یونٹ 4

عمل تجزی

FACTORIZATION

طلباء کے تدریسی نتائج:

اس یونٹ کے مطالعہ کے بعد طلباء اس قابل ہونگے کہ:

- مندرجہ ذیل اظہاریوں کی تجزی دہرائیں سکیں گے۔
  - $ka + kb + kc$ (تمام رقوم میں مشترکہ جُز (عنصر)
  - $ac + ad + bc + bd$ (رقوم کے جوڑوں میں مشترکہ جز (عنصر)
  - $a^2 \pm 2ab + b^2$ (مکمل مربع)
  - $a^2 - b^2$ (دو مربع رقوم میں تفریق)
  - $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$
  - $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$
- مندرجہ ذیل اقسام کے اظہاریوں کی تجزی کر سکیں گے۔

  قسم i- $a^4 + a^2b^2 + b^4$ اور $a^4 + b^4$

  قسم ii- $x^2 + px + q$

  قسم iii- $ax^2 + bx + c$

  قسم iv- $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + k$
  $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k$
  $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$

  قسم v- $a^3 \pm b^3$

  قسم vi- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ اور $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- مسئلہ باقی مثالوں سے بیان کرنا اور ثابت سیکھ جائیں گے۔
- باقی معلوم کرنا (بغیر تقسیم) جبکہ ایک کثیر رقمی ایک درجہ کثیر رقمی سے تقسیم ہو۔
- کثیر رقمی کے (0) صفر کو بیان کرنا۔
- مسئلہ اجزاء بیان کرنا اور ثابت کرنا۔
- مصنوعی تقسیم کا طریقہ بیان کرنا۔
- مصنوعی تقسیم استعمال کرنا۔
  - خارج قسمت اور باقی معلوم کرنا جب دیا ہوا کثیر رقمی اظہاریہ ایک یک درجہ کثیر رقمی اظہاریے سے تقسیم ہو۔
  - نامعلوم کی قیمتیں معلوم کرنا اگرچہ کثیر رقمی اظہاریے کا صفر دیا گیا ہو۔
  - نامعلوم کی قیمتیں معلوم کرنا۔ اگر کثیر رقمی اظہاریوں کا جُز (عنصر) دیا گیا ہو۔
- مسئلہ اجزاء استعمال کرکے کعبی کثیر رقمی اظہاریے کی تجزی کرنا۔

تعارف:

ہم عمل تجزی کا مطالعہ کریں گے جو علم ریاضی میں ایک اہم کردار ادا کرتی ہے۔ یہ ہمیں مشکل ترین اظہاریوں کو سادہ اظہاریوں میں تبدیل کرنے میں مدد کریگا۔

4.1 عمل تجزی

فرض کریں کہ $p(x), q(x)$ اور $r(x)$ تین کثیر رقمی اظہارے ہیں، اسی طرح $r(x) = p(x) \times q(x)$ یہاں پر $r(x)$ ایک نتیجہ خیز کثیر رقمی اظہاریہ ہے جو $p(x)$ اور $q(x)$ کی حاصل ضرب ہے۔ اظہاریہ $r(x)$ کے اجزاء ضربی $p(x)$ اور $q(x)$ ہیں۔
ذیل میں کچھ کثیر رقمی اظہاریوں کے اجزاء ضربی کی مثالیں ہیں۔

(i) $6x^2y^3 = (2\times3)(x\times x)(y\times y\times y)$

(ii) $ax + aby + abcz = a(x + by + bcz)$

(iii) $5x + 15xy = 5x(1+3y)$

(iv) $x - y = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$

4.1.1 مندرجہ ذیل اقسام کے اظہاریوں کی عمل تجزی دہرائیں۔

(i) $ka + kb + kc$ (تمام رقوم میں مشترکہ جُز)

(ii) $ac + ad + bc + bd$ (رقوم کے جوڑوں میں مشترکہ جز)

(iii) $a^2 \pm 2ab + b^2$ (مکمل مربع)

(iv) $a^2 - b^2$ (دو مربع رقوم میں تفریق)

(v) $a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2$

(vi) $\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2$

(i) $ka + kb + kc$ کے اجزاء ضربی۔

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 01: $10a + 15b - 20c$ کے اجزاء ضربی معلوم کریں۔

حل: $10a + 15b - 20c$

$= 5(2a + 3b - 4c)$

مثال 02: $\frac{4}{9} - \frac{8}{12}x - \frac{16}{15}xy$ کے اجزاء ضربی معلوم کریں۔

حل: $\frac{4}{9} - \frac{8}{12}x - \frac{16}{15}xy$

$= \frac{4}{3\cdot3} - \frac{4\cdot2}{3\cdot4}x - \frac{4\cdot4}{3\cdot5}xy$

$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3} \quad \frac{2}{4}x \quad \frac{4}{5}xy\right)$ ($\frac{4}{3}$ کو مشترکہ جزو ضربی نکالنے سے)

(ii) $ac + ad + bc + bd$ کی طرح کے اظہاریوں کی اجزاء ضربی معلوم کریں

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں

مثال :01 $3a - ac - 3c + c^2$ کے اجزاء ضربی معلوم کریں

حل:

$$\begin{aligned} & 3a - ac - 3c + c^2 \\ = \; & a(3 - c) - c\,(3 - c) \\ = \; & (3 - c)\,(a - c) \end{aligned}$$

مثال :02 $9y^2z + 3xyz - 9xy^2 - 3x^2y$ کے اجزاء ضربی معلوم کریں

حل:

$$\begin{aligned} & 9y^2z + 3xyz - 9xy^2 - 3x^2y \\ = \; & 3yz(3y + x) \; - \; 3xy(3y + x) \\ = \; & (3y + x)(3yz - 3xy) \\ = \; & (3y + x) \times 3y(z - x) \\ = \; & 3y\,(x + 3y)(z - x) \quad \text{(مطلوبہ اجزاء ضربی ہیں)} \end{aligned}$$

(iii) $a^2 \pm 2ab + b^2$ کی طرح کے اظہاریوں کے اجزاء ضربی معلوم کریں جیسا کہ ہمیں معلوم ہے کہ:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2 = (a + b)^2$$

اور $\quad a^2 - 2ab + b^2 = (a)^2 - 2(a)(b) + (b)^2 = (a - b)^2$

مندرج ذیل مثالوں پر غور کریں

مثال :01 $16a^2 + 40ab + 25b^2$ کی تجزی کریں

حل:

$$\begin{aligned} & 16a^2 + 40ab + 25b^2 \\ = \; & (4a)^2 + 2(4a)(5b) + (5b)^2 \\ = \; & (4a + 5b)^2 \qquad [\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2] \end{aligned}$$

مثال :02 $4p^2 - 28\,pq + 49q^2$ کی تجزی کریں

حل:

$$\begin{aligned} & 4p^2 - 28pq + 49q^2 \\ = \; & (2p)^2 - 2(2p)(7q) + (7q)^2 \\ = \; & (2p - 7q)^2 \qquad [\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2] \end{aligned}$$

(iv) $a^2 - b^2$ کی طرح کے اظہاریوں کی تجزی۔

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں

مثال :01 $4x^2 - 1$ کی تجزی کریں

حل:

$$\begin{aligned} & 4x^2 - 1 \\ = \; & (2x)^2 - (1)^2 \\ = \; & (2x - 1)(2x + 1) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)] \end{aligned}$$

مثال 02: $ab\,y^2 - 6z^2$ کی تجزی کریں

حل:

$$96y^2 - 6z^2$$
$$= 6(16y^2 - z^2)$$
$$= 6[(4y)^2 - z^2]$$
$$= 6(4y - z)(4y + z) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

مثال 03: $9r^4 - (6s - t^2)^2$ کی تجزی کریں

حل:

$$9r^4 - (6s - t^2)^2$$
$$= (3r^2)^2 - (6s - t^2)^2$$
$$= [3r^2 - (6s - t^2)][3r^2 + (6s - t^2)], \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$
$$= (3r^2 - 6s + t^2)(3r^2 + 6s - t^2)$$

(v) $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$ کی طرح کے اظہاریوں کی تجزی۔

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں

مثال 01: $x^2 + 4xy^2 + 4y^4 - 4z^2$ کی تجزی کریں

حل:

$$x^2 + 4xy^2 + 4y^4 - 4z^2$$
$$= \{(x)^2 + 2(x)(2y^2) + (2y^2)^2\} - (2z)^2$$
$$= (x + 2y^2)^2 - (2z)^2$$
$$= \{(x+2y^2) + 2z\}\{(x + 2y^2) - 2z\} \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$
$$= (x + 2y^2 + 2z)(x + 2y^2 - 2z)$$

مثال 02: $9p^2 - 6pq + q^2 - 9r^2$ کی تجزی کریں

حل:

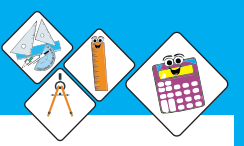
$$9p^2 - 6pq + q^2 - 9r^2$$
$$= (3p)^2 - 2(3p)(q) + q^2 - (3r)^2$$
$$= (3p - q)^2 - (3r)^2$$
$$= (3p - q + 3r)(3p - q - 3r) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

(vi) $\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2$ کی طرح کے اظہاریوں کی تجزی کرنا۔

مثال 01: $\left(\sqrt{xy}\right)^2 - \left(\sqrt{z}\right)^2$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\left(\sqrt{xy}\right)^2 - \left(\sqrt{z}\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{xy} - \sqrt{z}\right)\left(\sqrt{xy} + \sqrt{z}\right) \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$



مشق 4.1

1. مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $4x + 16y + 24z$ (ii) $x^2 + 3x^2y + 4x^2y^2z$

(iii) $3pqr + 6pqt + 3pqs$ (iv) $9qr(s^2 + t^2) + 18q^2r^2(s^2 + t^2)$

(v) $\frac{z^2x}{16} - \frac{x^2z^2}{8} + \frac{x^2z^3}{12}$ (vi) $a(x-y) - a^2b(x-y) + a^2b^2(x-y)$

2. مندرجہ ذیل کی تجزی کریں

(i) $7x + xz + 7z + z^2$ (ii) $9a^2b + 18ab^2 - 6ac - 12bc$

(iii) $6t - 12p + 4tq - 8pq$ (iv) $r^2 + 9rs - 7rs - 63s^2$

(v) $\frac{y^2}{4} - \frac{y^2z}{4} - \frac{z^2t}{9} + \frac{z^3t}{9}$ (vi) $\frac{10xy}{11} + \frac{5xz}{11} - \frac{14y^2}{11} - \frac{7yz}{11}$

3. اجزاء ضربی معلوم کریں

(i) $4a^2 + 12ab + 9b^2$ (ii) $36x^4 + 12x^2 + 1$

(iii) $x^2 + 1 + \frac{1}{4x^2}$ (iv) $81y^2 + 144yz + 64z^2$

(v) $625 + 50\,a^2b + a^4b^2$ (vi) $a^2 + 0.4a + 0.04$

4. تجزی کریں

(i) $b^4 - 4b^2c^2 + 4c^4$ (ii) $\frac{9}{4}x^4 - 2 + \frac{4}{9x^4}$

(iii) $2a^3b^3 - 16a^2b^4 + 32ab^5$ (iv) $9(p+q)^2 - 6(p+q)r^2 + r^4$

(v) $x^2y^2 - 0.1xy + 0.0025$ (vi) $(a-b)^2 - 18(a-b) + 81$

5. تجزی کریں

(i) $4a^2 - 9b^2$ (ii) $16x^2 - 25y^2$ (iii) $100x^2z^2 - y^4$

(iv) $\frac{1}{100}x^4 - 100y^4$ (v) $\frac{64}{81}f^2 - \frac{81}{64}g^4$ (vi) $\frac{x^4}{121} - 121y^2$

6. اجزاء ضربی معلوم کریں

(i) $(2x + z)^2 - (2x - z)^2$ (ii) $(4a - 9b)^2 - (2a + 5b)^2$

(iii) $169x^4 - (3t + 4)^2$ (iv) $(9x^2 - 4y^2)^2 - (4x^2 - y^2)^2$

(v) $\left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(b^2 - 2 + \frac{1}{b^2}\right)$ (vi) $9x^2 + \frac{1}{9x^2} - 4y^2 - \frac{1}{4y^2} + 4$

7. اجزاء ضربی معلوم کریں

(i) $(x^2 + 2xy + y^2) - 9z^4$ (ii) $(4a^2 + 8ab^2 + 4b^4) - 9c^2$

(iii) $16d^4 - (c^4 - 2c^2d + d^2)$ (iv) $4(x^2 + 2xy^2 + y^4) - 9y^6$

(v) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$ (vi) $4x^2 - y^2 - 2y - 1$

8. تجزی کریں

(i) $\left(\sqrt{ab}\right)^2 - \left(\sqrt{c}\right)^2$ (ii) $\left(\sqrt{4x}\right)^2 - \left(\sqrt{9y}\right)^2$

(iii) $\left(\sqrt{yz}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)^2$ (iv) $xzt - \frac{1}{t}$

4.1.2 مندرجہ ذیل کی طرح کے اظہاریوں کی تجزی کرنا۔

قسم 1: $a^4 + a^2b^2 + b^4$ or $a^4 + 4b^4$

اس طرح کے اظہاریوں میں وہ الجبری اظہارے شامل ہیں جو نہ مربع اظہاریے ہیں اور نہ ہی دو مربع اظہاریوں کی تفریق کی طرح ہیں۔ اس طرح کے اظہاریوں کی تجزی مندرجہ ذیل مثالوں میں واضح ہے۔

مثال 01: $a^4 + a^2b^2 + b^4$ کی تجزی کریں

حل:

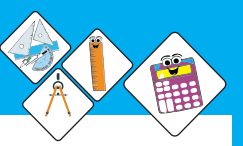
$$\begin{aligned}
& a^4 + a^2b^2 + b^4 \\
= \ & (a^4 + b^4) + a^2b^2 && \text{(رقوم کی ترتیب بدلنے سے)} \\
= \ & (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 2a^2b^2 + a^2b^2 && \text{(جمع اور تفریق کرنے سے } 2a^2b^2) \\
= \ & \{(a^2)^2 + 2(a^2)(b^2) + (b^2)^2\} - a^2b^2 \\
= \ & (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 \\
= \ & \{(a^2 + b^2) - ab\}\{(a^2 + b^2) + ab\} && [\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)] \\
= \ & (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) && \text{مطلوبہ اجزاء ضربی ہیں۔}
\end{aligned}$$

مثال 02: $a^4 + 4b^4$ کی تجزی کریں

حل:

$$\begin{aligned}
& a^4 + 4b^4 \\
= \ & (a^2)^2 + (2b^2)^2 \\
= \ & (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) - 2(a^2)(2b^2) \\
= \ & \{(a^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) + (2b^2)^2\} - 4a^2b^2 \\
= \ & (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\
= \ & \{(a^2 + 2b^2) - 2ab\}\{(a^2 + 2b^2) + 2ab\} && [\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)] \\
= \ & (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2) && \text{مطلوبہ اجزاء ضربی ہیں۔}
\end{aligned}$$

$[2(a^2)(2b^2)]$ جمع اور تفریق کرنے سے



مثال 03: x^8+x^4+1 کی تجزی کریں

حل:

$$x^8 + x^4 + 1$$

$= (x^8 + 1) + x^4$

[جمع اور تفریق کرنے سے $2(x^4)(1)$]

$= \{(x^4)^2 + (1)^2 + 2(x^4)(1)\} - 2(x^4)(1) + x^4$

$= (x^4 + 1)^2 - x^4$

$= (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2$

$= \{(x^4 + 1) - x^2\}\{(x^4 + 1) + x^2\}$ $[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

$= \{(x^4 + x^2 + 1)\}(x^4 - x^2 + 1)$

$= \{(x^2 + 1)^2 - 2x^2 + x^2\}(x^4 - x^2 + 1)$

$= \{(x^2 + 1)^2 - x^2\}(x^4 - x^2 + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$ مطلوبہ اجزاء ضربی ہیں۔

قسم ii $x^2 + px + q$

اس طرح کے اظہاریوں کی تجزی کے لیئے درمیانی رقم کو دو حصوں میں توڑ سکتے ہیں۔

مثال 01: $y^2 + 7y + 12$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$y^2 + 7y + 12$$

$= y^2 + 3y + 4y + 12$

$= y(y + 3) + 4(y + 3)$

$= (y + 3)(y + 4)$

مثال 02: $x^2 + 13xy - 30y^2$ کی تجزی کریں

حل:

$$x^2 + 13xy - 30y^2$$

$= x^2 + 15xy - 2xy - 30y^2$

$= x(x + 15) - 2y(x + 15)$

$= (x + 15)(x - 2y)$

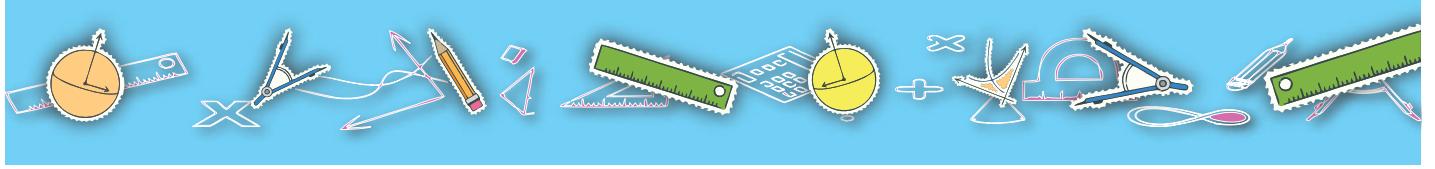
قسم (iii) $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

$ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کی تجزی کرنے کے لیے مندرجہ ذیل اقدام کی ضرورت ہے۔

(i) ac کی حاصل ضرب معلوم کرنا جہاں a عددی سر ہے x^2 کا اور c ایک مستقل ہے۔

(ii) x_1 اور x_2 دو اعداد معلوم کرنا اس طرح $x_1 + x_2 = b$ اور $x_1 x_2 = ac$

مزید وضاحت کے لیے مندرجہ ذیل طریقہ کار مددگار ہے۔



مثال 01: $10x^2-19xy+6y^2$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$10x^2-19xy+6y^2$$
$$= 10x^2 - 15xy - 4xy + 6y^2$$
$$= 5x(2x - 3y) - 2y(2x - 3y)$$
$$= (2x - 3y)(5x - 2y)$$

مثال 02: $4x^2+12x+5$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$4x^2+12x+5$$
$$= 4x^2 + 10x + 2x + 5$$
$$= 2x(2x + 5) + 1(2x + 5)$$
$$= (2x + 5)(2x + 1)$$

مشق 4.2

1. مندرجہ ذیل کی تجزی کریں

(i) $a^4+a^2x^2+x^4$ (ii) b^4+b^2+1

(iii) $a^8+a^4x^4+x^8$ (iv) z^8+z^4+1

2. تجزی کریں

(i) x^4+4y^4 (ii) $36x^4z^4+9y^4$

(iii) $4t^4+625$ (iv) $4t^4+1$

3. اجزاءضربی میں حل کریں

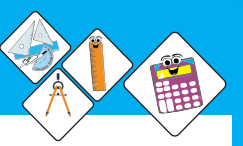
(i) $x^2+3x-10$ (ii) $a^2b^2-3ab-10$

(iii) $y^2+7y-98$ (iv) $x^2y^2z^2+2xyz-24$

4. اجزاءضربی میں حل کریں

(i) $9y^2+21yz-8z^2$ (ii) $42x^2-8x-2$

(iii) $4x^2+12x+5$ (iv) $3x^2-38xy-13y^2$



6. اجزاء ضربی حل کریں۔

قسم iv: $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d)+k$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+k$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+kx^2$

اس طرح کے اظہاریوں کی حاصل ضرب کے طریقہ کار کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں کی مدد سے کرتے ہیں۔

مثال 01: $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120$ کی تجزی کریں۔

حل: $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120$

فرض کریں کہ $x^2+5x = t$ تو

$(t+4)(t+6) -120$

$= t^2+10t+24-120$

$= t^2+10t-96$

$= t^2-6t+16t-96$ (بہ ذریعہ تجزی)

$= t(t-6)+16(t-6)$

$= (t-6)(t+16)$

$= (x^2+5x-6)(x^2+5x+16)$ $\because t=x^2+5x$

$= (x^2-x+6x-6)(x^2+5x+16)$

$= [x(x-1)+6(x-1](x^2+5x+16)$

$= (x-1)(x+6)(x^2+5x+16)$

مثال 02: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$ کی تجزی کریں۔

حل:

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$

Here $1+4= 2+3 =5$

$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15$ یہاں پر

$= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15$

$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-15$

$= (t+4)(t+6)-15$ یہاں پر $t = x^2+5x$

$= t^2+10t+24-15$

$= t^2+10t+9$

$= (t+1)(t+9)$

$= (x^2+5x+1)(x^2+5x+9)$ $\because t = x^2+5x$

مثال 03: $(x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$ کی تجزی کریں۔

حل:

$(x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$

$= (x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$

$= (x^2-2^2)(x^2-3^2)-2x^2$ $[\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2]$

$= (x^2-4)(x^2-9)-2x^2$

$=x^4-9x^2-4x^2+36-2x^2$

$=x^4-15x^2+36$

$=x^4-3x^2-12x^2+36$

$= x^2(x^2-3)-12(x^2-3)$

$= (x^2-3)(x^2-12)$

$= [(x)^2-(\sqrt{3})^2][(x)^2-(2\sqrt{3})^2]$

$= (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})$

مشق 4.3

1. مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $(x^2-4x-5)(x^2-4x-12)-144$

(ii) $(x^2+5x+6)(x^2+5x+4)-3$

(iii) $(x^2-2x+3)(x^2-2x+4)-42$

(iv) $(x^2-8x+4)(x^2-8x-4)+15$

(v) $(x^2+9x-1)(x^2+9x+5)-7$

(vi) $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-120$

2. تجزی کریں

(i) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-48$

(ii) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

(iii) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-99$

(iv) $(x-3)(x-5)(x-7)(x-9)+15$

(v) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-224$

(vi) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)-345$

3. اجزاء ضربی معلوم کریں۔

(i) $(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)-2x^2$ (ii) $(x-1)(x+1)(x+3)(x-3)-3x^2-23$

(iii) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)+4x^2$ (iv) $(x-2)(x+2)(x-4)(x+4)-14x^2$

(v) $(x+5)(x+2)(x-5)(x-2)+4x^2$ (vi) $(x^2-x-12)(x^2-x-12)-x^2$

قسم (v) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ اور $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

جیسا کہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

اور $$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

مندرجہ ذیل مثالیں اس طرح کے اظہاریوں کو سمجھنے میں مددگار ثابت ہونگی۔

مثال 01: (i) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ (ii) $64x^3-12x^2+\frac{3x}{4}-\frac{1}{64}$ کی تجزی کریں

حل: (i)

$$8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$$
$$=(2x)^3+3(2x)^2(y)+3(2x)(y)^2+(y)^3 \qquad [\because (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3]$$
$$=(2x+y)^3.$$

حل: (ii)

$$64x^3-12x^2+\frac{3x}{4}-\frac{1}{64}$$
$$=(4x)^3-3(4x)^2\left(\frac{1}{4}\right)+3(4x)\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^3 \quad [\because (a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3]$$
$$=\left(4x-\frac{1}{4}\right)^3$$

مشق 4.4

1. مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$ (ii) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

(iii) $64x^3+12x^2+3x+\frac{1}{64}$ (iv) $8x^3+36x^2+54x+27$

(v) $\frac{1}{27}+\frac{1}{3}y^2+y^4+y^6$ (vi) $\frac{8}{27}x^3+2x^2y+3xy+\frac{27}{8}y^3$

(vii) $\frac{64}{9}+\frac{16}{3}x+4x^2+x^3$ (viii) $\frac{z^3}{8}+\frac{z^2y}{4}+\frac{zy^2}{6}+\frac{y^3}{27}$

2. اجزاءِ ضربی معلوم کریں۔

(i) $d^3-6d^2c+12dc^2-8c^3$ (ii) $x^6+\frac{16}{3}x^2-4x^4-\frac{64}{27}$

(iii) $\frac{x^3}{125}-\frac{3}{25}x^2y+\frac{3}{5}xy^2-y^3$ (iv) $125z^3-75z^2y^2+15zy^4-y^6$

(v) $\frac{z^3}{27}-2z^2y+36zy^2-216y^3$ (vi) $\frac{b^6}{27}-\frac{b^4c^2}{6}+\frac{b^2c^4}{4}-\frac{c^6}{8}$

(vii) $216+\frac{9z^2}{2}-54z-\frac{z^3}{8}$ (viii) $\frac{8}{27}x^3-2x^2y+\frac{9}{2}xy^2-\frac{27}{8}y^3$

قسم vi: $a^3 \pm b^3$

جیسا کہ ہمیں معلوم ہے۔ کہ

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

اور $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

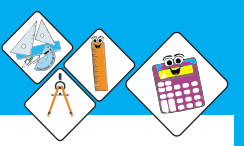
مندرجہ ذیل مثالیں اس طرح کے اظہاریوں کو سمجھنے میں مددگار ثابت ہونگی۔

مثال 01: $8x^3+27$ کی تجزی کریں

حل:

$$\begin{aligned} & 8x^3+27 \\ &= (2x)^3+(3)^3 \\ &= (2x+3)[(2x)^2-(2x)(3)+(3)^2] \quad [\because a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)] \\ &= (2x+3)(4x^2-6x+9) \end{aligned}$$

اس لیے $8x^3+27=(2x+3)(4x^2-6x+9)$ ہے۔



مثال 02: $108x^4 - 256xz^3$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 108x^4 - 256xz^3 \\ = \ & 4x(27x^3 - 64z^3) \\ = \ & 4x[(3x)^3 - (4z)^3 \qquad [\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)] \\ = \ & 4x(3x-4z)[(3x)^2 + (3x)(4z) + (4z)^2] \\ = \ & 4x(3x-4z)(9x^2 + 12xz + 16z^2) \end{aligned}$$

اس لیے $108x^3 - 256xz^3 = 4x(3x-4z)[(9x^2 + 12xz + 16z^2)$

مشق 4.5

1. مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $x^3 + 8y^3$ (ii) $a^{11} + a^2b^9$ (iii) $a^6 + 1$ (iv) $a^3b^3 + 512$

(v) $a^3b^3 + 27b^6$ (vi) $\frac{x^3}{125} + \frac{125}{x^3}$ (vii) $x^9 + x^3y^6z^9$ (viii) $\frac{x^6}{27} + \frac{8}{x^3}$

2. اجزاء ضربی معلوم کریں

(i) $x^3 - 8y^3$ (ii) $x^9 - 8y^9$ (iii) $1000 - \frac{x^3y^3}{125}$ (iv) $a^6 - b^6$

(v) $\frac{x^6}{64} - \frac{64}{x^{12}}$ (vi) $x^{12} - y^{12}$ (vii) $\frac{27}{x^3} - 8y^6$ (viii) $8x^6 - \frac{1}{729}$

4.2 مسئلہ باقی اور مسئلہ اجزاء ضربی۔

مسئلہ باقی اور مسئلہ اجزاء ضربی اکھر تین یا زیادہ رقوم والے کثیر رقمی اظہاریوں کے اجزاء معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

4.2.1 مسئلہ باقی بیان کریں اور ثابت کریں اور مثالوں سے وضاحت کریں۔

بیان

جب ایک کثیر رقم $p(x)$ کا درجہ $n \geq 1$ سے تقسیم ہوتا ہو تو باقی $(x-a)$ ہوتا ہے۔

ہم $R = p(a)$ کو $p(x)$, $p(x) = q(x)(x-a) + R$ کے طور پے لکھ سکتے ہیں۔

(جسے الگوریثم تقسیم کہا جاتا ہے) جہاں پر R ایک مستقل اور درجہ $q(x)$ سے کم ہوتا ہے۔ جو $p(x)$ px.

ثبوت:

الگوریتم تقسیم کے ذریعے:

$$p(x) = q(x)(x-a)+R,$$

فرض کریں کہ $x=a$

$$p(a) = q(a)\times (a-a)+R,$$

$$p(a) = q(a)\times 0+R$$

$$\Rightarrow \quad p(a) = R = \text{باقی}$$

4.2.2 باقی معلوم کریں (بغیر تقسیم) جب ایک کثیر رقمی اظہاریہ ایک یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم ہو۔

مندرجہ ذیل مثالیں ہمیں مسئلہ باقی استعمال کرنے میں مدد کریں گے۔

مثال 01: x^2-3x+4 باقی معلوم کریں جبکہ $x-2$ سے تقسیم ہو۔

حل: فرض کریں کہ: $p(x)=x^2-3x+4$

یہاں پر $a=2$ بریعہ مسئلہ باقی۔

$$p(2) = (2)^2 - 3\,(2) + 4$$

$$= 4 - 6 + 4 = 8 - 6 = 2$$

$$p(2) = R = 2 \quad \text{باقی 2 بچے}$$

مثال 02: k کی قیمت معلوم کریں اگر x^3+kx^2+3x-4 کثیر رقمی اظہاریہ $x+2$ سے تقسیم ہو۔ باقی 2 بچے۔

حل: یہاں پر $p(x) = x^3+kx^2+3x-4$

$$\therefore \quad p(-2) = (-2)^3 + k(-2)^2 + 3\,(-2) - 4$$

$$\Rightarrow \quad -2 = 4k - 18 \qquad (\text{باقی } 2- \text{ بچے})$$

$$\Rightarrow \quad 4k = -2 + 18$$

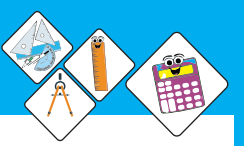
$$\Rightarrow \quad 4k = 16$$

$$\Rightarrow \quad k = 4,$$

4.2.3 اظہاریے کا صفر۔

فرض کریں کہ $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ حقیقی عدد سرے کے ساتھ ایک کثیر رقمی اظہاریہ ہے۔ $x=a$ کثیر رقمی اظہاریے میں $p(x)$ شامل کرنے سے $p(x)$ کی قیمت صفر ہو جائے تو $p(a)=0$ پھر ' a ' کو اظہاریے $p(x)$ کا صفر کہا جاتا ہے۔

مثال 01: اگر $p(x) = x+7$ تو پھر 7 اظہاریے کا صفر ہے۔ $p(-7)=-7+7=0$



4.2.4 مسئلہ اجزاءِ ضربی بیان کریں اور ثابت کریں۔

بیان:

$x-a$ یک درجی اظہاریہ ایک کثیر رقمی اظہاریے کا جزِ ضربی ہے، اگر $p(a)=0$, $p(x)$.

ثابتی:

فرض کریں کہ R خارج قسمت ہے اور $p(x)$ باقی ہے، جب ایک کثیر رقمی اظہاریہ $x-a$ سے تقسیم ہوتا ہو۔ پھر بذریعہ الگوریثم تقسیم ہمارے پاس ہے۔

$$p(x)=(x-a)q(x)+R.$$

بذریعہ مسئلہ باقی۔

اسی طرح $R=p(a)$,

$$\boxed{p(x)=q(x)(x-a)+p(a)}$$

اگر $p(a)=0$, پھر $p(x)=q(x)(x-a)$ اس طرح $(x-a)$ کا ایک جزِ ضربی ہے $p(x)$.

مندرجہ ذیل مثالیں ہمیں مسئلہ جزِ ضربی استعمال کرنے میں مدد کریں گے۔

مثال 01: بتائیں کہ $x+2$ کا جزِ ضربی ہے۔ $x^3+\frac{9}{2}x^2+3x-4$ یا نہیں۔

حل: فرض کریں کہ $p(x)=x^3+\frac{9x^2}{2}+3x-4$

$$\therefore\ R=p(-2)=(-2)^3+\frac{9}{2}(-2)^2+3(-2)-4$$

$$=-8+18-6-4$$

$$=-18+18=0\Rightarrow R=0,$$

باقی 0 ہے۔

$\therefore$ $x+2$ $p(x)$ کا جزِ ضربی ہے۔

مثال 02: بتائیے کہ $x+3$ کا جزِ ضربی ہے یا نہیں۔ $x^3-x^2-8x+12$

حل: فرض کریں کہ

$$p(x)=x^3-x^2-8x+12$$

$$R=p(-3)=(-3)^3-(-3)^2-8(-3)+12$$

$$=-27-9+24+12$$

$$R=p(-3)=-36+36=0$$

$x+3$ $x^3-x^2-8x+12$ کا جزِ ضربی ہے۔

مشق 4.6

1. مسئلہ باقی کی مدد سے باقی معلوم کیجیے جبکہ۔

(i) $x^3 - 6x^2 + 11x - 8$ کو $(x-1)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(ii) $x^3 + 6x^2 + 11x + 8$ کو $(x+1)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(iii) $x^3 - x^2 + 14$ کو $(x-2)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(iv) $x^3 - 3x^2 + 4x - 14$ کو $(x+2)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(v) $(2y-1)^3 + 6(3+4y) - 9$ کو $(2y+1)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(vi) $4y^3 - 4y + 3$ کو $(2y-1)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(vii) $(2y+1)^3 - 6(3-4y) - 10$ کو $(2y-1)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(viii) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ کو $(x-y)$ سے تقسیم کیا جائے۔

2. m کی قیمت معلوم کریں، اگر $p(y) = my^3 + 4y^2 + 3y - 4$ اور $q(y) = y^3 - 4y + m$ کو $(y - 3)$ سے تقسیم کیا جائے تو باقی مشترکہ بچے۔

3. اگر کثیر رقمی $4x^3 - 7x^2 + 6x - 3k$ کو $(x + 2)$ سے مکمل تقسیم ہوتا ہو تو k کی قیمت معلوم کریں۔

4. اگر $(y+2)$ کثیر رقمی $3y^2 - 4ry - 4r^2$ کا جزضربی ہے تو r کی قیمت معلوم کریں۔

4.3 مصنوعی تقسیم

مصنوعی تقسیم کثیر رقمی اظہاریے کو یک درجی کثیر رقمی اظہاریے سے تقسیم کرنے کا طریقہ ہے۔

4.3.1 مصنوعی تقسیم کا طریقہ بیان کریں۔

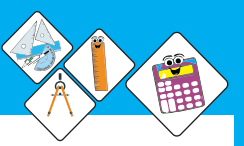
مصنوعی تقسیم کا طریقہ مندرجہ ذیل مثال میں بیان کیا ہے۔

مثال 01: مصنعی تقسیم کا طریقہ استعمال کرکے $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ کو $(x-1)$ سے تقسیم کریں۔

حل: یہاں پر $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$، (1 جزضربی ہے)

کثیر رقمی کے عدد سرے لکھنے پر

1	1	−3	5	7	(قطار-1)
		1	−2	3	(قطار-2)
	1	−2	3	10 = R	(قطار-3)



تفصیل:

قدم i: کثیر رقمی $p(x)$ کے عدد سرے اور مستقل ترتیب نزولی سے پہلی قطار میں لکھیں۔

قدم ii: قطار 3 میں پہلا عددی سرا اپنی جگہ قطار 1 کے نیچے لکھیں۔

قدم iii: جزو ضربی اور قطار 3 کے پہلے عددی سری کی حاصل ضرب قطار 2 میں قطار 1 کے سری عددی سرے کے نیچے لکھیں۔

قطار 1 اور قطار 2 کے دوسرے عددی سرے جمع کر کے نیچے قطار 3 میں لکھیں۔ یہ عمل اگلے عددی سرے کے لیے دہرائیں۔

اسی طرح $q(x)=x^2-2x+3$ اور $p(1) = R = 10$ ہے

نوٹ: $q(x)$ کا درجہ $=[p(x)$ درجہ$]-1=3-1=2$ اور قطار 3 کا آخری جُز باقی ہے۔

4.3.2 مصنوعی تقسیم استعمال کر کے۔

(a) خارج قسمت اور باقی معلوم کریں، جبکہ کثیر رقمی یک درجہ کثیر رقمی سے تقسیم ہو۔

(b) نامعلوم کی قیمت معلوم کریں، اگر کثیر رقموں کا صفر دیا گیا ہو۔

(c) نامعلوم کی قیمت معلوم کریں، اگر کثیر رقموں کے اجزاء دیے گئے ہوں

مثال 01: خارج قسمت اور باقی معلوم کریں۔

جب $p(x) = x^4-12x+50x^2-84x+49$ کو $x-5$ سے تقسیم کیا جائے۔

حل: معلوم ہے کہ: $p(x)=x^4-12x^3+50x^2-84x+49$

اور یک درجہ کثیر رقمی $x-a = x-5$, i.e., $a= 5$ جیسا کہ $5 =$ جو جزو ضربی ہے۔

$p(5) =R=?$ and $q(x)=?$

مصنوعی تقسیم کے استعمال سے خارج قسمت اور باقی معلوم کریں گے۔ ذیل مثال میں واضح ہے۔

	اقطار 1)	49	−84	50	−12	1	5
	اقطار 2)	−45	75	−35	5		
	اقطار 3)	4 = R	−9	15	−7	1	

اسی طرح $q(x)=x^3-7x^2+15x-9$ خارج قسمت اور باقی $R=4$ ہے۔

نوٹ: $R \neq 0$ اس لیے $(x-5)$ معلوم شدہ کثیر رقمی کا جزو ضربی نہیں ہے۔

مثال 02: کی کسی قیمت کے لیے 1 کثیر رقمی کا صفر ہے۔ $p(x)= x^3-mx^2+x-1$?

حل: معلوم ہے کہ $p(x)= x^3-mx^2+x-1$

یہاں پر جزو ضربی $a= 1$ ہے۔

تو مصنوعی تقسیم کے طریقے مطابق

1	1	$-m$	1	-1	(قطار 1)
		1	$1-m$	$2-m$	(قطار 2)
	1	$1-m$	$2-m$	$1-m = R,$	(قطار 3)

جیسا کہ 1 کثیر رقمی کا صفر ہے اس لیے $x - 1$ $\therefore$ $p(x)$ ایک جزو ضربی ہے۔

یہاں پر $R= 0$

$\Rightarrow \quad 1-m=0$

$\Rightarrow \quad m=1$

تو پھر کثیر رقمی کے صفر کے لیے $p(x)$ m m ہے۔

مشق 4.7

1. مصنوعی تقسیم کی مدد سے مندرجہ ذیل کثیر رقمی اظہاریوں کو تقسیم کریں اور خارج قسمت اور باقی بھی معلوم کریں۔

(i) $p(x)=x^3-x^2+x-1$ *by* $x-1$

(ii) $p(x)=x^3-x^2-x-1$ *by* $x+1$

(iii) $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$ *by* $x+2$

(iv) $p(x)=x^3+6x^2-11x-6$ *by* $x-2$

(v) $p(x)=x^4-x^3+x^2-x-1$ *by* $x+2$

(vi) $p(x)=x^4+x^3-x^2+x-1$ *by* $x-1$

(vii) $p(x)=x^5+x^3-2x^2-3$ *by* $x+3$

(viii) $p(x)=x^5-x^4+x^3-3x^2+6x-6$ *by* $x-3$

(ix) $p(x)=2x^4-2x^3+100x^2-168x+95$ *by* $x-2$

(x) $p(x)=6x^4-72x^3+300x^2-564x+270$ *by* $x-5$

2. $k, -2$ کی کس قیمت کے لیے کثیر رقمی $p(x)=x^3+x^2-14x-k$ کا صفر 2 ہے۔

3. m کی کس قیمت کے لیے $(x-2)$ جزو ضربی ہو گا $x^3+mx^2-7x-10$ کا

4. m کی کس قیمت کے لیے $(x+2)$ جزو ضربی ہو گا $4x^3-7x^2+6x-3m$ کا۔

5. m کی کس قیمت کے لیے کثیر رقمی $p(x)=2x^3-4mx^2+x-1$ کا صفر -1 ہو گا۔

4.4 تین درجی کثیر رقمی اظہاریوں کی اجزاء تجزی۔

ہم پہلے ہی یک درجی اور دو درجی کثیر رقمی اظہارے حل کرنے کا طریقہ پڑھ آئے ہیں۔ اب ہم مسئلہ اجزاء ضربی کا استعمال کر کے تین درجی کثیر رقمی اظہاریوں کے اجزاء ضربی معلوم کریں گے۔

4.4.1 مسئلہ اجزاء ضربی کی مدد سے اجزاء ضربی معلوم کرنا۔ کثیر رقمی اظہاریوں کا ایک جزو ضربی یا زیادہ صفر معلوم ہونا ضروری ہے۔

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 01: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ کے اجزاء ضربی معلوم کریں۔

حل: فرض کریں کہ $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

6 کے اجزاء ضربی $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$p(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6$$
$$p(1) = 1 - 6 + 11 - 6$$
$$p(1) = 0$$

$x-1$ اس لیے $p(x)$ کا جزو ضربی ہے۔

مصنوعی تقسیم کے ذریعے۔

1		1	−6	11	−6	قطار 1:
			1	−5	6	قطار 2:
		1	−5	6	0	قطار 3:

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$
$$= (x-1)\{x^2 - 2x - 3x + 6\}$$
$$= (x-1)\{x(x-2) - 3(x-2)\}$$
$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مثال 02: $x^3 - 4x^2 + x + 6$ کے اجزاء ضربی معلوم کریں۔

حل: 6 کے اجزاء ضربی $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

اگر $x-1$ کا جزو ضربی ہے $p(x)$

تو $p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 1 + 6$

$$= 1 - 4 + 1 + 6$$
$$= 4 \neq 0$$

اس لیے $x-1$ کا جزو ضربی نہیں ہے۔ $p(x)$

اگر $x+1$ کا جزو ضربی ہے $p(x)$

تو $p(-1)=(-1)^3-4(-1)^2+1(-1)+6$

$=-1-4-1+6$

$=0$

اس لیے $x-1$ کا جزو ضربی ہے۔ $p(x)$

بذریعہ مصنوعی تقسیم

-1	1	-4	1	6	قطار 1
		-1	5	-6	قطار 2
	1	-5	6	0	قطار 3

$p(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x+1)\{x^2-2x-3x+6\}$

$=(x+1)\{x(x-2)-3(x-2)\}$

$p(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$

مشق 4.8

اجزاء تجزی کا استعمال کرتے ہوئے فیکٹر تلاش کریں۔

1. x^3-x^2+x-1
2. x^3+x^2-x-1
3. $x^3-6x^2+11x-6$
4. $x^3+5x^2-4x-20$
5. $x^3-2x^2+9x-18$
6. $6x^3+7x^2-x-2$
7. $x^3+8x^2+19x+12$
8. $2x^3+9x^2+10x+3$
9. $x^3+12x^2+44x+48$

جائزہ مشق 4

1. صحیح اور غلط سوال:

مندرجہ ذیل جملے غور سے پڑھیں اور صحیح کی صورت میں T پر اور غلط کی صورت میں F پر گول دائرہ لگائیں۔

(i) $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ T/F

(ii) $a^3+27=(a+3)(a^2-3a+9)$ T/F

(iii) $b^3-8=(b-2)(b^2+2b+4)$ T/F

(iv) $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a+b)^2$ T/F

(v) $a^6 + b^6 = (a^3+b^3)(a^3-b^3)$ T/F

(vi) $a^5 + b^5 = (a+b)^5$ T/F

2. مندرجہ ذیل جملے مکمل کیجیے۔

(i) $16x^2 - y^4 = (4x - y^2)$ _____

(ii) $x^3 - 64y^3 = (x - 4y)$ _____

(iii) $x^2 + 5x + 6 = (x+2)$ _____

(iv) $x^2 + y^2 = (x - y)^2$ _____

(v) $a^3 + 27b^3 = (a + 3b)$ _____

3. درست جواب پر ٹک (✓) لگائیے۔

(i) $a^2 + 2a - 24$ کے اجزاء ضربی ہیں:

(a) $a+4, a-6$ (b) $a-4, a+6$

(c) $a+3, a-8$ (d) $a+8, a-3$

(ii) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ کی اجزاء ضربی ہیں:

(a) $(a-b+c)(x-b-c)$ (b) $(a+b+c)(a-b-c)$

(c) $(a+b+c)(a+b-c)$ (d) $(a+b+c)(a-b-c)$

(iii) $x^3 + y^3$ کے اجزاء ضربی ہیں:

(a) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (b) $(x+y)(x^2+xy+y^2)$

(c) $(x+y)(x^2+xy-y^2)$ (d) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(iv) $y^3 - 27z^3$ کے اجزاء ضربی ہیں:

(a) $y-3z, y^2+3yz+9z^2$ (b) $y-3z, y+3z+9z^2$

(c) $y-3z, y^2-3yz+9z^2$ (d) $y+3z, y^2-3yz+9z^2$

(v) $\frac{1}{x+y} + \frac{y}{x^2-y^2} =$ کی مختصر صورت ہے:

(a) $\frac{y+1}{x^2-y^2}$ (b) $\frac{x}{x^2-y^2}$

(c) $\frac{y}{x^2-y^2}$ (d) $\frac{y-1}{x^2-y^2}$

(vi) m کی قیمت کیا ہے جب $x^2 + 4x + m$ مکمل مربع ہے۔

(a) 8 (b) -8

(c) 4 (d) -4

خلاصہ

- عمل تجزی وہ عمل ہے جس میں ہم دیئے گئے کثیر رقمی اظہارات کو دو یا زیادہ اظہارات کی حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کرتے ہیں۔
- ہم مندرجہ ذیل قسم کے فارمولوں کے عوامل کو سیکھیں گے اور حل کریں گے۔

(i) $ka + kb + kc = k(a + b + c)$

(ii) $\underline{ac + ad} + \underline{bc + bd} = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2 = (a + b)^2$

(iv) $a^2 - 2ab + b^2 = (a)^2 - 2(a)(b) + (b)^2 = (a - b)^2$

(v) $a^2 - b^2 = (a-b)(a + b)$

- مسئلہ باقی اور مسئلہ اجزاء ضربی دو اہم مسائل ہیں۔ یہ اجزاء ضربی معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتے ہیں، ایسی اقسام کے کثیر رقمی اظہارات جو دیے گئے فارمولوں سے حل نہیں ہو سکتے۔

(i) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ (ii) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

(iii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ (iv) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

- کثیر رقمی اظہارات کا صفر۔
- اگر کثیر رقمی 'x' میں ایک مخصوص عدد $x=a$ متغیر $p(x)$ کا متبادل ہے اسی طرح $p(a)$ کی قیمت صفر ہے، تو پھر 'a' کو کثیر رقمی $p(x)$ کا صفر کہا جاتا ہے۔
- مسئلہ اجزاء ضربی بھی بیان کر سکتے ہیں جیسے: یک درجی کثیر رقمی $(x-a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جزو ضربی ہے۔ اگر $p(a)=0$
- مصنوعی تقسیم کے طریقہ کار کا تفصیل

قدم 1: کثیر رقمی $p(x)$ کو x کی قوت نما کے لحاظ سے ترتیب نزولی میں کر کے عددی سرے اور مستقل قطار 1 میں لکھیں۔

قدم 2: قطار 3 میں پہلا عدد سرا اپنی جگہ قطار 1 کے نیچے لکھیں۔

قدم 3: جزو ضربی اور قطار 3 کے پہلے عددی سرے کی حاصل ضرب قطار 2 میں قطار 1 دوسرے عددی سرے کے نیچے لکھیں۔ قطار 1 اور قطار 2 کے عددی سرے جمع کر کے نیچے قطار 3 میں لکھیں یہ عمل اگلے عددی سرے کے لیے دہرائیں۔