یونٹ 10

متوازی الاضلاع اور مثلث

PARALLELOGRAM AND TRIANGLES

حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

مندرجہ ذیل مسائل کو ان کے نتائج کے ساتھ سمجھیں اور ان سے متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیے لاگو کریں۔

a) ثابت کر سکیں کہ ایک متوازی الاضلاع میں:

- مخالف اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔
- مخالف زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- دونوں وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

b) اگر کسی چوکور کے دو مخالف اضلاع متماثل اور متوازی ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔

c) اگر کسی ملث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے اضلاع کے متوازی اور لمبائی میں اس سے نصف ہوتا ہے۔

d) مثلث کے تینوں وسطانیے ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور یہ نقطہ ہر ایک وسطانیے کا نقطہ تثلیث ہوتا ہے۔

e) اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط ایک خط قاطعہ پر متماثل قطعات بنائیں تو وہ کسی دوسرے خط قاطعہ پر بھی متماثل قطعات بنائیں گی۔

تعارف:

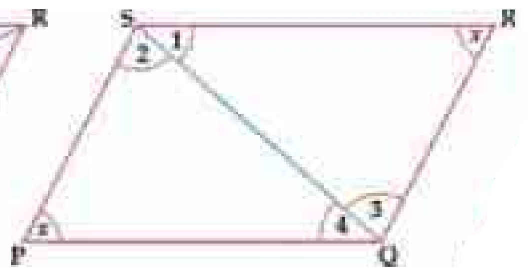
پچھلی جماعتوں میں طلبا نے بہت سے طرح کے متوازی الاضلاع، مثالث، مستطیل، مربع، معین اور ذوزنقہ وغیرہ کے بارے میں پڑھا اور ان کو بنایا۔ کثیر الاضلاع اشکال کے اضلاع اور زاویے سے متعلق اصطلاحات کو پڑھا۔ اس سبق میں بالخصوص مثلثوں اور ان کی مماثلت کے بارے میں اپنی معلومات کو بڑھائیں گے اور مسائل کو سمجھیں گی

10.1 متوازی الاضلاع اور مثالث

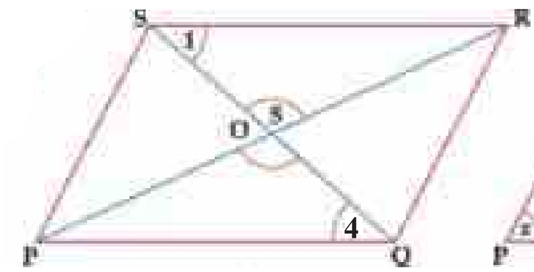
مسئلہ 10.1.1

ایک متوازی الاضلاع میں

- مخالف اضلاع باہم متماثل ہوتے ہیں
- مخالف زاویے باہم متماثل ہوتے ہیں۔
- دونوں وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں



شکل (i)



شکل (ii)

معلوم:

^{m} PQRS

مطلوب:

1. $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$; $\overline{PS} \cong \overline{QR}$
2. $\angle P \cong \angle R$; $\angle S \cong \angle Q$
3. وتر $\overline{PR}$ اور $\overline{SQ}$ ایک دوسرے کو نقطہ O منقطع کرتے ہیں۔ (شکل ii)

عمل:

شکل (i) میں نقطہ S کو Q سے ملائیں۔

ثبوت:

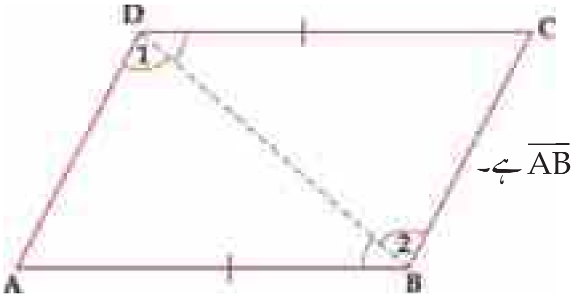
بیانات	دلائل
شکل (i) میں	
(1)	
$\overline{SQ}$, $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$ قطعہ خط ہے	خط کے متبادل زاویے
$m\angle 1 = m\angle 4$	
اسی طرح $m\angle 2 = m\angle 3$	$\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$
$\therefore m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	جمع کا موضوعہ
یا $\angle Q \cong \angle S$	زاویوں کی جمع کا موضوعہ
اسی طرح $\angle R \cong \angle P$	اوپر والے طریقے کے مطابق
لہٰذا مخالف زاویے متماثل ہیں۔	
(2)	
$\Delta SPQ \leftrightarrow \Delta QRS$	
$\angle 1 \cong \angle 4$ اور $\angle 2 \cong \angle 3$	اوپر (1) میں ثابت شدہ
$\overline{SQ} \cong \overline{SQ}$	مشترک
$\therefore \Delta SPQ \cong \Delta QRS$	ز-ض-ز ≅ ز-ض-ز
$\therefore \overline{PQ} \cong \overline{RS}$ اور $\overline{PS} \cong \overline{QR}$	متماثل مثلثوں کی وجہ سے
لہٰذا شکل (ii) میں مخالف اضلاع متماثل ہیں	
(3)	
$\Delta POQ \leftrightarrow \Delta ROS$	
$\angle 1 \cong \angle 4$	اوپر (1) میں ثابت شدہ
$\angle POQ \cong \angle SOR$	مخالف راسی زاویے
$\overline{PQ} \cong \overline{SR}$	اوپر (2) میں ثابت شدہ
$\therefore \Delta POQ \cong \Delta ROS$	ز-ز-ض ≅ ز-ز-ض
$\therefore \overline{PO} \cong \overline{OR}$ اور $\overline{OQ} \cong \overline{OS}$	متماثل مثلثوں کی بنا پر
$\overline{PR}$ اور $\overline{RS}$ وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتی ہیں۔	

Q.E.D

مشق 10.1

1. ایک خط جو متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع کو وسطی نقاط سے جوڑے وہ متوازی الاضلاع کی دوسری اضلاع کے متوازی ہوں گے۔
2. متوازی الاضلاع کے کسی بھی اضلاع کو اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔
3. ثابت کریں متوازی الاضلاع کی ایک ہی اضلاع کے دو زاویوں کے ناصف قائمہ زاویہ پر ملتے ہیں۔
4. چوکور کے وتر باہم تنصیف ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہو گا۔
5. متوازی الاضلاع کے کسی بھی اضلاع کے مخالف ہ زاویے برابر ہوتے ہیں۔

مسئلہ 10.1.2



اگر کسی چوکور کے دو مخالف اضلاع متماثل اور متوازی ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔

معلوم: چوکور ABCD میں $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ اور $\overline{CD}$ $\overline{AB}$ ہے۔

مطلوب: ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

عمل: نقطہ B کو نقطہ D سے ملائیں۔

ثبوت:

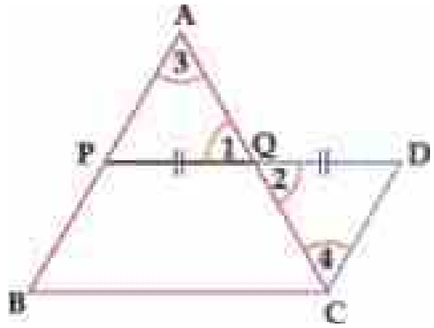
بیانات	دلائل
$\overline{CD} \parallel \overline{AB}$, $\overline{BD}$ قاطع خط ہے۔	
$\therefore$ $\angle ABD \cong \angle CBD$	خط کے متبادل زاویے
$\Delta ADB \leftrightarrow \Delta CBD$ میں	
i. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	(i) معلوم
ii. $\angle ABD \cong \angle CDB$	(ii) ثابت شدہ
iii. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	(iii) مشترک
$\therefore$ $\Delta ADB \cong \Delta CBD$	ض-ز-ض ≅ ض-ز-ض
$\therefore$ $\angle 1 \cong \angle 2$	متماثل مثلثوں کی بنا پر
لیکن یہ متبادل مثالث ہیں	متبادل زاویوں کی تعریف سے
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	متبادل زاویے متماثل ہیں
$\overline{CD} \parallel \overline{AB}$	معلوم
ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔	مخالف اضلاع متوازی ہیں۔

مشق 10.2

1. ثابت کریں کہ چوکور کے مخالف زاویے اگر متماثل ہیں تو وہ متوازی الاضلاع ہو گی۔
2. ثابت کریں کہ چوکور متوازی الاضلاع ہے اگر اس کے واتر باہم تنصیف کریں۔
3. اگر چوکور متوازی الاضلاع ہے، تو اس کے وتر دو متماثل مثالث بنائیں گے۔
4. اگر کسی چوکور کی ہر اضلاع کے زاویے سپلیمنٹری ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہو گی۔

مسئلہ 10.1.3

مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلاع کے متوازی اور لمبائی میں اس سے نصف ہوتا ہے۔



معلوم:

P اور Q کا وسطی نقطہ $\overline{AB}$ ہے اور $\overline{AC}$ کا وسطی نقطہ ΔABC میں ہے،

$\overline{PQ}$ قطعہ خط ہے جو ان کو جوڑتا ہے۔

مطلوب:

$\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ اور $m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$

عمل:

$\overline{PQ}$ کو نقطہ D تک اس طرح بنائیں کہ $\overline{PQ} \cong \overline{QD}$ نقطہ D اور C کو آپس میں ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta APQ \leftrightarrow \Delta CDQ$ میں	
i. $\overline{PQ} \cong \overline{QD}$	عمل
ii. $\angle 1 \cong \angle 2$	راسی زاویے
iii. $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$	معلوم
$\therefore$ $\Delta APQ \cong \Delta CDQ$	ض-ز-ض کا موضوعہ
$\therefore$ $\overline{AP} \cong \overline{CD}$ اور $\angle 3 \cong \angle 4$	متماثل مثالث کی بناپر

بیانات	وجوہات
لیکن $\overline{PB}\cong\overline{AP}$	معلوم
$\therefore\ \overline{PB}\cong\overline{CD}$	ہر ایک $\overline{AP}$ کے متماثل ہے۔
$\angle 3$ اور $\angle 4$ متبادل زاویے ہیں	متبادل زاویوں کی تعریف کے مطابق۔
$\therefore\ \overline{AB}\quad\overline{CD}$	متبادل زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
لہٰذا $\overline{PB}\parallel\overline{CD}$	
PBCD ایک متوازی الاضلاع ہے	مخالف اضلاع $\parallel$ اور $\cong$ ہیں۔
$\therefore\ \overline{PD}\parallel\overline{BC}$ اور $\overline{PD}\cong\overline{BC}$	متوازی الاضلاع کی مخالف اضلاع متوازی اور متماثل ہیں۔
$\therefore\ \overline{PQ}\parallel\overline{BC}$	$\overline{PD}$ اور $\overline{PQ}$ ایک ہی خط ہے۔
اور $m\overline{PQ}=\frac{1}{2}m\overline{BC}$	$m\overline{PQ}=m\overline{QD}=\frac{1}{2}m\overline{PD}$

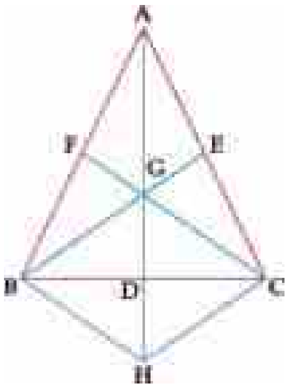
Q.E.D

مشق 10.3

1. اگر ایک قطعہ خط مثلث کی دو اضلاع کے وسطی نقاط کو آپس میں جوڑتا ہے اور وہ تیسری اضلاع کے متوازی ہوتا ہے اور اس کی لمبائی 4cm ہے تو تیسری ضلاع کی لمبائی کیا ہو گی؟
2. ثابت کیجئے کہ کسی چوکور کے مخالف اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعات خط باہم تنصیف کرتے ہیں۔
3. قطعات خط جو کہ کسی چوکور کے اضلاع کے وسطی نقاط کو آپس میں ملاتے ہیں ایک متوازی الاضلاع بنا سکتے ہیں، ثابت کیجئے۔
4. ثابت کیجئے کہ مثلث کے کسی اضلاع کے وسطی نقطہ میں سے گذرنے والا قطعہ خط جو کہ دوسرے ضلاع کے متوازی ہو وہ تیسرے اضلاع کو بھی تنصیف کرتا ہے۔
5. ثابت کیجئے کہ کسی مثلث کے تین اضلاع کو ان کے وسطی نقاط سے ملانے کے بعد جو چار مثالث بنیں گی وہ آپس میں متماثل ہوں گی۔

مسئلہ 10.1.4

مثلث کے تینوں وسطانیے ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور
یہ نقطہ ہر ایک وسطانیے کا نقطہ تثلیث ہوتا ہے۔



معلوم: ΔABC جس میں وسطانیے $\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ نقطہ G پر ملتے ہیں۔

مطلوب: i) $\overline{AG}$ بڑھ کر نقطہ $\overline{BC}$ پر D کو تنصیف کرے گا۔

ii) G ہر وسطانیے کا نقطہ تثلیث ہے۔

عمل: $\overline{CH}$ اور $\overline{EB}$ کو ایک دوسرے کا متوازی بنائیں جو کہ بڑھ کر $\overline{AD}$ پر نقطہ H
پر ملیں۔اب نقطہ B اور H کو آپس میں ملائیں۔

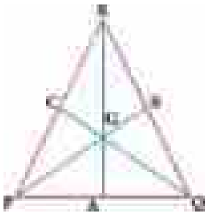
ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔACH میں، $\overline{AE} \cong \overline{EC}$	معلوم
$\overline{EG} \parallel \overline{CH}$	عمل
$\therefore$ $\overline{AG} \cong \overline{GH}$	عکس مسئلہ 10.1.3 کے مطابق
اسی طرح ΔABH میں	
$\overline{AG} \cong \overline{GH}$	ثابت شدہ
$\overline{AF} \cong \overline{FB}$	معلوم
$\overline{FG} \parallel \overline{BH}$	مسئلہ 10.1.3 کے مطابق
لہٰذا BGCH ایک متوازی الاضلاع ہے۔	مخالف اضلاع متوازی ہیں۔
وتر $\overline{BC}$ اور $\overline{GH}$ ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں	مسئلہ 10.1.1 کے مطابق
لہٰذا $\overline{BD} \cong \overline{DC}, \overline{GD} \cong \overline{DH}$	
$\Delta ABC, \overline{AD}$ کا وسطانیہ ہے	$\overline{BD} \cong \overline{DC}$ (اوپر ثابت شدہ)
اسی طرح $m\overline{AG} = m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$	$\overline{GD} \cong \overline{DH} \Rightarrow m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$
$\overline{AD}$,G کا نقطہ تثلیث ہے	$\overline{AG}$, $\overline{GD}$ کا دگنا ہے۔
اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ	اوپر کے نتائج سے ثابت شدہ۔
$\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ کا نقطہ تثلیث بھی G ہے۔	

Q.E.D

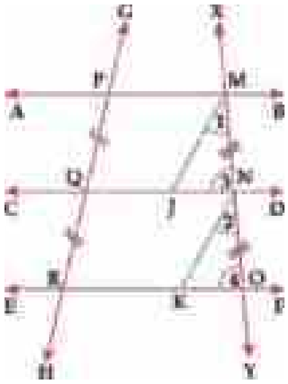
مشق 10.4

1. اگر ایک مثلث کے تین وسطانیے متماثل ہوں تو ثابت کریں کہ وہ مثلث ایک مساوی مثلث ہے۔
2. $\overline{PB}, \overline{QC}$ اور $\overline{RA}$ مثلث PQR کے وسطانیے ہیں جو کہ نقطہ G پر ملتے ہیں۔ یہ بتائیں کہ نقطہ G مثلث PQR کا مرکزِ ہندسی (centroid) ہے۔
3. دی گئی شکل میں $\overline{GD}$ کی لمبائی 2cm ہے معلوم کریں تو $\overline{AD}$ کی لمبائی معلوم کریں۔



مسئلہ 10.1.5

اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط ایک خط قاطعہ پر متماثل قطعات بنائیں تو وہ کسی دوسرے خط قاطعہ پر بھی متماثل قطعات بنائیں گے۔



معلوم:

$\overleftrightarrow{GH}$ جو کہ $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{CD}$ کو بالترتیب نقطہ P, Q, R پر قطعہ کرتا ہے
اس طرح کہ $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$ اسی طرح XY جو کہ $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{CD}$ کو
بالترتیب نقطہ M, N, O پر قطعہ کرتا ہے۔

مطلوب: $\overline{NM} \cong \overline{NO}$

عمل:

$\overline{MJ}$ اور $\overline{NK}$ کو $\overleftrightarrow{GH}$ کے متوازی بنائیں جو $\overline{CD}$ اور $\overline{EF}$ دونوں کو بالترتیب نقطہ J اور K پر ملے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overline{PM} \parallel \overline{QJ}$	$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (معلوم)
اور $\overline{PQ} \parallel \overline{MJ}$	عمل
PMJQ ایک متوازی الاضلاع ہے۔	مخالف اضلاع متوازی ہیں۔
$\therefore \overline{PQ} \cong \overline{MJ}$	متوازی الاضلاع کی مخالف اضلاع۔
اسی طرح QRKN بھی ایک متوازی الاضلاع ہے۔	$\overline{QN} \parallel \overline{RK}$ اور $\overline{QR} \parallel \overline{NK}$
$\therefore \overline{QR} \cong \overline{NK}$	اوپر ثابت شدہ۔
لیکن $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$	معلوم

بیانات	وجوہات
$\overline{MJ} \cong \overline{NK}$	مساوات کی متعویت خاصیت
اب $\overline{MJ} \parallel \overline{NK}$	دونوں $\overline{GH}$ کے متوازی ہیں۔
$\therefore \quad \angle 1 \cong \angle 2$	اضلاع کے متناظرہ زاویے۔
$\Delta MNJ \leftrightarrow \Delta NOK$ میں	
i. $\angle 1 \cong \angle 2$	i.اوپر ثابت شدہ
ii. $\angle 3 \cong \angle 4$	ii۔اضلاع کے متناظرہ زاویے۔
iii. $\overline{MJ} \cong \overline{NK}$	iii.اوپر ثابت شدہ۔
$\therefore \quad \Delta MNJ \cong \Delta NOK$	ز-ز-ض ≅ ز-ز-ض
$\therefore \quad \overline{MN} \cong \overline{NO}$	مثالث کے متماثل ہونے کی بناپر

Q.E.D

مشق 10.5

1. مثلث کے اضلاع کے واسطی نقاط کو ملانے سے جو مثلث بنتی ہے وہ اصل مثلث کے برابر ہوتی ہے۔
2. وہ قطعہ خط جو ذوزنقہ کے دو غیر متوازی اضلاع کے واسطی نقاط کو آپس میں ملاتا ہے وہ متوازی اضلاع کے متوازی اور ان کی جمع کی رقم کا نصف ہوتا ہے۔
3. ہر قطعہ خط جو مثلث کی بنیاد کی راس سے بنایا جائے وہ اس خط کی تنصیف کرے گا جو باقی دو اضلاع کے وسطی نقاط کو آپس میں جوڑے۔

اعادہ مشق 10

1. خالی جگہ پُر کریں:

(i) متوازی الاضلاع میں، مخالف اضلاع ______ ہوتے ہیں۔

(ii) متوازی الاضلاع میں، مخالف زاویے ______ ہوتے ہیں۔

(iii) مثلث میں وسطانیے ______ ہوتے ہیں۔

(iv) متوازی الاضلاع میں، وتر ایک دوسرے کو ______ کرتے ہیں۔

(v) متوازی الاضلاع کے متناظرہ زاویے ______ ہوتے ہیں۔

(vi) مثلث کے وسطانیے ______ ہوتے ہیں۔

(vii) چوکور کے اندرونی زاویوں کی جمع کی رقم ______ ہوتی ہے۔

2. درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

(i) مربع کے وتر ایک دوسرے کے _____ ہوتے ہیں۔

(ا) عمود　(ب) غیر متناظرہ　(ج) متناظرہ　(د) (ا) اور (ج) دونوں

(ii) چوکور کے اندرونی زاویوں کی جمع کی رقم _____ برابر ہوتی ہے۔

(ا) 2 قائمہ زاویہ　(ب) 4 قائمہ زاویہ　(ج) 3 قائمہ زاویہ　(د) کوئی بھی نہیں

(iii) ایک قطعہ خط جو ΔABC کے خط $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کے وسطی نقاط کو جوڑتا ہے اس کی لمبائی 3.5cm ہے تو $m\overline{BC}$ ہوگی۔

(ا) 4.5cm　(ب) 5.5cm　(ج) 6cm　(د) 7cm

(iv) مثلث ABC کے دو وسطانیے $\overline{BE}$ اور $\overline{AD}$ نقطہ G پر ملتے ہیں۔ اگر $m\overline{GD} = 1.7cm$ ہے تو $m\overline{AG}$ کیا ہوگا۔

(ا) 2.5 cm　(ب) 8.85cm　(ج) 3.4cm　(د) 5.1cm

(v) متوازی الاضلاع ABCD کے دو زاویے $\angle A$ اور $\angle C$ کی جمع 130^o ہے تو $m\angle B$ کیا ہوگا؟

(ا) 25^o　(ب) 115^o　(ج) 65^o　(د) کوئی بھی نہیں

(vi) اگر چوکور کے مخالف زاویے آپس میں برابر ہیں اور کوئی بھی قائمہ زاویہ نہیں ہے تو چوکور ہوگا۔

(ا) مربع　(ب) متوازی الاضلاع　(ج) ذوزنقہ　(د) مستطیل

(vii) مرکزِ ہندسی کس کے میلاپ کا مشترکہ نقطہ ہوگا۔

(ا) مثلث کے وسطانیے　(ب) متوازی الاضلاع کے وتر

(ج) مثلث کے زاویوں کے ناصف　(د) مثلث کا عمودی ناصف

(viii) مثلث کے وسطانیہ پر نقطہ ہوتا ہے۔

(ا) اس کے کونیوں سے مساوی الفاصلہ　(ب) اس کے اضلاع کے وسطانیوں سے مساوی الفاصلہ

(ج) مثلث کی ارتفاع سے مساوی الفاصلہ　(د) کوئی بھی نہیں

خلاصہ

- متوازی الاضلاع کی مخالف اضلاع متماثل ہوتی ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے مخالف زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- سپلیمنٹری زاویوں کی خاصیت مسلسل زاویوں کے لیے بھی ہوگی۔
- متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کو باہم تنصیف کریں گے اور ہر وتر اس کو دو متماثل مثالث میں تقسیم کر دے گا۔
- اگر متوازی الاضلاع کا زاویہ قائمہ زاویہ ہوگا تو اس کا ہر زاویہ قائمہ زاویہ ہوگا۔
- متوازی الاضلاع کے وتر اس کو چار متماثل مثالث میں تقسیم کرتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے زاویوں کی جمع 360 ہوتی ہے۔
- مثلث کے اندرونی زاویوں کی جمع 180 ہوتی ہے۔
- مثلث کے بیرونی زاویوں کی جمع 360 ہوتی ہے۔
- اگر تین یا تین سے زایہ متوازی خط متماثل حصوں کو تشکیل دیتے ہیں تو اس کے برعکس وہ متماثل حصوں کو دوسرے خطوں پر کاٹتے ہیں۔
- مثلث کے وسطانیے ہم نقط ہوتے ہیں اور ان کا میلاپ کا نقطہ ہر وسطانیہ کی تثلیث کے نقطے کے برابر ہوتا ہے۔
- وہ قطعہ خط جو مثلث کے دو اضلاع کے نقط وسطانیہ کو ملاتا ہے وہ تیسرے اضلاع کے متوازی ہوتا ہے اور اس کی لمبائی تیسرے اضلاع کی لمبائی کا نصف ہوتا ہے۔