یونٹ 16

کوآرڈینیٹ جیومیٹری کا تعارف / تجزیاتی جیومیٹری

INTRODUCTION TO COORDINATE GEOMETRY / ANALYTICAL

یونٹ میں طلباء کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ما حصل / نتائج

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- کوآرڈینیٹ جیومیٹری کی وضاحت اور تعریف کر سکیں۔
- فاصلے کے فارمولا کا ثبوت دے سکیں اور اس کی مدد سے کارتیسی مستوی کے دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کر سکے۔
- فاصلے کے فارمولا کی مدد سے دو نقاط کے درمیان فاصلہ ماپ سکیں۔
- ہم خط نقاط کی تعریف کر سکیں اور ہم خط اور غیر ہم خط کے درمیان فرق کر سکیں۔
- فاصلے کا فارمولا استعمال کر کے ثابت کر سکیں کہ تین (یا اس سے زیادہ) معلوم نقاط ہم خط ہیں۔
- فاصلے کا فارمولا استعمال کر کے ثابت کر سکیں کہ تین معلوم غیر ہم خط نقاط بنا سکتے ہیں۔
  (i) متساوی الاضلاع مثلث (Equilateral Triangle)
  (ii) متساوی الساقین مثلث ((Isosceles Triangle)
  (iii) قائمۃ الزاویہ مثلث (Right Angled Triangle)
  (iv) الاضلاع مثلث (Scalene Triangle)
- فاصلے کا فارمولا استعمال کر کے ھابت کر سکیں کہ چار معلوم غیر ہم نقاط بنا سکتے ہیں:
  - ایک مربع (A square)
  - ایک مستطیل(A rectangle)
  - ایک متوازی الاضلاع (A Parallelogram)
- فارمولا کی پہچان کریں جو دو معلوم نقاط کو ملانے والے خط کا درمیانی نقطہ ظاہر کر سکی۔
- فاصلہ اور درمیانی نقطہ کا فارمولا لگا کر جیومیٹری سے متلق مختلف معیاری نتائج کی تصدیق کر سکیں۔

تعارف:

کارتیسی کوآرڈینیٹ جو سترھویں صدی میں رین ڈیسکارٹس (لاطینی نام کارٹیسیئز) نے ایجاد کیا ریاضی میں یوکلیڈین جیومیٹری اور الجبرا کے مابین پہلا منظم ربط فراہم کر کے انقلاب لایا۔ کارتیسی کوآرڈینیٹ سسٹم کا استعمال کرتے ہوئے، ہندسی اشکال (جیسے خط اور منحنی خطوط) مساوات کے ذریعے بیان کیے جا سکتے ہیں۔

16.1 فاصلا کا فارمولا:

16.1.1: کوآرڈینیٹ جیومیٹری کی وضاحت اور تعریف کریں۔

کوآرڈینیٹ جیومیٹری ریاضی کی سب سے اہم اور دلچسپ شاخ ہے۔ خاص طور پر یہ ریاضی کے طلباء کے اسکول میں ملنے کا مرکزی مقام ہے۔ یہ لائنوں اور منحنی خطوط کے گراف کے ذریعے الجبرا اور جیومیٹری کے مابین رابطہ فراہم کرتا ہے۔

کوآرڈینیٹ سسٹم کی مدد سے جیومیٹری کے الجبرا مطالعہ کو کوآرڈینیٹ جیومیٹری / تجزیاتی جیومیٹری کہا جاتا ہے یہ ہندسی مسائل کو الجبرا کے مطابق حل کرنے کے قابل بناتا ہے اور الجبرا میں ہندسی بصیرت فراہم کرتا ہے۔ یہ جیومیٹری کا ایک حصہ ہے جس میں نمبروں کے ترتیبی جوڑے طیارے (Plane) پر کسی نقطہ کی پوزیشن کو بیان کرنے کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔ یہاں:

کوآرڈینیٹ جیومیٹری کا تصور (جسے کارتیسی جیومیٹری بھی کہا جاتا ہے) اور اس کے فارمولے اور ان کے اخذ کی وضاحت کی جائے۔

16.1.2: فاصلہ کے فارمولا کا ثبوت دیں اور اس کی مدد سے کارتیسی مستوی کے دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

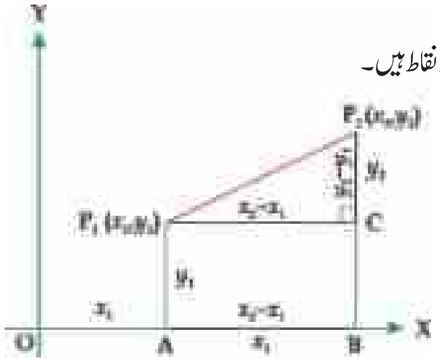
بیان:

کسی بھی دو نقاط $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ کے درمیان فاصلہ $\left|\overline{P_1P_2}\right|$ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے اور اس کی وضاحت اس طرح کی جاتی ہے:

$$\left|\overline{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

فاصلہ کے فارمولا کا ماخوذ:

فرض کریں $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ طیارے (Plane) کے دو نقاط ہیں۔



P_2P_1 اور $\overline{P_1C}$ سے x ایکسز پر عمود $\overline{P_1A}$ کھینچیں اور $\overline{P_2A}$ کھینچیں جو x ایکسز کے متوازی ہے۔

$$\left|\overline{P_1C}\right| = \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{OB}\right| - \left|\overline{OA}\right| = \left|x_2 - x_1\right|$$

اور

$$\left|\overline{P_2C}\right| = \left|\overline{P_2B}\right| - \left|\overline{BC}\right| = \left|y_2 - y_1\right|$$

قائمتہ الزاویہ ΔP_1CP_2 فرض کریں اور مسئلہ فیثا غورث (Pythagaras theorem) لگائیں، ہمارے پاس ہے۔

$$\therefore \quad \left|\overline{P_1P_2}\right|^2 = \left|\overline{P_1C}\right|^2 + \left|\overline{P_2C}\right|^2$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{P_1P_2}\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2}$$

نوٹ: درمیانی نقطہ (origin) کا نقطہ $P(x, y)$ سے فاصلہ ہے: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

16.1.3: فاصلہ کا فارمولا کی مدد سے دو نقاط کے درمیان فاصلہ ماپیں

درج ذیل مثالیں فاصلہ کے فارمولا کے استعمال کو سمجھنے میں مدد دیں گی،

مثال 01: نقاط $P(2,3)$ اور $Q(-4,5)$ کے درمیان فاصلہ تلاش کریں۔

حل: فاصلہ کا فارمولا کے استعمال سے $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

یہاں

$$(x_1, y_1) = (2,3), (x_2, y_2) = (-4,5)$$

$$\therefore \quad \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-4-2)^2 + (5-3)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2} = \sqrt{36+4}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

مثال 02: دائرہ جس کا رداس 5 یونٹ ہے درمیانی نقطہ $C(2،3)$ سے کھینچا جاتا ہے اور نقاط $N(-2,-3)$ اور $L(6,6), M(0,-1)$ معلوم ہیں۔ تلاش کریں کہ کون سا نقطہ دائرہ پر موجود نہیں ہے (دلائل دیں)

حل: (3،2) اس دائرے کا درمیانی نقطہ ہے جس کا رداس 5 یونٹ ہے۔ اور N (-2, -3) L (6, 6), M (0, -1) تین معلوم نقاط ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ،

ہمیں بالترتیب N اور C to L, M کی لمبائی (فاصلہ) معلوم کرنا ہے۔ فاصلہ کے فارمولا کی مدد سے، پھر۔

$\therefore$ $$|CL| = \sqrt{(6-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ یونٹ}$$

$$|CM| = \sqrt{(0-3)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ یونٹ}$$

$$|CN| = \sqrt{(-2-3)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ یونٹ}$$

$|CL| =$ 5 یونٹ دائرے کا رداس

$|CM| = 3\sqrt{2}$ یونٹ $<$ 5 یونٹ

$|CN| = 5\sqrt{2}$ یونٹ $<$ 5 یونٹ

تو، M اور N دائرے پر نہیں ہیں۔ $(-2,-3)$

مشق 16.1

1. فاصلہ کا فارمولا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیان فاصلہ تلاش کریں۔

(i) $(-4,5)$ and $(6,6)$ (ii) $(2,2)$ and $(2,3)$

(iii) $(0,1)$ and $(2,3)$ (iv) $(0,1)$ and $(2,3)$

2. فرض کریں $B(0,b)$ اور $(a,0)$ ایکسز پر موجود دو نقاط ہیں B اور A کے درمیان فاصلہ تلاش کریں، جب

(i) $a=-3,\ b=-4$ (ii) $a=-9,\ b=6$

(iii) $a=3,\ b=4$ (iv) $a=\sqrt{2},\ b=-2\sqrt{2}$

3. نقاط $C(2,2\sqrt{3})$ اور $A(0,0), B(4,0)$ سے تشکیل شدہ مثلث کا احاطہ (Perimeter) بنائیں۔

16.2 :ہم خط نقاط:

16.2.1: ہم خط نقاط کی تعیف کریں اور ہم خط اور غیر ہم خط نقاط کے درمیان فرق کریں۔

ہم خط نقاط:

ایک ہی خط پر موجود نقاط ہم خط نقاط کہلاتے ہیں

مثلاً:

A, B اور C ہم خط نقاط ہیں درج ذیل شکل میں: $|\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$

غیر ہم خط نقاط:

تین یا اس سے زیادہ نقاط غیر ہم خط نقاط کہلاتے ہیں اگر وہ ایک خط پر موجود نہ ہوں۔

درج ذیل شکل میں:

نوٹ: تین غیر ہم خط نقاط مثلث بناتے ہیں چار غیر ہم خط نقاط چوکور بناتے ہیں۔

16.2.2: فاصلہ کا فارمولا استعمال کرکے ثابت کریں کہ تین (یا اس سے زیادہ) معلوم نقاط ہم خط ہیں۔

مثال 01: ثابت کریں کے نقاط $A(3,-2), B(1,4)$ اور $C(-3,16)$ ہم خط نقاط ہیں۔

حل: $A(3,-2), B(1,4)$ اور $C(-3,16)$ تین معلوم نقاط ہیں۔

اب ہم فاصلہ کا فارمولا استعمال کرکے $|\overline{AB}|, |\overline{BC}|$ اور $|\overline{AC}|$ کا فاصلا تلاش کریں گے۔

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(1-3)^2+(4+2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$ یونٹ

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-3-1)^2+(16-4)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$ یونٹ

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-3-3)^2+(16+2)^2} = \sqrt{36+324} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$$ یونٹ

یہاں، $|\overline{AB}|+|\overline{BC}| = 2\sqrt{10}+4\sqrt{10} = 6\sqrt{10} = |\overline{AC}| = d_3,$

اسلئے نقاط A, B اور C ہم خط نقاط ہیں۔ (دکھایا گیا)

مثال 02: فاصلہ کا فارمولا استعمال کرکے ثابت کریں کے نقاط $A(-2,-3), B(4,7)$ اور $C(9,-5)$ غیر ہم خط ہیں۔

حل: $A(-2,-3), B(4,7)$ اور $C(9,-5)$ تین معلوم نقاط ہیں۔

اب فاصلہ کا فارمولا استعمل کرکے $|\overline{AB}|, |\overline{BC}|$ اور $|\overline{AC}|$ کا فاصلہ نکالیں۔

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(4+2)^2+(7+3)^2} = \sqrt{36+100} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$$ یونٹ

$$\Rightarrow \quad |\overline{BC}| = \sqrt{(9-4)^2+(-5-7)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$ یونٹ

$$\Rightarrow \quad |\overline{AC}| = \sqrt{(9+2)^2+(-5+3)^2} = \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$ یونٹ

چونکہ، $|\overline{AC}| \neq |\overline{AB}|+|\overline{AC}|$

لہٰذا تین معلوم نقاط A, B اور C غیر ہم خط ہیں۔

16.2.3: فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے ثابت کریں کہ تین معلوم غیر ہم خط نقاط بناتے ہیں۔

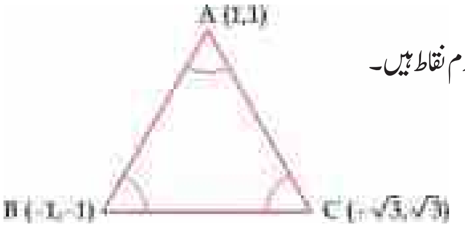
(i) ایک متساوی الاضلاع مثلث

(ii) ایک متساوی الساقین مثلث

(iii) ایک قائمۃ الزاویہ مثلث

(iv) ایک الاضلاع مثلث

مثال 01: ثابت کریں کہ تین نقاط $A(1,1),\ B(-1,-1)$ اور $C(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔



حل: $A(1,1),\ B(-1,-1)$ اور $C(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ تین معلوم نقاط ہیں۔

اب فاصلہ کا فارمولا کی مدد سے $|\overline{AC}|$ اور $|\overline{BC}|$, $|\overline{AB}|$ کے اضلاع ΔABC کا فاصلہ تلاش کریں۔

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1-1)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$ یونٹ

$$|\overline{BC}| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \sqrt{3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{8}$$ یونٹ

اور $$|\overline{AC}| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$ یونٹ

چونکہ $$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = 2\sqrt{2}$$ یونٹ

لہٰذا یہ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے۔ ABC

مثال **01:** ثابت کریں کہ نقاط $A(3,2), B(9,10)$ اور $C(1,16)$ متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں۔

حل: فرض کریں کہ نقاط $A(3,2), B(9,10)$ اور $C(1,16)$

معلوم نقاط ہیں فاصلہ کے فارمولا کی مدد سے:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(9-3)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(1-3)^2 + (16-2)^2} = \sqrt{4+196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(1-9)^2 + (16-10)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \text{ یونٹ}$$

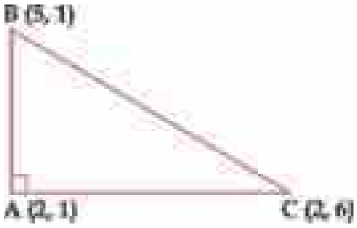
چونکہ $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = 10$ یونٹ

دو اضلاع لمبائی میں برابر ہیں۔

لہٰذا ABC ایک متساوی الساقین مثلث ہیں۔

مثال **03:** ثابت کریں کہ $A\ (2, 1), B\ (5, 1)$ اور $C\ (2, 6)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

حل: فرض کریں کہ $A\ (2, 1), B\ (5, 1)$ اور $C\ (2, 6)$ کے راس ہیں ΔABC، فاصلہ کا فارمولا کے استعمال سے۔



$$|\overline{AB}|^2 = (5-2)^2 + (1-1)^2 = 9+0 = 9$$

$$|\overline{BC}|^2 = (2-5)^2 + (6-1)^2 = 9+25 = 34$$

اور

$$|\overline{AC}|^2 = (2-2)^2 + (6-1)^2 = 0+25 = 25$$

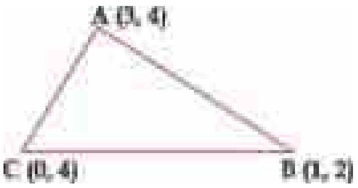
یہاں

$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = 9+25 = 34$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|^2$$

مسئلہ فیثا غورث کی تبدیلی سے معلوم راس قائمۃ الزاویہ مثلث بناتے ہیں۔

مثال 04: ثابت کریں کہ نقاط $C(0,4)$ اور $A(3,4), B(1,2)$ الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔



حل: فرض کریں کہ $C(0,4)$ اور $A(3,4), B(1,2)$ معلوم نقاط ہیں۔

اب، فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے ہر اضلاع کی لمبائی معلوم کریں۔

$$\therefore \quad |AB| = \sqrt{(1-3)^2+(2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \text{ یونٹ}$$

$$|BC| = \sqrt{(0-3)^2+(4-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ یونٹ}$$

اور

$$|AC| = \sqrt{(0-1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \text{ یونٹ}$$

چونکہ، $|AB| \neq |BC| \neq |AC|$ اور نقاط غیر ہم خط ہیں۔

i.e. تینوں اضلاع کی لمبائی برابر نہیں ہے۔

لہٰذا ABC الاضلاع مثلث ہے۔

16.2.4: فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے ثابت کریں کہ چار غیر ہم خط نقاط بناتے ہیں:

(i) ایک متوازی الاضلاع

(ii) ایک مستطیل

(iii) ایک مربع

مثال 01: ثابت کریں کہ $C(2,-4)$ اور $A(-8,-3), B(-2,6), C(8,5)$ ایک متوازی الاضلاع کے مسلسل راس ہیں۔

حل: فرض کریں کہ $C(2,-4)$ اور $A(-8,-3), B(-2,6), C(8,5)$ اور ABCD ایک چوکور کے چار مسلسل راس ہیں۔

فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے،

ہمارے پاس ہے،

$$|AB| = \sqrt{(-2+8)^2+(6+3)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} \text{ یونٹ}$$

$$|BC| = \sqrt{(8+2)^2+(5-6)^2} = \sqrt{100+1} = \sqrt{101} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{DC}| = \sqrt{(2-8)^2+(-4-5)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} \text{ یونٹ}$$

اور $$|\overline{AD}| = \sqrt{(2+8)^2+(-4+3)^2} = \sqrt{100+1} = \sqrt{101} \text{ یونٹ}$$

اب $$|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = \sqrt{117}$$

اور $$|\overline{BC}| = |\overline{AD}| = \sqrt{101}$$

$\therefore$ A, B, C اور D متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

مثال 02: ثابت کریں چار نقاط $A(0,-1)$, $B(4,-3)$, $C(8,5)$ اور $D(4,7)$ ایک مستطیل کے مسلسل راس ہیں۔

حل: فرض کریں کہ $A(0,-1)$, $B(4,-3)$, $C(8,5)$ اور $D(4,7)$ ایک چوکور ABCD کے چار مسلسل نقاط ہیں۔

فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے،

$$\text{i.e., } d = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \text{ یونٹ}$$

ہمارے پاس ہے،

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(4-0)^2+(-3+1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(8-4)^2+(5+3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{DC}| = \sqrt{(4-8)^2+(7-5)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{AD}| = \sqrt{(4-0)^2+(7+1)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(8-0)^2+(5+1)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{BD}| = \sqrt{(4-4)^2+(7+3)^2} = \sqrt{0+100} = \sqrt{100} \text{ یونٹ}$$

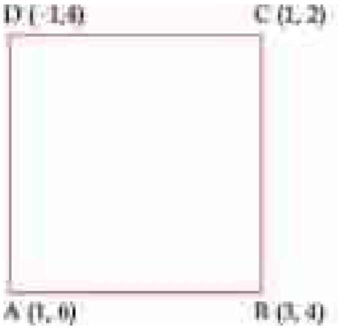
$$\therefore \quad |\overline{AB}| = |\overline{CD}| = \sqrt{20}$$

$$|\overline{BC}| = |\overline{AD}| = \sqrt{80}$$

$$|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$$

A، B، C اور D چوکور کے چار نقطے ہیں۔

مثال 03: ثابت کریں کہ چار مسلسل نقاط $A(1,6)$, $B(3,4)$, $C(1,2)$ اور $D(-1,4)$ ایک مربع بناتے ہیں۔



حل: معلوم ہے کہ $A(1,6)$, $B(3,4)$, $C(1,2)$ اور $D(-1,4)$

چوکور ABCD کے چار مسلسل نقاط ہیں۔

فاصلہ کا فارمولا استعمال کرکے،

$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(3-1)^2+(4-6)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ یونٹ

$|\overline{BC}| = \sqrt{(1-3)^2+(2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ یونٹ

$|\overline{DC}| = \sqrt{(1+1)^2+(2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ یونٹ

اور $|\overline{AD}| = \sqrt{(-1-1)^2+(4-6)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ یونٹ

چونکہ $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{DC}| = |\overline{AD}| = 2\sqrt{2}$ یونٹ

ابھی وتر AC اور BC کی لمبائی معلوم کرینگے

$\therefore \quad |\overline{AC}| = \sqrt{(1-1)^2+(2-6)^2} = \sqrt{0+16} = 4$ یونٹ,

اور $|\overline{BD}| = \sqrt{(-1-3)^2+(4-4)^2} = \sqrt{16-0} = 4$ یونٹ,

جیسا کہ وتر کی لمبائی برابر ہے تو ABCD ایک مربع ہے

مشق 16.2

1. ثابت کریں کہ نقاط (-3, -4), Q (2, 6) and R (0, 2) ہم خط ہیں۔

2. ثابت کریں کہ نقاط A (-1, 0), B (1, 0) and C $(0, \sqrt{3})$ غیر ہم خط ہیں۔

3. ثابت کریں کہ L $(0, \sqrt{3})$, M (-1, 0) and N (1, 0) متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔

4. نقاط A (2, 3), B (8, 11) and C (0, 17) متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں یا نہیں۔

5. کیا نقاط A (-1, 2), B (7, 5) and C (2, -6) قائمۃ الزاویہ مثلث بناتے ہیں

6. اگر نقاط A (3, 1), B (9, 1) and C (6, k) ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں تو k کی رقم معلوم کریں۔

7. ثابت کریں کہ نقاط P (1, 2), Q (3, 4) and R (0, -1) ایک الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

8. ثابت کریں کہ نقاط A (2, 3), B (8, 11), C (0, 17) and D (-6, 9) ایک مربع کے راس ہیں۔

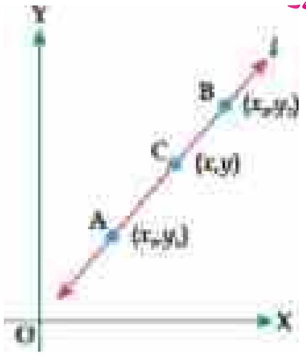
9. ثابت کریں کہ کیوں نقاط A (-2, 0), B (0, -3), C (2, 0) and D (0, 3) ایک مربع بناتے ہیں۔

10. ثابت کریں کہ نقاط A (3, 2), B (4, 1), C (5, 4) and D (6, 3) ایک مستطیل کے راس ہیں۔

11. فاصلہ کا فارمولا استعمال کریں اور ثابت کریں کہ نقاط O (0, 0), A (3, 0), B (5, 2) and C (2, 2) ایک متوازی الاضلاع اشکال کے راس ہیں۔

16.3 درمیانی نقطہ کا فارمولا

16.3.1 فارمولا کی پہچان کریں جو دو معلوم نقاط کو ملانے والے خط کا درمیانی نقطہ ظاہر کر سکے۔



فرض کریں کہ $A\ (x_1, y_1)$ کے کوئی دو نقاط ہیں اور $B\ (x_2, y_2)$ کا درمیانی نقطہ ہے، پھر A اور B کا درمیانی نقطہ کہلاتا ہے۔

$$C(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مثال 01: قطع خط جو $A(2,1)$ اور $B(3,4)$ کو ملاتا ہے اس کا درمیانی نقطہ تلاش کریں۔

حل: $A(2,1)$ اور $B(3,4)$ قطعہ خط کے نقاط ہیں۔

درمیانی نقطہ۔۔۔؟

درمیانی نقطہ کا فارمولا استعمال کرکے،

درمیانی نقطہ $= \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $\quad \overline{AB} = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$

مثال 02: اگر $A(2,1), B(5,2)$ اور $C(3,4)$ کے راس ہیں، تو ΔABC اضلاع P, Q اور R کے بالترتیب درمیانی نقاط $\overline{AC}, \overline{AB}$ and $\overline{BC}$ اور ΔABC تلاش کریں

حل: درمیانی نقاط کا فارمولا استعمال کرکے،

ہمارے پاس ہے، $C(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$\therefore$ $\overline{AC}$ کا درمیانی نقطہ $\overline{AC} = P = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right),$

$\overline{AB}$ کا درمیانی نقطہ $\overline{AB} = Q = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right),$

اور $\overline{BC}$ کا درمیانی نقطہ $\overline{BC} = R = \left(\frac{5+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (4, 3),$

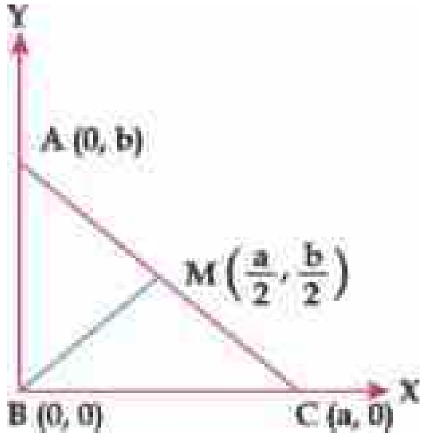
لہٰذا ΔABC کے اضلاع کے درمیانی نقاط $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ اور $(4, 3)$ ہیں۔

16.4 فاصلہ اور درمیانی نقطہ کا فارمولا لاگر کر جیومیٹری سے متعلق مختلف معیاری نتائج کی تصدیق کر سکیں۔

مثال 01: تجزیاتی طور پر ثابت کریں کہ دائیں مثلث کے مفہوم کی درمیانی لمبائی مفروضے کی نصف لمبائی ہی۔

حل: فرض کریں ABC ایک مثلث ہے جو B کے قائمۃ الزاویہ پر ہے۔ B کو درمیانی نقطہ لیں اور BA BC کو بالترتیب x اور y کے ایکسز لیں۔

فرض کریں $|\overline{BC}| = a, |\overline{BA}| = b$ اور B تو $C, (0,0)$ ہے، $(a,0)$ ہے اور $(0,b)$ A is ہے اس لیے M جو $\overline{AC}$ کا درمیانی نقطہ ہے $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$ ہے $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$



اب $|\overline{AM}| = |\overline{CM}| = \frac{1}{2}|\overline{AC}|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

اور $|\overline{BM}| = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

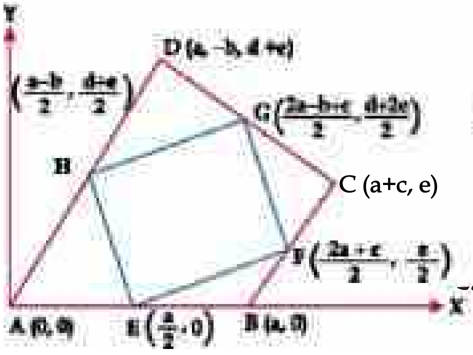
اسلیئے

$$|\overline{BM}| = \frac{1}{2}|\overline{AC}|$$

لہٰذا وسطانیے $|\overline{BM}|$ کی لمبائی مفروضے $|\overline{AC}|$ کی نصف لمبائی ہے۔

مثال 02: ثابت کریں کہ کسی بھی چوکور کے اطراف کے درمیانی نقطوں کو جوڑ کر حاصل اشکال متوازی الاضلاع ہے۔

حل:



فرض کریں کہ ABCD ایک چوکور ہے اور H اور E,F,G بالترتیب

$\overline{AB}, \overline{BC}, , \overline{CD}$ اور $\overline{DA}$ کے درمیانی نقطے ہیں

A کو اوریجن (origin) لیں، $\overline{AB}$ ایکسز اور A سے آنے والی خط اور

$\overline{AB}$ کے عمود پر واقع کو y ایکسز لیں۔

پھر A ہے اور دوبارہ فرض کریں کہ $(0,0)$ ہے، B ہے اور C، $(a,0)$ ہے۔

اب درمیانی نقاط D اور $(a+c,e)$ بالترتیب $(a-b,d+e)$

اسلئے، فاصلہ کے فارمولا سے۔ $\left(\frac{a-b}{2}, \frac{d+e}{2}\right)$ and $\left(\frac{2a-b+c}{2}, \frac{d+2e}{2}\right), \left(\frac{2a+c}{2}, \frac{e}{2}\right), \left(\frac{a}{2}, 0\right)$

اسی طرح $$\left|\overline{EF}\right|^2=\left(\frac{2a+c}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}-0\right)^2$$

$$=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(a+c)^2+e^2\right\} \quad \text{(i)}$$

$$\left|\overline{GH}\right|^2=\left(\frac{2a-b+c}{2}-\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{d+2e}{2}-\frac{d+e}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(a+c)^2+e^2\right\} \quad \text{(ii)}$$

(i)اور(ii)سے، ہمارے پاس ہے

$$\left|\overline{EF}\right|=\left|\overline{GH}\right|$$

Similarly, $\left|\overline{GF}\right|=\left|\overline{EH}\right|$

کیونکہ متقابل اضلاع برابر ہیں EFGH ایک متوازی الاضلاع۔

مشق 16.3

1. درمیانی نقطہ کا فارمولا استعمال کر کے درج ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیانی نقاط تلاش کریں۔

(i) A (2, 6) and B (-4, 8)   (ii) P (-3, -1) and Q (5, 2)

(iii) L (0, 6) and M (-8,0)   (iv) C (0, 0) and D $(2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$.

2. دائرے کا درمیانی نقطہ تلاش کریں جس کے قطر کے اختتامی نقاط A (-5, 6) and B (3, -4) ہیں

3. دائرے کا درمیانی نقطہ (3, 4) ہے اور اس سے قطر کا ایک اختتامی نقطہ (4,6) ہے۔ دوسرے اختتام کا نقطہ تلاش کریں۔

4. دائرے کا قطر نقاط (3, 4-) and B (11, 6) کے درمیان ہے۔ دائرے کا درمیانی نقطہ اور رداس تلاش کریں۔

5. ثابت کریں کہ مثلث ایک متساوی الساقین مثلث ہے صرف اور صرف اگر اس کے پاس دو برابر وسطانیے ہوں۔

6. ثابت کریں کہ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔

اعادہ مشق 16

1. درج ذیل جملوں کو دھیان سے پڑھیں اور درست کی صورت میں 'د' اور غلط کی صورت میں 'غ' پر دائرہ لگائیں"

(i) R کا درمیانی نقطہ ہے $\overline{PQ}$ اگر R کے درمیانی واقع ہے۔ (د/غ)

(ii) الاضلاع مثلث میں تمام اضلاع برابر ہوتے ہیں۔ (د/غ)

(iii) عمودی خطوط 135 کے زاویہ پر ملتی ہیں۔ (د/غ)

(iv) ہم خط نقاط مثلث بنا سکتے ہیں۔ (د/غ)

(v) غیر ہم خط نقاط مثلث بنا سکتے ہیں۔ (د/غ)

(vi) متساوی الساقین مثلث میں دو اضلاع کے زاویے برابر ہوتے ہیں۔ (د/غ)

(vii) y ایکسز پر موجود تمام نقاط ہم خط ہوتے ہیں۔ (د/غ)

(viii) x ایکسز اور y ایکسز کے کاٹنے کا مقام (0,0) ہے (د/غ)

(ix) اور جن (origin) سے (6،0) کا فاصلہ 36 یونٹ ہے۔ (د/غ)

2. خالی جگہ پُر کریں۔

(i) اگر $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$ کسی خط کے دو نقاط ہیں تو $|\overline{AB}| =$ ________

(ii) ہم خط نقاط ایک جیسی ________ پر ہوتے ہیں۔

(iii) چوتھے کواڈرینٹ میں $x>0$ and y ________

3. درست جواب پر (✓) لگائیں۔

(i) دو عمودی خطوط زاویہ پر ملتی ہیں:

(ا) 45 (ب) 60 (ج) 90 (د) 180

(ii) $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ کہلاتا ہے۔

(ا) درمیانی نقطہ فارمولا (ب) فاصلہ کا فارمولا (ج) تقسیم کا فارمولا (د) تناسب کا فارمولا

(iii) $A(3, 0)$ and $B(0, 3)$ پلین میں کوئی سے دو نقاط ہیں تو $|\overline{AB}| =$

(ا) 6 یونٹ (ب) $6\sqrt{2}$ یونٹ (ج) $3\sqrt{2}$ یونٹ (د) $3\sqrt{2}$ یونٹ

(iv)زاویوں کے تمام تین اندرونی ناصف کا نقطہ قطع کہلاتا ہے:

(ا) سینٹر ویڈ (centroid)　　(ب) اندرونی مرکز (incentre)

(ج) عمودی مرکز (orthocentre)　　(د) محاصرہ مرکز (circumcentre)

خلاصہ

- دو نقاط $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ ہوں تو $d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ یونٹ کا درمیانی فاصلہ ہوتا ہے۔
- قطعہ خط $\overline{AB}$ کا درمیانی نقطہ ہوتا ہے $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
- ہم خط نقاط سیدھی لکیر بناتے ہیں۔
- تین نقاط A, B اور C ہم خط نقاط تب ہوں گے جب

$$|\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$$

یا $$|\overline{AB}| = |\overline{AC}| + |\overline{CB}|$$

یا $$|\overline{BC}| = |\overline{BA}| + |\overline{AC}|$$

- تین غیر ہم خط نقاط A, B and C شلث بناتے ہیں، اگر دو اضلاع کی جمع شدہ لمبائی تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہے۔
- اگر، $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| < |\overline{AC}|$ تو نقاط A, B and C سے کوئی شلث نہیں بن سکتا۔

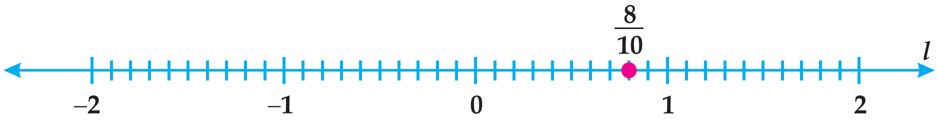
جوابات

مشق 1.1

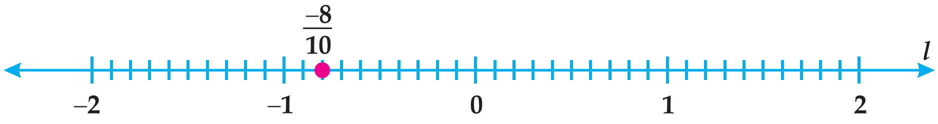
.1
- i. ناطق عدد
- ii. غیر ناطق عدد
- iii. غیر ناطق عدد
- iv. ناطق عدد
- v. غیر ناطق عدد
- vi. غیر ناطق عدد
- vii. ناطق عدد
- viii. غیر ناطق عدد
- ix. غیر ناطق عدد
- x. ناطق عدد
- xi. غیر ناطق عدد
- xii. ناطق عدد

.2
- i. مختتم کسر
- ii. غیر مختتم کسر
- iii. غیر مختتم کسر
- iv. مختتم کسر
- v. مختتم کسر
- vi. غیر مختتم کسر

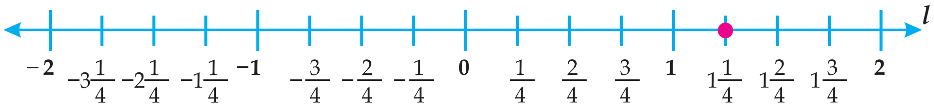
.3 i.



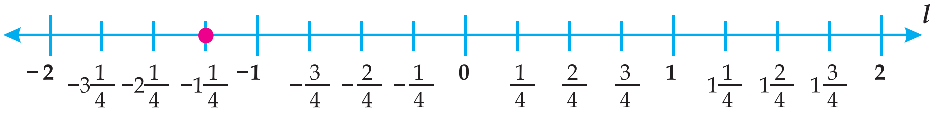
ii.



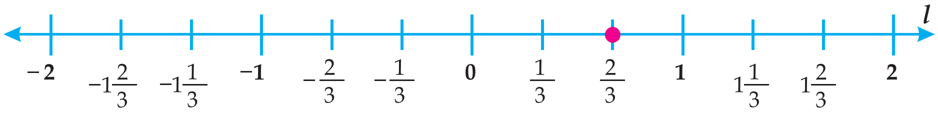
iii.



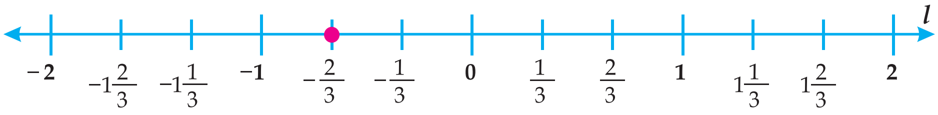
iv.



v.



vi.



.4 ہم ایک اور 2 کے بیچ میں تمام حقیقی اعداد کی فہرست نہیں بنا سکتے۔

.5 π ایک غیر ناطق عدد ہے کیونکہ یہ نا ختم ہونے والی کسر اعشاریہ ہے۔

.6 i. غلط ii. درست iii. درست iv. درست v. درست vi. غلط

(i, ii, iii, v) درست جوابات ہیں

مشق 1.2

.1
i. خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع
ii. خاصیت تلازم بلحاظ جمع
iii. بائیں ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع
iv. دائیں ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع
v. دائیں ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق
vi. خاصیت مبادلہ بلحاظ ضرب
vii. خاصیت تلازم بلحاظ ضرب
viii. ضربی معکوس
ix. جمعی معکوس
x. ضربی معکوس
xi. بائیں ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق
xii. ضربی معکوس

.2
i. $\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\boxed{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{\boxed{5}}$

ii. $\frac{7}{10}+\left(\frac{70}{\boxed{10}}+\frac{16}{33}\right)=\frac{7}{\boxed{10}}+\left(\frac{\boxed{70}}{10}+\frac{16}{\boxed{33}}\right)$

iii. $\frac{99}{50}\times\frac{50}{99}=\boxed{1}$

iv. $\frac{59}{95}\times\frac{95}{59}=\boxed{1}$

v. $(-21)+\left(\boxed{21}\right)=0$

vi. $\frac{5}{8}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{8}\times\frac{\boxed{5}}{\boxed{7}}\right)$

.3
i. $5<10$ ii. $10>5$ iii. $6+9$
iv. $4+8<6+8$ v. $8+8>6+8$

.4
i. 7×12 ii. 5×12 iii. $<$ iv. $>$

5.

	جمعی معکوس	ضربی معکوس
i.	-3	$\frac{1}{3}$
ii.	7	$\frac{-1}{7}$
iii.	-0.3	$\frac{1}{0.3}$
iv.	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{-5}{\sqrt{5}}$
v.	$\frac{-9}{\sqrt{12}}$	$\frac{\sqrt{12}}{9}$
vi.	0	موجود نہیں ہے۔

مشق 1.3

1. i. مجذور $= 5$ ، اشاریہ $= 3$

ii. مجذور $= \frac{x}{y}$ ، اشاریہ $= 4$

iii. مجذور $= x^2yz$ ، اشاریہ $= 5$

2. i. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ ii. $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{5}{2}}$ iii. $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{5}{3}}$ iv. $(yz)^{\frac{7}{3}}$ v. $(27)^{\frac{1}{9}}$

vi. $(-64)^{\frac{2}{3}}$ vii. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{3}}$ viii. $(xy)^{\frac{3}{5}}$ ix. $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$

3. i. $\sqrt[7]{(5)^3}$ ii. $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$ iii. $\sqrt[7]{\left(\frac{5}{7}\right)^{15}}$ iv. $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$ v. $\sqrt[5]{\left(\frac{11}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)}$

1.4 مشق

1. i. 27 ii. 20 iii. $(a+b)(c+d)$

2. i. $\left(\frac{1}{3}\right)^9$ ii. $\left(\frac{3}{4}\right)^7$ iii. $\left(\frac{4}{5}\right)^8$ iv. $-3^3\times 5^6$ v. $3^3\times 4^6$

vi. $\frac{a^9}{b^9c^9}$ vii. $\frac{c^{10}}{d^{10}}$ viii. $m^6n^5t^{11}$ ix. $a^9b^6c^8$

3. i. 5^6 ii. $x^{15}y^{15}$ iii. $(4)^{10}$ iv. $-3^9\times 4^6$ v. $\frac{b^6}{5^3}$

vi. $\frac{4^6}{9^6}$ vii. z^{24} viii. m^{100} ix. $-(0.1)^{18}$

1.5 مشق

1. i. $1+2i$ ii. $2+2i$ iii. $3+4i$
iv. $-1+i$ v. $-2+2i$ vi. $-3+4i$

2. **i.** $\text{Re}(z)=1, \text{Im}(z)=2$ **ii.** $\text{Re}(z)=4, \text{Im}(z)=9$

iii. $\text{Re}(z)=-5, \text{Im}(z)=6$ **iv.** $\text{Re}(z)=-1, \text{Im}(z)=-1$

v. $\text{Re}(z)=\frac{-3}{4}, \text{Im}(z)=\frac{4}{5}$ **vi.** $\text{Re}(z)=-1, \text{Im}(z)=2$

3. **i.** $\bar{z}=3-2i$ **ii.** $\bar{z}=(4,-9)$ **iii.** $\bar{z}=(-1,-1)$

iv. $\bar{z}=1+i$ **v.** $\bar{z}=\frac{-3}{4}+\frac{4}{5}i$ **vi.** $\bar{z}=1-3i$

5. **i.** $x=-5, y=5$ **ii.** $x=\pm\frac{4}{3}$, $y=\pm\frac{3}{5}$

iii. $x=\frac{-27}{5}, y=\pm 11$ **iv.** $x=\frac{9\sqrt{30}}{\sqrt{5}}, y=\frac{-4}{27}$

مشق 1.6

1. **i.** $(12,5)$ **ii.** $\left(\frac{13}{6},\frac{13}{6}\right)$ **iii.** $(5,21)$

iv. $\left(0,-\frac{1}{15}\right)$ **v.** $(5,0)$ **vi.** $(0,-41)$

vii. $\left(\frac{3-6\sqrt{2}}{4},\frac{3+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$ **viii.** $\left(\frac{-5}{13},\frac{-27}{13}\right)$

2. **i.** $\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$ **ii.** -4

iii. $-\frac{i}{2}$ **iv.** 16

اعادہ مشق 1

1. i. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ii. حقیقی اعداد کا سیٹ iii. 0
iv. 7 v. 0 vi. غیر ناطق عدد
vii. ناطق اعداد viii. $-3-5i$ ix. 2
x. $(ac-bd, ab+bc)$

2. i. درست ii. درست iii. درست iv. درست v. درست

3. i. a ii. b iii. c iv. b

مشق 2.1

1. i. 9.7×10^{3} ii. 4.98×10^{6} iii. 9.6×10^{7} iv. 4.169×10^{3}
v. 8.4×10^{4} vi. $7.18\text{x}10^{-1}$ vii. $6.43\text{x}10^{-3}$ viii. $7.4\text{x}10^{-3}$
ix. $2.1005\text{x}10^{-1}$

2. i. 70000 ii. 0.0000000008072 iii. 6018000 iv. 786500000
v. 0.000205 vi. 72500000000 vii. 4502000 viii. 0.00000002865
ix. 3056000

مشق 2.2

1. i. $\log_7 343 = 3$ ii. $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ iii. $\log_{10}(0.001) = -3$
iv. $\log_8 (2) = \frac{1}{3}$

2. i. $(27)^{\frac{4}{3}} = 81$ ii. $(2)^{-3} = \frac{1}{8}$ iii. $10^{\circ} = 1$ iv. $(10)^{-2} = 0.01$

3. i. $x = 4\sqrt{2}$ ii. $a = 9$ iii. $y = 4$ iv. $x = 8$
v. $y = 2$ vi. $a = 4$ vii. $a > o$ یا a کوئی بھی مثبت حقیقی عدد ہے۔
viii. $y = 1$ ix. $x = 1$

مشق 2.3

1.
- i. خاصہ : 0, منٹیسہ : 0.9031
- ii. خاصہ : 3, منٹیسہ : 0.7036
- iii. خاصہ : 0, منٹیسہ : 0.9997
- iv. خاصہ : 2, منٹیسہ : 0.8839
- v. خاصہ : –3, منٹیسہ : 0.5172
- vi. خاصہ : –5, منٹیسہ : 0.4771

2. i. 0.9542 ii. 1.7448 iii. 1.4711 iv. 2.6078
v. $\bar{3}.6712$ vi. $\bar{5}.8808$

3. i. 0.4926 ii. 2.4926 iii. $\bar{3}.4926$ iv. 3.4926
v. 2.4926 vi. 5.4926

مشق 2.4

1. i. 3692 ii. 0.5530 iii. 2.278
iv. 653800 v. 0.0002425 vi. 8.292

2. i. 2.954242509 ii. 1.658393026 iii. 4.563267445
iv. 2.917137753 v. –2.07007044 vi. – 4.013228266

3. i. 56.2989 ii. 4.5803 iii. 0.024367
iv. 3019.95 v. 0.0000000991 vi. 1.8471

مشق 2.5

1. i. $3\log_a x + \log_a y - 2\log_a z$ ii. $\frac{1}{2}\log_a x + \log_a y + \frac{1}{2}\log_a z$

iii. $\frac{-7}{12}\log_a(x) - \log_a y$ iv. $-\frac{2}{3}\log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{2}{3}\log_a z$

2. i. $\log_a(2\sqrt{2})$ ii. $\log_a(x^2 - 1)$

iii. $\log\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

3. i. 1.1761 ii. 1.8062 iii. 0.5 iv. 1.6812
v. 0.6276 vi. 1.4771 vii. 0.4260 viii. 0.4604

مشق 2.6

1. i. 253.688 ii. 6750 iii. 48.2176 iv. $x = 930.80$
v. 15.20 vi. 1.2585 vii. 410130 viii. 1.84077×10^{13}

2. i. 8 ii. 22 iii. 15 iv. 14 v. 29

اعادہ مشق 2

1. i. غلط ii. غلط iii. درست iv. غلط v. درست
2. i. مشترک لوگرتھم ii. 0 iii. منٹیسہ
iv. 9 v. $\log_a n$ vi. $a^x = y$
vii. $\log_a y = 10$ viii. 1 ix. $\log_a m - \log_a n$
x. 2 xi. 0 xii. −5
3. i. *d* ii. *b* iii. *b* iv. *b* v. *a*
vi. *c* vii. *c* viii. *b* ix. *b*

مشق 3.1

1. i. کثیر رقمی ii. کثیر رقمی نہیں iii. کثیر رقمی
iv. کثیر رقمی نہیں v. کثیر رقمی نہیں vi. کثیر رقمی نہیں
2. i. ناطق ii. غیر ناطق iii. ناطق
iv. غیر ناطق v. ناطق vi. غیر ناطق
3. i. $p - 10$ ii. $\frac{a}{a+b}$ iii. $\frac{a}{2(a+b)}$
iv. $x + y - z$ v. $\frac{3m(m+5)}{2}$ vi. $\frac{x-3}{x-2}$

4. i. $\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$ ii. $\dfrac{3x+7}{(x+2)(x+3)}$ iii. $\dfrac{2\ x^2y^2+xy+1}{(xy+1)(xy-1)}$

iv. $\dfrac{-15}{(x+3)\ (x+6)}$ v. $\dfrac{-2b}{a^2-b^2}$ vi. $\dfrac{-(y-1)}{y+1}$

5. i. $\dfrac{8y^3}{(2y-x)^2\ (2y+x)}$ ii. $-\dfrac{2x+3y}{y}$ iii. 1

iv. $\dfrac{5}{3}$ v. $\dfrac{(q-5)(q+3)}{q^2}$ vi. $\dfrac{8(z-1)}{z-5}$

6. $\dfrac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$

7. i. $\dfrac{1}{6}$ ii. $9\dfrac{9}{55}$ iii. $-\dfrac{17}{73}$

iv. $-4\dfrac{4}{9}$ v. $1\dfrac{1}{11}$

مشق 3.2

1. $a^2+b^2=50,\ ab=7$ **2.** $a^2+b^2=17,\ ab=4$ **3.** $a^2+b^2+c^2=55$

4. $a^2+b^2+c^2=\dfrac{5}{9}$ **5.** $a+b+c=\pm 7$ **6.** $a+b+c=\pm\sqrt{2.5}$

7. $ab+bc+ca=40$ **8.** $a^3+b^3=28$ **9.** $ab=-8$

10. $ab=-4$ **11.** $a^3-b^3=230$ **12.** $125x^3+y^3=247$

13. $216a^3-343\,b^3=12419$ **14.** $x^3+\dfrac{1}{x^3}=322$ **15.** $x^3-\dfrac{1}{x^3}=1364$

16. i. $\frac{27b^3}{8}+\frac{8}{27b^3}$ ii. $\frac{343y^6}{729}+\frac{729}{343y^6}$

iii. $\frac{x^{12}}{1728}-\frac{1728}{x^{12}}$ iv. $c^6-\frac{1}{c^6}$

17. i. $8x^6+27y^6$ ii. $8x^6-27y^6$

iii. $x^{12}-y^{12}$ iv. $256x^8-6561y^8$

مشق 3.3

1. i. $\frac{3z}{x^2}$ ii. $4\sqrt[3]{4a^2b^4c^3}$ iii. 2 iv. $36\sqrt{6}$

v. $\frac{25}{32}$ vi. $\frac{14\sqrt{3}}{11}$ vii. 6 viii. 2

2. i. $8+4\sqrt{3}$ ii. $6\sqrt{6}-2\sqrt{3}$ iii. $8\sqrt{12}-\sqrt{8}$ iv. $2+\sqrt{3}$

3. i. $66\sqrt{2}$ ii. $13\sqrt{5}$ iii. $20+9\sqrt{3}$ iv. $15\sqrt{10}$

v. $4\sqrt{5}+25$ vi. $\sqrt{11}$ vii. 136 viii. $3\sqrt{2}$

ix. $\frac{1}{3}$ x. 2 xi. $134-24\sqrt{30}$ xii. $30+12\sqrt{6}$

مشق 3.4

1. i. $2-\sqrt{3}$ ii. $3-2\sqrt{2}$ iii. $-\left(\frac{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{2}\right)$

iv. $16(2\sqrt{3}-11)$ v. $\frac{83-18\sqrt{2}}{79}$ vi. $\frac{11+3\sqrt{3}}{2}$

2. **i.** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=256$ **ii.** $x=-\left(\frac{4\sqrt{7}+11}{9}\right)$

iii. $x+\frac{1}{x}=6, x-\frac{1}{x}=-4\sqrt{2}, x^2+\frac{1}{x^2}=34, x^2-\frac{1}{x^2}=-24\sqrt{2}, x^4+\frac{1}{x^4}=1154$

3. 322 **4.** 194 **5.** $112\sqrt{3}$

اعادہ مشق 3

1. i.	b	**ii.**	b	**iii.**	a
iv.	a	**v.**	a	**vi.**	a
vii.	b	**viii.**	a	**ix.**	a
x.	a	**xi.**	a	**xii.**	b

2. **i.** سب سے زیادہ قوت نما **ii.** $2+\sqrt{3}$

iii. 4 **iv.** غیر ناطق اظہاریہ

v. x^4+y^4

مشق 4.1

1. **i.** $4(x+4y+6z)$ **ii.** $x^2(1+3y+4y^2z)$

iii. $3pq(r+2t+s)$ **iv.** $9qr(s^2+t^2)(1+2qr)$

v. $\frac{xz^2}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{2}+\frac{xz}{3}\right)$ **vi.** $a(x-y)(1-ab+ab^2)$

2. **i.** $(7+z)(x+z)$ **ii.** $3(3ab-2c)(a+2b)$

iii. $2(t-2p)(3+2q)$ **iv.** $(r+9s)(r-7s)$

v. $(1-z)\left(\frac{y^2}{4}-\frac{z^2t}{9}\right)$ vi. $\frac{1}{11}(2y+z)(5x-7y)$

3. i. $(2a+3b)^2$ ii. $\left(6x^2+1\right)^2$

iii. $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^2$ iv. $(9y+8z)^2$

v. $\left(25+a^2b\right)^2$ vi. $(a+0.2)^2$

4. i. $\left(b^2-2c^2\right)^2$ ii. $\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{2}{3x^2}\right)^2$

iii. $2ab^3(a-4b)^2$ iv. $(3p + 3q - r^2)^2$

v. $(xy-0.05)^2$ vi. $(a - b - 9)^2$

5. i. $(2a-3b)(2a+3b)$ ii. $(4x-5y)(4x+5y)$

iii. $\left(10xz+y^2\right)\left(10xz-y^2\right)$ iv. $\left(\frac{x^2}{10}+10y^2\right)\left(\frac{x^2}{10}-10y^2\right)$

v. $\left(\frac{8f}{9}-\frac{9g^2}{8}\right)\left(\frac{8f}{9}+\frac{9g^2}{8}\right)$ vi. $\left(\frac{x^2}{11}-11y\right)\left(\frac{x^2}{11}+11y\right)$

6. i. $8xz$

ii. $4(3a - 2b)(a - 7b)$

iii. $(13x^2 - 3t - 4)(13x^2 + 3t + 4)$

iv. $(13x^2 - 5y^2)(5x^2 - 3y^2)$

v. $\left(a+\frac{1}{a}+b-\frac{1}{b}\right)\left(a+\frac{1}{a}-b+\frac{1}{b}\right)$

vi. $\left(3x+\frac{1}{3x}+2y-\frac{1}{2y}\right)\left(3x+\frac{1}{3x}-2y+\frac{1}{2y}\right)$

7. i. $(x + y - 3z^2)(x + y + 3z^2)$ ii. $(2a + 2b^2 - 3c)(2a + 2b^2 + 3c)$

iii. $(4d^2 - c^2 + d)(4d^2 + c^2 - d)$ iv. $(2x + 2y^2 + 3y^3)(2x + 2y^2 - 3y^3)$

v. $(x+y-1)(x-y-3)$ vi. $(2x+y+1)(2x-y-1)$

8. i. $\left(\sqrt{ab}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{c}\right)$ ii. $\left(2\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)$

iii. $\left(\sqrt{yz}-\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)\left(\sqrt{yz}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)$ iv. $\left(\sqrt{xzt}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{xzt}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

مشق 4.2

1. i. $\left(a^2+x^2+ax\right)\left(a^2+x^2-ax\right)$ ii. $\left(b^2-b+1\right)\left(b^2+b+1\right)$

iii. $(a^2+x^2-ax)(a^2+x^2+ax)(a^4+x^4-a^2x^2)$

iv. $\left(z^2+z+1\right)\left(z^2-z+1\right)\left(z^4-z^2+1\right)$

2. i. $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$ ii. $9(2x^2z^2+2xyz+y^2)(2x^2z^2-2xyz+y^2)$

iii. $\left(2t^2+10t+25\right)\left(2t^2-10t+25\right)$ iv. $\left(2t^2+2t+1\right)\left(2t^2-2t+1\right)$

3. i. $(x-2)(x+5)$ ii. $(ab+2)(ab-5)$

iii. $(y-7)(y+14)$ iv. $(xyz-4)(xyz+6)$

4. i. $(3y+8z)(3y-z)$ ii. $2(7x+1)(3x-1)$

iii. $(2x+1)(2x+5)$ iv. $(3x+y)(x-13y)$

مشق 4.3

1. i. $(x-2)^2(x-7)(x+3)$ ii. $\left(x^2+5x+3\right)\left(x^2+5x+7\right)$

iii. $(x-3)(x+1)\left(x^2-2x+10\right)$ iv. $\left(x^2-8x+1\right)\left(x^2-8x-1\right)$

v. $\left(x^2+9x-2\right)\left(x^2+9x+6\right)$ vi. $(x-6)(x+1)\left(x^2-5x+16\right)$

2. i. $\left(x^2+5x-2\right)\left(x^2+5x+12\right)$ ii. $(x^2+7x+16)(x+6)(x+1)$

iii. $(x-5x-5)(x-5x+15)$ iv. $\left(x^2-12x+30\right)(x-8)(x-4)$

v. $\left(x^2-5x-10\right)\left(x^2-5x+20\right)$ vi. $\left(x^2-7x+27\right)\left(x^2-7x-5\right)$

3. i. $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right)\left(x-2\sqrt{3}\right)$

ii. $(x^2+1)\left(x+\sqrt{14}\right)\left(x-\sqrt{14}\right)$ iii. $\left(x+\sqrt{3}\right)^2\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

iv. $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+4\sqrt{2}\right)\left(x-4\sqrt{2}\right)$

v. $\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+2\sqrt{5}\right)\left(x-2\sqrt{5}\right)$ vi. $\left(x+2\sqrt{3}\right)\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x^2-2x-12\right)$

مشق 4.4

1. i. $(b+c)^3$ ii. $(2x+y)^3$ iii. $\left(4x+\frac{1}{4}\right)^3$

iv. $(2x+3)^3$ v. $\left(\frac{1}{3}+y^2\right)^3$ vi. $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y\right)^3$

vii. $\left(\frac{4}{3}+x\right)^3$ viii. $\left(\frac{z}{2}+\frac{y}{3}\right)^3$

2. i. $(d-2c)^3$ ii. $\left(x^2-\frac{4}{3}\right)^3$ iii. $\left(\frac{x}{5}-y\right)^3$

iv. $\left(5z-y^2\right)^3$ v. $\left(\frac{z}{3}-6y\right)^3$ vi. $\left(\frac{b^2}{3}-\frac{c^2}{2}\right)^3$

vii. $\left(6-\frac{z}{2}\right)^3$ viii. $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y\right)^3$

مشق 4.5

1. i. $(x+2y)\left(x^2-2xy+4y^2\right)$ ii. $a^2(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\left(a^6-a^3b^3+b^6\right)$

iii. $\left(a^2+1\right)\left(a^4-a^2+1\right)$ iv. $(ab+8)\left(a^2b^2-8ab+64\right)$

v. $b^3(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$ vi. $\left(\frac{x}{5}+\frac{5}{x}\right)\left(\frac{x^2}{25}-1+\frac{25}{x^2}\right)$

vii. $x^3\ (x^2+y^2z^3)\ (x^4-x^2y^2z^3+y^4z^6)$

viii. $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x^4}{9}-\frac{2x}{3}+\frac{4}{x^2}\right)$

2. i. $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$ ii. $(x^3-2y^3)(x^6+2x^3y^3+4y^6)$

iii. $\left(10-\frac{xy}{5}\right)\left(100+2xy+\frac{x^2y^2}{25}\right)$

iv. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

v. $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x^2}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x^2}\right)\left(\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\left(\frac{x^4}{4}+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$

vi. $(x-y)\ (x+y)\ (x^2+y^2)\ (x^4+y^4-x^2y^2)\ (x^2+y^2+xy)\ (x^2+y^2-xy)$

vii. $\left(\frac{3}{x}-2y^2\right)\left(\frac{9}{x^2}+\frac{6y^2}{x}+4y^4\right)$ viii. $\left(2x^2-\frac{1}{9}\right)\left(4x^4+\frac{2x^2}{9}+\frac{1}{81}\right)$

مشق 4.6

1. i. $R=-2$ ii. $R=2$ iii. $R=18$ iv. $R=-42$ v. $R=-11$

vi. $R=\frac{3}{2}$ vii. $R=-8$ viii. $R=3y^4$

2. $m=-1$ 3. $k=-24$ 4. $r=1,\ r=-3$

مشق 4.7

1. i. $R=0,\ q(x)=x^2+1$ ii. $R=-2,\ q(x)=x^2-2x+1$

iii. $R=-60,\ q(x)=x^2-8x+27$ iv. $R=4,\ q(x)=x^2+8x+5$

v. $R=29,\ q(x)=x^3-3x^2+7x-15$ vi. $R=1,\ q(x)=x^3+2x^2+x+2$

vii. $R=-291,\ q(x)=x^4-3x^3+10x^2-32x+96$

viii. $R=174,\ q(x)=x^4+2x^3+7x^2+18x+60$

ix. $R=175,\ q(x)=2x^3+2x^2+104x+40$

x. $R = -300,\ q(x) = 6x^3 - 42x^2 + 90x - 114$

2. $k = 24$ 3. $m = 4$ 4. $m = -24$ 5. $m = -1$

مشق 4.8

1. i. $(x-1)(x^2+1)$ ii. $(x+1)^2(x-1)$
   iii. $(x-1)(x-2)(x-3)$ iv. $(x+2)(x-2)(x+5)$
   v. $(x-2)(x^2+9)$ vi. $(x+1)(2x-1)(3x+2)$
   vii. $(x+1)(x+3)(x+4)$ viii. $(x+1)(2x+1)(x+3)$
   ix. $(x+2)(x+4)(x+6)$

اعادہ مشق 4

1. i. درست ii. درست iii. درست iv. غلط
   v. غلط vi. غلط
2. i. $4x+y^2$ ii. $x^2+4xy+16y^2$ iii. $x+3$
   iv. $2xy$ v. $a^2-3ab+9b^2$
3. i. b ii. c iii. d iv. a v. b vi. c

مشق 5.1

1. i. مشترک عادِ اعظم $= 24x^3y^5z^2$ ii. مشترک عادِ اعظم $= 6r^3s^3t^3$
   iii. مشترک عادِ اعظم $= (x+3)$ iv. مشترک عادِ اعظم $= (2x-3)$
   v. مشترک عادِ اعظم $= 2(a-2b)$ vi. مشترک عادِ اعظم $= (x+1)$
2. i. مشترک عادِ اعظم $= (x+1)$ ii. مشترک عادِ اعظم $= x^2+7x+12$
   iii. مشترک عادِ اعظم $= (x-2)$ iv.
3. i. مشترک ذواضعاف اقل $= 81a^4b^5c^8$ ii. $600p^5q^4r^8$
   iii. $7x(x-1)(3x-2)$ iv. $(x+4)(x+7)(x-3)$
   v. $(3x+1)(x-1)(2x+3)$

vi. $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

4. i. $(x-20)(x-5)(x+4)$ ii. $(3x+2)(x+4)(2x-1)$

iii. $(x+y+z)(x-y-z)(x-z-x)$ iv. $12x^3(x-4)(x+7)(x-2)$

5. $(x-8)(x-3)^2$ 6. x^2+2x-3

7. $9x^4+15x^3-12x-14x^2+8$ 9. 6 سینٹی میٹر

10. 11 بج کر 54 منٹ

مشق 5.2

1. i. $\dfrac{7x+3}{(x+1)^2}$ ii. $\dfrac{12x^2+29x+16}{3x(2x+1)(x+1)}$

iii. $\dfrac{-4x^3+x^2+9x-4}{(x+1)^2(x-3)}$ iv. $\dfrac{2(x^2+3x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

v. $2x+6$ vi. $\dfrac{x+3}{x+9}$

vii. $\dfrac{-(x+3)(4x+7)}{(x+1)^2(x+2)}$ viii. $\dfrac{-2x-7}{(x-2)(x-3)}$

ix. $\dfrac{x^2-5x-42}{(x^2-9)(x+4)(x+5)}$ x. $\dfrac{2(x^2+5)}{4x^2+x+2}$

مشق 5.3

1. i. $6x-5y$ ii. $3x+\dfrac{1}{x}$ iii. $2x^2y^2-\dfrac{3xy}{z^2}$

iv. $18-12x-4y$ v. $x+\dfrac{1}{x}+1$

vi. $3(2x-1)(x-3)$ vii. $(x-1)(x-3)$ viii. $(x+3)(x+5)(x+2)$

2. i. x^2+x+1 ii. $5x^2+4x+1$ iii. $2x^2+2x+4$

iv. $\left(\frac{x}{y}+7-\frac{y}{x}\right)$ v. $x-1+\frac{1}{x}$ vi. $x+\frac{y}{3}+3z$

vii. $x^2-4+\frac{1}{x^2}$ viii. $x^3-2+\frac{1}{x^3}$

3. 7 4. $-(24x^2-9)$ 5. $m=20$ 6. $p=-56,\ q=-49$

اعادہ مشق 5

1. i. درست ii. غلط iii. درست iv. غلط v. درست
2. i. دو ii. $p(x)\,q(x)$ iii. 1
   iv. $(y+1)(y+2)(y+3)$ v. $y+\frac{1}{y}$
3. i. d ii. d iii. b iv. c v. b vi. d
   vii. c viii. b ix. b x. c

مشق 6.1

1. i. $x=20$ ii. $x=-12$ iii. $x=30$ iv. $x=40$
   v. $y=\frac{1}{15}$ vi. $y=\frac{11}{20}$ vii. $x=\frac{44}{17}$ viii. $x=105$
   ix. $\frac{105}{13}$ x. $x=1$ xi. $x=-\frac{20}{7}$ xii. $x=12$
   xiii. $x=-\frac{5}{4}$ xiv. $x=-4$ xv. $m=\frac{-11}{6}$
2. $\{5\}$ 3. $x=7$ 4. بلال = 18 سال، علی = 12 سال
5. i. $\{1\}$ ii. $\{10\}$ iii. $\{100\}$
   iv. $\{-12\}$ v. $\{143\}$ vi. $\{\ \}$
   vii. $\{2\}$ viii. $\{81\}$ ix. $\{80\}$

6.2 مشق

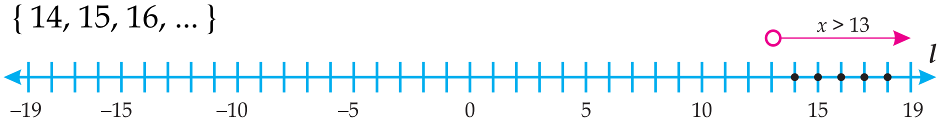
1\. i. $\left\{-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ ii. $\{1\}$ iii. $\{-42, 42\}$ iv. $\left\{-\frac{25}{2}, \frac{23}{2}\right\}$

v. $\{3\}$ vi. $\left\{-\frac{78}{5}, \frac{76}{5}\right\}$ vii. $\left\{-\frac{23}{2}, \frac{17}{2}\right\}$ viii. $\{-10, 6\}$

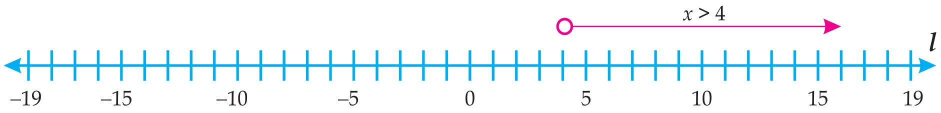
ix. $\left\{\frac{-19}{14}, \frac{-13}{14}\right\}$ x. $\{-41, 44\}$ xi. $\{\ \}$ xii. $\{-4, 3\}$

6.3 مشق

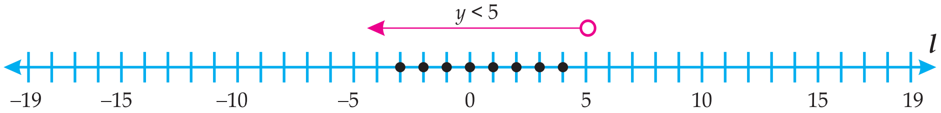
1\. i. $\{14, 15, 16, \ldots\}$



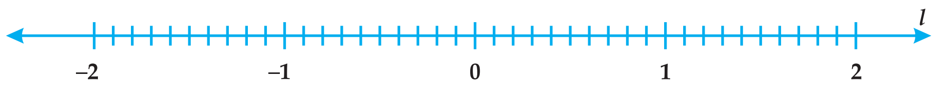
ii. $\{x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge x > 4\}$



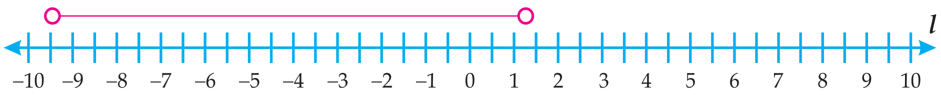
iii. $\{1, 2, 3, 4\}$



iv. $\{\ \}$



v. $\{y / y \in \mathbb{R}\ \frac{-19}{2} < y < \frac{3}{2}\}$



2۔ 4 سے بڑے سب حقیقی اعداد۔

3۔ علی کو کم سے کم 187 اسکور بونس انعام کے لیے کرنا چاہیے۔

اعادہ مشق 6

1. i. غلط ii. غلط iii. درست iv. درست v. غلط

2. i. $\{0\}$ ii. $\{20\}$ iii. $\{\pm 4\}$
   iv. $\{-1\}$ v. $\{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge -2 < y < 3\}$

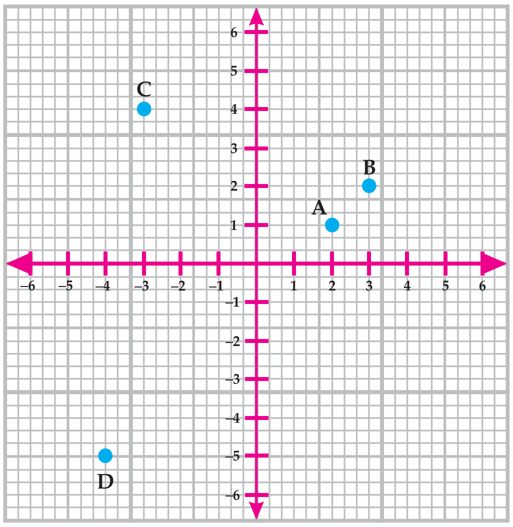
3. i. *a* ii. *a* iii. *c* iv. *a* v. *b* vi. *c*
   vii. *c* viii. *c* ix. *c* x. *a*

مشق 7.1

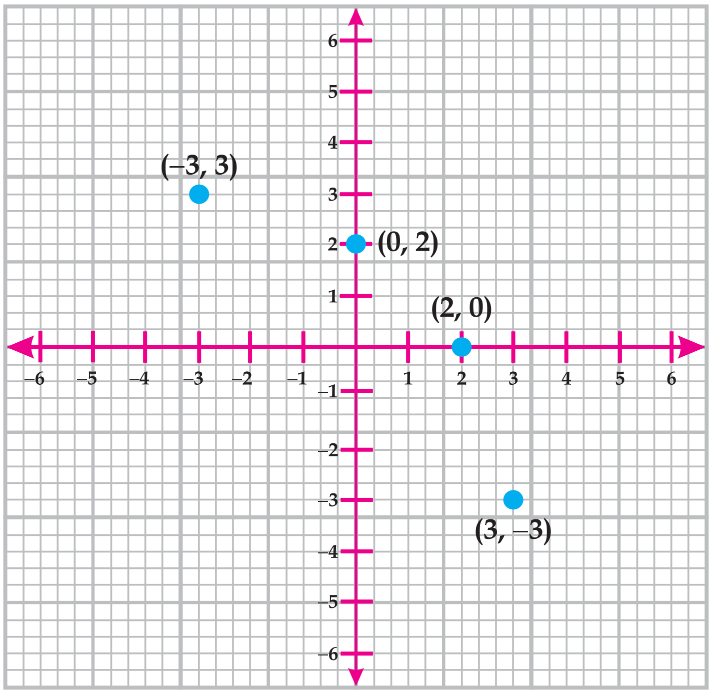
1. i. x کوآرڈینٹ $= -2$ y کوآرڈینٹ $= 2$ ii. y کوآرڈینٹ $= -1$ x کوآرڈینٹ $= 5$
   iii. x کوآرڈینٹ $= 4$ y کوآرڈینٹ $= 0$ iv. x کوآرڈینٹ $= -5$ y کوآرڈینٹ $= -6$
   v. x کوآرڈینٹ $= 3$ y کوآرڈینٹ $= 4$ vi. x کوآرڈینٹ $= -\sqrt{8}$ y کوآرڈینٹ $= \sqrt{8}$

2. i. IV - ربع میں ہے۔ ii. II - ربع میں ہے۔
   iii. IV - ربع میں ہے۔ iv. III - ربع میں ہے۔
   v. I - ربع میں ہے۔ vi. I - ربع میں ہے۔

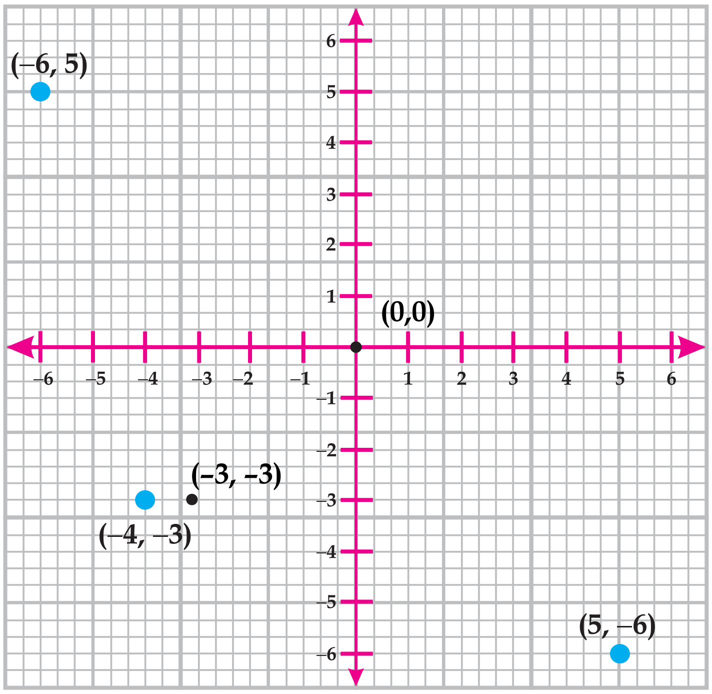
3. i.



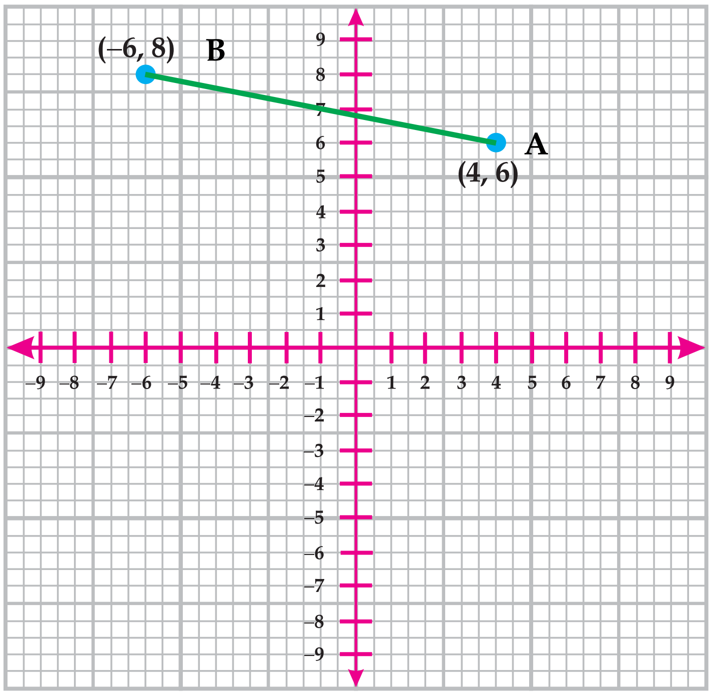
ii.



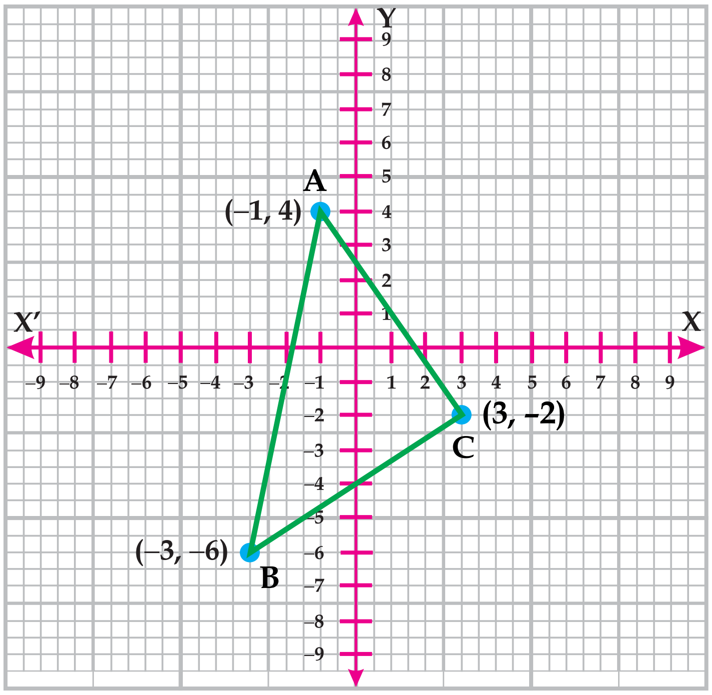
iii.



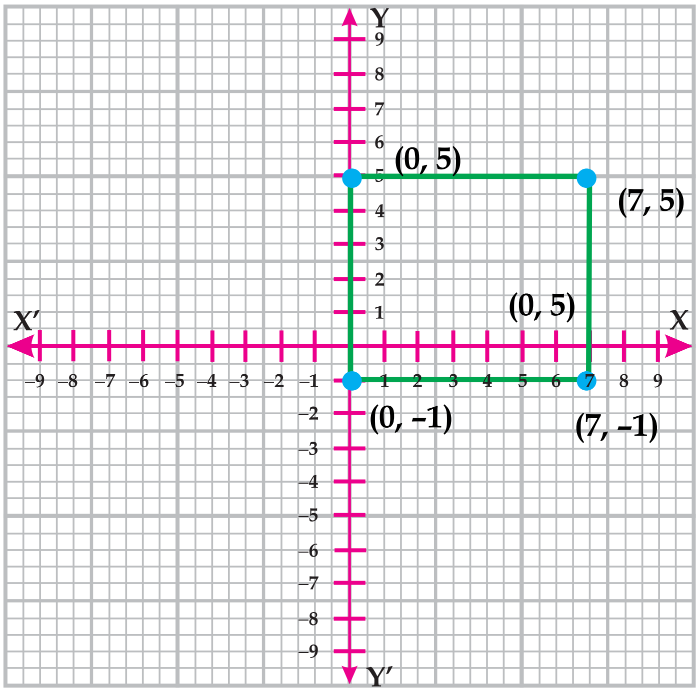
4.



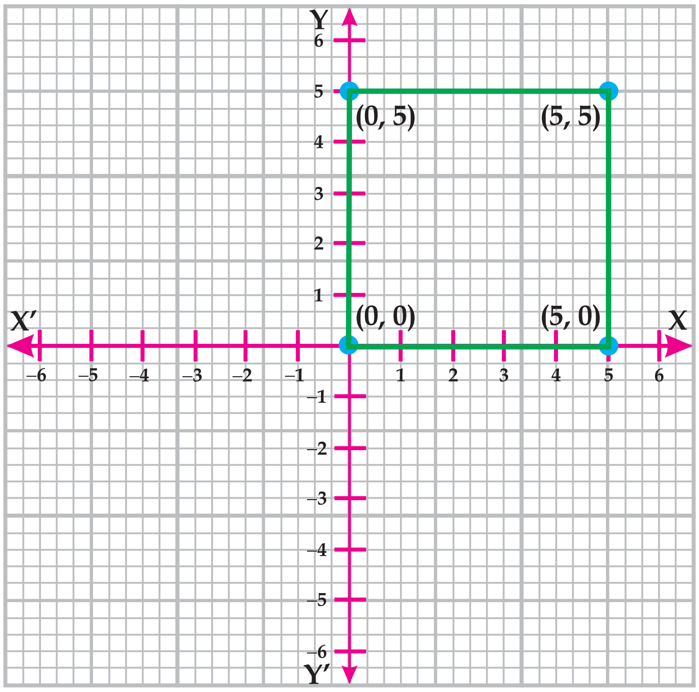
5.



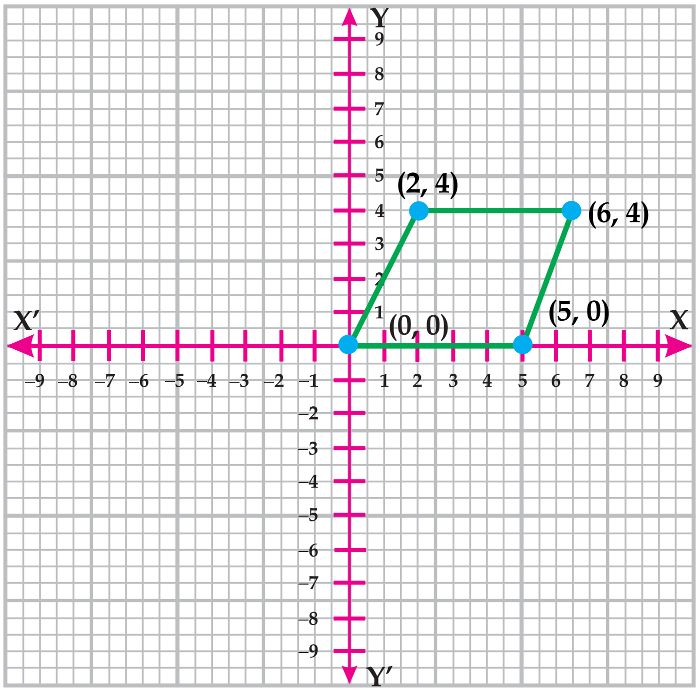
6.



7.



8.



9. **i.** $y = 2 - x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	5	4	3	2	1	0	–1

ii. $y = 2x - 6$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–12	–10	–8	–6	–4	–2	0

iii. $x = 12 - 2y$

y	–3	–2	–1	0	1	2	3
x	18	16	14	12	10	8	6

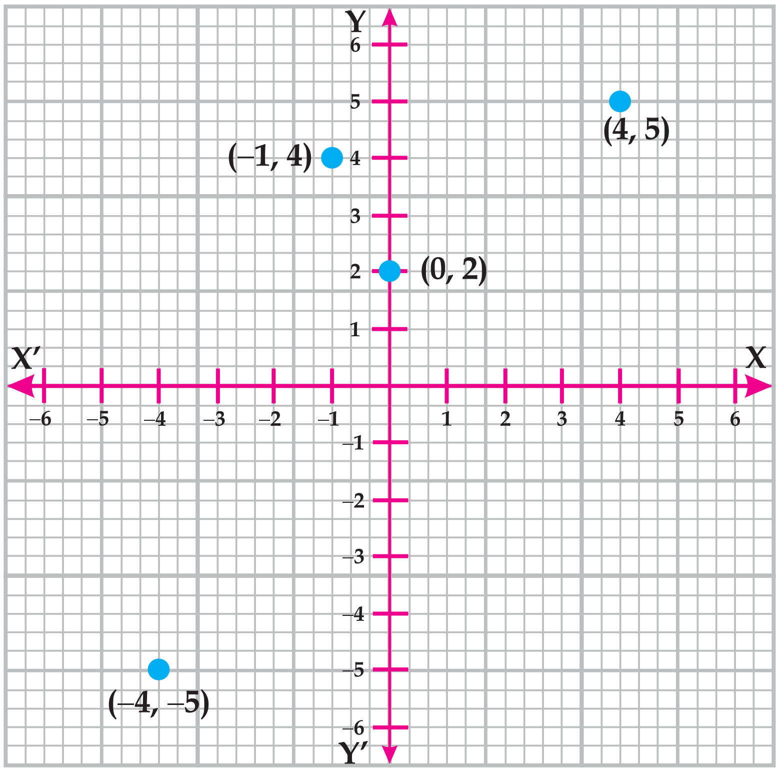
iv. $x = 2y - 3$

y	–3	–2	–1	0	1	2	3
x	–9	–7	–5	–3	–1	1	3

مشق 7.2

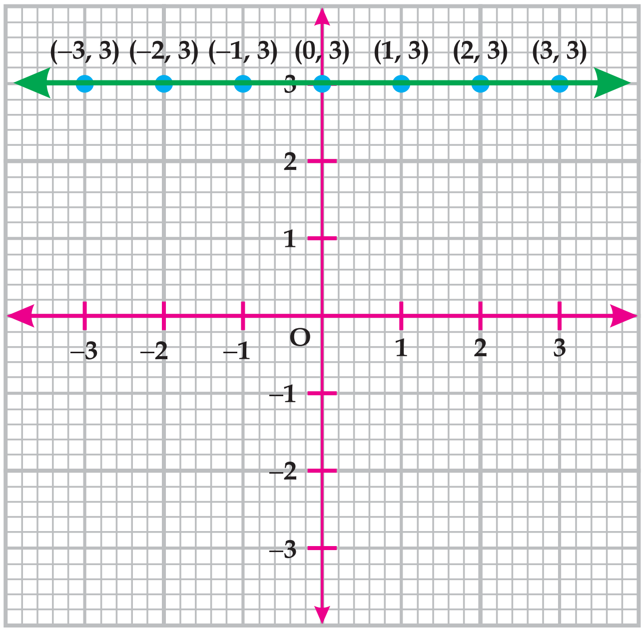
1. $y = 6 - x$

y	−3	−2	−1	0	1	2	3
x	9	8	7	6	5	4	3



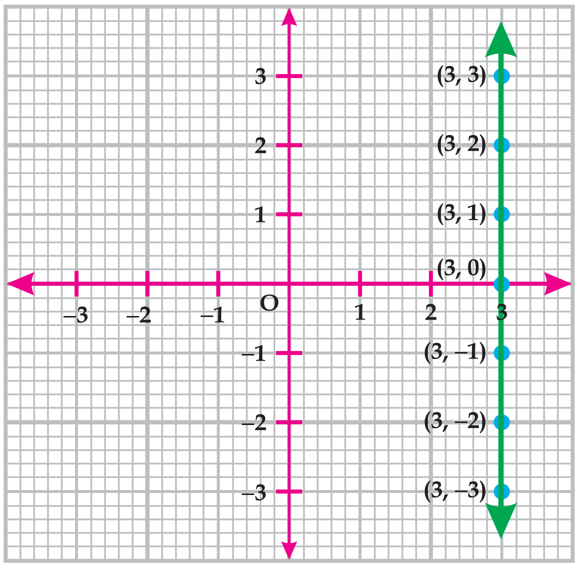
3. i.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	3	3	3	3	3	3	3



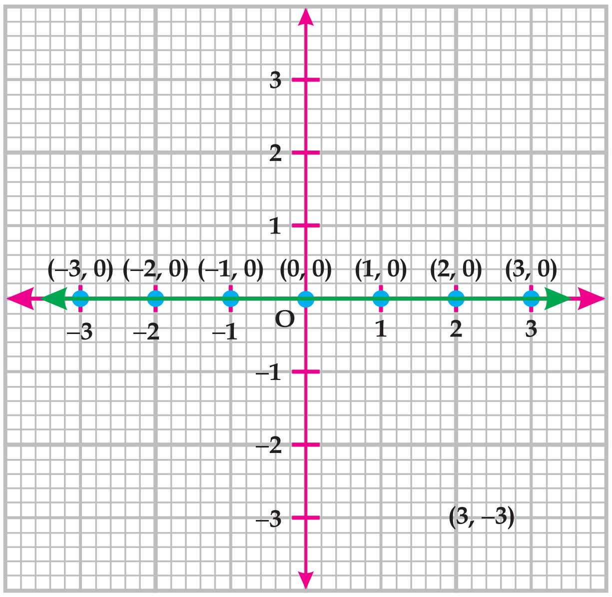
ii.

x	3	3	3	3	3	3	3
y	–3	–2	–1	0	1	2	3



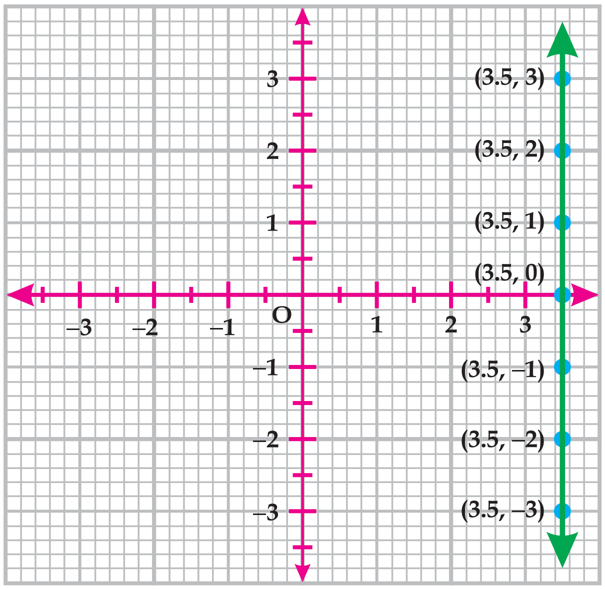
iii.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0	0	0	0	0	0	0



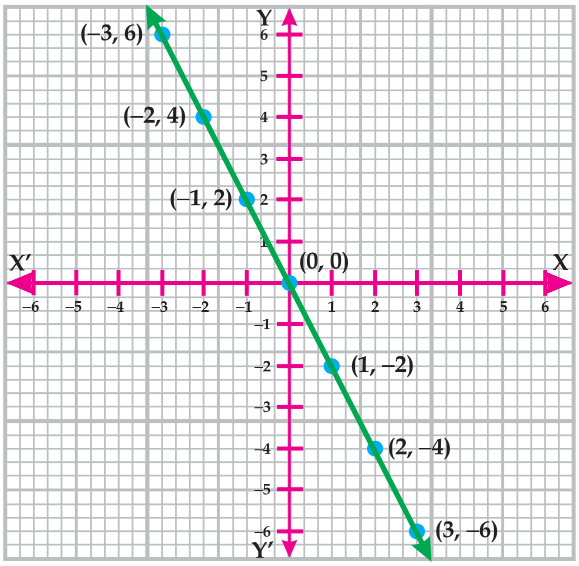
v.

x	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5
y	–3	–2	–1	0	1	2	3



vi.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	6	4	2	0	−2	−4	−6



4. i.

مساوات	x- محددات	y- محددات
$y=\frac{1}{2}x$	0	0
	4	2

ii.

مساوات	x- محددات	y- محددات
$y=\frac{2}{3}y$	1	$\frac{3}{2}$
	1	$\frac{3}{2}$

iii.

مساوات	x- محددات	y- محددات
$2x+4y=8$	0	2
	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$

iv.

مساوات	x- محددات	y- محددات
$2x+y=6$	1	4
	3	0

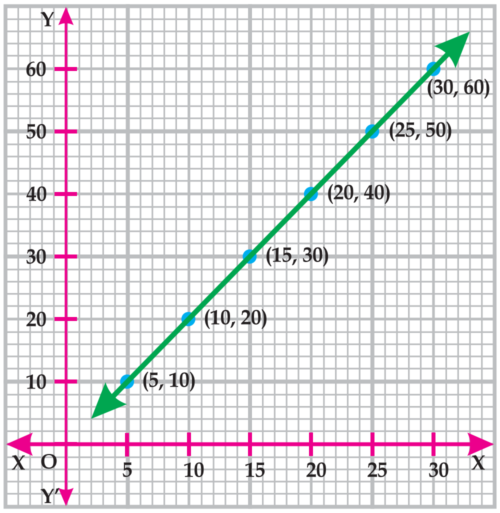
v.

مساوات	x - محددات	y - محددات
$x-y=2$	2	0
	1	–1

vi.

مساوات	x - محددات	y - محددات
$x-3y=6$	3	–1
	3	–1

5.



6. a. عائشہ نے 100 کلو میٹر سواری لے لئے 5 گھنٹے لیئے۔
   b. عائشہ نے 60 کلو میٹر کا فاصلہ 3 گھنٹے میں طے کیا۔

مشق 7.3

1. i. 1.6 کلو میٹر   ii. 4.8 کلو میٹر   iii. 1.2 میل   iv. 4.9 میل یا 5 میل
2. i. 5 ایکڑ   ii. 12 ایکڑ   iii. 2 ہیکٹر   iv. 6 ہیکٹر
3. i. 35.6°F   ii. 35.4°F   iii. 0°C   iv. 2.44°C
4. i. 90°   ii. 156 روپے   iii. 5 ریال   iv. 2.6 ریال
5. i. $\{3,-2\}$ ii. $\{3,1\}$ iii. $\{3,1\}$ iv. $\{4,7\}$ v. $\{1,1\}$
   vi. $\{-3,-4\}$ vii. $\{-3,2\}$ viii. $\{1,1\}$ ix. $\{8,4\}$ x. $\{5,1\}$

اعادہ مشق 7

1. i. درست   ii. غلط   iii. غلط   iv. غلط
3. i. *c*   ii. *b*   iii. *a*   iv. *b*   v. *c*   vi. *a*   vii. *a*

مشق 8.1

1. i. $\{-2,-3\}$ ii. $\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\}$ iii. $\{6,5\}$ iv. $\{2,0\}$

v. $\{5,-3\}$ vi. $\left\{\frac{8}{3},\frac{3}{4}\right\}$ vii. $\{8,2\}$ viii. $\left\{0,-\frac{8}{3}\right\}$

2. i. $\{-3+2\sqrt{2}, -3-2\sqrt{2}\}$ ii. $\left\{0,-\frac{10}{3}\right\}$ iii. $\left\{\frac{4+\sqrt{13}}{3},\frac{4-\sqrt{13}}{3}\right\}$

iv. $\left\{\frac{3}{4},-\frac{7}{6}\right\}$ v. $\left\{4,-\frac{3}{2}\right\}$ vi. $\left\{\frac{-2+\sqrt{6}}{2},\frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right\}$

3. i. $b=-2$ ii. $\frac{-4}{3}$

مشق 8.2

1. i. $\{5,-3\}$ ii. $\left\{\frac{3}{5},-\frac{5}{2}\right\}$

iii. $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ iv. $\left\{\frac{1+2\sqrt{7}}{3},\frac{-1-2\sqrt{7}}{3}\right\}$

v. $\left\{\frac{2+3i\sqrt{5}}{3},\frac{2-3i\sqrt{5}}{3}\right\}$ vi. $\left\{\frac{-3+\sqrt{41}}{4},\frac{-3-\sqrt{41}}{4}\right\}$

vii. $\left\{\frac{1+i\sqrt{5}}{3},\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right\}$ viii. $\left\{\frac{1}{2},\frac{-1}{3}\right\}$

ix. $\left\{\frac{5}{2},0\right\}$ x. $\{1,-1\}$

xi. $\{3\}$ xii. $\{\sqrt{14}, -\sqrt{14}\}$

مشق 8.3

1. $\{\pm 3, \pm i\}$
2. $\{\pm 2, \pm i\}$
3. $\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$
4. $\left\{-\frac{3}{4}, -2\right\}$
5. $\left\{\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i, \pm\frac{2\sqrt{14}}{7}i\right\}$
6. $\{-1, 2\}$
7. $\{2\}$
8. $\{-2, 1\}$
9. $\{-1\}$
10. $\{-2\}$
11. $\{2, 4\}$
12. $\left\{3, -10, \frac{-7\pm\sqrt{79}\,i}{2}\right\}$
13. $\left\{-6, 1, \frac{-5\pm\sqrt{39}\,i}{2}\right\}$
14. $\left\{0, 1, \frac{1\pm\sqrt{57}}{2}\right\}$

مشق 8.4

1. $\{4\}$
2. $\{6\}$
3. $\{1, 3\}$
4. $\{2\}$
5. $\left\{0, \frac{-3}{2}\right\}$
6. $\{0, 3\}$

اعادہ مشق 8

1. i. 2 ii. $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ iii. قوت نمائی
   iv. $x=2$ v. $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. i. b ii. a iii. c iv. a v. a
   vi. c vii. b viii. a ix. c x. a

3. i. غلط ii. غلط iii. غلط iv. غلط
   v. غلط vi. درست vii. درست

اعادہ مشق 9

1. 30°

2. i. درست ii. غلط iii. درست iv. غلط v. غلط

3. i. $\overline{DF}$ ii. $\angle RPQ$ iii. مماثل
   iv. مساوی الاضلاع v. وتر vi. 90°

4. i. *b* ii. *c* iii. *b* iv. *c*

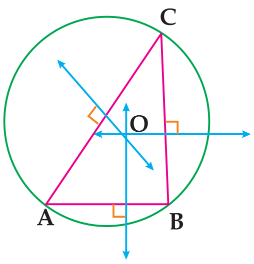
اعادہ مشق 10

1. i. مماثل ii. مماثل iii. مماثل iv. ناصف
   v. برابر vi. مماثل vii. 360°

2. i. *d* ii. *b* iii. *d* iv. *c* v. *b*
   vi. *b* vii. *a* viii. *a*

مشق 11.1

3. تین غیر ہم خط نقاط سے صرف اور صرف دائرہ گزر سکتا ہے۔ دائرہ کا مرکزی نقطہ کے ناصف کا تقاطع ان غیر ہم نقاط کو باہم ملانے سے ملتا ہے۔ یہ نقطہ تقاطع کے تین غیر ہم خط سے ہم فاصلہ ہیں۔



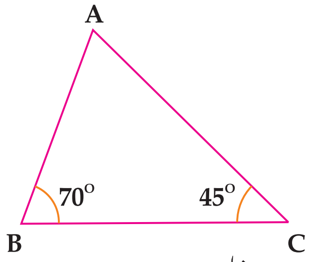
اعادہ مشق 11

3. i. درست ii. درست iii. درست

4. i. *c* ii. *c* iii. *b* iv. *a*

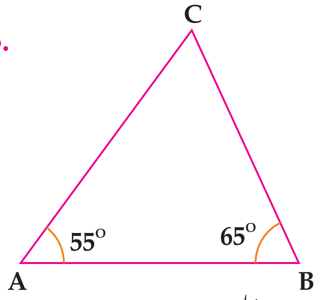
مشق 12.1

2.



ضلع AC لمباترین ہے

3.



ضلع BC چھوٹاترین ہے

اعادہ مشق 12

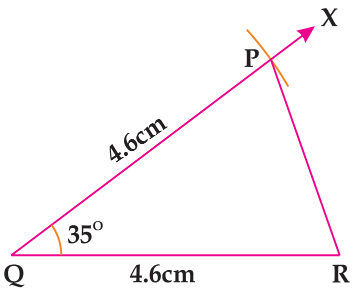
1. i. درست ii. غلط iii. درست iv. غلط v. درست

2. i. عمود ii. بڑاہے iii. BC

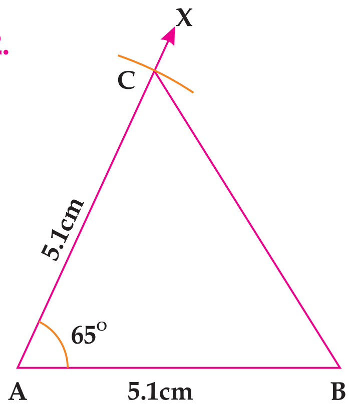
3. i. a ii. b

مشق 13.1

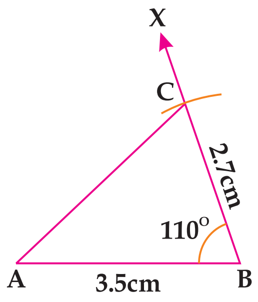
1.



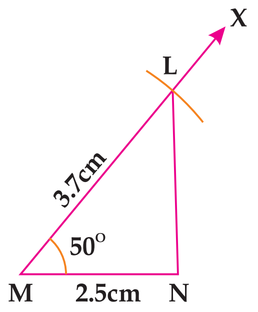
2.



3.

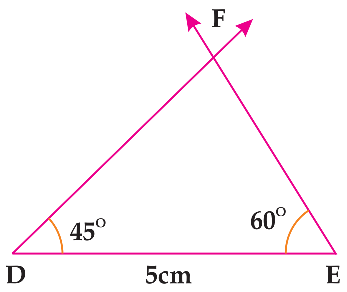

X
C
2.7cm
110°
A
3.5cm
B

4.

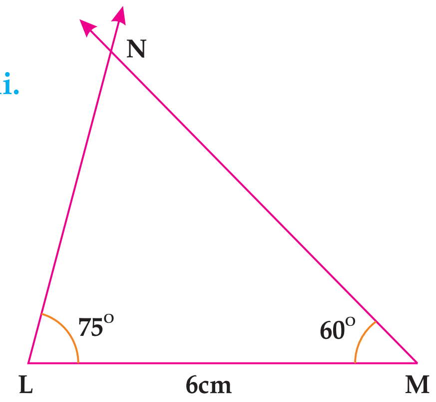

X
L
3.7cm
50°
M
2.5cm
N

6.

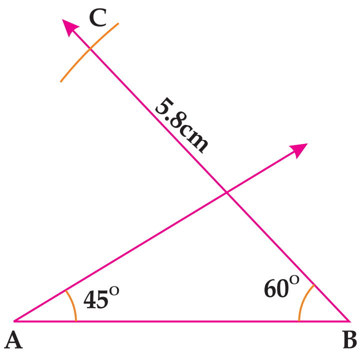
i.


F
45°
60°
D
5cm
E

ii.

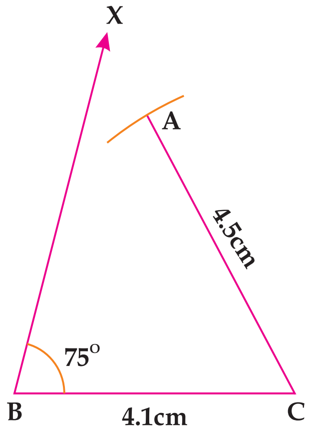

N
75°
60°
L
6cm
M

iii.

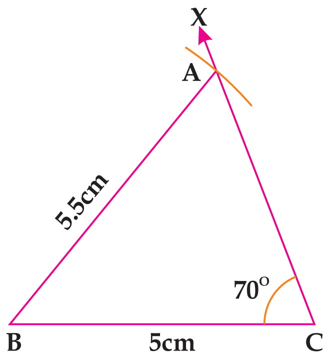

C
5.8cm
45°
60°
A
B

7.

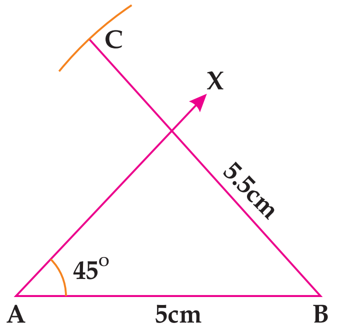
i.



ii.

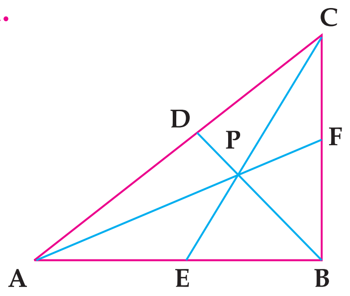


iii.

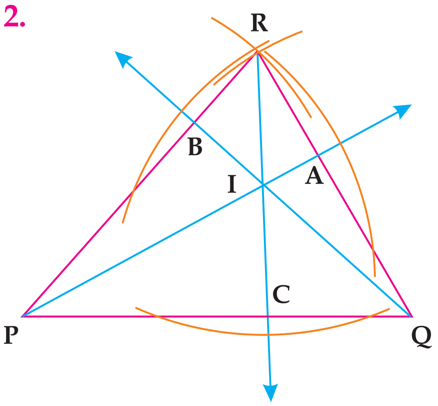


مشق 13.2

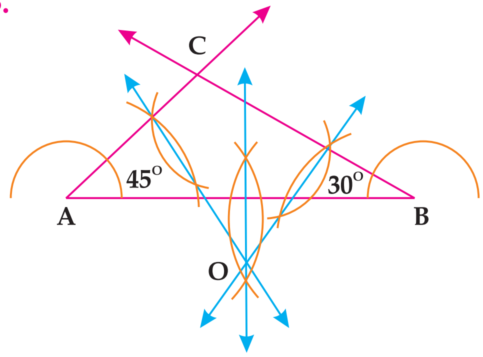
1.



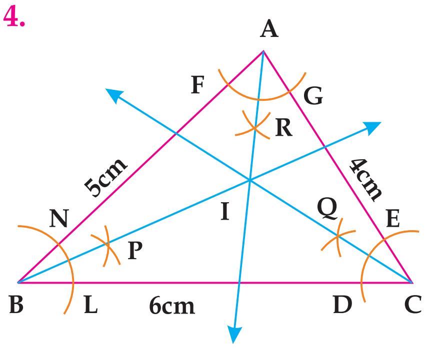
2.



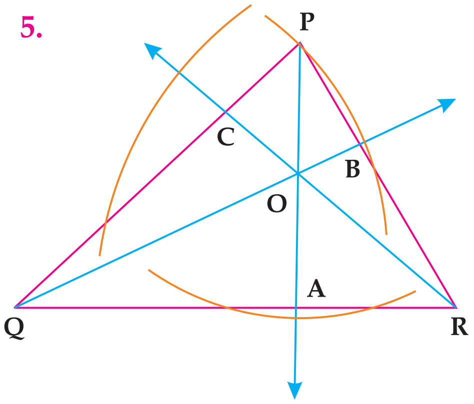
3.


C
45°
30°
A
B
O

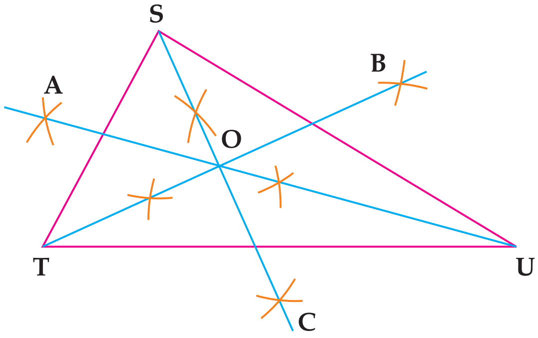
4.


A
F
G
R
5cm
4cm
N
I
Q
E
P
B
L
6cm
D
C

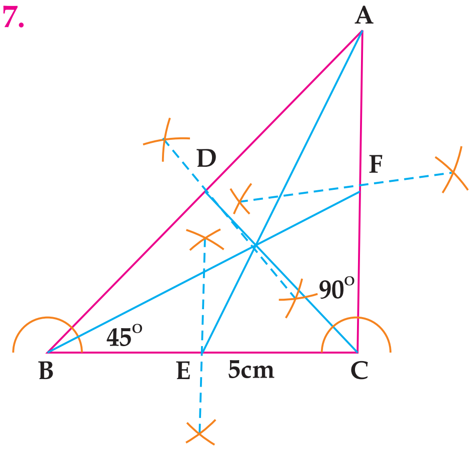
5.


P
C
B
O
A
Q
R

6.

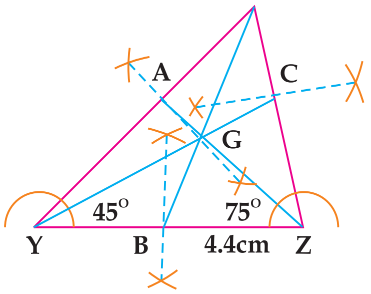

S
B
A
O
T
U
C

7.

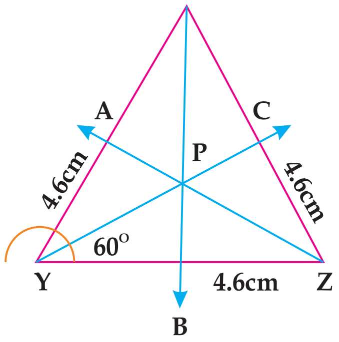

A
D
F
90°
45°
B
E
5cm
C

8.

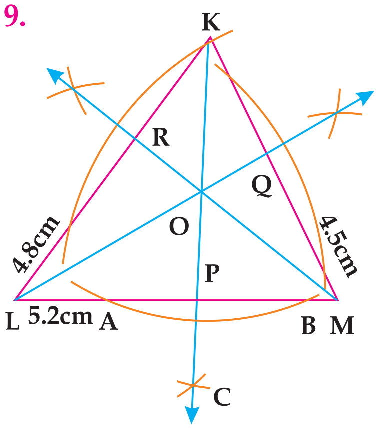
i.



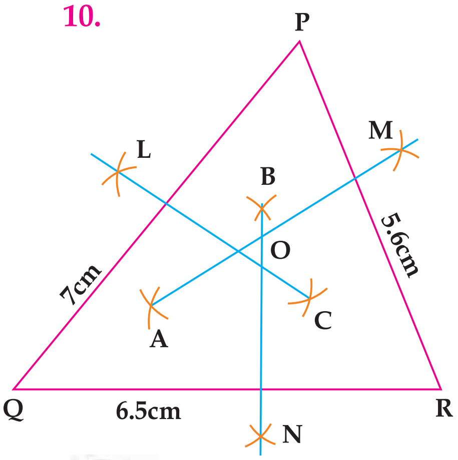
ii.



9.

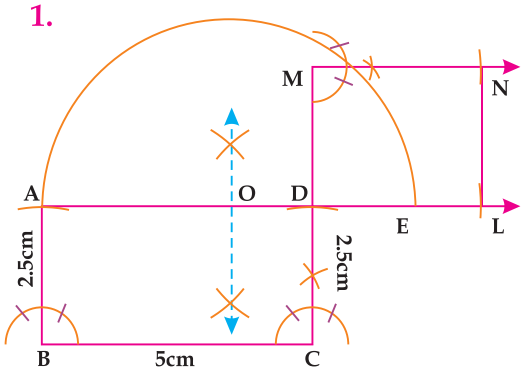


10.

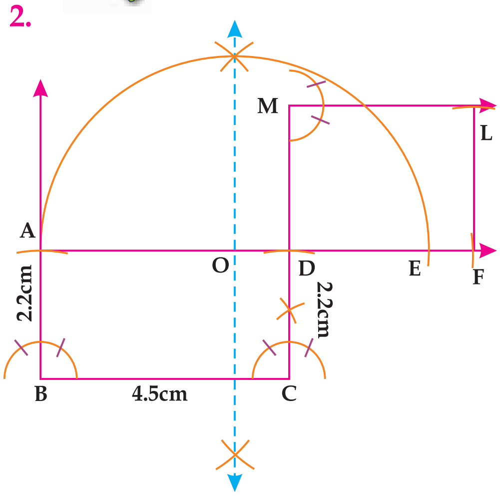


مشق 13.3

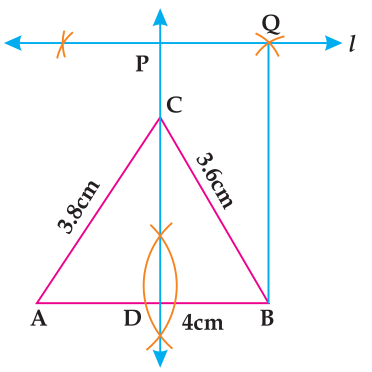
1.



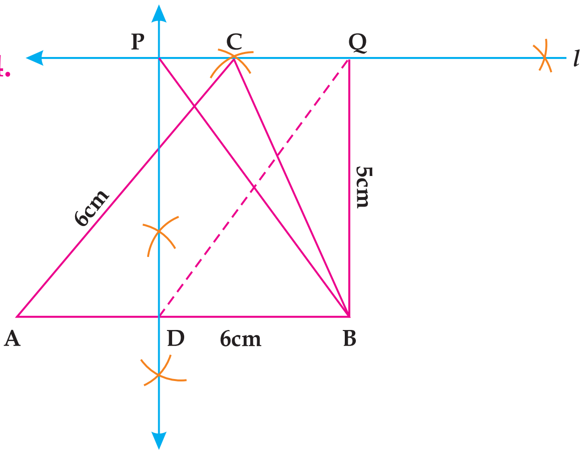
2.



3.



4.



اعادہ مشق 13

1. i. وتر ii. مثلث کے ارتفاع iii. وسطانیہ
   iv. ہم فاصلہ v. برابر

2. i. *c* ii. *d* iii. *c* iv. *b* v. *a*
   vi. *d* vii. *c* viii. *b* ix. *d*

مشق 14.1

3. $\Delta BCD = 21\sqrt{2}\ cm^2$

اعادہ مشق 14

1. i. درست ii. درست iii. غلط iv. درست v. غلط
   vi. غلط vii. غلط viii. درست

2. i. *b* ii. *b* iii. *c* iv. *d* v. *d* vi. *b*

مشق 15.1

1. i. ضلع $\overline{AB} = 3\sqrt{7}cm$، رقبہ $= \frac{9\sqrt{3}}{2} cm^2$

   ii. ضلع $\overline{AB}$ کی لمبائی $= 4\sqrt{7}cm$، رقبہ $= 8\sqrt{3} cm^2$

2. ضلع $\overline{AC}$ کی لمبائی $= \sqrt{116}cm$، رقبہ $= 12 cm^2$

3. ضلع $\overline{AC}$ کی لمبائی $= \sqrt{232}cm$، رقبہ $= 24 cm^2$

مشق 15.2

2. $m\overline{BC} = 46cm$

4. قائمۃ الزوایہ مثلث

5. وسطانیے کی لمبائی $= \sqrt{\frac{7}{2}}\ cm$

اعادہ مشق 15

1. i. $(m\overline{BC})^2$ ii. مساوی الاضلاع iii. $(m\overline{AC})^2$ iv. مثلث

2. $m\overline{AB} = 8cm$

مشق 16.1

1. i. $\sqrt{101}$ ii. 1 iii. $2\sqrt{2}$ iv. $2\sqrt{2}$

2. i. 5 ii. $\sqrt{117}$ iii. 5 iv. $\sqrt{10}$

3. $P = 12$

مشق 16.2

4. نقطے A, B اور C مساوی الساقین مثلث بناتے ہیں

5. نقطے A, B اور C قائمۃ الزاویہ مثلث بناتے ہیں

6. $k = 1 \pm 3\sqrt{3}$

9. کیونکہ چوکور کے اضلاع برابر ہوتے ہیں اسلئے یہ نقطے برابر ہیں

مشق 16.3

1. i. $(-1,7)$ ii. $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ iii. $(-4,3)$ iv. $(\sqrt{3},2\sqrt{3})$

2. $(-1,1)$ 3. $B=(2,2)$ 4. درمیانی نقطہ (4, 5)
رداس = $5\sqrt{2}$ س-م

اعادہ مشق 16

1. i. درست ii. غلط iii. غلط iv. غلط v. درست
vi. درست vii. درست viii. درست ix. غلط

2. i. $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ii. خط iii. $y<0$

3. i. *c* ii. *a* iii. *d* iv. *d*