یونٹ 3

الجبری اظہاریے اور الجبری کلیے

ALGEBRAIC EXPRESSION AND FORMULAS

حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- ان کو معلوم ہو کہ کوئی ناطق اظہاریہ طرز عمل کے لحاظ سے ناطق عدد کی طرح ہوتا ہے۔
- ناطق اظہاریے کی تعریف کرسکیں بطور دو کثیر رقمی $\frac{p(x)}{q(x)}$ حصہ $p(x)$ جہاں $q(x)$ صفر کثیر رقیمی zero polyoomial نہیں ہے۔
- مشاہدہ (پڑتال) کر سکیں کہ کوئی دیا گیا الجبری اظہاریہ ۔
  - کثیر رقمی ہے یا نہیں۔
  - ناطق اظہاریہ ہے یا نہیں۔
- ناطق اظہاریہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو مختصر ترین شکل میں تحویل کر سکیں جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ کے تمام ارکان کے عددی تر صحیح اعداد ہوں اور ان میں کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو۔
- پڑتال کر سکیں کہ کوئی دیا گیا ناطق الجبری اظہاریہ مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں۔
- دیے گئے ناطق اظہاریہ کو اس کی مختصر ترین شکل میں تبدیل کر سکیں۔
- ناطق اظہاریے کا مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
- ایک ناطق اظہاریے کو دوسرے ناطق اظہاریے سے تقسیم کر کے جواب کو مختصر ترین سکل میں لکھ سکیں۔
- کچھ خاص حقیقی اعداد پر الجبری اظہاریے کی قیمت حاصل کر سکیں۔
- درج ذیل کلیات سے واقف ہوں
- $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ اور $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

- $a^2 + b^2$ اور ab کی قیمت معلوم کرسکیں جبکہ $a + b$ اور $a - b$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- کلیہ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$ کی پہچان کر سکیں۔
- $a^2 + b^2 + c^2,$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a + b + c$ اور $ab + bc + ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- $a + b + c$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a^2 + b^2 + c^2$ اور $ab + bc + ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- $ab + bc + ca$ کی قمت معلوم کر سکیں جبکہ $a^2 + b^2 + c^2$ اور $a + b + c$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- کلیات کی پہچان کر سکیں۔

  $(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3,$

  $(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3.$
- $a^3 \pm b^3$ کی معلوم کر سکیں جبکہ $a \pm b$ اور ab کی قیمت دی گئی ہوں۔
- $x^3 \pm \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $x \pm \frac{1}{x}$ کی قیمت دی گئی ہو۔
- کلیہ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$ کی پہچان کر سکیں۔
  - $x + \frac{1}{x}$ اور $x^2 + \frac{1}{x^2} - 1.$ کا حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
  - $x - \frac{1}{x}$ اور $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1.$ کا حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
  - $(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2))(x^2 - xy + y^2).$ کا متواتر (مسلسل) حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
- مقادیر اصم اور اس کے استعمال کی پہچان کر سکیں۔
- دوسرے درجے کی مقادیر اصم کی وضاحت کر سکیں۔
- دوسرے درجے کی مقادیر اصم پر بنیادی عوامل کا استعمال کر کے مخرج (نسب نما) کو ناطق بنا کر ہم قیمت کسر میں تحویل کر سکیں۔
- حقیقی اعداد $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ اور ان کے اتصال سے حاصل کردہ عدد، جبکہ x y قدرتی اعداد اور a b صحیح اعداد ہوں، کو ناطق بنانے کے عمل کی (بالکل ٹھیک مطالعہ کے ساتھ) وضاحت کر سکیں۔

3.1 الجبری اظہاریے:

ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں الجبری اظہاریوں کے بارے میں مطالعہ کر چکے ہیں۔ آیئے اس کی اقسام پر تبادلہ خیال کریں۔
الجبری اظہاریوں کی تین اقسام درج ذیل ہیں۔

(ا) کثیر رقمی اظہاریہ یا کثیر رقمی (ب) ناطق اظہاریہ (ج) غیر ناطق اظہاریہ

(a) کثیر رقمی اظہاریہ یا کثیر رقمی:

ایک متغیر x میں ایک کثیر رقمی اظہاریہ (محض کثیر رقمی) کو اس طرح لکھا جاتا ہے:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

جہاں 'n' ایک غیر منفی عدد اور عددی سر: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ حقیقی اعداد ہیں۔ عام طور پر، ایک کثیر رقمی کو $p(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، لہٰذا مذکورہ بالا کثیر رقمی کو اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$P(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

اگر $a_0 \neq 0$, تو کثیر رقمی کو ڈگری n کا کثیر رقمی کہا جاتا ہے اور a_0 کو کثیر رقمی کا معروف عددی صفر کہا جاتا ہے۔ کثیر رقمی اور ان کی ڈگریوں کی کچھ مثالیں ذیل میں دی گئی ہیں۔

(i) $8x-5$, ڈگری 1	(ii) $x^4-2x^3+5x^2+1$, ڈگری 4
(iii) $6x^{31}+3$, ڈگری 31	(iv) $12x^4-x^3+\frac{2}{3}x^2-3x+1$, ڈگری 4
(v) 4, ڈگری 0	(vi) $\sqrt{10}x^{12}+2x^6-x^5-18x+1$ ڈگری 12

جملہ $x^3-x^3y^2+x^2y^2-10$ دو متغیر x اور y کے ساتھ ایک کثیر رقمی ہے اور اس کی ڈگری 5 ہے۔
اسی طرح الجبری اظہاریہ $x^3y^5x^2-x^3y^2z^3+x^2yz-34$ تین متغیر x, y اور z کے ساتھ ایک کثیر رقمی ہے

یاد رکھیں:

- ایسی کثیر رقمی جس میں ایک رقم ہو، یک رقمی (monomial) کہا جاتا ہے۔ $3x, 7xy, 6xy^2z^5$ وغیرہ
- ایسی کثیر رقمی جس میں دو رقوم ہوں، دو رقمی (binomial) کہا جاتا ہے $x+4, 5x+y, 7x-3$ وغیرہ
- ایسی کثیر رقمی جس میں تین رقوم ہوں، تین رقمی (trinomial) کہا جاتا ہے۔ مثلاً: x^2-2x+1 وغیرہ

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x^2y^2-5xy+3$$

(b) **ناطق اظہاریہ:**

ایسا اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا جا سکے جبکہ $q(x)\neq 0$ اور $p(x)$ اور $q(x)$ میں کثیر رقمیاں ہوں تو اُسے ناطق اظہاریہ کہا جاتا ہے۔مثال کے طور پر $\frac{\sqrt{3}x^2-5x+4}{x^2+6x-5}$, $\frac{x^2-x+1}{x-5}$, $\frac{x+1}{x}$ وغیرہ ناطق اظہاریوں کی چند مثالیں ہیں۔

نوٹ: ہر کثیر رقمی ناطق اظہاریے ہوتے ہیں لیکن اس کی تبدیلی درست نہیں۔

(c) **غیر ناطق اظہاریہ:**

ایسا الجبری اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا نہ جا سکتا ہو جبکہ $q(x)\neq 0$, $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں تو اُسے غیر ناطق اظہاریہ کہا جاتا ہے۔مثال کے طور پر $\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}$, $\frac{\sqrt{x^3}+2x+3}{\sqrt{x}-9}$, $\frac{\sqrt{x}+1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ وغیرہ ناطق اظہاریوں کی چند مثالیں ہیں۔

3.1.1 **معلوم کریں کہ کوئی ناطق اظہاریہ طرزِ عمل کے لحاظ سے ناطق عدد کی طرح ہوتا ہے۔**

اگر p اور q دو صحیح اعداد ہوں تو ضروری نہیں کہ $\frac{p}{q}$ بھی ایک صحیح عدد ہو۔اس لیے غیر سسٹم کو آگے بڑھانے کے لیے $\frac{p}{q}$ کو بطور ناطق عدد متعارف کرایا گیا جبکہ $p,q\in Z$ اور $q\neq 0$ صحیح اعداد ہیں

اسی طرح اگر $p(x)$ اور $q(x)$ دو کثیر رقمی اظہاریے ہوں تو ضروری نہیں کہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ جبکہ $q(x)\neq 0$ بھی ایک کثیر رقمی ہو اس لیے ناطق اعداد کی طرح ناطق اظہاریوں کے تصور کو اجاگر کیا جاتا ہے۔

3.1.2 **ناطق اظہاریوں کی تعریف کریں بطور دو کثیر رقمی $\frac{p(x)}{q(x)}$ اور $p(x)$ حصہ $q(x)$ جہاں $q(x)$ صفر کثیر رقمی نہیں ہے**

ایسا الجبری اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا نہ جا سکتا ہو جبکہ $q(x)\neq 0$, $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں تو اُسے غیر ناطق اظہاریہ کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر $3x^2+4\neq 0$, $\frac{x^2-5}{3x^2+4}$ ناطق اظہاریے ہیں۔

3.1.3 مشاہدہ (پڑتال) کر سکیں کہ کوئی دیا گیا الجبری اظہاریہ

(i) کثیر رقمی ہے یا نہیں (ii) ناطق اظہاریہ ہے یا نہیں۔

درج ذیل مثالیں کثیر رقمی اور ناطق اظہاریوں کی پہچان کرنے میں مدد دیں گی۔

مثال 01 پڑتال کریں کہ مندرجہ ذیل کثیر رقمی ہیں یا نہیں۔

(i) $2x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (ii) $6x^3 - 4x^2 - 5x$

حل (i): $2x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

یہ کثیر رقمی نہیں ہے کیونکہ دوسری رقم میں مثبت اعداد نہیں ہیں۔

حل (ii): $6x^3 - 4x^2 - 5x,$

یہ کثیر رقمی ہے کیونکہ ہر رقم میں مثبت اعداد موجود ہیں۔

مثال 02 جانچ کریں کہ مندرج ذیل ناطق اظہاریے ہیں یا نہیں۔

(i) $\dfrac{x-2}{3x^2+1}$ (ii) $6x^3 - \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

حل (i): $\dfrac{x-2}{3x^2+1}$

ہندسہ (numerator) اور مخرج (denominator) دونوں کثیر رقمی ہیں۔ تو یہ ایک ناطق اظہاریہ ہے۔

حل (ii): $6x^3 - \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

یہ ایک ناطق اظہاریہ نہیں ہے، کیونکہ دوسری رقم کا مخرج (denominator) کثیر رقمی نہیں ہے۔

3.1.4 ناطق اظہاریہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو مختصر ترین شکل میں تحریر کر سکیں جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ کے تمام ارکان کے عددی سر صحیح اعداد ہوں اور ان میں کوئی جزوضربی مشترک نہ ہو۔

ناطق اظہاریوں $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو اس کی مختصر ترین شکل میں کہا جاتا ہے اگر $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمی ہوں اور اس کے عددی سر صحیح اعداد ہوں اور ان میں کوئی جزوضربی مشترک نہ ہو۔

مثال کے طور پر $\frac{x+1}{x-1}$ کی مختصر ترین شکل $\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ ہے۔

3.1.5 جانچ کریں کہ کوئی دیا گیا ناطق الجبری اظہاریہ مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں۔

ناطق اظہاریہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی جانچ کے لیے $p(x)$ اور $q(x)$ کے جزوضربی مشترک نکالیں اگر جزوضربی مشترک 1 ہے، ناطق اظہاریہ مختصر ترین شکل میں ہے۔

مثال کے طور پر i $\frac{x+1}{x-1}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے کیوں کہ $(x+1)$ اور $(x-1)$ کا جزوضربی مشترک 1 ہے۔

3.1.6 ناطق اظہاریہ کو اس کی مختصر ترین شکل میں تحریر کریں۔

فرض کریں کہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ ایک ناطق اظہاریہ ہے، جہاں $q(x) \neq 0$

قدم 1: جزوضربی کثیر رقمی $p(x)$ اور $q(x)$ تلاش کریں، اگر مناسب ہو۔

قدم 2: $p(x)$ اور $q(x)$ کے جزوضربی مشترک تلاش کریں۔

قدم 3: $p(x)$ اور $q(x)$ کے جزوضربی مشترک ختم کریں۔

مثال 01 درج ذیل ناطق اظہاریہ کو اس کی مختصر ترین شکل میں تحویل کریں۔

(i) $\frac{(x^2-x)(x^2-5x+6)}{2x(x^2-3x+2)}$ (ii) $\frac{5(x^2-4)}{(3x+6)(x-3)}$

حل(i)

$$\frac{(x^2-x)(x^2-5x+6)}{2x(x^2-3x+2)}$$

$$=\frac{x(x-1)}{2x}\cdot\frac{x^2-3x-2x+6}{x^2-2x-x+2}\quad \text{(Provided } x\neq 0)$$

$$=\left(\frac{x-1}{2}\right)\cdot\frac{\{x(x-3)-2(x-3)\}}{\{x(x-2)-1(x-2)\}}$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)(x-2)}{2(x-2)(x-1)}\qquad \text{Provided } x\neq 1 \text{ and } 2.$$

$$=\frac{(x-3)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(x-3)$$ جو مطلوبہ مختصر ترین شکل ہے۔

حل(ii)

$$\frac{5(x^2-4)}{(3x+6)\ (x-3)}$$

$$=\frac{x^2-4}{x-3}\cdot\frac{5}{3x+6}$$

$$=\frac{x^2-2^2}{x-3}\cdot\frac{5}{3(x+2)}$$

$$=\frac{(x+2)(x-2)}{x-3}\cdot\frac{5}{3(x+2)}$$ (جزو ضربی)

$$=\frac{(x+2)(x-2)}{x-3}\cdot\frac{5}{3(x+2)}\qquad x\neq -2$$

$$=\frac{5(x-2)}{3(x-3)}$$ جو مطلوبہ مختصر ترین شکل ہے۔

3.1.7 ناطق اظہاریوں کا مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب معلوم کریں۔

ناطق اظہاریوں کا مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب کو درج ذیل مثالوں کی مدد سے واضح کیا گیا ہے۔

مثال 01 $\frac{3}{x+1}+\frac{4x}{x^2-1}$ کو مختصر کریں۔

حل:

$$\frac{3}{x+1}+\frac{4x}{x^2-1}$$

$$=\frac{3}{x+1}+\frac{4x}{(x-1)(x+1)} \quad \text{(جزو ضربی)}$$

$$=\frac{3(x-1)+4x}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{3x-3+4x}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{7x-3}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{7x-3}{x^2-1}$$

لہٰذا مختصر ترین شکل میں حل کیا گیا۔

مثال 02 $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^3-1}$ کو حل کریں۔

حل:

$$\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^3-1}$$

$$=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^3-1}$$

$$=\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{(x^2+x+1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2+x+1-x-1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2}{(x+1)(x^3-1)}$$

لہٰذا مختصر ترین شکل میں حل کیا گیا۔

مثال 03 $\frac{x^2-9}{2x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+x-12}$ کو حل کریں۔

حل:

مختصر

$$\frac{x^2}{x^2+x-12}\cdot\frac{x^2-9}{2x^2}$$

$$=\frac{x^2}{x^2+4x-3x-12}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2x^2}$$

$$=\frac{1}{x(x+4)-3(x-4)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2} \quad \text{(جزوضربی)}$$

$$=\frac{1}{(x+4)(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2} \quad (x\neq 3 \text{ دیا گیا})$$

$$=\frac{(x+3)}{2(x+4)}$$

لہٰذا مختصر ترین شکل میں حل کیا گیا۔

3.1.8 ایک ناطق اظہاریہ کو دوسرے ناطق اظہاریے سے تقسیم کر کے جواب کو مختصر ترین شکل میں لکھیں:

ایک ناطق اظہاریہ کو دوسرے سے تقسیم کرنے کی صورت میں، ہم سب سے پہلے تقسیم کو ضرب میں تبدیل کرنے کے لیے الٹتے ہیں اور نتیجے میں آنے والے حاصل ضرب کو مختصر ترین شکل میں حل کریں۔

مثال 01 $\frac{x^2-3xy}{4x+20y}\div\frac{3x-9y}{2x+10y}$ کو حل کریں۔

حل:

$$\frac{3x-9y}{2x+10y}\div\frac{x^2-3xy}{4x+20y}$$

$$=\frac{3x-9y}{2x+10y}\times\frac{4x+20y}{x^2-3xy}$$

$$=\frac{3(x-3y)}{2(x+5y)}\times\frac{4(x+5y)}{x(x-3y)}$$

$$=\frac{6}{x}$$

3.1.9 کچھ خاص حقیقی اعداد پر الجبری اظہاریوں کی قیمت حاصل کریں۔

مثال 02 $\dfrac{x^2+yz}{x^3+y^2-7yz^4}$ کی رقم تلاش کریں جب $x=3, y=2$ and $z=-1$

معلوم: $x=3, y=2, z=-1$

$$=\frac{x^2+yz}{x^3+y^2-7yz^4}$$

$$=\frac{(3)^2+(2)(-1)}{(3)^3+(2)^2-7(2)(-1)^4}$$

$$=\frac{9-2}{27+4-14}$$

$$=\frac{7}{17}$$

مشق 3.1

1 جانچ کریں کہ درج ذیل الجبری اظہاریے کثیر رقمی ہے یا نہیں۔

(i) $2xy^2-3x^2+5y^3-6$ (ii) $3xy^{-2}$

(iii) $6x^2-10x+7-\sqrt{45}$ (iv) $5\sqrt{x}-x+5x^2$

(v) $\dfrac{2}{x+2}$ (vi) $\dfrac{2}{x}+x^3-2$

2 مشاہدہ کریں کہ درج ذیل اظہاریے ناطق ہیں یا نہیں۔

(i) $\dfrac{x^2+2x+3}{x-4}$ (ii) $\dfrac{x^2+5\sqrt{x}-2x}{3x^2+5x+4}$ (iii) $\dfrac{13x^2-9x+4}{x^2+5x+\sqrt{7}}$

(iv) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ (v) $\dfrac{7}{x+7}$ (vi) $5\sqrt{x}-x+5x^2$

.3 درج ذیل کو ان کی مختصر ترین شکل میں تحریر کریں۔

(i) $\dfrac{p^2-100}{p+10}$ (ii) $\dfrac{3a^2+3ab}{3a^2+6ab+3b^2}$ (iii) $\dfrac{(a-b)}{(a+b)}\times\dfrac{(a^2+ab)}{(2a^2-2b^2)}$

(iv) $\dfrac{(x+y)^2-z^2}{x+y+z}$ (v) $\dfrac{(m^2-6m)(3m+15)}{2m-12}$ (vi) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$

.4 مختصر کریں:

(i) $\dfrac{4x-1}{2x-2}+\dfrac{4x+1}{2x+2}$ (ii) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x+3}$ (iii) $\dfrac{xy}{xy+1}+\dfrac{xy+1}{xy-1}$

(iv) $\dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{x+1}{x+6}$ (v) $\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}$ (vi) $\dfrac{4y}{y^2-1}-\dfrac{y+1}{y-1}$

.5 اشارہ کیے گئے عوامل انجام دیں اور حل کریں۔

(i) $\left(\dfrac{x^2}{4y^2-x^2}+1\right)\div\left(1-\dfrac{x}{2y}\right)$ (ii) $\dfrac{x+3}{3y-2x}\cdot\dfrac{4x^2-9y^2}{xy+3y}$

(iii) $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}\times\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ (iv) $\dfrac{8(y+3)}{9}\times\dfrac{12(y+1)}{4(y+3)}\div\dfrac{8(y+1)}{5}$

(v) $\dfrac{q^2-25}{q^2-3q}\div\dfrac{q^2+5q}{q^2-9}$ (vi) $\dfrac{4}{z^2-4z-5}\div\dfrac{2}{4z^2-4}$

.6 $t+\dfrac{1}{t}$ کی رقم معلوم کریں جب $t=\dfrac{x-y}{x+y}$

7. مندرجہ ذیل کی رقوم معلوم کریں۔

(i) $\dfrac{5(x+y)}{3x^2\sqrt{y}+6}$, if $x=-4,\ y=9$

(ii) $\dfrac{42ab^2c^3}{3a^2b+1}$, if $a=3,\ b=2$ and $c=1$

(iii) $\dfrac{(x+y)^3-z^2}{x^2y^2+z^2}$, if $x=2,\ y=-4$ and $z=3,$

(iv) $\dfrac{3x^2y}{z}-\dfrac{bc}{x+1}$, if $x=2,\ y=-1,\ z=3,\ b=4,\ c=\dfrac{1}{3}$

(v) $\dfrac{(ab^2-c)}{(a+cd^2)}\times\dfrac{(c+d)}{(a^2b-d)}$, if $a=1,\ b=3,\ c=-3$ and $d=2.$

3.2 الجبری کلیے:

ہم پہلے سے الجبری کلیے کا مطالعہ اور اس کا استعمال، پہلی جماعتوں میں کر چکے ہیں۔ اس سیکشن میں ہم مزید کچھ کلیوں اور ان کے استعمال کا مطالعہ کریں گے۔

3.2.1 کلیات کی پہچان کریں۔

(i) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

تصدیق:

$$\begin{aligned}\text{L.H.S} &= (a+b)^2+(a-b)^2\\ &= a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2\\ &= 2a^2+2b^2\\ &= 2(a^2+b^2)=R.H.S\end{aligned}$$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

اور $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(ii) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

تصدیق:

$$\begin{aligned}\text{L.H.S} &= (a+b)^2-(a-b)^2\\ &= a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2\\ &= 4ab=R.H.S\end{aligned}$$

$\therefore\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

اور $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

طریقہ درج ذیل مثالوں میں بیان کیا گیا ہے۔

مثال 02 (i) $a^2 + b^2$ اور ab کی رقم معلوم کریں جب $a + b = 6$ اور $a - b = 4$

حل: معلوم ہے کہ،

$a + b = 6,\ a - b = 4.$

(i) $a^2 + b^2 = ?$

ہم جانتے ہیں $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$a + b = 6$ and $a - b = 4$ کی قیمتیں درج کرنے پر

$(6)^2 + (4)^2 = 2(a^2 + b^2),$

$\Rightarrow \quad 36 + 16 = 2(a^2 + b^2)$

$\Rightarrow \quad 52 = 2(a^2 + b^2)$

$\Rightarrow \quad 26 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow \quad \boxed{a^2 + b^2 = 26}$

(ii) $ab = ?$

ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$

$a + b = 6$ and $a - b = 4$ کی قیمتیں درج کرنے پر

$\therefore \quad (6)^2 - (4)^2 = 4ab,$

$\Rightarrow \quad 36 - 16 = 4ab,$

$\Rightarrow \quad 20 = 4ab,$

$\Rightarrow \quad 5 = ab,$

or $\quad \boxed{ab = 5}$

پس $a^2 + b^2 = 26$ and $ab = 5.$

3.3.2 کلیات کی پہچان کریں۔

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

تصدیق:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c)\\ &= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)\\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = \text{R.H.S}\end{aligned}$$

یہ طریقہ درج ذیل مثالوں میں بیان کیا گیا ہے۔

مثال 01 $a^2+b^2+c^2$ کی رقم معلوم کریں، جب $a+b+c=7$ اور $ab+bc+ca=15$

حل: معلوم ہے کہ

$a+b+c=7$ and $ab+bc+ca=15$

$a^2+b^2+c^2=?$

ہم جانتے ہیں کہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

اب قیمتیں رکھنے پر $a+b+c=7$ and $ab+bc+ca=15$,

$\therefore \quad (7)^2 = a^2+b^2+c^2+2(15)$

$\Rightarrow \quad 49 = a^2+b^2+c^2+30$

$\Rightarrow \quad 49-30 = a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow \quad 19 = a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow \quad \boxed{a^2+b^2+c^2=19}$

لہٰذا $(a^2+b^2+c^2)$ کی رقم 19 ہے۔

مثال 02 $(a+b+c)$ کی رقم معلوم کریں جب $a^2+b^2+c^2=38$ اور $ab+bc+ac=31$

حل: ہم جانتے ہیں کہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

اب قیمتیں رکھنے پر $a^2+b^2+c^2=38$ and $ab+bc+ac=31$,

$(a+b+c)^2 = 38+2(31)$

$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = 38+62$

$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = 100$

$\Rightarrow \quad (a+b+c) = \left(\pm\sqrt{100}\right)$

$\Rightarrow \quad \boxed{(a+b+c)=\pm 10}$

لہٰذا $(a+b+c)$ کی رقم ± 10 ہے۔

مثال 03 $(ab+bc+ac)$ کی رقم معلوم کریں، جب $a+b+c=8$ اور $a^2+b^2+c^2=20$

حل: معلوم ہے کہ

$a+b+c=8$ and $a^2+b^2+c^2=20,$

ہم جانتے ہیں کہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

قیمتیں رکھنے پر $a+b+c=8$ and $a^2+b^2+c^2=20,$

$(8)^2=20+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \quad 64=20+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \quad 64-20=2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \quad 44=2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \quad 22=ab+bc+ac$

$\Rightarrow \quad ab+bc+ac=22$

لہٰذا $(ab+bc+ac)$ کی رقم 22 ہے۔

3.2.3 کیوبک کلیے کی پہچان کریں۔

(i) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

تصدیق

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)^2\\&=(a+b)(a^2+2ab+b^2)\\&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\&=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2\\&=a^3+b^3+3ab(a+b)\end{aligned}$$

(ii) $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

تصدیق

$$\begin{aligned}(a-b)^3&=(a-b)(a-b)^2\\&=(a-b)(a^2-2ab+b^2)\\&=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\&=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2\\&=a^3-b^3-3ab(a-b)\end{aligned}$$

درج ذیل مثالیں کیوبک کلیے اور اس کے استعمال کو سمجھنے میں مدد دیں گے۔

مثال 01 $a^3 + b^3$ کی رقم نکالیں، جبکہ $a + b = 4$ اور $ab = 5$

حل: معلوم ہے کہ

$a + b = 4$ اور $ab = 5$

ہمیں تلاش کرنا ہے

$a^3 + b^3$

کیوں کہ $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

رقم لگاکر $a + b = 4$ اور $ab = 5$,

$(4)^3 = a^3 + b^3 + 3(5)(4)$

$\Rightarrow \quad 64 = a^3 + b^3 + 60$

$\Rightarrow \quad 64 - 60 = a^3 + b^3$

$\Rightarrow \quad 4 = a^3 + b^3$

$\Rightarrow \quad \boxed{a^3 + b^3 = 4}$

لہٰذا $(a^3 + b^3)$ کی رقم 4 ہے۔

مثال 02 $a^3 - b^3 = 5$ کی رقم معلوم کریں، جب $a - b = 5$ اور

حل: معلوم ہے کہ

$a^3 - b^3 = 5$ اور $a - b = 5$

ہمیں ab تلاش کرنا ہے

کیونکہ $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

اب رقم لگاکر $a^3 - b^3 = 5$ اور $a - b = 5$,

$(5)^3 = 5 - 3ab(5)$

$\Rightarrow \quad 125 = 5 - 15ab$

$\Rightarrow \quad 125 - 5 = -15ab$

$\Rightarrow \quad 120 = -15ab$

$\Rightarrow \quad -8 = ab$

$\Rightarrow \quad \boxed{ab = -8}$

مثال 03 $x^3+\frac{1}{x^3}$ کی رقم تلاش کریں جب $x+\frac{1}{x}=3$

حل: معلوم ہے کہ

$$x+\frac{1}{x}=3$$

دونوں طرف کیوب لیں، ہمارے پاس ہے۔

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=3^3$$

$$\Rightarrow \quad x^3+\frac{1}{x^3}+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=27 \quad \left[(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^3+\frac{1}{x^3}+3(3)=27$$

$$\Rightarrow \quad x^3+\frac{1}{x^3}+9=27$$

$$\Rightarrow \quad x^3+\frac{1}{x^3}=27-9$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^3+\frac{1}{x^3}=18}$$

مثال 04 $8x^3-\frac{1}{x^3}$ تلاش کریں جب $2x-\frac{1}{x}=4$

حل: معلوم ہے کہ

$$= \quad 2x-\frac{1}{x}=4$$

دونوں طرف کیوب لیں۔

$$(2x-\frac{1}{x})^3=(4)^3$$

$$(2x)^3-(\frac{1}{x})^3-3(2x)(\frac{1}{x})(2x-\frac{1}{x})=64$$

$$8x^3-\frac{1}{x^3}-6(4)=64$$

$$8x^3-\frac{1}{x^3}-24=64 \qquad \Rightarrow 8x^3-\frac{1}{x^3}=88$$

3.2.4 کلیہ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$ کی پہچان کریں۔

(i) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

تصدیق: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$

$=a^3+b^3$

(ii) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

تصدیق: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$=a^3-b^3$

مثال 01 $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ اور $\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل: معلوم ہے کہ $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$

$\therefore\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

پس

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$

مثال 02 $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ اور $\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل: معلوم ہے کہ $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$

$\therefore\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

پس

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$

مثال 03 حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

حل: معلوم ہے کہ $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) \quad [\because (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3]$

$= x^6 - y^6.$

مشق 3.2

1. a^2+b^2 اور ab کی رقوم معلوم کریں جبکہ $a+b=8$ ، $a-b=6$
2. a^2+b^2 اور ab کی رقوم معلوم کریں جبکہ $a+b=5$ ، $a-b=3$
3. $a^2+b^2+c^2$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a+b+c=9$ اور $ab+bc+ac=13.$
4. $a^2+b^2+c^2$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a+b+c=\frac{1}{3}$ اور $ab+bc+ac=\frac{-2}{9}$
5. $a+b+c$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a^2+b^2+c^2=29$ اور $ab+bc+ac=10$
6. $a+b+c$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a^2+b^2+c^2=0.9$ اور $ab+bc+ac=0.8.$
7. $ab+bc+ac,$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a+b+c=10$ اور $a^2+b^2+c^2=20.$
8. a^3+b^3 کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a+b=$ اور 4
9. ab کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a^3-b^3=5$ اور $ab=3.$
10. ab کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a^3-b^3=16$ اور $a-b=4.$
11. a^3-b^3 کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a-b=5$ اور $ab=7.$
12. $125x^3+y^3$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $5x+y=13$ اور $xy=10.$
13. $216a^3-343b^3$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $6a-7b=11$ اور $ab=8.$

.14 $x^3+\frac{1}{x^3}$ کی رقم تلاش کریں، جب $x+\frac{1}{x}=7$

.15 $x^3-\frac{1}{x^3}$ کی رقم تلاش کریں، جب $x-\frac{1}{x}=11$

.16 حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $\left(\frac{3}{2}b+\frac{2}{3b}\right)\left(\frac{9b^2}{4}+\frac{4}{9b^2}-1\right)$ (ii) $\left(\frac{7y^2}{9}+\frac{9}{7y^2}\right)\left(\frac{49y^4}{81}+\frac{81}{49y^4}-1\right)$

(iii) $\left(\frac{x^4}{12}+\frac{12}{x^4}\right)\left(\frac{x^8}{144}+\frac{144}{x^8}+1\right)$ (iv) $\left(c^2-\frac{1}{c^2}\right)\left(c^4+\frac{1}{c^4}+1\right)$

.17 متعلقہ حاصل ضرب معلوم کریں کلیے استعمال کر کے

(i) $(2x^2+3y^2)(4x^4-6x^2y^2+9y^4)$

(ii) $(2x^2-3y^2)(4x^4+6x^2y^2+9y^4)$

(iii) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.

(iv) $(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2)(16x^4+81y^4)$

3.3 مقادیر اصم اور اس کے استعمال۔

3.3.1 مقادیر اصم اور اس کے استعمال کی پہچان کریں۔

مقادیر اصم: ایک جملہ جس میں کم از کم ایک علامت میں جذری علامت شامل ہو وہ بھی اپنی آسان شکل میں، مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر، $\sqrt{2}, \sqrt{a-4}, \sqrt[3]{\frac{5}{10}}, \left(\frac{1}{3}+\sqrt{3}\right), \left(\sqrt[5]{2}-\frac{1}{2}\right)$ مقادیر اصم ہیں۔

تمام مقادیر اصم غیر ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

اگر $\sqrt[n]{a}$ ایک غیر ناطق عدد ہے اور 'a' بہترین n^{th} قوت نما(power) نہیں ہے پھر یہ n^{th} درجہ کا $\sqrt[n]{a}$ مقدار اصم ہے کا نتیجہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔اس کو غیر ناطق جذر بھی کہا جاتا ہے ناطق مجذوز کے ساتھ۔

مثال کے طور پر $\sqrt{\frac{5}{7}}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[7]{10}$ s: مقدار اصم ہیں بالترتیب درجہ 2nd, 3rd, 4th, 5th اور 7th ہیں مگر $\sqrt[3]{27}, \sqrt{\frac{1}{4}}$ مقدار اصم نہیں ہیں کیونکہ یہ بالترتیب عدد 3 اور $\frac{1}{2}$ کو پیش کرتا ہے۔

3.3.2 دوسرے درجے کے مقادیر اصم پر بنیادی عوامل کا استعمال کر کے مخرج (نسب نما) کو ناطق بنا کر ہم قیمت کسر میں تبدیل کریں۔

(1) دوسرے درجہ کے مقادیر اصم:

(i) ایسا مقدار اصم جس میں صرف ایک علامت ہو مونو میل (monomial) مقدار اصم کہلاتا ہے۔

مثلاً $\sqrt{53}, \sqrt{a-9}, \sqrt{\frac{4}{5}}$ وغیرہ دوسرے درجہ کے مونو میل مقدار اصم ہیں۔

(ii) ایسا مقدار اصم جس میں دو مونو میل مقدار اصم کا جمع و تفریق یا مونو میل مقدار اصم اور ناطق عدد کا مجموعہ دوطرفہ (binomonil) مقدار اصم کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $\sqrt{17}+\sqrt{11}, \sqrt{2}-13, \sqrt{3}-35$ وغیرہ دوسرے درجہ کے دوطرفہ مقدار اصم ہیں۔

(iii) دوطرفہ مقدار اصم کا جوڑ

اس قسم کے جملے

(ا) $\left(\sqrt{a}+c\sqrt{b}\right)$ اور $\left(\sqrt{a}-c\sqrt{b}\right)$ ایک دوسرے کے زوج مقادیر اصم ہیں

(ب) $a+\sqrt{b}$ اور $a-\sqrt{b}$ ایک دوسرے کے زوج مقادیر اصم ہیں

(ب) دوسرے درجہ کی مقادیر اصم پر بنیادی عوامل کا استعمال کر کے مخرج (نسب نما) کو ناطق بنا کر ہم قیمت کسر میں تحویل کریں۔

(i) مقادیر اصم کا جمع اور تفریق کرنا۔

مقادیر اصم کا جمع و تفریق درج ذیل law کے استعمال سے ہو سکتا ہے

مثال کے طور پر $a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$ اور $a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=(a-b)\sqrt{c}$

مثال 01 $\sqrt{343}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$ کو حل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{343}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}\\
&=\sqrt{7\times7\times7}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}\\
&=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}\\
&=(7-3-2)\sqrt{7}\\
&=(7-5)\sqrt{7}\\
&=2\sqrt{7}
\end{aligned}$$

مثال 01 $\sqrt{32}+5\sqrt{2}+\sqrt{128}+7\sqrt{2}$ کو حل کریں۔

حل:

$$\sqrt{32}+5\sqrt{2}+\sqrt{128}+7\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{16\times 2}+5\sqrt{2}+\sqrt{64\times 2}+7\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{(4)^2\times 2}+5\sqrt{2}+\sqrt{(8)^2\times 2}+7\sqrt{2}$$
$$=4\sqrt{2}+5\sqrt{2}+8\sqrt{2}+7\sqrt{2}$$
$$=(4+5+8+7)\sqrt{2}$$
$$=24\sqrt{2}$$

(ii) مقادیر اصم کا حاصل ضرب اور تقسیم

مقادیر اصم کا حاصل ضرب اور تقسیم درج ذیل قانون کو استعمال کر کے حل کیا جاسکتا ہے۔

(a) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a>0$ اور $b>0$.

مثال 01 $\sqrt{125}\times\sqrt{48}$: حل کریں

حل:

$$\sqrt{125}\times\sqrt{48}$$
$$=\sqrt{(5)^2\times 5}\times\sqrt{(4)^2\times 3}$$
$$=5\sqrt{5}\times 4\times\sqrt{3}$$
$$=(5\times 4)\left(\sqrt{5}\times\sqrt{3}\right)$$
$$=20\sqrt{15}$$

مثال 01 $\dfrac{\sqrt{162}}{\sqrt{144}}$: حل کریں

حل:

$$\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{144}}$$
$$=\frac{\sqrt{2\times 81}}{\sqrt{12\times 12}}$$
$$=\frac{\sqrt{2\times(9)^2}}{\sqrt{(12)^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{12}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

مشق 3.3

1. حل کریں

(i) $\sqrt[4]{81x^{-8}z^{4}}$ (ii) $\sqrt[3]{256a^{6}b^{12}c^{9}}$ (iii) $\sqrt[7]{128}$ (iv) $\sqrt{7776}$

(v) $\dfrac{\sqrt[3]{(125)^{2}\times 8}}{\sqrt{(2\times 32)^{2}}}$ (vi) $\dfrac{\sqrt{21}\times\sqrt{28}}{\sqrt{121}}$ (vii) $\sqrt{\dfrac{(216)^{\frac{2}{3}}\times(125)^{\frac{1}{2}}}{(0.04)^{\frac{-3}{2}}}}$

(viii) $\dfrac{\sqrt[6]{4}\times\sqrt[3]{27}\times\sqrt{60}}{\sqrt{180}\times\sqrt[3]{0.25}\times\sqrt[4]{9}}$

2. زوج تلاش کریں

(i) $\left(8-4\sqrt{3}\right)$ (ii) $\left(6\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right)$ (iii) $\left(8\sqrt{12}+\sqrt{8}\right)$

(iv) $\left(2-\sqrt{3}\right)$

3. حل کریں

(i) $\left(6\sqrt{2}+4\sqrt{2}+7\sqrt{128}\right)$ (ii) $\sqrt{5}+\sqrt{125}+7\sqrt{5}$

(iii) $\left(13+15\sqrt{3}\right)+\left(7-6\sqrt{3}\right)$ (iv) $\sqrt{250}+\sqrt{490}+3\sqrt{10}$

(v) $\sqrt{245}+\sqrt{625}-\sqrt{45}$ (vi) $10\sqrt{11}-\sqrt{396}-3\sqrt{11}$

(vii) $\sqrt{17}\left(10\sqrt{17}-2\sqrt{17}\right)$ (viii) $\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}\right)$

(ix) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (x) $\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{13}-\sqrt{11}\right)$

(xi) $\left(3\sqrt{6}-4\sqrt{5}\right)^{2}$ (xii) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^{2}$

3.4 ناطق بنانے کا عمل

3.4.1 حقیقی اعداد $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ، $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ اور ان کے اتصال سے حاصل کردہ عدد، جبکہ x,y قدرتی اعداد اور $a\ b$ صحیح اعداد ہوں، کو ناطق بنانے کے عمل کی (بالکل ٹھیک مطلب کے ساتھ) وضاحت کریں

اگر دو مقادیر اصم کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہے، تو ہر مقدار اصم دوسرے کا ناطقی جزو ضربی کہلائے گا۔

مثلاً: $\left(35+\sqrt{31}\right)$ اور $\left(35-\sqrt{31}\right)$ ناطق اجزاء ہیں۔

کسی دیے ہوئے مقدار اصم کو اس کے ناطقی عوامل سے ضرب دینے کے عمل کو ایک ناطق عدد حاصل کرنے کے لیے بطور حاصل ضرب دی گئی مقدار اصم کا ناطق بنانے کا عمل کہلاتی ہے۔ زوج مقادیر اصم کا حاصل ضرب ناطق عدد ہوتا ہے۔

مثال 01 $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$
$$=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$=3-2=1$$

مخرج کا ناطق بنانے کا عمل:

مذکورہ بالا بحث کا مدنظر رکھتے ہوئے، ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ، $(a+b\sqrt{x})$ یا $(a-b\sqrt{x})$ عوامل کے مخرج کا ناطق بنانے کے لیے، ہم زوج جزو ضربی $(a-b\sqrt{x})$ یا $(a+b\sqrt{x})$ سے دونوں ہندسہ (numerator) اور مخرج (denominats) کو ضرب دیں۔ ایسا کرنے سے ہم جذر (radical) کو ختم کرتے ہیں اور لہٰذا کسی بھی مقدار اصم سے پاک مخرج حاصل ہوتا ہی۔

حقیقی اعداد کی اقسام کا ناطق بنانے کا عمل:

(i) $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

جملات $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ اور $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ان کا ناطق بنانے کا عمل، جہاں $x,y\in\mathbb{N}$ اور $a,b\in Z$ درج ذیل مثالیں ناطق بنانے کے تصور کو سمجھنے میں مدد دیں گی۔

مثال 01 $\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$ کو ناطق بنائیں۔

حل:

مخرج کو $5-2\sqrt{3}$ کے ساتھ ضرب اور تقسیم دیں
جو زوج ہے $5+2\sqrt{3}$ کا

$$\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{5+2\sqrt{3}}\times\frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{(5)^2-(2\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{25-12}$$
$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{13}$$
$$=\frac{5}{13}-\frac{2}{13}\sqrt{3}$$

مثال 01 $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ کو ناطق بنائیں۔

حل:

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{1}$$
$$=5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

مشق 3.4

1. درج ذیل کے مخرج کا ناطق بنائیں۔

(i) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{1}{4\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$

(iv) $\frac{16}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$ (v) $\frac{9-\sqrt{2}}{9+\sqrt{2}}$ (vi) $\frac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}-3}$

2. (i) اگر $x=8-3\sqrt{7}$ ، $x+\frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کریں۔

(ii) اگر $\frac{1}{x}=2\sqrt{28}-11$ ، x کی قیمت معلوم کریں۔

(iii) اگر $x=3-2\sqrt{2}$ مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

$x+\frac{1}{x}$ ، $x-\frac{1}{x}$ ، $x^2+\frac{1}{x^2}$ ، $x^2-\frac{1}{x^2}$ اور $x^4+\frac{1}{x^4}$

3. اگر $x=\sqrt{5}+2$ ، $x^4+\frac{1}{x^4}$ کی قیمت معلوم کریں۔

4. اگر $\frac{1}{y}=2+\sqrt{3}$ ، $y^4+\frac{1}{y^4}$ کی قیمت معلوم کریں۔

5. اگر $\frac{1}{z}=7-4\sqrt{3}$ ، z^2-z^{-2} کی قیمت معلوم کریں۔

اعادہ مشق 3

.1 درست جواب کے گرد دائرہ بنائیں۔

(i) ہر کثیر رقمی ہوتا ہے۔

(ا) غیر ناطق اظہاریہ　　(ب) ناطق اظہاریہ

(ج) ایک اظہاریہ　　(د) ان میں سے کوئی نہیں۔

(ii) ایسا مقدار اصم جس میں دو مونو میل مقادیر اصم کا مجموعہ ہوا کہلاتا ہے۔

(ا) سہ رقمی مقدار اصم　　(ب) دو رقمی مقدار اصم

(ج) زوج مقادیر اصم　　(د) مونو میل مقدار اصم

(iii) $3x + 2y - 3$ ایک الجبری ہے۔

(ا) تاثرات　　(ب) مساوات

(ج) جملہ　　(د) اندرون مساوات

(iv) $3x^2y + 5y^4 - 10$ کی ڈگری ہے۔

(ا) 4　　(ب) 5　　(ج) 6　　(د) 10

(v) $\sqrt{7}$ مثال ہے کی۔

(ا) مونو میل مقدار اصم　　(ب) سہ رقمی مقدار اصم

(ج) دو رقمی مقدار اصم　　(د) زوج مقدار اصم

(vi) دو کثیر رقمی $\frac{p(x)}{q(x)}$ اور $p(x)$ جہاں $q(x)$ $q(x) \neq 0$ کہلاتا ہے۔

(ا) ناطق اظہاریہ　　(ب) غیر ناطق اظہاریہ

(ج) کثیر رقمی　　(د) زوج

(vii) $\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$ برابر ہے۔

(ا) $\frac{2x}{x^2 - y^2}$　　(ب) $\frac{2y}{x^2 - y^2}$　　(ج) $\frac{-2x}{x^2 - y^2}$　　(د) $\frac{-2y}{x^2 - y^2}$

(viii) $2-\sqrt{3}$ کا زوج ہے:

(ا) $2+\sqrt{3}$ (ب) $-2-\sqrt{3}$

(ج) $\sqrt{2}+3$ (د) $\sqrt{3}-4$

(ix) $a^3-3ab(a-b)-b^3$ برابر ہے۔

(ا) $(a-b)^3$ (ب) $(a+b)^3$

(ج) a^3+b^3 (د) a^3-b^3

(x) اگر $a+b=5$ اور $a-b=3$ پھر ab کی رقم معلوم کریں۔

(ا) 4 (ب) 5 (ج) 3 (د) 6

(xi) $\left(5+\sqrt{15}\right)\left(5-\sqrt{15}\right)$ برابر ہے۔

(ا) 10 (ب) 15 (ج) 25 (د) 30

(xii) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ برابر ہے۔

(ا) $(a+b-c)^2$ (ب) $(a+b+c)^2$

(ج) $(a-b+c)^2$ (د) $(a+b+c)^3$

2. خالی جگہیں پُر کریں۔

(i) ______ کسی کثیر رقمی کی ڈگری ہوتی ہے

(ii) $2-\sqrt{3}$ مقدار اصم ______ کا زوج ہے۔

(iii) $2x^3+x^2-4x^4+7x-9$ ______ کثیر رقمی کی ڈگری ہے

(iv) $\frac{\sqrt{x}}{3x+5}$ ایک ______ $x\neq\frac{-5}{3}$ تاثر ہے۔

(v) $(x-y)(x+y)\left(x^2+y^2\right)=$ ______

خلاصہ

- ایک متغیر x میں ایک کثیر رقتی اظہاریہ (محض کثیر رقتی) کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔
$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_n$ کثیر رقتی کو $p(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- ایک الجبری اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کے طور پر لکھا جاسکتا ہے، جہاں $q(x) \neq 0$ اور $p(x), q(x)$ دونوں کثیر رقتی ہیں، ناطق اظہاریہ کہلاتا ہے۔
- ایک الجبری اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کے طور پر نہیں لکھا جاسکتا، جہاں $q(x) \neq 0$ اور $p(x)$ دونوں $q(x)$ کثیر رقتی ہیں، غیر ناطق اظہاریہ x کہلاتا ہے۔
- ایسی کثیر رقتی جس میں ایک رقم ہو، یک رقتی (Monomial) کہا جاتا ہے۔
- ایسی کثیر رقتی جس میں دو رقوم ہوں، دو رقتی (Binomial) کہا جاتا ہے۔
- ایسی کثیر رقتی جس میں تین رقوم ہوں، تین رقتی (Trinomial) کہا جاتا ہے۔
- ناطق اظہاریہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہوتا ہے اگر $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقتی ہوں عددی سر کے صحیح اعداد ہوں اور ان میں کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو۔
- $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ and $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$
- $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ and $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$
- ایک تاثر مقدار اصم کہلاتا ہے اگر اس کی کم از کم ایک اصطلاح میں جذری علامت ہو۔
مثلاً: $\sqrt{\frac{3}{10}}$ $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ مقادیر اصم ہیں۔

- اگر $\sqrt[n]{a}$ ایک غیر ناطق عدد ہے اور 'a' بہترین n^{th} قوت نما نہیں ہے پھر یہ n^{th} درجہ کا مقدار اصم کہلائے گا۔
- ایک اصطلاح والے مقدار اصم کو مونو میل کہتے ہیں۔
- ایسا مقدار اصم جس میں دو مونو میل مقدار اصم کا جمع و تفریق یا مونو میل مقدار اصم اور ناطق عدد کا مجموعہ دو طرفہ (binomial) مقدار اصم کہلاتا ہے۔
- اس قسم کے جملے $\left(\sqrt{a}+c\sqrt{b}\right)$ اور $\left(\sqrt{a}-c\sqrt{b}\right)$ ایک دوسرے کے زوج مقادیر اصم (conjugate surds)
- ہیں۔ $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ اور $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ معلوم $a>0$ اور $b>0$
- اگر دو مقادیر اصم کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہے، تو ہر مقدار اصم دوسرے کا ناطقی جزو ضربی کہلائے گا۔

کسی دیے ہوئے مقدار اصم کو اس کے ناطقی عوامل سے ضرب دینے کے عمل کو ایک ناطق عدد حاصل کرنے کے لیے بطور حاصل ضرب دی گئی مقدار اصم کا ناطق بنانے کا عمل کہلاتی ہے۔