یونٹ 11

خط اور زاویے کے ناصف

LINE BISECTORS AND ANGLE BISECTORS

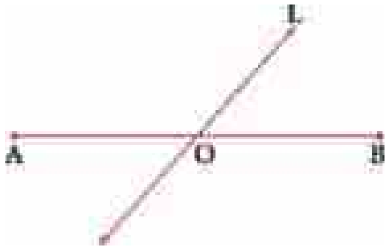
حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- مندرجہ ذیل مسائل کو سمجھ سکیں اور ان کے نتائج کو استعمال کر کے مشکلات کا حل نکال سکیں۔
- اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو گا۔
- اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو گا۔
- کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔
- اگر کسی زاویے کے اندرونے میں ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ نقطہ اس زاویے کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔
- کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

تعارف:

اس سبق میں ہم خط ناصف اور زاویے کے ناصف کے مسائل زیر بحث لائیں گے۔



تعریفیں:

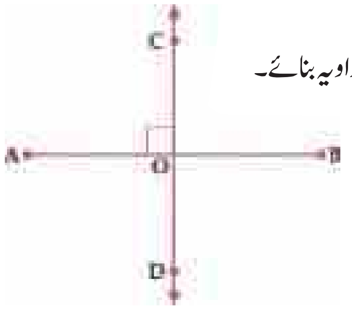
i. قطعہ کا ناصف

ایک خط جو کسی قطعہ خط کو دو برابر حصوں میں کاٹے، ناصف کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: دی گئی شکل میں قطعہ خط AB کا ناصف خط 'L' ہے جو کہ قطعہ خط 'O' کے وسطی نقطہ $\overline{AB}$ سے گذرتا ہے۔

ii. قطعہ خط کا عمودی ناصف:

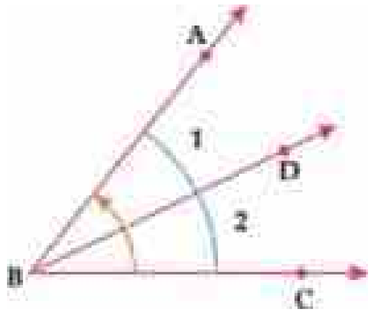
کوئی بھی خط، کسی قطعہ خط کا عمودی ناصف تب ہو گا جب وہ اس قطعہ خط کے ساتھ 90 کا زاویہ بنائے۔



مثال کے طور پر: دی گئی شکل میں $\overleftrightarrow{CD}$ قطعہ خط AB پر عمود ہے اور یہ وسطی نقطہ 'O' سے گذرتی ہے، تو $\overline{CD}$ ، $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے۔

iii. زاویے کا ناصف

کوئی خط یا قطعہ خط، زاویے کا ناصف تب کہلائے گا اگر وہ ایک زاویے کو دو برابر زاویوں میں تقسیم کر دے۔



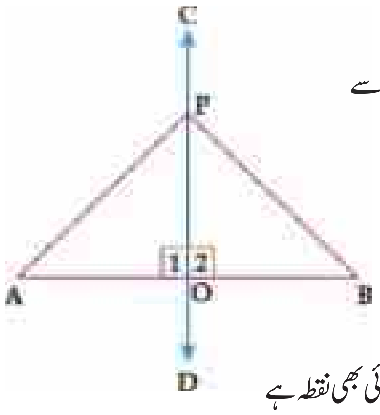
دی گئی شکل میں $\overrightarrow{BD}$ زاویے $\angle CBA$ کا ناصف ہے۔ $\overrightarrow{BD}$ زاویے $\angle CBA$ کو لہٰذا دو برابر زاویہ $\angle 1$ اور $\angle 2$ میں تقسیم کرتا ہے

لہٰذا $\angle 2 \cong \angle 1$.

مسئلہ 11.1.1

ثابت کریں:

اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوگا۔



معلوم:

$\overleftrightarrow{CD}$ عمودی ناصف ہے جو کہ $\overline{AB}$ کا نقطہ جو کہ O پر قطعہ کرایا ہے۔ P کوئی بھی نقطہ ہے

مطلوب:

$\overline{AP} \cong \overline{BP}$

ثبوت: لہٰذا P مساوی الفاصلہ ہے۔ A اور B کے

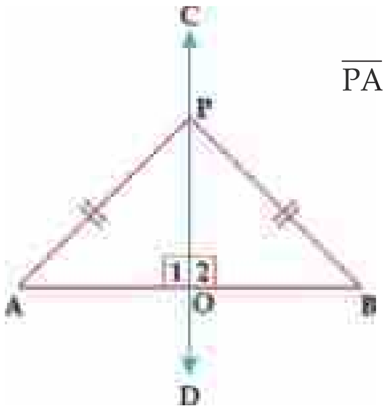
بیانات	دلائل
$\Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$	
i. $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	i۔ معلوم (O وسطی نقطہ ہے)
ii. $\angle 1 \cong \angle 2$	ii۔ معلوم (نقطہ O پر $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$)
iii. $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	iii۔ مشترک
$\therefore \quad \Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$	ض-ز-ض کا موضوعہ
$\therefore \quad \overline{AP} \cong \overline{BP}$	متماثل مثلث کی بناپر
لیکن $\overleftrightarrow{CD}$ پر اختیاری نقطہ ہے	فرض کردہ
اسی طرح کوئی بھی اور نقطہ $\overleftrightarrow{CD}$ پر A اور B سے مساوی الفاصلہ پر ہوگا۔	اوپر کے نتائج کی رو سے

Q.E.D

مسئلہ 11.1.2

ثابت کریں:

اگر کوئی نقطہ کسی قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوگا۔ (عکس مسئلہ 11.1.1)



معلوم:

A اور B دو مقررہ نقطے ہیں اور نقطہ P حرکت پذیر نقطہ ہے اس طرح کے $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

مطلوب:

P نقطہ $\overline{AB}$ کے عمودی ناصف پر موجود ہے۔

عمل:

$\overline{AB}$ کو O نقطہ پر تنصیف کریں۔ نقطہ P اور O کو آپس میں ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta POA \leftrightarrow \Delta POB$	
i. $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	i- عمل
ii. $\overline{PA} \cong \overline{PB}$	ii- معلوم
iii. $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	iii- مشترک
$\Delta POA \cong \Delta BOP$	ض-ض-ض ≅ ض-ض-ض
$\angle 1 \cong \angle 2$	متماثل مثالث کی بنا پر
لیکن $\angle 1$ اور $\angle 2$ سپلیمینٹری زاویے ہیں۔	Δs ایک خط ہے (سپلیمینٹری موضوع)
$\angle 1$ اور $\angle 2$ دونوں قائمہ زاویے ہیں۔	اگر دو سپلیمینٹری زاویے آپس میں برابر ہوں تو دونوں قائمہ زاویے ہیں۔
پس $\overline{PO}$ عمودی ناصف ہے۔ $\overline{AB}$ کا	$\overline{AO} \cong \overline{BO}$ اور $\overline{PO} \perp \overline{AB}$
پس ہر وہ نقطہ جو نقطہ A اور نقطہ B سے مساوی الفاصلہ ہوگا وہ $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہوگا۔	اُوپر کے نتائج سے ثابت شدہ

Q.E.D

مشق 11.1

1- ثابت کریں کہ مثلث کے کوئی بھی دو اضلاع کے عمودی ناصف کا نقطہ قاطعہ اس مثلث کے تمام سروں سے مساوی الفاصلہ ہوگا۔

2- ثابت کیجئے کہ کسی دائرہ کا مرکز اس کے ہر ایک قطر کے عمودی ناصف پر ہوتا ہے۔

3- تین نمبر ہم خط نقاط میں سے گذرنے والے دائرہ کا مرکز کہاں ہوگا اور کیوں؟

4- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو نقطہ A اور B پر کاٹتے ہیں تو ثابت کریں کہ وہ خط جو دائروں کے مرکز سے گزرے گا وہ خط $\overline{AB}$ ہوگی۔

5- تین بازار A ، B اور C ایک سیرھ میں نہیں ہیں ان بازار کے تاجر ایک مقام پر مسجد بنانا چاہتے ہیں۔ جس کا فاصلہ ان تینوں بازاروں سے یکساں ہو۔ مسجد کے مقام کو متعین کرکے ثابت کریں کہ یہ مقام تینوں بازاروں سے مساوی الفاصلہ ہے۔

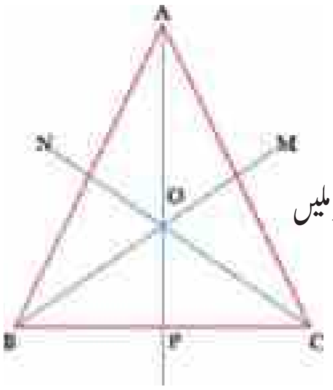
مسئلہ 11.1.3

ثابت کریں:

کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

معلوم: مثلث

مطلوب: مثلث کی اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہیں۔



عمل

$\overline{MO}$ اور $\overline{NO}$, کے عمودی ناصف $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ بنائیں جو کہ ایک دوسرے کو نقطہ O پر ملیں

$\overline{BC}$ کو نقطہ P پر تنصیف کریں۔ $\overline{OC}$, $\overline{OB}$، $\overline{OA}$، $\overline{OP}$ بنائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overline{NO}$ عمودی ناصف ہے $\overline{AB}$ کا $\overline{NO}$ $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے	عمل
$\therefore$ $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	$\overline{MO}$، $\overline{AC}$ کا عمودی ناصف ہے۔
اسی طرح $\overline{AO} \cong \overline{OC}$	
$\therefore$ $\overline{OB} \cong \overline{OC}$	ہر ایک $\overline{AO}$ سے متماثل ہے۔
نقطہ P، $\overline{BC}$ کا وسطی نقطہ ہے۔ $\therefore$	عمل
$\overline{OP}$، $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف ہے۔	مسئلہ 11.1.2 مطابق
پس مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہیں۔	ہر کوئی ایک ہی نقطہ پر مل رہا ہے۔

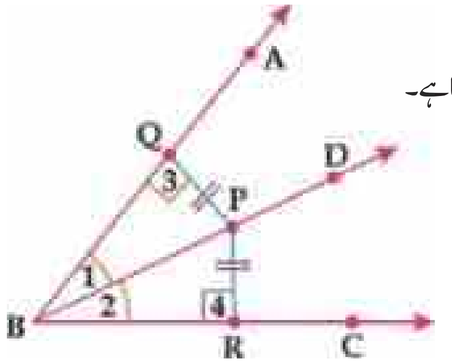
مشق 11.2

1. ثابت کریں کہ حادہ مثلث کا محیطی مرکز اس مثلث کے اندر ہی موجود ہوتا ہے۔
2. ثابت کریں مساوی الساقین ذوزنقہ کے چار اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔
3. ثابت کیجئے کہ مثلث کے ارتفاع ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

مسئلہ 11.1.4

ثابت کریں:

کسی زاویے کے ناصف پر ہر ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔



معلوم:

$\overrightarrow{BD}$ ، $\angle ABC$ کا ناصف ہے۔ P ، $\overrightarrow{BD}$ پر کوئی نقطہ ہے

$\overline{PQ}$ اور $\overline{PR}$ ، $\overrightarrow{BC}$ اور $\overrightarrow{BA}$ بالترتیب عمود ہیں

مطلوب:

$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ (یعنی نقطہ P ، $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے ہم فاصلہ ہیں)

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta PQB \leftrightarrow \Delta PRB$ میں	
i. $\angle 3 \cong \angle 4$	i. دونوں قائمہ زاویہ ہیں۔
ii. $\angle 1 \cong \angle 2$	ii. $\overrightarrow{BD}$ ناصف ہے (معلوم)
iii. $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	iii. مشترک
$\Delta PQB \cong \Delta PRB$	ز-ز-ض ≅ ز-ز-ض
$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	متماثل مثلثوں کی بنا پر
لہٰذا P ، $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے مساوی الفاصلہ ہے۔	

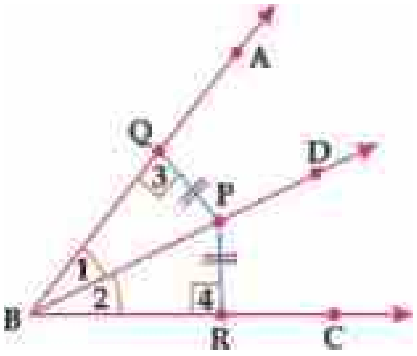
Q.E.D

مسئلہ 11.1.5

ثابت کریں:

اگر کسی زاویے کے اندرونے میں کوئی ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ نقطہ اس زاویے کے ناصف پر واقع ہوتا ہے

(عکس مسئلہ 11.4)



معلوم:

P کے اندرونے میں کوئی بھی نقطہ $\overrightarrow{BD}$ ایسے لیا گیا ہے کہ وہ اس کے بازوؤں $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے مساوی $\angle ABC$, الفاصلہ ہے۔ لہٰذا $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ اور $\overline{PQ} \perp BA$ اور $\overline{PR} \perp \overrightarrow{BC}$

مطلوب:

$\angle 1 \cong \angle 2$, $\overrightarrow{BD}$ جو کہ $\angle ABC$ کا ناصف ہے۔

ثبوت:

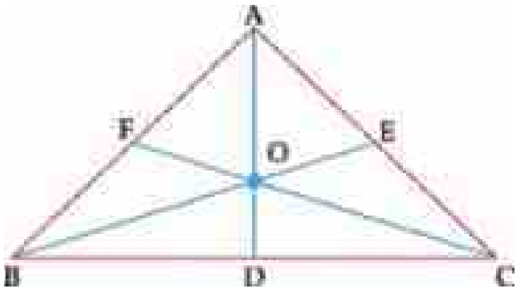
بیانات	دلائل
$\Delta PQB \leftrightarrow \Delta PRB$ میں	قائمہ زاویہ مثلث کے متنا
i. $\angle 3 \cong \angle 4$	i. دونوں قائمہ زاویہ ہیں۔
ii. $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	ii. معلوم
iii. $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	iii. مشترکہ وتر
$\Delta PQB \cong \Delta PRB$	قائمہ زاویہ مثلث میں وتر-ضلع $\cong$ وتر-ضلع
$\angle 1 \cong \angle 2$,	متماثل مثالث کی بناپر
لہٰذا $\overrightarrow{BD}$، $\angle ABC$ کا ناصف ہے۔	ہر کوئی ایک ہی نقطہ پر مل رہا ہے۔

Q.E.D

مسئلہ 11.1.6

ثابت کریں:

کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔



معلوم:

مثلث ΔABC میں $\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$، ∠B اور ∠C بالترتیب، ناصف ہیں جو کہ ایک دوسرے کو نقطہ 'O' پر کاٹتی ہیں۔

مطلوب:

∠A، ∠B اور ∠C کے ناصف ہم نقطہ ہونگے۔

عمل:

$\overline{OD} \perp \overline{BC}$ اور $\overline{OF} \perp \overline{AB}$ کھینچیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
متناظرہ طور پر $\overline{OD} \cong \overline{OF}$ ... (i) اسی طرح $\overline{OD} \cong \overline{OE}$ ... (ii)	کسی زاویے کے ناصف پر ہر نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔
$\overline{OE} \cong \overline{OF}$	(i)اور(ii)سے ثابت شدہ۔
تو نقطہ O، ∠A کے ناصف پر ہے اور	مسئلہ 11.1.5
نقطہ O، ∠B اور ∠C کے ناصف پر بھی ہے۔ ناصف پر بھی ہے۔	معلوم
پس ∠B ∠A اور ∠C کے ناصف نقطہ O پر ہم نقطہ ہیں۔	

Q.E.D

مشق 11.3

1. دو مساوی الساقین مثلث اگر مشترکہ قاعدے پر ہیں تو ثابت کریں کہ وہ خط جو ان کے سروں کو آپس میں ملاتا ہے وہ مشترکہ قاعدے کو قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتی ہے۔
2. اگر کسی مثلث کے زاویے کا ناصف مخالف ضلع کو تنصیف کرتا ہو تو ثابت کریں کہ وہ مثلث مساوی الساقین ہے۔
3. ایک مساوی الساقین مثلث ΔABC, میں $m\overline{AC} = m\overline{AB}$ ہے ثابت کریں کہ کونے B اور C کے عمود مخالف اضلاع کے برابر ہیں۔

اعادہ مشق 11

1. ثابت کریں کہ اگر مثلث کے دوارتفاع ہم نقطہ ہوں تو وہ مثلث مساوی الساقین مثلث ہوگی۔

2. ثابت کریں کہ ایک مثلث کے اندر لیا گیا نقطہ اس کی تینوں اضلاع سے مساوی الفاصلہ ہو۔ تو وہ مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔

3. نیچے دیئے گئے جملوں کے سامنے صحیح کے لیے 'T' اور غلط کے لیے 'F' سے نشاندہی کریں۔

(i) ضلع کی تنصیف کرنے کا مطلب اسے دو حصوں میں تقسیم کرنا ہوتا ہے۔

(ii) قائمہ زاویہ مساوی الساقین مثلث کے قاعدے پر ہر زاویہ 45 کا ہوتا ہے۔

(iii) متماثل اضلاع کی مثلث کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

4. درست جواب کی نشاندہی کریں۔

(i) حادہ زاویہ مثلث میں _____ حادہ زاویے ہوتے ہیں۔

a) ایک　　b) دو　　c) تین　　d) کوئی بھی نہیں

(ii) وہ نقطہ جو قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو وہ قطعہ خط کا _____ ہوتا ہے۔

a) عمودی ناصف　　b) عمود　　c) درمیان　　d) وسطی نقطہ

(iii) حادہ زاویہ مثلث کی اضلاع کا _____ مثلث کے اندر ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں۔

a) عمود　　b) عمودی ناصف　　c) منفرجہ　　d) حادہ

(iv) مثلث کے زاویوں کے ناصف _____ ہوتے ہیں۔

a) ہم نقطہ　　b) ہم خط　　c) نہیں ملتے　　d) نابرابر

خلاصہ

1. قطعہ خط کا ناصف قطعہ خط کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔
2. عمودی ناصف قطعہ خط کو دو برابر حصوں میں 90 پر کاٹتا ہے۔
3. قطعہ خط کے عمودی ناصف پر کوئی بھی نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔
4. کوئی بھی نقطہ اگر قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ قطعہ خط کے عمودی ناصف پر ہوتا ہے۔
5. مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔
6. کوئی بھی نقطہ اگر زاویے کے ناصف پر ہو تو وہ زاویے کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔
7. کوئی بھی نقطہ اگر زاویے کے اندر ہو اور زاویے کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ زاویے کے ناصف پر ہوتا ہے۔
8. زاویے کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔