یونٹ 12

مثلث کے اضلاع اور زاویے

SIDES AND ANGLES OF A TRAINGLE

حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے طلبا درج ذیل تصورات پر دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ ثابت کر سکیں کہ :

- اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر نہ ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار (چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار سے) زیادہ ہو گی۔
- اگر کسی مثلث کے زاویے مقدار میں برابر نہ ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہو گا۔
- کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔
- کسی بھی خط کے بیرونی نقطہ سے خط تک کا عمودی فاصلہ، نقطہ اور خط کے درمیان تمام فاصلوں سے چھوٹا ہو گا۔

تعارف:

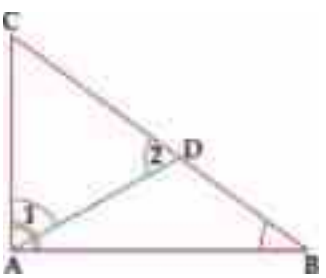
اس یونٹ میں ہم مثلث کے اضلاع اور زاویے کے مسائل پڑھیں گے اور ان مسائل کو حل کرنے کے لیے استعمال کریں گے۔

12.1 مثلث کے اضلاع اور زاویے۔

مسئلہ 12.1.1

ثابت کریں:

اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر نہ ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار (چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار سے) زیادہ ہوگی۔



معلوم

ΔABC میں $m\overline{BC} > m\overline{AC}$

مطلوب:

$m\angle A > m\angle B$

عمل:

$\overline{BC}$ پر نقطہ $\overline{AD}$ اس طرح لیا کہ $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ہم آہنگ ہوں
نقطہ A کو D سے ملایا۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
i) $\overline{AC} \cong \overline{CD}$ میں ΔACD	(i عمل
ii) $m\angle CAD = m\angle CDA \therefore$	(ii مخالف اطراف ہم آہنگ ہیں
iii) ΔABD - لیکن $\angle CDA$ بیرونی زاویہ ہے	(iii بیرونی زاویے کی تعریف کے مطابق۔
iv) $m\angle CDA > m\angle B \therefore$	(iv مثلث کا بیرونی زاویہ سامنے والے غیر متصلہ اندرونی زاویے سے بڑا ہوگا۔
v) لیکن $m\angle A > m\angle CAD$	$m\angle A = mi\angle CAD + m\angle DAB \therefore$ (v
vi) $m\angle A > m\angle CDA \therefore$	$m\angle CDA = m\angle CAD \therefore$ (vi
vii) $m\angle A > m\angle B \therefore$	(vii اوپر (iv) اور (vi) میں نابرابری کی خاصیت متعدیت

Q.E.D

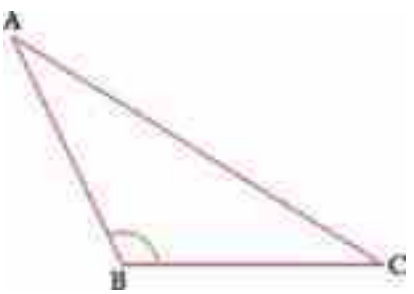
مندرجہ ذیل مثال اوپر دیئے گئے نظریے کو سمجھنے میں مدد دے گی۔

مثال 01:

ثابت کریں

کہ کسی مختلف الاضلاع مثلث میں سب سے بڑی لمبائی والے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار 60^0 سے زیادہ ہو گی۔

معلوم:



$\overline{ABC}$ میں $m\overline{AC} > m\overline{BC} \ \therefore \ m\overline{AC} > m\overline{AB}$

مطلوب:

$m\angle B > 60^0$

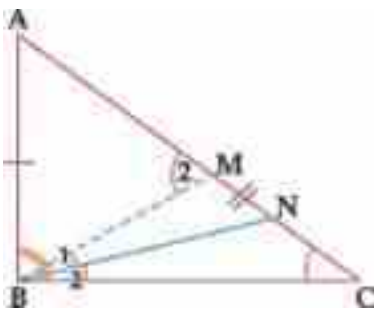
ثبوت:

بیانات		دلائل
	$\overline{ABC}$	
لیکن:	$m\angle B > m\angle C$	(معلوم) $m\overline{AC} > m\overline{AB}$, $m\overline{AC} > m\overline{BC}$
	$m\angle B > m\angle A$	(معلوم) $\angle A, \angle B$ یہ $\angle C$ اندرونی زاویے ہیں
لہذا:	$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$	$\therefore$ $\overline{ABC}$
	$m\angle B + m\angle B + m\angle B > 180^0$	$m\angle B > m\angle C$ and $m\angle B > m\angle A$
	$3\ m\angle B > 180^0$	(ثابت شدہ)
لہذا:	$m\angle B > \frac{180^0}{3}$	جمع کردہ دونوں اطراف کو 3 سے تقسیم کیا۔
	$m\angle B > 60^0$	

Q.E.D

مسئلہ 12.1.2:

اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں برابر نہ ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہو گا۔



معلوم: مثلث ABC میں، $m\angle B > m\angle C$

مطلوب: $m\overline{AC} > m\overline{AB}$

عمل: $\angle ABM$ بنائیں اور $\angle C$ جو کہ $\angle MBC$، $\overline{BN}$ کا ناصف ہے اس کو بنائیں لہذا $m\angle 1 = m\angle 2$

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\therefore \Delta CBN$ کا $\angle ANB$ بیرونی زاویہ ہے	
$m\angle ANB = m\angle C + m\angle 2$	بیرونی زاویہ کی تعریف کے مطابق
$= m\angle C + m\angle 1$	$m\angle 2 = m\angle 1$ (عمل)
$= m\angle ABM + m\angle 1$	$m\angle C = m\angle ABM$ (عمل)
$= m\angle ABN$	زاویے کے اضافے کے مفروضے کے تحت
$\therefore \overline{AB} \cong \overline{AN}$	$m\angle ANB = m\angle ABN$ (ثابت شدہ)
لہذا: $m\overline{AC} > m\overline{AB}$ $\therefore$	$m\overline{AC} > m\overline{AN}$

Q.E.D

نتائج صریح:

(i) کسی قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی باقی ہر دو اضلاع کی لمبائیوں سے بڑی ہوتی ہے۔

(ii) کسی منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے سامنے والا ضلع لمبائی میں ہر دیگر دو اضلاع سے لمبائی میں بڑا ہوتا ہے۔

مسئلہ: 12.1.3

کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔

معلوم: مثلث ABC

مطلوب:

i) $m\overline{AB} + m\overline{AC} > m\overline{BC}$

ii) $m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{CA}$

iii) $m\overline{AC} + m\overline{BC} > m\overline{AB}$

عمل:

BA کو نقطہ D تک اس بڑھائیں کہ نقطہ D کو C سے ملادیں۔ $\overline{AD} \cong \overline{AC}$ اور $\overline{DC}$ بنائیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overline{AD} \cong \overline{AC}$ میں ΔADC	عمل
$m\angle 1 = m\angle 2$	ثمائل اضلاع کے مخالف اطراف کے زاویہ
$m\angle BCD > m\angle 1$	$m\angle BCD = m\angle BCA + m\angle 1$
$m\angle BCD > m\angle 2$	
$m\overline{BD} > m\overline{BC}$ میں ΔBDC	اعداد کی نابرابری کی خاصیت متعدیت
$m\overline{BD} = m\overline{AB} + m\overline{AD}$	بڑے زاویے کی مخالف اضلاع بڑی ہے۔
$= m\overline{AB} + m\overline{AC}$	$m\overline{AD} = m\overline{AC}$
$m\overline{AB} = m\overline{AC} > m\overline{BC}$	عمل
اس طرح ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں	$\overline{BD}$ کی مقدار رکھنے پر
$m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$	اوپر دیئے گئے عمل کے مطابق
$m\overline{BC} + m\overline{AC} > m\overline{AB}$	

Q.E.D

مندرجہ ذیل مثالیں اُوپر دیے گئے نظرے کو سمجھنے میں مدد دیں گی۔

مثال 01: مندرجہ ذیل مثلث کے اضلاع کی لمبائیوں کے سیٹ ہیں۔ ان میں کس سیٹ سے مثلث بنائی جاسکتی ہے؟

(i) 3cm, 4cm, 5cm,

(ii) 4cm, 5cm 4.5cm

(iii) 60mm, 80mm, 10cm

(iv) 3cm, 4cm, 10cm

حل:

(i) 3cm, 4cm, 5cm

چونکہ:- $3 + 4 > 5$,$3 + 5 > 4$ $4 + 5 > 3$

دو اضلاع کی جمع کی قیمت تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہے اس لیئے دی گئی لمبائیوں کا سیٹ کسی مثلث کے اضلاع ہو سکتے ہیں۔

(ii) 4cm, 5cm 4.5cm

چونکہ: $4 + 5 > 4.5$, $5 + 4.5 > 4$ $4.5 + 3 > 4$

اس لیئے دی گئی لمبائیوں کا سیٹ کسی مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہو سکتی ہیں۔

(iii) 60mm, 80mm, 10cm

چونکہ: 10 mm = 1 cm so, 60 mm = 6 cm and 80 mm = 8 cm

اب: $8 + 10 > 6$ اور $6 + 10 > 8$, $6 + 8 > 10$

اس لیئے دی گئی لمبائیوں کا سیٹ مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہو سکتی ہیں اور یہ لمبائیاں کوئی مثلث تشکیل دے سکتی ہیں۔

مثال 02:

اوپر دیئے گئے نظریے کو ذہن میں رکھتے ہوئے یہ فیصلہ کریں کہ کونسی لمبائیوں کے سیٹ ثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہو سکتی ہیں اور کسی مثلث کو تشکیل دے سکتی ہیں۔

(i) 2cm, 4cm, 7cm (ii)5.5cm, 5cm, 9.5cm

حل:

(i) 2cm, 4cm, 7cm

چونکہ: $2 + 4 < 7$, $4 + 7 > 2$ $7 + 2 > 4$

اس طرح یہ لمبائیاں کسی مثلث کو تشکیل نہیں دے سکتیں۔

(ii)5.5cm, 5cm, 9.5cm

چونکہ: $5.5 + 5 > 9.5$ ، $5 + 9.5 > 5.5$ $9.5 + 5.5 > 5$

اس طرح دی گئی لمبائیاں کسی مثلث کو تشکیل دے سکتی ہیں۔

سرگرمی:

اگر $a = 3$ cm

$b = 4$ cm

$c = 5$ cm

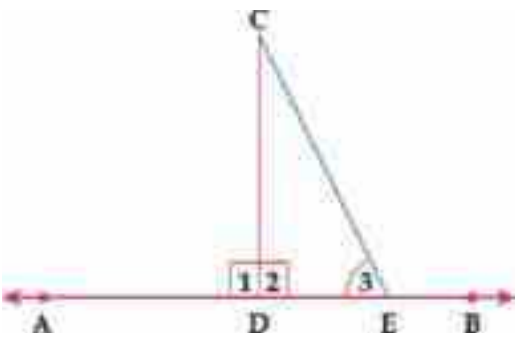
تو بتایئے کہ ΔABC بن سکتی ہے یا نہیں۔

مسئلہ 12.1.4

ثابت کریں کہ کسی بھی خط کے بیرونی نقطہ سے خط تک کا عمودی فاصلہ نقطہ اور خط کے درمیان تمام فاصلوں سے کم ہو گا۔

معلوم:

خط AB پر نقطہ C سے ایک عمود جو کہ خط AB پر نقطہ D پر ملتا ہے اور CE ایک اور قطعہ خط ہے جو خط AB پر نقطہ E پر ملتا ہے۔



مطلوب:

$m\overline{CD} < m\overline{CE}$

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\angle 1$, ΔCDE مثلث کا بیرونی زاویہ ہے $m\angle 1 > m\angle 3 \therefore$	بیرونی زاویہ کی تعریف کے مطابق
$m\angle 2 > m\angle 3 \therefore$ $m\overline{CE} > m\overline{CD} \therefore$	مثلث کا بیرونی زاویہ، ہر غیر متصلہ اندرونی زاویہ سے بڑا ہوتا ہے۔
اس طرح یہ ثابت ہوتا ہے کہ $m\overline{CD}$ نقطہ C سے $\overline{AB}$ تک کا سب سے کم فاصلہ ہے۔	$m\angle 1 = m\angle 2$ (قائمہ زاویہ) بڑے زاویہ کے سامنے بڑا ضلع ہوتا ہے

Q.E.D

نوٹ: کسی خط اور ایک نقطہ (جو اس خط پر واقع ہو) کے درمیان کا فاصلہ صفر ہے۔

مشق 12.1

1. نقطہ 0 مثلث ABC کا ایک اندرونی نقطہ ہے ثابت کریں:

$$m\overline{OA} + m\overline{OB} + m\overline{OC} > \frac{1}{2}(m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{CA}).$$

2. مثلث ABC میں اگر $\Delta ABC,\ m\angle B = 70^o$ ہو اور $m\angle C = 45^o$ ہو تو کون سا ضلع لمبائی میں سب سے بڑا ہو گا؟

3. اگر مثلث ABC میں $\Delta ABC,\ m\angle A = 55^o$ اور $m\angle B = 65^o$ ہو تو کون سا ضلع لمبائی میں سب سے چھوٹا ہو گا؟

اعادہ مشق 12

1. مندرجہ ذیل بیانات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی ( ) لگا کر کریں۔

(i) کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔ (درست/غلط)

(ii) کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کے درمیان کا فرق تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔ (درست/غلط)

(iii) خط کا کوئی بیرونی نقطہ اس خط کا ہم خط نقطہ ہو گا۔ (درست/غلط)

(iv) قائمۃ الزاویہ مثلث میں سب سے بڑا زاویہ 100^o کا ہوتا ہے۔ (درست/غلط)

(v) کسی خط پر عمود 90^o کا زاویہ بناتا ہے۔ (درست/غلط)

2. خالی جگہ پر کریں:

1. کسی بھی قائمۃ الزاویہ مثلث میں _____ مثلث کا سب سے لمبا ضلع ہو گا۔

2. قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ رکھنے والی اضلاع کی لمبائیوں کی جمع وتر کی لمبائی سے _____ ہوتی ہے۔

3. مثلث ABC $\Delta ABC,\ m\angle A = 50^o$ اور $m\angle B = 30^o$ ہو تو ضلع _____ باقی اضلاع سے لمبا ہو گا۔

4. کسی بھی چکور کے وتر کی لمبائی اس کے ملحقہ اطراف کی لمبائی کی جمع سے ہوتی ہے۔

3. درست جواب پر () کا نشان لگائیں۔

1. مساوی مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی 6cm ہے تو اس کے اوسط کی لمبائی 9cm سے _____ ہو گی۔

(ا) زیادہ (ب) برابر

(ج) کم (د) ان میں سے کوئی نہیں۔

خلاصہ

- اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر نہ ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار (چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار سے) زیادہ ہو گی۔
- اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں برابر نہ ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہو گا۔
- کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔
- کسی بھی خط کے بیرونی نقطہ سے خط تک کا عمودی فاصلہ، نقطہ اور خط کے درمیان تمام فاصلوں سے چھوٹا ہو گا۔