعد ورزش کرتا ہے اور عمران ہر 4 دن بعد ورزش کرتا ہے۔ اگر دونوں نے آج ورزش کی ہو تو پھر کتنے دن بعد ایک ساتھ ورزش کریں گے۔

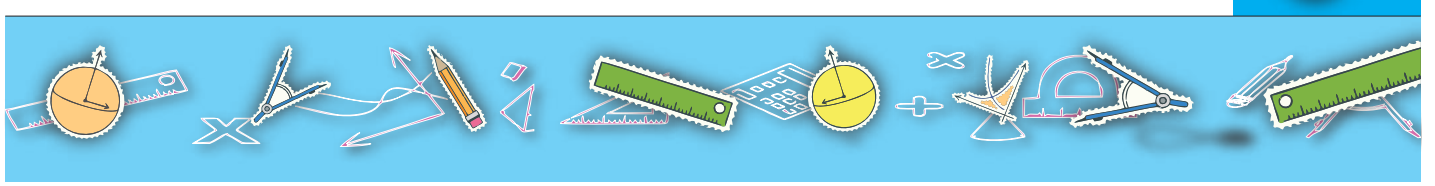
حل: یہ حساب ذواضعاف اقل LCM سے حل ہوگا۔ کیوں کہ ہم یہ جاننے کی کوشش کر رہے ہیں کہ وہ کس وقت ایک ساتھ ورزش کریں گے، وہ وقت جو ایک ساتھ ہو۔ 8 اور 4 کی ذو اضعاف اقل ہے۔

ذواضعاف اقل = مشترکہ اجزاء ضربی x غیر مشترک اجزاء ضربی

ذواضعاف اقل $= 2 \times 2 \times 2$

ذواضعاف اقل $= 8$

اس لیے، وہ 8 دن بعد ایک ساتھ ورزش کریں گے



مشق 5.1

1. بذریعہ اجزاء ضربی مندرجہ ذیل کا عادا عظم معلوم کریں۔

(i) $72x^4y^5z^2$ اور $120x^3y^6z^8$ (ii) $18r^3s^4t^5, 120r^4s^3t^8$ اور $210r^7s^7t^3$

(iii) $x^2-3x-18$ اور x^2+5x+6 (iv) $4x^2-9$ اور $2x^2-5x+3$

(v) $(2a^2-8b^2), (4a^2+4ab-24b^2)$ اور $(2a^2-12ab+16b^2)$

(vi) x^3+x^2+x+1 اور x^3+3x^2+3x+1

2. مندرجہ ذیل کا عادا عظم HCF بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

(i) x^2+3x+2 اور $3x^2-3x-6$

(ii) $2x^3+15x^2+31x+12$ اور $6x^3+46x^2+100x+48$

(iii) $x^3-5x^2+10x-8$ اور x^3-4x^2+7x-6

(iv) $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ اور x^3+4x^2+4x+1 اور x^3+5x^2+7x+2

3. مندرجہ ذیل کا ذواضعاف اقل LCM بذریعہ اجزاء ضربی معلوم کریں۔

(i) $27a^4b^5c^2$ اور $81ab^2c^8$ (ii) $24p^2q^3r^4, 100p^5q^4r^5$ اور $300p^3qr^8$

(iii) $21x^2-14x$ اور $3x^2-5x+2$ (iv) $x^2+11x+28$ اور x^2+x-12

(v) $6x^2+11x+3, 3x^2-2x-1$ اور $3x^2-11x-4$

(vi) x^2-y^2, x^3-y^3 اور $x^4+x^2y^2+y^4$

4. بذریعہ تقسیم ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

(i) $x^2-25x+100$ اور x^2-x-20

(ii) $3x^2+14x+8$ اور $6x^2+x-2$

(iii) $x^2-y^2-z^2-2yz$ اور $y^2-z^2-x^2-2xz$

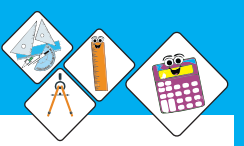
(iv) $3x^3+9x^2-84x$ اور $4x^4-24x^3+32x^2$

5. اگر x^2-6x+9 اور $x^2-11x+24$ کا عادا عظم $(x-3)$ HCF ہے تو ذواضعاف اقل **LCM** معلوم کریں۔

6. دو اظہارات کا عادا عظم $(x+3)$ ہے اور دو اضعاف اقل $(x^3+7x^2+7x-15)$ ہے۔ اگر ایک اظہار $x^2+8x+15$ ہے تو دوسرا معلوم کریں۔

7. دو دو درجی کثیر رقمی اظہاریوں کا عادا عظم اور ذواضعاف اقل بالترتیب $3x-2$ اور $3x^3+7x^2-4$ ہے تو دونوں کثیر رقموں کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

8. عادا عظم اور ذواضعاف اقل کے بیچ تعلق کی تصدیق کریں یعنی $q(x)) = p(x)$ کثیر رقمی اظہارات کے لیے $p(x)=x^2-8x-20$ اور $q(x)=x^2-15x+50$ ہے۔



9. ایک بڑھئے کو کچھ لکڑی کے تختے مفت دیئے گئے کچھ 12cm لمبے اور کچھ 18cm لمبے ہیں۔ وہ ان کو کاٹنا چاہتا ہے تاکہ ان کے استعمال کو آسان بنانے کے لیے اس کے پاس برابر سائز کے تختے ہوں۔

10. ٹرین A اور ٹرین B صبح 10 بجے حیدر آباد رکتی ہیں۔ ٹرین A ہر 12 منٹ کے بعد اور ٹرین B ہر 14 منٹ کے بعد رکتی ہیں۔ وہ دونوں ایک ساتھ کب رکیں گی ۔

5.2 الجبری کسور پر بنیاد عوامل

اگر $p(x)$ اور $q(x)$ آلجبری اظہاریے ہیں اور $q(x) \neq 0$ تو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو الجبری کسور کہا جاتا ہے۔

الجبری کسور کی مختصر ترین صورت ایک ایسی کسور ہے جس میں شمار کنندہ اور مخرج میں 1 کے علاوہ کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہو۔

الجبری کسور میں بنیادی عوامل $(+, -, \div, \times)$ عام کسور کی طرح دیے جاتے ہیں۔

مندرجہ ذیل مثالوں میں ہم عاد اعظم اور ذواضعاف اقل کے استعمال کی وضاحت کریں گے، کسوری اظہارات مختصر ترین صورت میں کرنے کے لیے جن میں بنیادی عوامل شامل ہوں۔

5.21 عاد اعظم اور ذواضعاف اقل استعمال کریں۔ الجبری کسور جن میں جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم شامل ہوں ان کو مختصر کریں۔

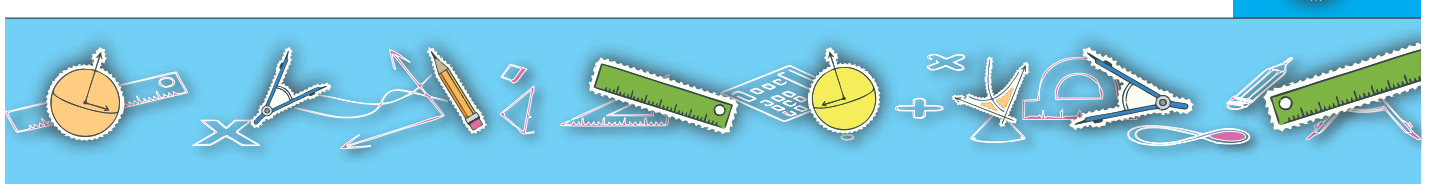
مثال 01: $\frac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3} + \frac{1}{4x^2-1}$ مختصر کریں۔

حل:

$$\frac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3} + \frac{1}{4x^2-1} = \frac{x^2-3x+2x-6}{2x^2-6x+x-3} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{x(x-3)+2(x-3)}{2x(x-3)+1(x-3)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} \quad \text{where, } x \neq 3$$



$$= \frac{(x+2)}{(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{(x+2)(2x-1)+1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{2x^2-x+4x-2+1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2x^2+3x-1}{4x^2-1}$$

مثال 02: مختصر کریں۔ $\frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+x-6}$

حل:

$$\frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+x-6}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+4x-3x-6}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x(x+2)-3(x+2)}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{2(2x-3)-(x-4)}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{4x-6-x+4}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{3x-2}{2x^2+x-6}$$

مثال 03: مختصر کریں۔ $\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b}$

حل:

$$\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b}$$

$$\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b} = \frac{a(b^2+2)}{b(a+2)-3(a+2)} \times \frac{b^2-3b-3b+9}{b(b^2+2)}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{b(b-3)-3(b-3)}{b}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{(b-3)(b-3)}{b}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{(b-3)(b-3)}{b}$$

$$= \frac{a(b-3)}{b(a+2)}$$

جب کہ
اور

مثال 04: $\frac{p^2-q^2}{r^2+2rs+s^2} \div \frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$ مختصر کریں۔

حل:

$$\frac{p^2-q^2}{r^2+2rs+s^2} \div \frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$$

$$= \frac{(p+q)(p-q)}{(r+s)^2} \div \frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$$

$$= \frac{(p+q)(p-q)}{(r+s)^2} \times \frac{3(r+s)s}{2(p+q)}$$

$$= \frac{3s(p-q)}{2(r+s)},$$

جب کہ $p+q \neq 0$
اور $r+s \neq 0$

مشق 5.2

درج ذیل کو مختصر کریں۔

(i) $\frac{4x}{x^2+2x+1} + \frac{3}{x+1}$

(ii) $\frac{3}{x(2x+1)} + \frac{6x+7}{3x(x+1)}$

(iii) $\frac{3x-1}{x^2+2x+1} - \frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$

(iv) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}$

(v) $\frac{x^2+4x+3}{5} \times \frac{10}{x+1}$

(vi) $\frac{x^2-4x-21}{x^2-6x-7} \div \frac{x+9}{x+1}$

(vii) $\left[\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right] \div \left[\frac{2}{x+3} - 1\right]$

(viii) $\left(\frac{1}{x^2-9}\right) \div \left(\frac{1}{x+3}\right) - \frac{3}{x-2}$

(ix) $\frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{1}{x^2+7x+12} - \frac{1}{x^2+x-12}$

(x) $2\left(\frac{x^2+7x+12}{x^2-16} + \frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}\right) \times \frac{x^2-2x-8}{8x^2+2x+4}$.

5.3 الجبری اظہارات کا جذر المربع

5.3.1 بذریعہ اجزاء ضربی اور تقسیم جذر المربع معلوم کرنا۔

الجبری اظہارات کا جذر المربع معلوم کرنے کے دو طریقوں پر بحث کریں گے۔

(a) بذریعہ اجزاء ضربی (b) بذریعہ تقسیم۔

(a) بذریعہ اجزاء ضربی جذر المربع کا طریقہ

مثال 01: $49x^2+126xy+81y^2$ کا جذر المربع بذریعہ اجزاء ضربی معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 49x^2+126xy+81y^2 \\ = \ & (7x)^2+2\,(7x)(9y)+(9y)^2, \\ = \ & (7x+9y)^2, \\ = \ & \sqrt{49x^2+126xy+81y^2} \quad \text{اس لیے} \\ = \ & \sqrt{(7x+9y)^2} = 7x+9y \end{aligned}$$

(b) بذریعہ تقسیم جذر المربع۔

مثال 01: $4x^4+12x^3-19x^2-42x+49$ کا جذر المربع بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

حل: طریقہ ذیل میں واضح ہے۔

$2x^2+3x-7$

$2x^2$	$4x^4+12x^3-19x^2-42x+49$
$+2x^2$	$\pm 4x^4$
$4x^2+3x$	$12x^3-19x^2-42x+49$
$+3x$	$\pm 12x^3 \pm 9x^2$
$4x^2+6x-7$	$-28x^2-42x+49$
-7	$\mp 28x^2 \mp 42x \pm 49$
$4x^2+6x-14$	$0 \quad 0 \quad 0$

$\sqrt{4x^4+12x^3-19x^2-42x+49} = 2x^2+3x-7.$ اس لیے

مثال 02: a کی کس قیمت کے لیے $36x^4 + 36x^3 + 57x^2 + 24x + a$ مکمل مربع ہوگا۔

حل: بذریعہ تقسیم:

$$6x^2 + 3x + 4$$

$6x^2$	$36x^4 + 36x^3 + 57x^2 + 24x + a$
$+6x^2$	$\pm 36x^4$
$12x^2 + 3x$	$36x^3 + 57x^2 + 24x + a$
$+ 3x$	$\pm 36x^3 \pm 9x^2$
$12x^2 + 6x + 4$	$48x^2 + 24x + a$
$+4$	$\pm 48x^2 \pm 24x \pm 16$
$12x^2 + 6x + 8$	$a - 16$

مکمل مربع ہونے کے لیے جذالمربع کے عمل میں باقی صفر ہونا چاہیے

$$a - 16 = 0 \Rightarrow a = 16,$$

A کی قیمت 16 رکھنے سے دیا گیا اظہار یہ مکمل مربع ہوگا۔

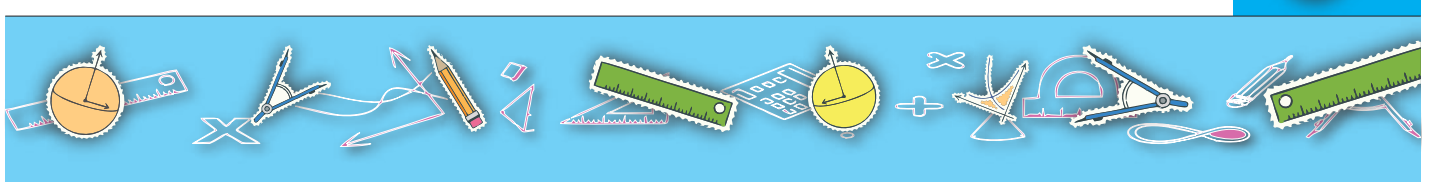
مثال 03: $x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 5$ میں کیا جمع کیا جائے کہ یہ مکمل مربع بن جائے؟

حل: بذریعہ تقسیم:

$$x^2 + 2x + 3$$

x^2	$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 5$
x^2	$\pm x^4$
$2x^2 + 2x$	$4x^3 + 10x^2 + 5$
$+ 2x$	$\pm 4x^3 \pm 4x^2$
$2x^2 + 4x + 3$	$6x^2 + 5$
$+3$	$\pm 6x^2 \pm 12x \pm 9$
$2x^2 + 4x + 6$	$-12x - 4$ یا $-(12x + 4)$

یعنی باقی بچا۔ گویا $12x+4$ جمع کرنے پر دیا ہوا اظہار یہ مکمل مربع بن جائے گا۔



مشق 5.3

1. مندرجہ ذیل کا جذرالمربع بذریعہ اجزاء ضربی معلوم کریں۔

(i) $36x^2-60xy+25y^2$

(ii) $9x^2+\frac{1}{x^2}+6$

(iii) $4x^4y^4-\frac{12x^3y^3}{z^2}+\frac{9x^2y^2}{z^4}$

(iv) $36(3-2x)^2-48(3-2x)y+16y^2$

(v) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3$

(vi) $(4x^2-4x+1)(9x^2-54x+81)$

(vii) $(x^2-2x+1)(x^2-6x+9)$

(viii) $(x^2+8x+15)(x^2+7x+10)(x^2+5x+6)$

2. مندرجہ ذیل کا جذرالمربع بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

(i) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

(ii) $25x^4+40x^3+26x^2+8x+1$

(iii) $4x^4+8x^3+20x^2+16x+16$

(iv) $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+47-\frac{14y}{x}+\frac{14x}{y}$

(v) $x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$

(vi) $x^2+\frac{y^2}{9}+9z^2+\frac{2xy}{3}+2yz+6xz$

(vii) $(x^2+\frac{1}{x^2})^2-8(x^2+\frac{1}{x^2})+16$

(viii) $x^6+\frac{1}{x^6}-4\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+6,\ x\neq 0$

3. $4x^4+4x^3+17x^2+8x+9$ میں کیا جمع کیا جائے کہ یہ مکمل مربع بن جائے؟

4. $9x^6-12x^5+4x^4-18x^3-12x^2+18$ میں سے کیا تفریق کیا جائے کہ یہ مکمل مربع بن جائے؟

5. 'm' کی کس قیمت کے لیے $9x^4+12x^3+34x^2+mx+25$ مکمل مربع ہوگا؟

6. 'p' اور 'q' کی کس قیمت کے لیے $x^4+8x^3+30x^2+px+q$ اظہار یہ مکمل مربع ہے؟

7. 'a' اور 'b' کی کس قیمت کے لیے $x^4+4x^3+10x^2+ax+b$ اظہار یہ مکمل مربع ہے؟

جائزہ مشق 5

1. صحیح اور غلط سوال۔

مندرجہ ذیل جملے غور سے پڑھیں اور صحیح بیان کی صورت میں 'T' اور غلط بیان کی صورت میں 'F' پر گول دائرہ لگائیں۔

(i) HCF of $y^2 - 4$ اور $y - 2$ is $y - 2$. T/F

(ii) HCF of $a^3 - 1$ اور $a^2 - 1$ is $a + 1$. T/F

(iii) LCM of $x^3 + 1$ اور $x + 1$ is $x^3 + 1$. T/F

(iv) LCM of $x^4 - y^4$ اور $x^2 - y^2$ is $x^2 + y^2$. T/F

(v) HCF of $a^2 + 4a + 3$ اور $a^2 + 5a + 6$ is $a + 3$. T/F

2. خالی جگہیں پر کریں۔

(i) آلجبری اظہار کا عاد اعظم معلوم کرنے کے _____ طریقے ہیں۔

(ii) دو کثیر رقمیوں کے عاد اعظم X ذو اضعاف اقل _____ ہے۔

(iii) $y - 2$ اور $y + 6$ اور $y^2 - 5y$ کا عاد اعظم _____ ہے۔

(iv) y^2+5y+6 اور y^2+3y+2 کا ذو اضعاف اقل _____ ہے۔

(v) $y + \frac{1}{y}$ اور $y^2 - \frac{1}{y^2}$ کا عاد اعظم _____ ہے۔

3. درست جوابات پر ٹک (✓) لگائیں۔

(i) $x^3 - 8y^3$ اور $x^2 - 4xy + 4y^2$ کا عاد اعظم ہے

(a) $x - 4y$ (b) $x^2+2xy+y^2$

(c) $x+2y$ (d) $x-2y$

(ii) $(2y+3z)^5$ اور $(2y+3z)^3$ کا ذو اضعاف اقل ہے:

(a) $2y+3z$ (b) $(2y+3z)^3$

(c) $(2y+3z)^2$ (d) $(2y+3z)^5$

(iii) $x^3 - y^3$ اور x^2+xy+y^2 کا عاد اعظم ہے۔

(a) $x+y$ (b) x^2+xy+y^2

(c) $x-y$ (d) $(x-y)^2$

(iv) $(x-y)^4$ اور $(x-y)^3$ کا ذو اضعاف اقل ہے۔

(a) $(x-y)$ (b) $(x-y)^3$

(c) $(x-y)^4$ (d) $(x-y)^7$

(v) $\frac{1}{x+y}+\frac{y}{x^2-y^2}$ کی مختصر صورت ہے:

(a) $\frac{y+1}{x^2-y^2}$ (b) $\frac{x}{x^2-y^2}$

(c) $\frac{y}{x^2-y^2}$ (d) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$

(vi) $\frac{y}{25x^2-y^2}-\frac{1}{5x-y}$ کی مختصر صورت ہے:

(a) $\frac{5x}{25x^2-y^2}$ (b) $\frac{5x}{5x-y}$

(c) $\frac{-5x}{5x+y}$ (d) $\frac{-5x}{25x^2-y^2}$

(vii) _____ $=\frac{a^3x^3+a^3y^3}{a^2(x+y)}$

(a) ax^2+ay^2 (b) x^2+y^2

(c) $a(x^2-xy+y^2)$ (d) $a(x^2+xy+y^2)$

(viii) _____ $=\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$

(a) $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ (b) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

(c) $\frac{a+b}{a^2-b^2}$ (d) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$

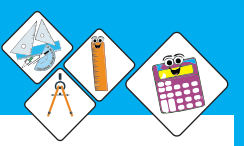
(ix) ذواضعاف اقل = _____

(a) $\frac{\text{HCF}}{p\times q}$ (b) $\frac{p\times q}{\text{HCF}}$

(c) $\frac{p}{\text{HCF}}$ (d) $\frac{q}{\text{HCF}}$

(x) x^2-x+1 اور x^3+1 کا ذواضعاف اقل ہے

(a) $x+1$ (b) x^2-x+1 (c) x^3+1 (d) x^2+x+1



خلاصہ

- الجبری اظہاریوں کا عاد اعظم اور ذواضعاف اقل معلوم کرنے کے لیے دو طریقے استعمال ہوتے ہیں۔
  (i) بذریعہ اجزاء ضربی (ii) بذریعہ تقسیم۔
- کثیر رقمی اظہاریوں کا ذواضعاف قل x عاد اعظم = دو کثیر رقمی اظہاریوں کی حاصل ضرب۔
- دو اضعاف اقل اور عاد اعظم کی مدد سے الجبری اظہاریوں کی جمع، ضرب، تفریق اور تقسیم مل سکتی ہے۔
- الجبری اظہاریوں کا جذر المربع معلوم کرنے کے لیے دو طریقے استعمال ہوتے ہیں۔
  (i) جذر المربع بذریعہ اجزاء ضربی۔
  (ii) جذر المربع بذریعہ تقسیم۔