یونٹ 2

# لوگرتھم
# LOGARITHMS

## حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- عام صورت میں دیے گئے عدد کو سائنسی انداز میں اور اسی طرح لکھیے بیان کرنے کے قابل ہو جائیں گے۔
- لوگرتھم کی تعریف کر سکیں گے کہ اساس 'a' پر کسی عدد y کے لوگرتھم سے مراد 'a' کا وہ قوت نما 'x' ہے جس سے 'a' حاصل ہو جائے۔
 (یعنی $a \neq 1$ اور $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x,\ a > 0,\ y > 0$)
- کسی عدد کا log معلوم کرنے کے لیے لوگرتھم کی جدول کا استعمال کر سکیں گے۔
- ضد لوگرتھم (antilog) کے تصور کو سیکھ کر متعلقہ جدول (antilog table) کی مدد سے کسی عدد کا ضد لوگرتھم معلوم کر سکیں گے۔
- کیلکولیٹر (calculator) کی مدد سے کسی بھی عدد کا لوگرتھم اور ضد لوگرتھم معلوم کر سکیں۔
- عام اور قدرتی لوگرتھم کے درمیان فرق واضح کر سکیں گے۔
- سیکھ سکیں گے کہ $\log_{10} y$ کے بدلے $\log y$ اور $\log_e y$ کے بدلے $\ln y$

(i) $\log_{10} y = x \Leftrightarrow y = 10^x$,

(ii) $\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$.

- لوگرتھم کے مندرجہ ذیل قوانین ثابت کر سکیں گے۔

(i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$,

(iii) $\log_a m^n = n\log_a m$,

(iv) $\log_a m \cdot \log_m n = \log_a n$.

لوگرتھم کے قوانین کو استعمال کر کے ضرب، تقسیم اور اعداد کی کوئی قوت جیسے پیچیدہ ریاضیائی عوامل کے استعمال کو جمع اور تفریق جیسے آسان ترین عوامل میں تبدیل کر سکیں گے۔

## تعارف:

عظیم مسلمان ریاضی دان ابو محمد موسیٰ الخوارزمی نے لوگرتھم کو متعارف کرایا تھا ان کے بعد سترہویں صدی عیسوی میں جان نیپیئر (John Napier) نے لوگرتھم کے تصور کو مزید واضح کیا اور اس کے لیے جدول تیار کیے۔ ان جدول میں بنیاد 'e' استعمال کی گئی۔ 'e' ایک عظیم ناطق عدد ہے جس کی تقریباً قیمت 2.71828 ہے۔ پروفیسر ہنری برگس (Henry Briggs) نے 1631 میں 10 کی بنیاد والی جدول تیار کی۔

لوگرتھم کے استعمال نے طویل اور دشوار حسابی عمل کو مختصر اور بہت آسان کر دیا ہے۔

## 2.1 سائنسی ترمیم Scientific Notation

سائنسی ترمیم ایک خاص شکل ہے جس کے ذریعے با آسانی لکھا جا سکتا ہے۔

### 2.1.1 عام ترمیم میں دیئے گئے عدد کو سائنسی ترمیم میں لکھنا۔

ریاضی اور سائنس کی دیگر شاخوں میں انتہائی چھوٹے اور بڑے اعداد کا استعمال بھی کرنا پڑتا ہے۔ مثال کے طور پر زمین سے سورج تک فاصلہ تقریباً 150،000،000 کلومیٹر اور پلاٹینیشن ایٹم کا وزن 0.000،000،000،000،000،000،000،000،001،7 گرام ہے۔

اس طرح کے اعداد کو عام ترمیم میں لکھنا نہ صرف مشکل بلکہ زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔ سہولت کی خاطر سائنسدانوں نے بہت چھوٹے اور بہت بڑے اعداد کو لکھنے کے لیے ایک جامع، بالکل ٹھیک اور موزوں طریقہ رائج کیا جسے سائنسی ترمیم کہتے ہیں۔
مذکورہ بالا حصے (2.1.1) میں دیئے گئے عدد کو سائنسی ترمیم میں آسانی کے ساتھ بالترتیب $1.5 \times 10^8$ کلومیٹر اور $1.7\times10^{-27}g$ گرام لکھا جا سکتا ہے۔

مندرجہ ذیل امثال سے سائنسی ترمیم کو سمجھنے میں مدد مل سکتی ہے۔

**مثال :01**

درج ذیل اعداد کو سائنسی ترمیم میں لکھیئے۔

(i) 400900 (ii) 0.000058

**حل:**

(i) دیئے گئے عدد میں نقطہ اعشاریہ اکائی کے ہندسہ کے بعد ہے۔اس لیے نقطہ اعشاریہ کو پانچ درجے دائیں سے بائیں جانب حرکت میں

اس طرح $400900=4.009x10^5$. یہ اس عدد کی مطلوبہ ترمیم ہے

(ii) دیئے گئے عدد میں نقطہ اعشاریہ کے بعد 7 ہندسے ہیں، ساتویں درجی پر غیر صفری ہندسہ ہے، اسلیے نقطہ اعشاریہ کو چھ درجے میں

بائیں جانب حرکت دیں ۔ اس طرح $0.0000075=7.5^{-6}$

لکھیں جو مطلوبہ سائنسی ترمیم ہے۔

**مثال :02**

درج ذیل اعداد کو عام ترمیم میں لکھیں۔

(i) $2.76 \times 10^6$ (ii) $5.24 \times 10^{-4}$

(i) $2.76 \times 10^6$

چھ درجے دائیں طرف حرکت دیں گے لیکن یہاں 2 ہندسے ہیں۔بس ہم دائیں طرف چار صفر کا اضافہ کریں گے۔

چنانچہ $2.76\times10^6 = 2760000$ مطلوبہ عام ترمیم ہے۔

**حل:**

(ii)----------میں 10 کا قوت نما منفی چار (4-) ہے اسلیئے ہم نقطہ عشاریہ کو دائیں بائیں جانب چار درجے حرکت دیں گے۔ لیکن

یہاں صرف ایک ہندسہ نقطہ اعشاریہ سے پہلے ہے۔لہذا ہم ہندسہ 5 سے پہلے تین صفر کا اضافہ کریں گے۔

چنانچہ $5.24\times10^{-4} = 0.000524$ مطلوبہ عام ترمیمی عدد ہے۔

## مشق 2.1

1- درج ذیل اعداد کو سائنسی ترمیم میں لکھیے۔

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (i) | 9700 | (ii) | 4,980,000 | (iii) | 96,000,000 |
| (iv) | 4169 | (v) | 84,000 | (vi) | 0.718 |
| (vii) | 0.00643 | (viii) | 0.0074 | (ix) | 0.21005 |

2- درج ذیل اعداد کو عام ترمیم میں لکھیے۔

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (i) | $7 \times 10^4$ | (ii) | $8.072 \times 10^{-10}$ | (iii) | $6.018 \times 10^6$ |
| (iv) | $7.865 \times 10^8$ | (v) | $2.05 \times 10^{-4}$ | (vi) | $7.25 \times 10^{10}$ |
| (vii) | $4.502 \times 10^6$ | (viii) | $2.865 \times 10^{-8}$ | (ix) | $3.056 \times 10^6$ |

## 2.2 لوگرتھمز (Logarithams)

ضرب اور تقسیم کے پیچیدہ ریاضیاتی عملیات کو باآسانی حل کرنے کے لیے ایک موزوں طریقہ اخذ کیا گیا ہے جسے لوگرتھم کہتے ہیں۔

### 2.2 ایک حقیقی عدد اساس 'a' کے لوگرتھم کی تعریف۔

**(جبکہ $a \neq 1$ اور $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x,\ a>0,\ y>0$)**

اگر $a^x = y$ ہو تو x کا اساس 'a' پر y کا لوگرتھم کہلاتا ہے اور اسے $\log_a y = x,\ a>0,\ y>0$ اور $a \neq 1$ لکھتے ہیں۔

پس، $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$

$a^x = y$ کو قوت نمائی شکل اور $\log_a y = x$ کو لوگرتھمی شکل کہتے ہیں۔

مندرجہ ذیل امثال کی مدد سے قوت نمائی شکل اور لوگرتھمی شکل کو باآسانی سمجھا جاسکتا ہے۔

**مثال 01:** $2^{-4} = \frac{1}{16}$ کو لوگرتھمی شکل میں لکھیں۔

**حل:** $2^{-4} = \frac{1}{16}$ مترادف ہے $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ کے۔

**مثال 02:** $\log_3 81 = 4$ کو قوت نمائی شکل میں لکھیں۔

**حل:** $3^4 = 81$ مترادف ہے $\log_3 81 - 4$ کے

**مثال 03:** $\log_4 2$ کی قیمت معلوم کریں۔

**حل:** اگر $x = \log_4 2$

تو قوت نمائی شکل میں لکھنے سے۔

$\therefore \quad 4^x = 2$

$\Rightarrow \quad (2)^{2x} = 2^1$

$$2x = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

**مثال 04:** اگر $\log_x 8 = \frac{3}{2}$ ہو تو 'x' کی قیمت معلوم کریں۔

**حل:** چونکہ $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

لہذا

$$\Rightarrow \quad (x)^{\frac{3}{2}} = 8$$

یا

$$\Rightarrow \quad (x)^{\frac{3}{2}} = 2^3$$

مساوات کے دونوں طرفین قوت نما $\frac{2}{3}$ لینے سے

$$\Rightarrow \quad \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad x = 2^2$$

$$\Rightarrow \quad x = 4$$

**مثال 05:** اگر $\log_{64} x = \frac{-2}{3}$ ہو تو x کی قیمت معلوم کریں۔

**حل:** چونکہ

$$(64)^{\frac{-2}{3}} = x \qquad \Rightarrow \left(4^3\right)^{\frac{-2}{3}} = x$$

$$4^{-2} = x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{4^2} = x$$

$$\frac{1}{16} = x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{16}$$

## مشق 2.2

1. درجہ ذیل کو لوگرتھمی شکل میں لکھیے۔

(i) $7^3 = 343$ (ii) $3^{-4} = \frac{1}{81}$

(iii) $10^{-3} = 0.001$ (iv) $\sqrt[3]{8} = 2$

2. درج ذیل کو قوت نمائی شکل میں لکھیے۔

(i) $\log_{27} 81 = \frac{4}{3}$ (ii) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

(iii) $\log_{10} 1 = 0$ (iv) $\log_{10}(0.01) = -2$

3. نامعلوم عدد کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\log_{32} x = \frac{1}{2}$ (ii) $\log_a 3 = \frac{1}{2}$ (iii) $\log_{\sqrt{5}} 25 = y$

(iv) $\log_4 x = \frac{3}{2}$ (v) $\log_{10} 100 = y$ (vi) $\log_a 64 = 3$

(vii) $\log_a 1 = 0$ (viii) $\log_{55} 55 = y$ (ix) $\log_{64} 8 = \frac{x}{2}$

### 2.2.2 عام لوگرتھم، خاصہ اور منٹیسا

**عام لوگرتھم :** -عام لوگرتھم کی اساس '10' لی جاتی ہے۔ ایسے لوگرتھم کو عام لوگرتھم یا برگز لوگرتھم بھی کہا جاتا ہے۔

عام لوگرتھم کو ایسے لکھا جاتا ہے۔

$$\log y = x \Leftrightarrow y = 10^x$$

**کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ اور مینٹسا:-**

کسی عدد کا لوگرتھم دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے ایک صحیح عددی حصہ دوسرا کسری حصہ / عشری حصہ کسی عدد کے لوگرتھم کے صحیح عددی حصے کو لوگرتھم کا خاصہ (characteristic) کہتے ہیں اور ایک عشری حصہ جو ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اس عشری حصے کو مینٹسا (Mantissa) کہتے ہیں۔

نوٹ: کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے لیکن مینٹسا ہمیشہ مثبت ہی ہوتا ہے۔ اس کا مشاہدہ کرنے کے لیے ہم لوگرتھمی جدول کا استعمال کرتے ہیں۔

سائنسی ترمیم میں اگر عدد کا قوت نما '10' ہو تو وہ اس عدد کے لوگرتھم کا خاصہ کہلاتا ہے اور مینٹسا کی قیمت ہم لوگرتھمی جدول سے دیکھ کر لکھ سکتے ہیں۔ جسے بعد ازاں بیان کیا جائے گا۔

**مثال 01:** درج ذیل اعداد کا خاصہ معلوم کیجیے۔

0.765, 0.04, 0.004567, 2.134, 23.56 اور 3456.

| نمبر شمار | عدد | سائنسی ترمیم | لوگرتھم کا خاصہ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.765 | $7.65\times 10^{-1}$ | -1 or $\bar{1}$ |
| 2 | 0.04 | $4.0\times 10^{-2}$ | -2 or $\bar{2}$ |
| 3 | 0.0045467 | $4.5467\times 10^{-3}$ | -3 or $\bar{3}$ |
| 4 | 2.134 | $2.134\times 10^{0}$ | 0 |
| 5 | 23.56 | $2.356\times 10^{1}$ | 1 |
| 6 | 3456 | $3.456\times 10^{3}$ | 3 |

**ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ:**

- خاصہ کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ جو '1' سے بڑا ہو ہمیشہ غیر منفی ہوتا ہے۔
- کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ جو '1' سے چھوٹا ہو ہمیشہ منفی ہوتا ہے۔

**منٹیسا:**

لوگرتھمی جدول کی بدولت ہم کسی عدد کے لوگرتھم کا منٹیسا معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ جدول 7 ہندسی اعداد کا لوگرتھم حاصل کرنے کے لیے تشکیل دیئے گئے ہیں۔ لیکن جدید دور میں عملی مقاصد حاصل کرنے کے لیے 4 ہندسی اعداد کا لوگرتھم معلوم کرنے کے لیے جدول دیئے گئے ہیں جو کہ صحیح اور درست حاصل کے لیے مفید ہیں۔

**کیا آپ جانتے ہیں؟**

کسی عدد کے لوگوتھم کا منفی خاصہ $\bar{3},\bar{2}$ لکھنے کے بجائے $-2, -3$ بالترتیب لکھا جاسکتا ہے جب منٹیسا منفی ہوتا ہے تو ہم اس کو لازمی مثبت عدد میں تبدیل کر لیتے ہیں کیونکہ منٹیسا ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

## 2.2.3 کسی عدد کا لوگرتھم

معلوم کرنے کے لیے جدول کا استعمال درج ذیل مثقوں کی مدد سے جدول ہم کسی بھی عدد کا لوگرتھم معلوم کرنے کا طریقہ سکھیں گے۔

**مثال 01:** درج ذیل لوگرتھمی اعداد کا منٹیسا معلوم کیجیے۔

(i) log (43.254)   (ii) log (0.002347).

**حل:** (i) نقطہ اعشاریہ کو وقتی طور پر نظر انداز کر کے 43.254 کو راؤنڈ آف کرنے سے چار اہم ہندسوں والا عدد 4325 بنائیں گے۔

(ii) اب لوگرتھمی جدول میں 43 کے سامنے کی قطار تلاش کریں گے۔

(iii) افقی طور پر تیسرے ہندسے یعنی '2' پر جائیں۔ $43^{rd}$ قطار اور $2^{nd}$ کالم کے تقاطع پر دیئے گئے عدد 6355 کو نوٹ کریں گے۔

(iv) دوبارہ افقی طور پر اسی قطار میں فرق والے کالم 5 کے نیچے دونوں کے تقاطع پر عدد '5' درج ہے۔

(v) 5 کو 6355 میں جمع کرکے حاصل کردہ نمبر 0.6360 مطلوبہ منٹیسا ہوگا۔

## Logarithm Table

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 | 4 | 8 | 12 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 26 | 30 | 34 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 15 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |

# Logarithm Table

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 76 | 8808 | 8814 | 887 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |

حل: (ii)

log(0.002347) کے لیے۔

حل: نقطہ اعشاریہ اور ہندسہ 2 سے پہلے موجود صفروں کو وقتی طور پر نظر انداز کریں اور 23 قطار اور 4 کالم کے نقاطع پر موجود 3692 نمبر کو نوٹ کریں۔ 23 کے سامنے فرق والے کالم 7 کے تقاطع پر 13 درج ہے۔ 3692 اور 13 کو جمع کر کے حاصل کردہ نمبر 3705 ہے۔

لہذا log(0.002347) کا منٹیسا 0.3705 ہوگا۔

**مثال 03:** درج ذیل اعداد کا لوگرتھم معلوم کریں۔

(i) 278.27 (ii) 0.07058

حل: فرض کیا

$x = 278.27$

دونوں طرف log لگانے سے

$\therefore \text{Log}x = \log(278.27)$,

مساوات کے دونوں طرف لوگرتھم لینے سے۔

(i) 278.27 کو راؤنڈ آف کرنے سے چار اہم ہندسوں والا عدد 278.2 ہے۔

(ii) $278.3 = 2.783 \times 10^2$ (سائنسی ترمیم میں لکھنے سے)

لہذا 2=خاصہ

(iii) منٹیسا معلوم کرنے کے لیے وقتی طور پر نقطہ اعشاریہ کو نظر انداز کیا اور حاصل کردہ نمبر 2783 ہے۔

لوگرتھمی جدول کا استعمال کر کے ہم منٹیسا حاصل کرتے ہیں جو کہ ہے۔

0.8487= منٹیسا۔

(iv) خاصہ اور منٹیسا کو جمع کر کے حاصل کردہ نمبر 2.8487 ہے۔

لہذا 2.4445

**یاد رکھیئے!**

اہم ہندسوں کے ایک ہی تسلسل کے اعداد کے لاگرتھم میں ایک ہی منٹیسا ہوتا ہے۔ مثلاً نمبرز 0.004576, 0.04576, 0.4576, 45.76 وغیرہ کا منٹیسا یکساں ہوتا ہے۔

حل:

(1) راؤنڈ آف کو نظر انداز کرنے سے چار ہندسوں والا عدد 7058۔

(2) دیئے گئے نمبر کو سائنسی ترمیم میں تبدیل کرتے ہیں لہذا $= -2 \text{ or } \bar{2}$. $7058 \times 10^{-2}$.

(3) اعشاریہ کو نظر انداز کر کے منٹیسا معلوم کرتے ہیں جو خاص لوگرتھمی جدول استعمال کرتے ہوئے کا منٹیسا ہے 7058 is 0.8487.

(4) خاص اور منٹیسا کو جمع کریں۔ حاصل لوگرتھم. $x = \log(0.07058) = \bar{2}.8487$.

## مشق 2.3

1. درج ذیل لوگرتھم کا خاصہ اور منٹیسا معلوم کیجیے۔

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (i) | 8 | (ii) | 5054 | (iii) | 9.992 |
| (iv) | 765.3 | (v) | 0.00329 | (vi) | 0.0000300 |

2. درج ذیل اعداد کا لوگرتھم معلوم کیجیے۔

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (i) | 9 | (ii) | 55.56 | (iii) | 29.592 |
| (iv) | 405.3 | (v) | 0.00469 | (vi) | 0.000076 |

3. اگر **31.09=1.4926** ہو تو لوگرتھمی جدول کا استعمال کیے بغیر درج ذیل اعداد کا لوگرتھم معلوم کیجیے۔

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (i) | log 3.109 | (ii) | log 310.9 | (iii) | log 0.003109 |
| (iv) | log 3109 | (v) | log 310.942 | (vi) | log 310926 |

### 2.2.4 (Antilograthms) ضدلوگرتھم کا تصور اور متعلقہ جدول کا استعمال کسی عدد کا ضدلوگرتھم معلوم کرنے کے لیے۔

اگر $\log x = y$ ہو تو $x$ کو $y$ کا ضدلوگرتھم کہا جاتا ہے۔

اسے اس طرح لکھتے ہیں۔ $\text{Antilog}\,(y) = x$ , if $\log x = y$

کسی عدد کا ضدلوگرتھم کو جدول استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل دو اصولوں کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

اصول 1: اگر خاصہ غیر منفی n ہو تو ضدلوگرتھم میں صحیح عددی حصے میں ہندسوں کی تعداد n+1 ہوتی ہے۔

اصول 2: اگر خاصہ منفی n ہو تو ضدلوگرتھم میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد صفروں کی تعداد n-1 ہوتی ہے۔

ضدلوگرتھم معلوم کرنے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

**Antilogarithm Table**

| | | | | | | | | | | | Mean Differences | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .00 | 1002 | 1005 | 1007 | 1009 | 1012 | 1014 | 1016 | 1019 | 1021 | 0000 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| .01 | 1023 | 1026 | 1028 | 1030 | 1033 | 1035 | 1038 | 1040 | 1042 | 1045 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| .02 | 1047 | 1050 | 1052 | 1054 | 1057 | 1059 | 1062 | 1064 | 1067 | 1069 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| .03 | 1072 | 1074 | 1076 | 1079 | 1081 | 1084 | 1086 | 1089 | 1091 | 1094 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| .04 | 1096 | 1099 | 1102 | 1104 | 1107 | 1109 | 1112 | 1114 | 1117 | 1119 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| .05 | 1122 | 1125 | 1127 | 1130 | 1132 | 1135 | 1138 | 1140 | 1143 | 1146 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| .06 | 1148 | 1151 | 1153 | 1156 | 1159 | 1161 | 1164 | 1167 | 1169 | 1172 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| .07 | 1175 | 1178 | 1180 | 1183 | 1186 | 1189 | 1191 | 1194 | 1197 | 1199 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

# Antilogarithm Table

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .08 | 1202 | 1205 | 1208 | 1211 | 1213 | 1216 | 1219 | 1222 | 1225 | 1227 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| .09 | 1230 | 1233 | 1236 | 1239 | 1242 | 1245 | 1247 | 1250 | 1253 | 1256 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| .10 | 1259 | 1262 | 1265 | 1268 | 1271 | 1274 | 1276 | 1279 | 1282 | 1285 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| .11 | 1288 | 1291 | 1294 | 1297 | 1300 | 1303 | 1306 | 1309 | 1312 | 1315 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| .12 | 1318 | 1321 | 1324 | 1327 | 1330 | 1334 | 1337 | 1340 | 1343 | 1346 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| .13 | 1349 | 1352 | 1355 | 1358 | 1361 | 1365 | 1368 | 1371 | 1374 | 1377 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| .14 | 1380 | 1384 | 1387 | 1390 | 1393 | 1396 | 1400 | 1403 | 1406 | 1409 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| .15 | 1413 | 1416 | 1419 | 1422 | 1426 | 1429 | 1432 | 1435 | 1439 | 1442 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| .16 | 1445 | 1449 | 1452 | 1455 | 1459 | 1462 | 1466 | 1469 | 1472 | 1476 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| .17 | 1479 | 1483 | 1486 | 1489 | 1493 | 1496 | 1500 | 1503 | 1507 | 1510 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| .18 | 1514 | 1517 | 1521 | 1524 | 1528 | 1531 | 1535 | 1538 | 1542 | 1545 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| .19 | 1549 | 1552 | 1556 | 1560 | 1563 | 1567 | 1570 | 1574 | 1578 | 1581 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| .20 | 1585 | 1589 | 1592 | 1596 | 1600 | 1603 | 1607 | 1611 | 1614 | 1618 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| .21 | 1622 | 1626 | 1629 | 1633 | 1637 | 1641 | 1644 | 1648 | 1652 | 1656 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| .22 | 1660 | 1663 | 1667 | 1671 | 1675 | 1679 | 1683 | 1687 | 1690 | 1694 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| .23 | 1698 | 1702 | 1706 | 1710 | 1714 | 1718 | 722 | 1726 | 1730 | 1734 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| .24 | 1738 | 1742 | 1746 | 1750 | 1754 | 1758 | 1762 | 1766 | 1770 | 1774 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| .25 | 1778 | 1782 | 1786 | 1791 | 1795 | 1799 | 1803 | 1807 | 1811 | 1816 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| .26 | 1820 | 1821 | 1828 | 1832 | 1837 | 1841 | 1845 | 1849 | 1854 | 1858 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| .27 | 1862 | 1866 | 1871 | 1875 | 1879 | 1884 | 1888 | 1892 | 1897 | 1901 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| .28 | 1905 | 1910 | 1914 | 1919 | 1923 | 1928 | 1932 | 1936 | 1941 | 1945 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| .29 | 1950 | 1954 | 1959 | 1963 | 1968 | 1972 | 1977 | 1982 | 1986 | 1991 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| .30 | 1995 | 2000 | 2004 | 2009 | 2014 | 2018 | 2023 | 2028 | 2032 | 2037 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| .31 | 2042 | 2046 | 2051 | 2056 | 2061 | 2065 | 2070 | 2075 | 2080 | 2084 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| .32 | 2089 | 2094 | 2099 | 2104 | 2109 | 2113 | 2118 | 2123 | 2128 | 2133 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| .33 | 2138 | 2143 | 2148 | 2153 | 2158 | 2163 | 2168 | 2173 | 2178 | 2183 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| .34 | 2188 | 2193 | 2198 | 2203 | 2208 | 2213 | 2218 | 2223 | 2228 | 2234 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| .35 | 2239 | 2244 | 2249 | 2254 | 2259 | 2265 | 2270 | 2275 | 2280 | 2286 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| .36 | 2291 | 2296 | 2301 | 2307 | 2312 | 2317 | 2323 | 2328 | 2333 | 2339 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| .37 | 2344 | 2350 | 2355 | 2360 | 2366 | 2371 | 2377 | 2382 | 2388 | 2393 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| .38 | 2399 | 2404 | 2410 | 2415 | 2421 | 2427 | 2432 | 2438 | 2443 | 2449 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| .39 | 2455 | 2460 | 2466 | 2472 | 2477 | 2483 | 2489 | 2495 | 2500 | 2506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| .40 | 2512 | 2518 | 2523 | 2529 | 2535 | 2541 | 2547 | 2553 | 2559 | 2564 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| .41 | 2570 | 2576 | 2582 | 2588 | 2594 | 2600 | 2606 | 2612 | 2618 | 2624 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| .42 | 2630 | 2636 | 2642 | 2649 | 2655 | 2661 | 2667 | 2673 | 2679 | 2685 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| .43 | 2692 | 2698 | 2704 | 2710 | 2716 | 2723 | 2729 | 2735 | 2742 | 2748 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| .44 | 2754 | 2761 | 2767 | 2773 | 2780 | 2786 | 2793 | 2799 | 2805 | 2812 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |

## Antilogarithm Table

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .45 | 2818 | 2825 | 2831 | 2838 | 2844 | 2851 | 2858 | 2864 | 2871 | 2877 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| .46 | 2884 | 2891 | 2897 | 2904 | 2911 | 2917 | 2924 | 2931 | 2938 | 2944 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| .47 | 2951 | 2958 | 2965 | 2972 | 2970 | 2985 | 2992 | 2999 | 3006 | 3013 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| .48 | 3020 | 3027 | 3034 | 3041 | 3048 | 3055 | 3062 | 3069 | 3076 | 3083 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| .49 | 3090 | 3097 | 3105 | 3112 | 3119 | 3126 | 3133 | 3141 | 3148 | 3155 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| .50 | 3162 | 3170 | 3177 | 3184 | 3192 | 3199 | 3206 | 3214 | 3221 | 3228 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| .51 | 3236 | 3243 | 3251 | 3258 | 3266 | 3273 | 3281 | 3289 | 3296 | 3304 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| .52 | 3311 | 3319 | 3327 | 3334 | 3342 | 3350 | 3357 | 3365 | 3373 | 3381 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| .53 | 3388 | 3396 | 3404 | 3412 | 3420 | 3428 | 3436 | 3443 | 3451 | 3459 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| .54 | 3467 | 3475 | 3483 | 3491 | 3499 | 3508 | 3516 | 3524 | 3532 | 3540 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| .55 | 3548 | 3556 | 3565 | 3573 | 3581 | 3589 | 3597 | 3606 | 3614 | 3622 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| .56 | 3631 | 3639 | 3648 | 3656 | 3664 | 3673 | 3681 | 3690 | 3698 | 3707 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| .57 | 3715 | 3724 | 3733 | 3741 | 3750 | 3758 | 3767 | 3776 | 3784 | 3793 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| .58 | 3802 | 3811 | 3819 | 3828 | 3837 | 3846 | 3855 | 3864 | 3873 | 3882 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| .59 | 3890 | 3899 | 3908 | 3917 | 3926 | 3936 | 3945 | 3954 | 3963 | 3972 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| .60 | 3981 | 3990 | 3999 | 4009 | 4018 | 4027 | 4036 | 4046 | 4055 | 4064 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 |
| .61 | 4074 | 4083 | 4093 | 4102 | 4111 | 4121 | 4130 | 4140 | 4150 | 4159 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .62 | 4169 | 4178 | 4188 | 4198 | 4207 | 4217 | 4227 | 4236 | 4246 | 4256 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .63 | 4266 | 4276 | 4285 | 4295 | 4305 | 4315 | 4325 | 4335 | 4345 | 4355 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .64 | 4365 | 4374 | 4385 | 4395 | 4406 | 4416 | 4426 | 4436 | 4446 | 4457 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .65 | 4467 | 4477 | 4487 | 4498 | 4508 | 4519 | 4529 | 4539 | 4550 | 4560 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .66 | 4571 | 4581 | 4592 | 4603 | 4613 | 4624 | 4634 | 4645 | 4656 | 4667 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 |
| .67 | 4677 | 4688 | 4699 | 4710 | 4721 | 4732 | 4742 | 4753 | 4764 | 4775 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| .68 | 4786 | 4797 | 4808 | 4819 | 4831 | 4842 | 4853 | 4864 | 4875 | 4887 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| .69 | 4898 | 4909 | 4920 | 4932 | 4943 | 4955 | 4966 | 4977 | 4989 | 5000 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| .70 | 5012 | 5023 | 5035 | 5047 | 5058 | 4070 | 5082 | 5093 | 5105 | 5117 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 |
| .71 | 5129 | 5140 | 5152 | 5164 | 5176 | 5188 | 5200 | 5212 | 5224 | 5236 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| .72 | 5248 | 5260 | 5272 | 5284 | 5297 | 5309 | 5321 | 5333 | 5346 | 5358 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| .73 | 5370 | 5383 | 5395 | 5408 | 5420 | 5433 | 5445 | 5458 | 5470 | 5483 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| .74 | 5495 | 5508 | 5521 | 5534 | 5546 | 5559 | 5572 | 5585 | 5598 | 5610 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| .75 | 5623 | 5636 | 5649 | 5662 | 5675 | 5689 | 5702 | 5715 | 5728 | 5741 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| .76 | 5754 | 5768 | 5781 | 5794 | 5808 | 5821 | 5834 | 5848 | 5861 | 5875 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| .77 | 5888 | 5902 | 5916 | 5929 | 5943 | 5957 | 5970 | 5984 | 5998 | 6012 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| .78 | 6026 | 6039 | 6053 | 6067 | 6081 | 6095 | 6109 | 6124 | 6138 | 6152 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 |
| .79 | 6166 | 6180 | 6194 | 6209 | 6223 | 6237 | 6252 | 6266 | 6281 | 6295 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| .80 | 6310 | 6324 | 6339 | 6353 | 6368 | 6383 | 6397 | 6415 | 6427 | 6442 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| .81 | 6457 | 6471 | 6486 | 6501 | 6516 | 6531 | 6546 | 6061 | 6577 | 6592 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |

# Antilogarithm Table

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .82 | 6607 | 6622 | 6637 | 6653 | 6668 | 6683 | 6699 | 6714 | 6730 | 6745 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| .83 | 6761 | 6776 | 6792 | 6808 | 6823 | 6839 | 6855 | 6871 | 6887 | 6902 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| .84 | 6918 | 6934 | 6950 | 6966 | 6982 | 6998 | 7015 | 7031 | 7047 | 7063 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| .85 | 7079 | 7096 | 7112 | 7129 | 7145 | 7161 | 7178 | 7196 | 7211 | 7228 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| .86 | 7244 | 7261 | 7278 | 7295 | 7311 | 7328 | 7345 | 7362 | 7379 | 7396 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| .87 | 7413 | 7430 | 7447 | 7464 | 7482 | 7499 | 7516 | 7534 | 7551 | 7568 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| .88 | 7586 | 7603 | 7621 | 7638 | 7656 | 7674 | 7691 | 7709 | 7727 | 7745 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| .89 | 7762 | 7780 | 7798 | 7816 | 7834 | 7852 | 7870 | 7889 | 7907 | 7925 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 14 | 16 |
| .90 | 7943 | 7962 | 7980 | 7998 | 8017 | 8035 | 8054 | 8072 | 8091 | 8110 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| .91 | 8128 | 8147 | 8166 | 8185 | 8204 | 8222 | 8241 | 8260 | 8279 | 8299 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| .92 | 8318 | 8337 | 8356 | 8275 | 8395 | 8414 | 8433 | 8453 | 8472 | 8492 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| .93 | 8511 | 8531 | 8551 | 8570 | 8590 | 8610 | 8630 | 8650 | 8670 | 8690 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| .94 | 8710 | 8730 | 8750 | 8770 | 8790 | 8810 | 8831 | 8851 | 8872 | 8892 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| .95 | 8913 | 8933 | 8954 | 8974 | 8995 | 9016 | 9036 | 9057 | 9078 | 9099 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 15 | 17 | 19 |
| .96 | 9120 | 9141 | 9162 | 9183 | 9204 | 9226 | 9247 | 9268 | 9290 | 9311 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| .97 | 9133 | 9354 | 9376 | 9397 | 9419 | #### | 9462 | 9484 | 9506 | 9528 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 |
| .98 | 9550 | 9572 | 9594 | 9616 | 9638 | 9661 | 9683 | 9705 | 9727 | 9750 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| .99 | 9772 | 9795 | 9817 | 9840 | 9863 | 9886 | 9908 | 9931 | 9954 | 9977 | 2 | 5 | 7 | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 | 20 |

**مثال 01:** وہ اعداد معلوم کیجیئے جن کے لو گرتھم کی قیمت درج ذیل ہو۔

(i) 1.3247 (ii) $\bar{2}.1324$

**حل:** فرض کریں۔

اب 1.3247 کی قیمت معلوم کرنا ہے۔

(i) یہاں خاصہ = 1 اور منٹیسا = 0.3247 ہے۔

(ii) ضد لو گرتھم کے جدول میں 0.32 کے سامنے والی قطار تلاش کریں۔

(iii) افقی طور پر تیسرے ہندسے کو دیکھتے جو کہ 4 ہے $32^{nd}$ قطار اور $4^{th}$ کالم کے تقاطع پر موجود نمبر 2109 نوٹ کریں۔

(iv) دوبارہ افقی طور پر اسی قطار اور فرق والے $7^{th}$ کالم کے نیچے دونوں کے تقاطع پر نمبر 3 لکھا ہوا ہے۔

(v) 2019 اور 3 کو جمع کرنے سے حاصل کردہ نمبر 2112 ہے۔

چونکہ خاصہ '1' ہے اسلیئے حاصل کردہ نمبر میں '1' جمع کرنے سے 2112 حاصل ہوا۔ اسلیئے 2112 میں نقطہ اعشاریہ بائیں جانب سے دو ہندسوں کے بعد لگایا جائے گا۔ مطلوبا ضد لو گرتھم 21.12 ہے۔

$x = \text{antilog}\ (\bar{2}.1324)$, Here $\text{Log}\ \bar{x} = \bar{2}.1324$

### (ii) $\bar{2}.1324$ میں

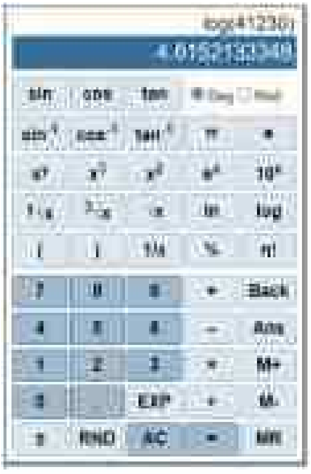
**حل:** فرض کریں

یہاں خاصہ = $\bar{2}$ اور منٹیسا = 0.1324

اب 0.13 کو ضد لو گرتھم کے جدول میں دوسرے کالم میں دیکھیئے، اس کے مطابق چار اہم ہندسوں والا حاصل کردہ نمبر 1356 ہے۔

اسی کالم کے فرق والے $4^{th}$ کالم میں دونوں کے تقاطع پر نمبر 1 لکھا ہوا ہے۔

پس مطلوبہ نمبر 0.01356 ہے۔




## 2.2.5 کیلکیولیٹر کے استعمال سے کسی عدد کا لو گرتھم اور ضد لو گرتھم معلوم کرنا۔

**مثال 01:** کیلکیولیٹر کے استعمال سے (41230) کی قیمت معلوم کیجئے۔

**حل:** فرض کریں

(i) کیلکیولیٹر پر 'Log' کا بٹن دبائیں۔

(ii) اب نمبر 41230 کا اندراج کریں۔ (ہم اس کی قیمت معلوم کرنا چاہتے ہیں)

(iii) چھوٹی بریکٹ بند کریں اور برابر کی علامت لگائیں۔

لہذا ہم 4.615213335 کی قیمت کیلکیولیٹر کی سکرین پر دیکھ سکتے ہیں۔

| پس جو کہ ہے log (41230) = 4.615213335 |
|---|

**مثال 02:** کیلکیولیٹر کی مدد سے (4.615213335) کی قیمت معلوم کریں۔

**حل:** ہم ضد لوگرتھم کا بٹن استعمال کریں گے۔

(i) پہلے شفٹ کا بٹن دبائیں۔

(ii) اب log کا بٹن دبائیں۔

(iii) چھوٹی بریکٹ میں (4.615213335) کا اندراج کریں۔

(iv) اب اینٹر کا بٹن دبائیں۔

حاصل کردہ نمبر 41230.00002 ہے جسے رائونڈ آف کر کے حاصل کردہ نمبر 41230 ہے۔

| |
|---|
| پس antilog (4.615213335) = 41230.00002 |

## 2.3 عام لوگرتھم اور قدرتی لوگرتھم میں فرق

عام لوگرتھم کی اساس 10 ہوتی ہے اور اس کے $\log_{10}(x)$ کی بجائے $\log(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جبکہ قدرتی لوگرتھم کی اساس e ہوتی ہے (e ایک غیر ناطق عدد ہے جس کی قیمت 2.718281 ہے) اسے $\log_e(x)$ کی بجائے $\ln x$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

## مشق 2.4

1. جدول کے استعمال سے اعداد معلوم کیجیے جن کا عام لوگرتھم درج ذیل ہے۔

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (i) | 3.56721 | (ii) | $\bar{1}.7427$ | (iii) | 0.35749 |
| (iv) | 5.8196 | (v) | $\bar{4}.3847$ | (vi) | 0.9187 |

2. کیلکیولیٹر کی مدد سے درج ذیل اعداد کا لوگرتھم معلوم کریں۔

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (i) | 900 | (ii) | 45.54 | (iii) | 36582 |
| (iv) | 826.3 | (v) | 0.00851 | (vi) | 0.000097 |

3. مندرجہ ذیل میں ____ کی قیمت معلوم کریں (بذریعہ کیلکیولیٹر)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (i) | $\log x = 1.7505$ | (ii) | $\log x = 0.6609$ | (iii) | $\log x = \bar{1}.6132$ |
| (iv) | $\log x = 3.4800$ | (v) | $\log x = \bar{7}.0038$ | (vi) | $\log x = 0.2665$ |

## 2.4 لوگرتھم کے قوانین

2.4.1 درج ذیل لوگرتھم کے قوانین ثابت کیجیے۔

(i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a m^n = n \log_a m$

(iv) $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$

(i) قانون حقیقی اعداد $m, n, a$ اور $a > 0$, جبکہ $a \neq 1, \log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$ کے لیے۔

ثبوت:

فرض کیجئے $\log_a m = x$ اور $\log_a n = y$ ہوتو $m = a^x$ اور $n = a^y$

اب $mn = a^x \cdot a^y$

$mn = a^{x+y}$ (قانون قوت نما)

قوت نمائی شکل کولوگرتھمی شکل میں تبدیل کرنے سے $\log_a (mn) = x + y$

پس $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

نوٹ: دو حقیقی اعداد کے حاصل فرق کالوگرتھم ان کے لوگرتھم کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

(ii) قانون حقیقی اعداد $m, n, a$ اور $a > 0$, جبکہ $a \neq 1$, کے لیے۔

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

ثبوت:

فرض کیجئے۔ $\log_a m = x$ اور $\log_a n = y$ ہوتو $m = a^x$ اور $n = a^y$

$$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} \quad \text{(قانون قوت نما)}$$

$$\frac{m}{n} = a^{x-y}$$

قوت نمائی شکل کولوگرتھمی شکل میں تبدیل کرنے سے۔

$$\Rightarrow \quad \log_a \frac{m}{n} = x - y$$

لہذا $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

نوٹ: دو حقیقی اعداد کے حاصل تقسیم کا لوگرتھم ان کے لوگرتھم کے فرق کے برابر ہوتا ہے۔

(iii) قانون: حقیقی اعداد $m, n,$ اور $a$ جبکہ $a > 0$ اور $a \neq 1$, کے لیے

$$\log_a m^n = n \log_a m$$

**ثبوت:** فرض کیجیئے: $\log_a m = x$ Then $m = a^x$

اب $m^n = (a^x)^m$

$m^n = a^{nx}$

(قانون قوت نما)

قوت نمائی شکل کو لوگرتھمی شکل میں تبدیل کرنے سے

$\Rightarrow \quad \log_a m^n = nx$

پس $\log_a m^n = n\log_a m$

> نوٹ: کسی حقیقی عدد جس کا قوت نما n ہو کا لوگرتھم اس کے لوگرتھم اور قوت نما n کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

(iv) لوگرتھم میں اساس کی تبدیلی کا اصول

حقیقی اعداد $n, a, b$ جبکہ $a>0$, اور $a \neq 1$ ہو تو

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

**ثبوت:** فرض کیجیے: $\log_a n = x$

لہٰذا $n = a^x$

دونوں طرفین میں لوگرتھم اساس 'b' پر لینے سے۔

$$\log_b n = \log_b a^x$$

$$\log_b n = x\log_b a \qquad \therefore \quad \log_b m^n = n\log_b m$$

$$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

پس $$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

**مثال 01:** $\log_a(2bc)$ کو لوگرتھم کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیجیے۔

**حل:** لوگرتھم کے قوانین کا استعمال کرتے ہوئے۔

$$\log_a(2bc) = \log_a 2 + \log_a b + \log_a c,$$

پس، یہ مطلوبہ لوگرتھم کا مجموعہ ہے۔

**مثال 02:** $\log(52.5 \times 63 \times 4.567)$ کو لوگرتھم کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیجیے۔

**حل:** لوگرتھم کے قوانین کے مطابق

$$\log(52.5\times63\times4.567) = \log 52.5 + \log 63 + \log 4.567$$

پس، یہ مطلوبہ لوگرتھم کا مجموعہ ہے۔

نوٹ:
(i) $\log_a(mn) \neq \log_a m \times \log_a n$
(ii) $\log_a m + \log_a n \neq \log_a (m+n)$

**مثال 03:** $\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$ کو لوگرتھم کے فرق کے طور پر ظاہر کریں۔

**حل:** لوگرتھم کے فرق کے قانون کے مطابق۔

$$\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right) = \log 213.1 - \log 34.22.$$

پس، یہ لوگرتھم کے فرق کے مطابق لکھا گیا ہے۔

**مثال 04:** $\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$ کو لوگرتھم کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیں۔

**حل:** ہم جانتے ہیں کہ $\log_a m^n = n\log_a m$

$$\therefore \quad \log_a 2^x = x\log_a 2.$$

## مشق 2.5

1. درج ذیل لوگرتھم کو $\log_a x$, $\log_a y$ اور $\log_a z$ کی اصطلاحات میں لکھیئے

(i) $\log_a \frac{x^3 y}{z^2}$ (ii) $\log_a \sqrt{xy^2 z}$ (iii) $\log_a\left(\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{y^3}} \div \sqrt{y^3\sqrt{x}}\right)$

(iv) $\log_a \frac{x\sqrt{y^3}}{\sqrt[3]{z^2x^5}}$

2. واحد لوگرتھم کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) $\log_a 20 - \log\ 15 + \frac{1}{2}\log\ \frac{9}{2}$

(ii) $\frac{1}{3}\log_a(x-1)^3 + \frac{10}{9}\log_a(x+1) - \frac{1}{9}\log_a(x+1)$

(iii) $\log x - 2\log x + 3\log(x+1) - \log(x^2-1)$.

3. اگر $\log 5 = 0.6990$ اور $\log 3 = 0.4771$ , $\log 2 = 0.3010$ ہو تو متعلقہ جدول کا استعمال کیئے بغیر درج ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\log 15$ (ii) $\log 64$ (iii) $\log\sqrt{5\times 2}$ (iv) $\log 48$

(v) $\log\sqrt{18}$ (vi) $\log 30$ (vii) $\log\frac{8}{3}$ (viii) $\log\frac{5}{\sqrt{3}}$

4. ثابت کیجیئے:

(i) $\log_b m \times \log_m a = \log_b a$ (ii) $\log_a b \times \log_c a = \log_c b$

(iii) $\log_b a . \log_c b \frac{1}{\log_c a} = 1$ (iv) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

5. تصدیق کیجیے۔

(i) $\log_5 7 \times \log_7 25 = 2$ (ii) $\log_3 2 \times \log_2 81 = 4$

(iii) $\log_5 343 \times \log_7 25 = 6$ (iv) $\log_6 16 \times \log_2 216 = 12$

## 2.5 لوگرتھم کے قوانین کا اطلاق

### 2.5.1 لوگرتھم کا اطلاق ضرب، تقسیم اور قوت نمائی سوالات کے طویل عمل کو جمع اور تفرقی کے آسان ترین طریقہ کار میں تبدیل کرنے کے لیے ہوتا ہے۔

درج ذیل امثال کی مدد سے لوگرتھم کے قوانین کا اطلاق باآسانی سمجھا جاسکتا ہے۔

**مثال 01:** لوگرتھم کی مدد سے $(8.573)(28.74)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیئے۔ $x = (8.573)(28.74)$

دونوں طرفین میں لوگرتھم لینے سے۔

$\therefore \quad \log x = \log(8.573 \cdot 28.74)$

$\Rightarrow \quad \log x = \log(8.573) + \log(28.74)$

$\Rightarrow \quad \log x = 0.9332+1.4585$

$\Rightarrow \quad \log x = 2.3917$

$\therefore \quad x = \text{antilog}(2.3917)$

پس، $x = 246.4$

**مثال 02:** لوگرتھم کی مدد سے $\frac{213.1}{34.22}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

**حل:** فرض کیجئے کہ $x = \frac{213.1}{34.22}$

دونوں طرفین میں لوگرتھم لینے سے

$$\log x = \log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \log x = \log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \log x = \log 213.1 - \log 34.22, \quad \left(\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b\right)$$

بحوالہ لوگرتھمی جدول ہمیں معلوم ہے کہ

$\log x = 2.3286 - 1.5343 = 0.7943$

$\Rightarrow \quad \log x = 0.7943,$

ضدلوگرتھم لینے سے

$x = \text{antilog}(0.7943)$, ضدلوگرتھم کی جدول کو دیکھنے سے

بحوالہ ضدلوگرتھم کے جدول سے ہم جانتے ہیں کہ

$x = 6.227,$ (∵ خاصہ = 0 , مینٹیسا = 0.7943)

پس، $\frac{213.1}{34.22}$ کی مطلوبہ قیمت 6.227 ہے۔

**مثال 03:** لوگرتھم کے قانون کے مطابق $\sqrt{\frac{3.41\times 37.92}{2.34}}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

**حل:** فرض کیجئے کہ

$$x=\sqrt{\frac{3.41\times 37.92}{2.34}}$$

دونوں طرفین میں لوگرتھم لینے سے

$$\log x=\log\left(\frac{3.41\times 37.92}{2.34}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{3.41\times 37.92}{2.34}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\log 3.41+\log 37.92-\log 2.34)$$

$$=\frac{1}{2}(0.5325+1.5788-0.3692)$$

$$=\frac{1}{2}(1.7424)$$

$$=0.8712$$

$$x=\text{antilog }(0.8712)$$

$$=7433$$

$$=7.433$$

**مثال 04:** $4^5$ میں ہندسوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

**حل:** فرض کیجئے۔

Let $n=4^5$

مساوات کے دونوں طرفین میں لوگرتھم لینے سے۔ہم جانتے ہیں کہ

$\therefore \quad \log n=\log 4^5 \qquad (\because \log a^n=n\log a)$

$\Rightarrow \quad \log n=5\log 4$

$\Rightarrow \quad \log n=5\times 0.6021 \qquad$ (since $\log 4=0.6021$)

$\Rightarrow \quad \log n=3.0105$

ہندسوں کی تعداد = خاصہ + 1

پس، $4^5$ میں ہندسوں کی تعداد $=3+1=4$

## مشق 2.6

1. لوگرتھم کی مدد سے درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $57.86 \times 4.385$

(ii) $25.753 \times 0.5341 \times 490.8$

(iii) $\dfrac{25.753}{0.5341}$

(iv) $\dfrac{(790.6 \times 30.32)}{25.753}$

(v) $\dfrac{99.87}{(8.369) \times (0.785)}$

(vi) $\sqrt[5]{2.709} \times \sqrt[7]{1.239}$

(vii) $\dfrac{(26.62)^{\frac{1}{2}} \times (87.19)^3}{\sqrt{69.53}}$

(viii) $\dfrac{(4308)^3 \times \sqrt{80.06}}{(0.3387)^3}$

2. درج ذیل میں ہندسوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

**(i)** $4^{12}$ **(ii)** $7^{25}$ **(iii)** $3^{30}$ **(iv)** $5^{20}$ **(v)** $9^{30}$

لوگرتھم کی مدد سے ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

## Review Example 2

**Review Exercise 2**

1. دیئے گئے جملوں کو غور سے پڑھیں اور درست جواب کے انتخاب کے لیئے درست پر دائرہ لگائیں اور غلط جملے کے انتخاب کرنے پر غلط دائرہ لگائیں۔

(i) 0.025 کو سائنسی ترمیم میں $2.5\times10^3$ لکھا جاسکتا ہے۔ درست/غلط

(ii) لوگرتھم کی ایجاد البیرونی کی۔۔۔۔ درست/غلط

(iii) اسی عدد کے لوگرتھم کا صحیح عددی حصہ خاصہ کہلاتا ہے۔۔۔ درست/غلط۔

(iv) کسی عدد کے لوگرتھم کا منٹیسا ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔۔۔۔۔ درست/غلط۔

(v) $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ درست/غلط۔

2. خالی جگہ پُر کریں۔

(i) اساس 10 پر لوگرتھم ______ کہلاتا ہے۔

(ii) $\text{Log}1 =$ __________ ۔

(iii) لوگرتھم کا کسری حصہ ______ کہلاتا ہے۔

(iv) $\log 512 =$ __________ ۔

(v) $\log_a m \times \log_m n =$ __________ ۔

(vi) $x = \log_a y$ کی قوت نمائی شکل ______ ہوتی ہے۔

(vii) $a^{10}=y$ کی لوگرتھمی شکل ______ ہوتی ہے۔

(viii) $\log_b a \times \log_a b =$ __________ ۔

(ix) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) =$ __________ ۔

(x) $\log(10\times10) =$ __________ ۔

3. درست جواب پر () کا نشان لگائیں۔

(i) اگر $\log_{10}x=4$ ہو تو، $x =$ ______ .

(a) 500 (b) 100 (c) 1000 (d) 10000

(ii) log 54.58 کا خاصہ ______ ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

(iii) عام لوگرتھم کی اساس ______ ہے۔

(a) 5 (b) 10 (c) e (d) 100

(iv) $\log xyz =$ ______ .

(a) $\log x \log y \log z$
(b) $\log x + \log y + \log z$
(c) $\log (xy)^z$
(d) $\log x - \log y - \log z$

(v) 0.00789 کی سائنسی ترقیم ______ ہے۔

(a) $7.89 \times 10^{-3}$
(b) $7.89 \times 10^{3}$
(c) $0.789 \times 10^{-2}$
(d) $78.9 \times 10^{-4}$

(vi) اگر $x = 2$ ہو تو $x =$ ______ .

(a) 200 (b) 1000 (c) 100 (d) $\frac{2}{10}$

(vii) اگر $\log_2 8 = x$ تو $x =$ ______ .

(a) 64 (b) $3^2$ (c) 3 (d) $2^8$

(viii) قدرتی لوگرتھم کی اساس ______ ہوتی ہے۔

(a) 10 (b) $e$ (c) $\pi$ (d) 5

(ix) $3^5 = 243$ کو لوگرتھمی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

(a) $\log_3 5 = 243$
(b) $\log_3 243 = 5$
(c) $\log_5 243 = 12$
(d) $\log_5 3 = 243$

# خلاصہ

- اگر $a^x = y$ ,جبکہ $x$ اور $y$ ہو تو 'a' کو اساس $\log_a y = x$ پر $a>0, y>0$ کالوگرتھم کہتے ہیں اور اسے $a\neq 1$ لکھتے ہیں۔
- $\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$
- $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$
- اگر لوگرتھم کی اساس 10 ہو تو اسے عام لوگرتھم یا برگز لوگرتھم کہتے ہیں۔اسے $\log x$ کی بجائے $\log_{10} x$ لکھا جاتا ہے۔

قدرتی لوگرتھم کی اساس $e$, ہوتی ہے (ایک غیر ناطق عدد) جس کی قیمت 2.7182818 ہے اور اسے $\log_e x$ کی بجائے $\ln x$ لکھا جاتا ہے ۔

- کسی بھی لوگرتھم کا صحیح عددی حصہ خاصہ اور کسری حصہ منٹیسا کہلاتا ہے۔
- کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ جو '1' سے بڑا ہو ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔
- کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ جو '1' سے چھوٹا ہو ہمیشہ منفی ہوتا ہے۔
- لوگرتھم کا منفی خاصہ جیسا کہ $\bar{1}$ کو $\bar{2}$، $\bar{3}$ کو ,3- اور 1- کو 2 - لکھا جاسکتا ہے۔
- ایک ہی تسلسل والے اہم ہندسوں پر مشتمل اعداد کے لوگرتھم کا منٹیسا ایک ہی (یکساں ہوتا ہے)۔
- وہ عدد جس کے لوگرتھم کی قیمت معلوم ہو ضد لوگرتھم کہلاتا ہے۔
- لوگرتھم کے قوانین۔

(i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a m^n = n \log_a m$

(iv) $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

قانون کو ایسے بھی لکھا جاسکتا ہے۔ $\log_b a . \log_a n = \log_b n.$