یونٹ 15

مثلث کے اضلاع کا عکس/تخمینہ

PROJECTION OF A SIDE OF A TRIANGLE

یونٹ میں طلباء کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع ترما حصل/نتائج (SLOs)

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

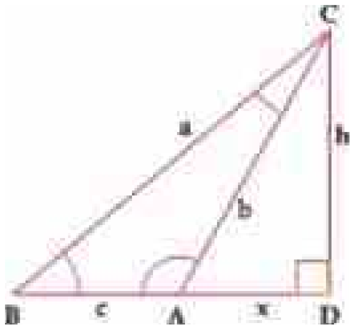
- زاویہ منفرجہ مثلث (obtuse angled triangle) میں، زاویہ منفرجہ کے بالمقابل اضلاع پر موجود مربع اس اضلاع پر جہاں زاویہ منفرجہ ہو برابر ہوتا ہے مربع کے مجموعہ کے ایک ضلع پر دوبار مستطیل کے ساتھ، اور دوسرے کا اس پر عکس۔
- کسی مثلث میں، حادۃ الزاویہ کے بالمقابل اضلاع پر موجود و مربع اس اضلاع پر جہاں حادۃ الزاویہ ہو برابر ہوتا ہے مربع کے مجموعہ کے ایک ضلع پر دوبار مستطیل کے ساتھ اور دوسرے کا اس پر عکس۔
- کسی مثلث میں، کسی دو اضلاع پر موجود مربع کا مجموعہ تیسری طرف کے آدھے حصے کے دوگنا مربع کے برابر ہوتا ہے اور وسطانیے پر دوگنا مربع ہوتا ہے جو تیسری ضلع کو کاٹا ہے۔ (اپولو نیئس مسئلہ)

15.1 مثلث کے اضلاع کا عکس

متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیے درج ذیل نظریات کو ان کے نتائج اور ان کے استعمالات کے ساتھ سمجھیں۔

مسئلہ 15.1.1:

زاویہ منفرجہ مثلث (obtuse angled triangle) میں، زاویہ منفرجہ کے بالمقابل اضلاع پر موجود مربع اس اضلاع پر جہاں زاویہ منفرجہ ہو برابر ہوتا ہے مربع کے مجموعہ کے ایک ضلع پر دو بار مستطیل کے ساتھ، اور دوسرے کا اس پر عکس۔



معلوم: ΔABC جس کے راس پر زاویہ منفرجہ ہے-A

مطلوب: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$

عمل: نقطہ $\overline{CD}$ پر ملنے والے $\overline{BA}$ پر عمود D کھینچیں،

تو پھر $\overline{AD}$ پر $\overline{BA}$ پر $\overline{AC}$ کا عکس ہے۔

$m\overline{BC} = a,\ m\overline{CA} = b$ اور $m\overline{AB} = c,\ m\overline{AD} = x,\ m\overline{CD} = h$

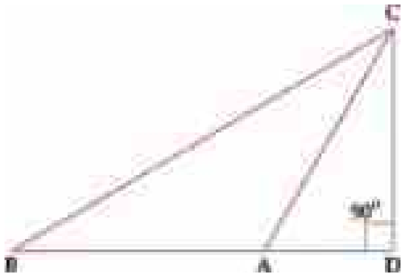
ثبوت:

بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ ΔCDA میں	
$m\angle CDA = 90^0$	عمل
تو $\left(m\overline{AC}\right)^2 = \left(m\overline{AD}\right)^2 + \left(m\overline{DC}\right)^2$	مسئلہ فیثاغورث سے
$b^2 = x^2 + h^2 \quad \ldots \text{(i)}\ ,$	قیاس سے
قائمۃ الزاویہ ΔCDB میں	
$m\angle CDA = 90^0$	عمل
تو $\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{BD}\right)^2 + \left(m\overline{CD}\right)^2$	مسئلہ فیثاغورث سے
$a^2 = \left(c + x\right)^2 + h^2$	$m\overline{BD} = m\overline{BA} + m\overline{AD}$
یا $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2 \ldots \text{(ii)}$	
$a^2 = c^2 + 2cx + b^2$	$b^2 = x^2 + h^2$
لہٰذا $(m\overline{BC})^2 = (m\overline{AB})^2 + 2(m\overline{AB})(m\overline{AD}) + (m\overline{AC})^2$	

Q.E.D

مثال: ΔABC میں جس کے راس A پر زاویہ منفرجہ ہے، اگر $\overline{CD}$ پر ایک ارتفاع ہے، جو نقطہ D سے ملتا ہے اور $\overline{BA}$ $m\overline{AC}=m\overline{AB}$

پھر $\left(m\overline{BC}\right)^2 = 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{BD}\right)$



معلوم: ایک ΔABC میں، $m\angle A$ منفرجہ ہے، $m\overline{AC} = m\overline{AB}$

اور $\overline{CD}$ $\overline{BA}$ پر بنایا ہوا ایک ارتفاع ہے، جو نقطہ D پر ملتا ہے۔

مطلوب: $\left(m\overline{BC}\right)^2 = 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{BD}\right)$

ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔABC میں	مسئلہ 15.1.1
$\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AB}\right)^2 + 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right) + \left(m\overline{AC}\right)^2$	معلوم ہے کہ $m\overline{AC} = m\overline{AB}$
$\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AB}\right)^2 + 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right) + \left(m\overline{AB}\right)^2$	$2m\overline{AB}$ مشترک لیں گے
$\left(m\overline{BC}\right)^2 = 2\left(m\overline{AB}\right)^2 + 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right)$	$m\overline{BD} = m\overline{AD} + m\overline{AB}$
$\left(m\overline{BC}\right)^2 = 2m\overline{AB}\left(m\overline{AB} + m\overline{AD}\right)$	
$\left(m\overline{BC}\right)^2 = 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{BD}\right)$	

Q.E.D

مشق 15.1

.1 $\overline{AB}$ کی لمبائی معلوم کریں اور مثلث ABC کا رقبہ معلوم کریں، جب

(i) $m\overline{AC}=3cm,\ m\overline{BC}=6cm$ and $m\angle C=120^0$

$m\overline{CD}=m\overline{BC}\ \cos\left(180^0-m\angle C\right)$

(ii) $m\overline{AC}=40mm,\ m\overline{BC}=80mm$ and $m\angle C=120^0$

$m\overline{CD}=m\overline{BC}\ \cos\left(180^0-m\angle C\right)$

اشارہ: $\left(m\overline{BC}\right)^2=\left(m\overline{AC}\right)^2+\left(m\overline{AB}\right)^2+2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right)$

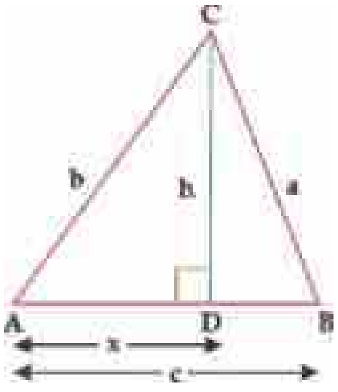
.2 ΔABC میں $m\overline{AC}$ کی لمبائی معلوم کریں جب $m\overline{BC}=6cm,\ m\overline{AB}=4\sqrt{2}\ cm$ اور $m\angle ABC=135^0$
اگر ممکن ہو تو ΔABC کا رقبہ معلوم کریں۔

.3 ΔABC میں $m\overline{AC}$ کی لمبائی معلوم کریں جب $m\overline{BC}=6\sqrt{2}\ cm,\ m\overline{AB}=8\ cm$ اور $m\angle ABC=135^0$

اگر ممکن ہو تو ΔABC کا رقبہ معلوم کریں۔

مسئلہ 15.1.2:

کسی مثلث میں، حادۃ الزاویہ کے بالمقابل اضلاع پر موجود مربع اس اضلاع پر جہاں حادۃ الزاویہ ہو برابر ہوتا ہے مربع کے مجموعہ کے ایک ضلع پر دو، بار مستطیل کے ساتھ اور دوسرے کا اس پر پروجیکشن۔



معلوم: ΔABC جس کے راس A پر حادہ $\angle CAB$ ہو۔

$m\overline{BC}=a,\ m\overline{AC}=b$ and $m\overline{AB}=c$

عمل: $\overline{CD}\perp\overline{AB}$ بنائیں تو پھر $\overline{AD}$ پر $\overline{AC}$ on $\overline{AB}$

کا پروجیکشن ہے اور $m\overline{CD}=h$ اور $m\overline{AD}=x$

مطلوب:

$$\left(m\overline{BC}\right)^2=\left(m\overline{AC}\right)^2+\left(m\overline{AB}\right)^2-2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right)$$

i.e. $a^2=b^2+c^2-2cx$

ثبوت:

بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ ΔCDA, میں $m\angle CDA = 90^0$,	عمل
تو $\left(m\overline{AC}\right)^2 = \left(m\overline{AD}\right)^2 + \left(m\overline{CD}\right)^2$	مسئلہ فیثاغورث سے
i.e. $b^2 = x^2 + h^2$ ... (i)	قیاس سے
قائمۃ الزاویہ ΔCDB میں $m\angle CDB = 90^0$	عمل
$\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{BD}\right)^2 + \left(m\overline{CD}\right)^2$ تو	مسئلہ فیثاغورث سے
i.e. $a^2 = (c-x)^2 + h^2$	بناوٹ سے $\therefore\ m\overline{BD} = m\overline{AB} - m\overline{AD}$
$a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$	
یا $a^2 = c^2 - 2cx + b^2$ ... (ii)	مساوات (i) کے استعمال سے
$a^2 = c^2 + b^2 - 2cx$	
لہٰذا $\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AC}\right)^2 + \left(m\overline{AB}\right)^2 - 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right)$	

Q.E.D

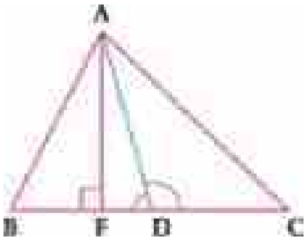
اپولو نیئس اور اپولو نیئس کا مسئلہ

اپولو نیئس ایک عظیم ماہر ارضیات اور ماہر فلکیات تھا۔

اب ہم بیان کرتے ہیں اور اس کے ایک معروف مسئلے کو ثابت کرتے ہیں "اپولو نیئس مسئلہ"

مسئلہ 15.1.3 (اپولو نیئس مسئلہ)

کسی مثلث میں، کسی دو اضلاع پر موجود مربع کا مجموعہ تیسرے ضلع کے آدھے حصے کے دگنا مربع کے برابر ہوتا ہے اور وسطانیے پر دگنا مربع ہوتا ہے جو تیسرے ضلع کو کاٹتا ہے۔ (اپولو نیئس مسئلہ)



معلوم: ΔABC میں، وسطانیہ $\overline{AD}$ نقطہ D پر $\overline{BC}$ کو کاٹتا ہے

اس طرح کہ $m\overline{BD} = m\overline{CD}$ ۔

مطلوب:

$$\left(m\overline{AB}\right)^2+\left(m\overline{AC}\right)^2=2\left(m\overline{BD}\right)^2+2\left(m\overline{AD}\right)^2$$

عمل:

$\overline{AF}\perp\overline{BC}$ کھینچیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔADB میں کیونکہ، $\angle ADB$ حادہ ہے تو، $\left(m\overline{AB}\right)^2=\left(m\overline{BD}\right)^2+\left(m\overline{AD}\right)^2-2\left(m\overline{BD}\right)\left(m\overline{FD}\right)$...(i)	ΔADF قائمۃ الزاویہ مثلث ہے اور قائمۃ الزاویہ F پر ہے (عمل) مسئلہ 15.1.2 کے استعمال سے
اب ΔADC میں ہم $\angle ADC$ نقطہ D پر زاویہ منفرجہ ہے۔ تو $m\overline{AC}^{\,2}=\left(m\overline{CD}\right)^2+\left(m\overline{AD}\right)^2+2\left(m\overline{CD}\right)\left(m\overline{FD}\right)$	$\angle ADB$ میں ضمیمہ
$\left(m\overline{AC}\right)^2=\left(m\overline{BD}\right)^2+\left(m\overline{AD}\right)^2+2\left(m\overline{BD}\right)\left(m\overline{FD}\right)$...(ii)	مسئلہ 15.1.1 $m\overline{CD}=m\overline{BD}$
لہٰذا $\left(m\overline{AB}\right)^2+\left(m\overline{AC}\right)^2=2\left(m\overline{BD}\right)^2+2\left(m\overline{AD}\right)^2$	مساوات (i) اور (ii) کو جمع کریں

Q.E.D

مشق 15.2

1. ΔABC میں $m\angle A = 30^0$ ثابت کریں۔

$$\left(m\overline{BC}\right)^2=\left(m\overline{AC}\right)^2+\left(m\overline{AB}\right)^2-\sqrt{3}\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AC}\right)$$

2. ΔABC میں، تخمینہ لگائیں $m\overline{BC}$ جب $m\angle A=60^0$ اور $m\overline{AB}=6cm, m\overline{AC}=5cm,$

3. اضلاع 3cm, 4cm اور 5cm والی مثلث حادت ہے، منفرجہ ہے یا قائمتہ الزاویہ ہے۔

4. ΔABC میں اضلاع $m\overline{BC}$ کے وسطانیے کی لمبائی معلوم کریں جبکہ $m\overline{AC}=3cm, m\overline{AB}=4cm$
اور $m\overline{BC}=6cm$

اعادہ مشق 15

1. خالی جگہ پُر کریں۔

(i) قائمتہ المثلث ΔABC میں $\left(m\overline{AB}\right)^2, + \left(m\overline{AC}\right)^2 =$ __________

(ii) ΔABC میں دو اضلاع 4cm کے برابر ہیں یہ _____ مثلث کہلائے گی۔

(iii) ΔABC میں، جب $m\angle B=90^0$ $m\angle B=90^\circ$ پھر $\left(m\overline{BC}\right)^2+\left(m\overline{AB}\right)^2=$ _________

(iv) 17 cm اور 8cm, 15cm ____________ کے اضلاع ہیں۔

2. ΔABC میں $m\angle C=120^0$ اور $m\overline{BC}=6cm$, $m\overline{}=3cm$ نکالیں۔ $m\overline{AB}$

3. ΔABC میں اضلاع $\overline{BC}$ کے وسطانیے کی لمبائی معلوم کریں جبکہ $m\overline{AC}=3cm, m\overline{AB}=4cm$
اور $m\overline{BC}=6cm$

خلاصہ

- زاویہ منفرجہ مثلث میں، زاویہ منفرجہ کے بالمقابل اضلاع پر موجود مربع اس اضلاع پر جہاں زاویہ منفرجہ ہو برابر ہوتا ہے مربع کے مجموعہ کے ایک ضلع پر دوبار مستطیل کے ساتھ، اور دوسرے کا اس پر عکس۔
- کسی مثلث میں ، حادہ الزاویہ کے بالمقابل اضلاع پر موجود مربع اس اضلاع پر جہاں حادت الزاویہ ہو برابر ہوتا ہے مربع کے مجموعہ کے ایک ضلع پر دوبار مستطیل کے ساتھ اور دسرے کا اس پر عکس۔
- کسی مثلث میں، کسی دو اضلاع پر موجود مربع کا مجموعہ تیسری طرف کے آدھے حصے کے دوگنا مربع کے برابر ہوتا ہے اور اوسطانیے پر دوگنا مربع ہوتا ہے جو تیسری ضلع کو کاٹتا ہے۔(اپوزیشن مسئلہ)