یونٹ 14

رقبہ سے متعلق مسئلے

THEOREMS RELATED WITH AREA

یونٹ میں طلباء کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج(SlOs)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ :

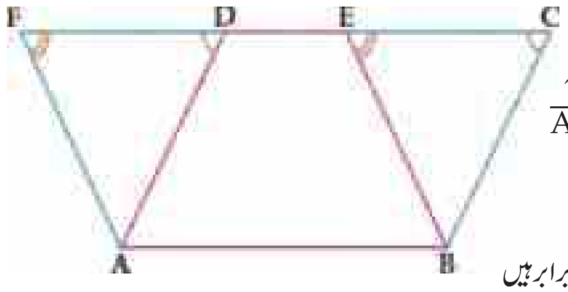
- مندرج ذیل نظریات Theorems کو ان کے نتائج کے ساتھ سمجھیں اور ان کو متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیے استعمال کریں۔
- ایک ہی قاعدہ پر واقع اور ایک جیسے متوازی خط کے درمیان میں واقع متوازی الاضلاع (یا ان کا ارتفاع برابر ہو) رقبہ میں برابر ہوں گی۔
- برابر قاعدوں پر واقع اور برابر ارتفاع والی متوازی الاضلاع اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔
- ایسی مثلثیں جو ایک قاعدہ پر واقع ہوں اور ان کے ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔
- ایسی مثلثیں جن کے قاعدے اور ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

تعارف:

ہم رقبہ سے متعلق مسئلے پڑھیں گے۔

14.1 رقبہ سے متعلق مسئلے۔

مسئلہ 14.1.1: ایک ہی قاعدہ پر متوازی الاضلاع اشکال جو قاعدہ خط اور اس کے متوازی کسی خط کے درمیان واقع ہوں (یا ان کے ارتفاع برابر ہوں) وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔



معلوم:

دو متوازی الاضلاع اشکال ABCD اور ABEF کا مشترکہ ہم اعدہ $\overline{AB}$ ہے اور وہ دو متوازی قطعات خط $\overline{DE}$ اور $\overline{AB}$ کے درمیان واقع ہیں۔

مطلوب:

متوازی الاضلاع ABCD اور ABEF رقبہ میں برابر ہیں

$\blacksquare ABCD = \blacksquare ABEF$ ۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
میں $\Delta ADF \leftrightarrow \Delta BCE$	
$m\overline{BC} = m\overline{AD}$ ... (i)	ABCD $\|^m$ کے بالمقابل اضلاع برابر ہیں
$m\angle BCE = m\angle ADF$ ... (ii)	ABCD $\|^m$ کے متعلقہ زاویہ
$\angle E \cong \angle F$ ... (iii)	ABEF $\|^m$ کے متعلقہ زاویہ
$\Delta BCE \cong \Delta ADE$	S.A.A ≅ S.A.A
$\blacktriangle BCE \cong \blacktriangle ADF$	ہم آہنگ اشکال رقبہ میں برابر ہیں
$\blacksquare ABED + \blacktriangle BCE = \blacksquare ABED + \blacktriangle ADF$	ایک جیسے رقبہ کو دونوں طرف جمع کریں
لہٰذا $\blacksquare ABCD = \blacksquare ABEF.$	$\blacksquare ABCD = \blacksquare ABED + \blacktriangle BCE$ $\blacksquare ABEF = \blacksquare ABED + \blacktriangle ADF$

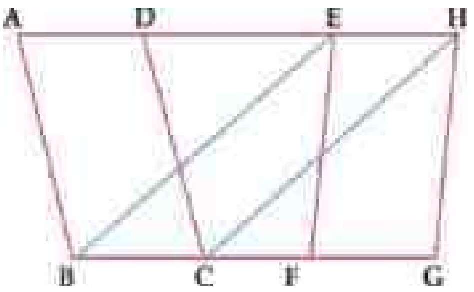
Q.E.D

نتیجہ:

(i) ایک جیسے قاعدہ پر واقع متوازی الاضلاع اشکال اور مستطیل جن کا ارتفاع برابر ہو وہ رقبہ میں برابر ہوں گے۔

مسئلہ 14.1.2:

برابر قاعدوں پر واقع اور برابر ارتفاع والی متوازی الاضلاع اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔



معلوم:
متوازی الاضلاع اشکال ABCD اور EFGH برابر قاعدوں $\overline{FG}$ اور $\overline{BC}$ پر واقع ہیں اور ان کے ارتفاع بھی برابر ہیں۔

مطلوب: ▱ABCD = ▱EFGH

عمل: معلوم متوازی الاضلاع اشکال ABCD اور EFGH کو اس طرح رکھیں کہ ان کے برابر قاعدے $\overline{BC}$ اور $\overline{FG}$ ایک ہی خط پر واقع ہوں۔ C to H اور B to E

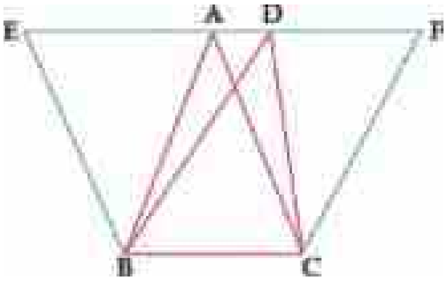
ثبوت:

بیانات	دلائل
▱ABCD اور ▱EFGH ایک جیسے متوازی خطوط $\overline{AH}$ اور $\overline{BG}$ کے درمیان میں واقع ہیں۔	ان کے ارتفاع برابر ہیں (معلوم)
لہٰذا A, D, E اور H ایک خط مستقیم ہیں اور $\overline{BC}$ کے متوازی ہیں۔	معلوم
$m\overline{BC} = m\overline{FG}$	EFGH ایک متوازی الاضلاع ہے
$m\overline{BC} = m\overline{EH}$	متوازی خطوط کے قطعات متوازی خطوط ہی ہوتے ہیں
اب $m\overline{BC} = m\overline{EH}$ متوازی ہیں	کسی چوکور کے دو ضلعے متوازی اور برابر ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔
لہٰذا EBCH ایک متوازی الاضلاع ہے	
اب ▱ABCD = ▱EBCH	مسئلہ 14.1.1
لیکن ▱EBCH = ▱EFGH	مسئلہ 14.1.1
لہٰذا ▱ABCD = ▱EFGH	(i) اور (ii) کی رو سے

Q.E.D.

مسئلہ 14.1.3:

ایسی مثلثیں جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور ان کے ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔



معلوم: ΔDBC اور ΔABC ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر واقع ہیں اور
ایک جیسی متوازی خطوط کے درمیان میں واقع ہیں۔ $\overline{AD}$ اور $\overline{BC}$

مطلوب: $\blacktriangle ABC = \blacktriangle DBC$

عمل: کھینچیں جو $\overline{CA}$ $\overline{BE}$, پر ملتے ہیں جو $\overline{AD}$ پر بنا۔ E
پھر $\overline{BD}$ $\overline{CF}$ کھینچیں جو $\overline{AD}$ پر ملتے ہیں جو F پر بنا۔

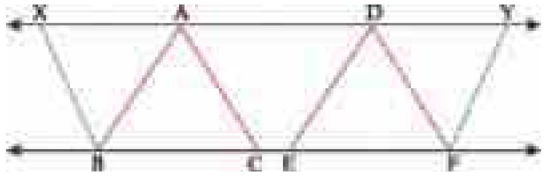
ثبوت:

بیانات	دلائل
BCAE ایک متوازی الاضلاع ہے	عمل کی رو سے
$\blacktriangle ABC = \frac{1}{2}$ (▰BCAE) ... (i)	متوازی الاضلاع $\overline{AD}$ کا وتر BCAE اسے دو برابر رقبہ کے مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔
اسی طرح BCFD ایک متوازی الاضلاع ہے	عمل کی رو سے
$\blacktriangle DBC = \frac{1}{2}$ (▰BCFD) ... (ii)	متوازی الاضلاع $\overline{CD}$ کا وتر BCFD سے دو برابر رقبہ کے مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔
▰BCAE = ▰BCFD ... (iii)	مسئلہ 14.1.1
$\blacktriangle ABC = \blacktriangle DBC$	(i),(ii) اور (iii) میں سے

Q.E.D

مسئلہ 14.1.4:

ایسی مثلثیں جن کے قاعدے اور ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گے۔



معلوم: ΔABC اور ΔDEF کو اس طرح رکھیں
کہ ان کے برابر قاعدے $\overline{BC}$ اور $\overline{EF}$
ایک جیسی خط پر موجود ہوں

مطلوب: $\blacktriangle ABC = \blacktriangle DEF$

عمل: $\overleftrightarrow{AD}$ اور $\overleftrightarrow{BF}$ کھینچیں اس طرح کے نقطہ B, C, اور E, F پر موجود ہوں۔ کھینچیں $\overleftrightarrow{CA} \parallel \overleftrightarrow{BX}$ اور $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{FY}$
تاکے نقطے X اور Y $\overleftrightarrow{AD}$ پر موجود ہوں۔

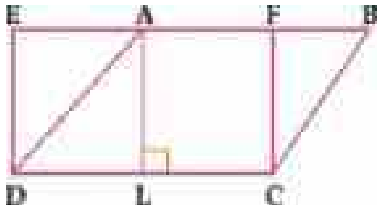
ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔABC اور ΔDEF ایک جیسی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں $\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{XY}$	ارتفاع برابر ہیں (معلوم
$\therefore \quad ▰BCAX = ▰EFYD \quad \ldots (i)$	مسئلہ 14.1.2
لیکن، $\blacktriangle ABC = \frac{1}{2} (▰BCAX) \quad \ldots (ii)$	متوازی الاضلاع کے وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔
اور $\blacktriangle DEF = \frac{1}{2} (▰EFYD) \quad \ldots (iii)$	پچھلی دلائل کسی رو سے
$\therefore \quad \blacktriangle ABC = \blacktriangle DBC$	(i)،(ii)،(iii) کی رو سے

Q.E.D

نتائج:
ایسی مثلثیں جن کی راس (vertex) مشترکہ ہو اور ایک جیسی خط پر قاعدے بھی برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔

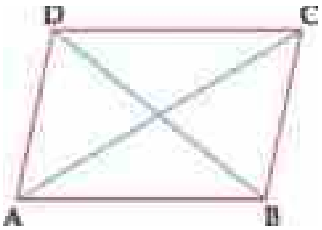
مشق 14.1



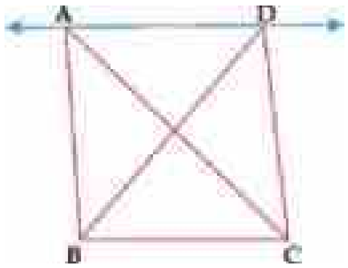
1. معلوم شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے اور EFCD ایک مستطیل ہے، اور $\overline{AL}\perp\overline{DC}$ ثابت کریں کہ

(i) ▰ABCD = ▰EFCD

(ii) ▰ABCD = $m\overline{DC}\times m\overline{AL}$.



2. معلوم سکل میں، اگر چوکور کے وتر اسے چار برابر رقبہ کے مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے تو ثابت کریں کے یہ متوازی الاضلاع اشکال ہے۔



3. معلوم شکل $\overline{AD}$ $\overline{BC}$ میں ABC قائمۃ الزاویہ ہے راس B پر جس میں $m\overline{BC}=7$ cm اور $m\overline{AC}=11$ cm, اور ΔABC اور ΔBCD ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر واقع ہیں ΔBCD کا رقبہ تلاش کریں۔

4. ثابت کریں کہ ایک مثلث کا وسطانیہ اسے دو برابر رقبہ کے مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔

5. ثابت کریں کہ قطعہ خط جو مستطیل کے بالمقابل اضلاع کے درمیانی نقطے پر ملتا ہے، اسے دو برابر مستطیل میں تقسیم کرتا ہے۔

6. اگر دو متوازی الاضلاع جن کا رقبہ برابر ہو اور ان کے قاعدے ایک جیسے یا برابر ہو تو ان کے ارتفاع برابر ہوں گی۔

7. ثابت کریں کہ مساوی الاضلاع مثلث کے زاویوں کے ناصف اسے دو برابر رقبہ کے مثلث میں تقسیم کرتا ہے۔

8. ھابت کریں کہ معین (rhombus) کے وتر اسے چار برابر رقبہ کے مثلث میں تقسیم کرتے ہیں۔

اعادہ مشق 14

1. درست کے لیے 'د' اور غلط کے لیے 'غ' لگائیں درج ذیل میں ہر کسی کے آگے۔

(i) بند اشکال کے رقبہ سے مراد اشکال کے حد خطوط سے بند کیا ہوا علاقہ ہے۔ (د/غ)

(ii) مستطیل کا وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔ (د/غ)

(iii) متماثل اشکال رقبہ میں برابر نہیں ہوتیں۔ (د/غ)

(iv) متوازی الاضلاع کا رقبہ قاعدہ اور اونچائی کے ضرب کے برابر ہے۔ (د/غ)

(v) مثلث کے وسطانیے سے مراد راس سے بالمقابل ضلع (قاعدہ) کے عمود ہے۔ (د/غ)

(vi) دو متوازی خطوط کے درمیان عمودی فاصلہ کبھی کبھی مختلف بھی ہو سکتا ہے۔ (د/غ)

(vii) راس سے کھینچا ہوا ارتفاع ہمیشہ بالمقابل ضلع کو کاٹتا ہے۔ (د/غ)

(viii) دو مثلثیں رقبہ میں برابر ہوں گی اگر ان کے قاعدے اور ارتفاع ایک جیسے ہوں۔ (د/غ)

2. درست جواب پر (✓) لگائیں۔

(i) اگر دو خط کے درمیان عمودی فاصلہ برابر ہو تو خط ______ ہوں گی۔

(ا) ایک دوسرے کے عمود پر (ب) ایک دوسرے کے متوازی

(ج) ایک دوسرے کو کاٹتی۔ (د) ان میں سے کوئی نہیں

(ii) اگر دو مثلثیں رقبہ میں برابر ہیں تو وہ ______ طور پر متماثل ہوں گی۔

(ا) غیر لازمی (ب) لازمی (ج) یقیناً (د) ان میں سے کوئی نہیں

(iii) مثلث کا بالمقابل راس سے ضلع کے عمود پر ہو کہلاتا ہے ______

(ا) وسطانیے (ب) عمودی ناصف (ج) ارتفاع (د) زاویوں کے ناصف

(iv) متوازی الاضلاع جس کے قاعدے اور ارتفاع ایک جیسے ہوں ہوتا ہے ______

(ا) متماثل (ب) رقبہ میں برابر (ج) مساوی (د) یہ تمام

(v) دو متوازی الاضلاع قاعدے میں برابر ہیں ان کا رقبہ برابر ہوگا اگر ______

(ا) ان کے ارتفاع برابر ہوں　　(ب) ان کے ارتفاع ایک جیسے ہوں

(ج) وہ ایک جیسی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں　　(د) یہ تمام

(vi) ___ اور ______ قاعدہ اور ارتفاع میں برابر ہیں تو مثلثیں ______ ہوں گی۔

(ا) رقبہ میں برابر (ب) متماثل (ج) مساوی (د) ان میں سے کوئی نہیں۔

خلاصہ

- اس یونٹ میں ہم نے کچھ ضروری ترجیحات کا ذکر کیا، بیان کیا اور درج ذیل نظریات کو ان کے نتائج (اگر کوئی) کے ساتھ ثابت کیا۔
- ایک ہی قاعدہ پر متوازی الاضلاع اشکال جو قاعدہ خط اور اس کے متوازی کسی خط کے درمیان واقع ہوں (یا ان کے ارتفاع برابر ہوں) وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔
- برابر قاعدوں پر واقع اور ایک جیسی (یا برابر) ارتفاع والی متوازی الاضلاع اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔
- ایسی مثلثیں جو ایک قاعدہ پر واقع ہوں اور ان کے ارتفاع ایک جیسے (برابر) ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔
- ایسی مثلثیں جن کے قاعدے اور ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔
- اشکال کے رقبہ سے مراد بند اشکال کے حد خطوط سے بند کیا ہوا علاقہ ہے۔
- سہ رخی علاقہ سے مراد مثلث اور اس کے اندرونی حصے کا اتحاد ہی۔
- مثلث کے رقبہ سے مراد سہ رخی علاقہ (triangular region) کا رقبہ ہے۔
- مثلث کے ارتفاع اور اونچائی سے مراد قاعدہ کا اس کے متقابل راس سے عمودی فاصلہ ہے۔