مفت تقسیم کے لیے

آزمائشی اشاعت

درسی کتاب

ریاضی

برائے جماعت 9

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

طبع کنندہ

یونیورسل بک ڈپو، حیدرآباد۔

مفت تقسیم کے لیے

تیار کردہ: ایسوسی ایشن فار اکیڈمک کوالٹی (آفاق) برائے سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

سندھ کے تعلیمی مدارس کراچی، حیدرآباد، سکھر، لاڑکانہ، میرپور خاص اور شہید بینظیر آباد بورڈ کیلئے بطور واحد درسی کتاب۔

نظر ثانی: صوبائی ریویو کمیٹی ڈائریکٹوریٹ آف کیریکولم اسیسمینٹ اینڈ ریسرچ، سندھ جام شورو۔

منظور کردہ: محکمۂ تعلیم مدارس وخواندگی ادارۂ نصاب جائزہ و تحقیق حکومت سندھ

مراسلہ نمبر SO(C)SELD/STBB-18/2021

نگران اعلیٰ
عبدالعلیم لاشاری
چیئرمین سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

مینیجنگ ڈائریکٹر
شاہد وارثی
ایسوسی ایشن فار اکیڈمک کوالٹی (AFAQ)

پروجیکٹ ڈائریکٹر
خواجہ آصف مشتاق
ایسوسی ایشن فار اکیڈمک کوالٹی (AFAQ)

پروجیکٹ مینیجر
رفیع مصطفیٰ
ایسوسی ایشن فار اکیڈمک کوالٹی (AFAQ)

چیف سپروائزر
یوسف احمد شیخ
سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

سپروائزر
داریوش کافی
سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

مصنفین
- مسٹر آفتاب علی
- مسٹر سید آفاق احمد
- پروفیسر محمد فاروق خان
- مسٹر اویس سراج
- مس اقرا مغل
- مسٹر عمر خان

مترجمین
- مس سعدیہ جبین
- مس حفصہ

ٹیکنیکل اسسٹنس اور کوآرڈینیشن
- جناب محمد ارسلان شفاعت گدی

نظر ثانی کردہ
- مسٹر عبدالسلیم
- مسٹر محمد صغیر شیخ
- مسٹر محمد وسیم
- مسٹر محمد افضل احمد
- پروفیسر محمد فاروق خان
- مسٹر اعجاز علی سہیپوٹو
- مسٹر نذیر احمد میمن
- مسٹر محمد یاسر انصاری
- مسٹر آفتاب علی

ایڈیٹر
- مسٹر میر سرفراز خلیل ساند

کنسلٹنٹ:
- کامران لطیف لغاری : اے ایس ایس
- میر سرفراز خلیل ساند : جے ایس ایس

اشاعت کا سال: 2024

مطبع: یونیورسل بک ڈپو، حیدرآباد۔

مفت تقسیم کے لیے

پیش لفظ

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ کا کام درسی کتابوں کی تیاری اور اشاعت ہے تاکہ ہماری نئی نسل کو سائنس، ٹیکنالوجی اور انسانیت کے شعبوں میں نئی صدی کے چیلنجوں سے نمٹنے کی صلاحیت، مہارت اور صلاحیت سے آراستہ کیا جاسکے۔ درسی کتابوں کا مقصد عالمی بھائی چارے کو اجاگر کرنا اور ہمارے آباؤاجداد کے اعمال کی عکاسی کرنا اور ہمارے بھرپور ثقافتی ورثے اور روایت کے روشن نمونوں کو پیش کرنا ہے۔

نئی اشاعت میں تعارفی پیراگراف، انفارمیشن ڈبہ، خلاصے اور مختلف قسم کی وسیع مشقیں ہیں جن کے بارے میں میرے خیال میں نہ صرف دلچسپی پیدا ہوگی بلکہ کتاب کی افادیت میں بھی بہت اضافہ ہوگا۔

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ نے اپنی محدود وسائل کے باوجود اس کتاب کی اشاعت میں بہت تکلیف اور اخراجات اٹھائے۔ درسی کتاب درحقیقت آخری لفظ نہیں ہے اور اس میں ہمیشہ بہتری کی گنجائش ہوتی ہے۔ اگرچہ مصنفین نے اپنی سطح پر بہترین انداز میں پیش کرنے کی کوشش کی ہے، تاہم تصور اور ضرورت کے لحاظ سے، اب بھی کچھ کمیاں اور کوتاہیاں ہوسکتی ہیں۔ ہم اساتذہ، طالب علموں، والدین، تحقیق کرنے والوں اور اس سطح کے لیئے لکھی جانے والی کتابوں سے متعلق تمام افراد سے گذارش کرتے ہیں کہ وہ ہمیں اس کتاب سے متعلق ردِ عمل اور تجاویز دیں تاکہ ہم اس کتاب کو مزید بہتر بنا سکیں۔

ہماری آرگنائزیشن ان تمام مصنفین ،اس کتاب کو نظرثانی کرنے والوں اور ایسوسی ایشن فار آکیڈمک کوالٹی (AFAQ) کی احسان مند اور شکرگذار ہے جن کی انتھک کوششوں نے اس کتاب کو اس لیول یا سطح کے لیئے لکھی جانے والی تمام کتابوں کے مقابلے کے قابل بنادیا ہے۔

چیئرمین
سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جامشورو

مفت تقسیم کے لیے

بِسۡمِ اللّٰہِ الرَّحۡمٰنِ الرَّحِیۡمِ

فہرست

مفت تقسیم کے لیے

یونٹ 1

حقیقی اور کمپلیکس اعداد

REAL AND COMPLEX NUMBER

حاصلاتِ تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- جان جائیں گے کہ مکمل حقیقی اعداد کا سیٹ ناطق اور غیر ناطق اعداد کا یونین سیٹ ہوتا ہے۔
- حقیقی اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کر سکیں گے۔
- ختم ہونے والے نا ختم ہونے والے اور تکراری اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کر سکیں گے۔
- ناطق اور غیر ناطق اعداد کی اعشاری نمائندگی میں فرق کر سکیں گے۔
- حقیقی اعداد کی خصوصیات کو جان کر سکیں گے۔
- جذری اور مجذور مقداروں کے تصورات کی وضاحت کر پائیں گے۔
- جذری اور قوت نمائی شکل کے جملوں میں فرق واضح کر پائیں گے۔
- جذری جملوں کو قوت نمائی جملوں میں تبدیل کرنے اور قوت نمائی جملوں کو جذری جملوں میں بدل سکیں گے۔
- اساس، قوت نما اور قدر کی یاددہانی کرانا۔
- قوت نمائی کے قوانین کی مدد سے اُن جملوں (مقداروں) کو مختصر کر سکیں گے۔ جن میں قوت نما موجود ہے۔
- کمپلیکس اعداد کے تصور کی تعریف کرنا اور ایک کمپلیکس عدد z کو $z = a + ib$ میں ظاہر کرنا جس میں a اور b دو حقیقی اعداد ہوں اور $i = \sqrt{-1}$ خیالاتی (imaginary) عدد ہو۔
- $z = a + ib$ میں a کو حقیقی حصہ اور b کو خیالاتی حصہ سمجھ سکیں گے۔
- کمپلیکس عدد کے کانجوگیٹ (conjugate) کی تعریف کرنا۔
- دیئے ہوئے دو کمپلیکس اعداد کے درمیان برابری کا تصور جان سکیں گے۔
- کمپلیکس اعداد کی بنیادی نشانیاں پر جمع و تفریق و ضرب اور تقسیم کو استعمال کر سکیں گے۔

تعارف:

ہم سابقہ جماعتوں میں اعداد کی مختلف اقسام کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ جیسا کہ قدرتی اعداد (گنتی کے اعداد)، مکمل اعداد، صحیح اعداد، ناطق اور غیر ناطق اعداد وغیرہ۔

یہ تمام اعداد حقیقی اعداد کے سیٹ میں شامل ہوتے ہیں۔ پس، حقیقی اعداد کی درجہ بندی نیچے دی گئی ہے۔

- حقیقی اعداد $\mathbb{R}$
  - ناطق اعداد: $\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, \text{where } a, b \in \mathbb{Z}, \wedge b \neq 0 \right\}$
    - صحیح اعداد: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$
      - صحیح جفت اعداد: $E = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$
      - مکمل اعداد: $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
        - قدرتی اعداد: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
          - مفرد اعداد: $P = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$
      - صحیح طاق اعداد: $O = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}$
    - غیر صحیح ناطق اعداد $(\mathbb{Z}')$
  - غیر ناطق اعداد: $\mathbb{Q}' = \left\{ x \mid x \neq \frac{a}{b}, \text{where } a, b \in \mathbb{Z}, \wedge b \neq 0 \right\}$

1.1 حقیقی اعداد

1.1.1 دہرا حقیقی اعداد کا سیٹ ناطق اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ کا یونین سیٹ ہوتا ہے۔

حقیقی اعداد کا سیٹ ناطق اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ کا یونین ہوتا ہے۔ جیسا کہ $R = Q \cup Q'$

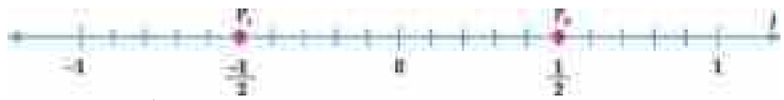
ہم پہلے ناطق اور غیر ناطق اعداد کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ حقیقی اعداد کی بہت سی خصوصیات ہوتی ہیں جیسا کہ ناطق اعداد کی خصوصیات ہوتی ہیں۔

1.1.2 حقیقی اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کرنا۔ (Represent Real Numbers on the number line)

ہم مکمل اعداد اور صحیح اعداد کو نمبر لائین پر ظاہر کرنا سابقہ جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔ اسی طرح ہم حقیقی اعداد کو بھی نمبر لائین پر ظاہر کر سکتے ہیں۔ آیئے درج ذیل مثالوں کو مشاہدہ کریں۔

مثال 01 $-\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ کو نمبر لائن l پر ظاہر کیجیے۔

حل:



چونکہ دی گئی نمبر لائین میں نقطہ P_1 عدد $-\frac{1}{2}$ کو ظاہر کرتا ہے۔ اور نقطہ P_2 عدد $\frac{1}{2}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 02

-1.5 اور $1\frac{1}{5}$ کو نمبر لائن پر ظاہر کیجیے۔

حل: دی گئی نمبر لائن پر نقطہ P_1 عدد -1.5 کو اور نقطہ P_2 عدد $1\frac{1}{5}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

1.1.3 بحر لائن پر ----

محدود اور لا محدود اعشاری اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کرنا

وضاحت

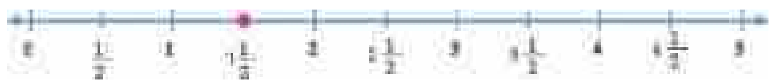
نمبر لائن پر اشاری اعداد کو ظاہر کرنے سے پہلے، نقاط کو ناطق اعداد $\frac{a}{b}$ کے ساتھ مطابقت کی جاتی ہے۔ جبکہ a, b مثبت صحیح اعداد ہوں) ہم ہر ایک حصہ کی لمبائی کو b حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ پھر a^{th} نقطہ نمبر لائن کے اصل (Origin) کے دائیں طرف $\frac{a}{b}$ کو ظاہر کرتا ہے اور بائیں طرف متماثل فاصلے پر $-\frac{a}{b}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 01

درج ذیل محدود اعشاری کسروں کو نمبر لائن پر ظاہر کریں۔

i. $\frac{3}{2}$ ii. $\frac{5}{4}$

i. $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$



ii. $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$

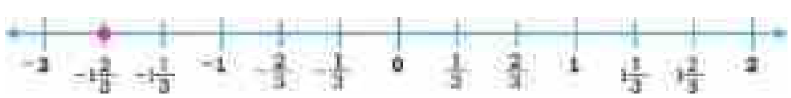
مثال 02

درج ذیل لامحدود اعشاری کسروں کو نمبر لائن پر ظاہر کریں۔

i. $\frac{11}{6}$ ii. $-\frac{5}{3}$

i. $\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}$

iii. $-\frac{5}{3}=-1\frac{2}{3}$



ناطق اور غیر ناطق اعداد کی اعشاری نمائندگی میں فرق کرنا

جب ہم ناطق اعداد کو اعشاری اعداد کی شکل میں لکھتے ہیں تو ہمیں دو قسم کے اعشاری اعداد حاصل ہوتے ہیں۔
محدود اعشاری اعداد اور لامحدود تکراری اعشاری اعداد جبکہ غیر ناطق اعداد کو لامحدود غیر تکراری اعشاری اعداد کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے۔
ان کو نیچے دیئے گئے جدول میں ظاہر کیا گیا ہے۔

نمبر شمار	اعداد	تفریحات
1.	$\frac{1}{2} = 0.5$	محدود اعشاری کسر
2.	$\frac{1}{4} = 0.25$	محدود اعشاری کسر
3.	$\frac{1}{3} = 0.333...$	لامحدود تکراری اعشاری کسر
4.	$\frac{9}{11} = 0.818181...$	لامحدود تکراری اعشاری کسر
5.	$\sqrt{2} = 1.414213...$	لامحدود غیر تکراری اعشاری کسر
6.	$\sqrt{3} = 1.73205...$	لامحدود غیر تکراری اعشاری کسر

مشق 1.1

1. درج ذیل اعداد میں سے ناطق اور غیر ناطق اعداد کی نشاندہی کیجیے اور پھر ان تمام کو الگ الگ خانوں میں لکھیں۔

(i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{6}}$ (iv) $\frac{2}{8}$ (v) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (vi) $\sqrt{8}$

(vii) 0 (viii) π (ix) $\sqrt{5}$ (x) $\frac{22}{3}$ (xi) $\frac{1}{\pi}$ (xii) $\frac{11}{12}$

2. درج ذیل کسر کو اعشاری اعداد میں تبدیل کریں اور پھر محدود اعشاری کسر اور لامحدود اعشاری کسر کی نشاندہی کیجیے۔

(i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{4}{18}$ (iii) $\frac{1}{15}$ (iv) $\frac{49}{8}$ (v) $\frac{207}{15}$ (vi) $\frac{50}{76}$

3. درج ذیل ناطق اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کیجیے۔

(i) $\frac{8}{10}$ (ii) $-\frac{8}{10}$ (iii) $1\frac{1}{4}$ (iv) $-1\frac{1}{4}$ (v) $\frac{2}{3}$ (vi) $-\frac{2}{3}$

4. 1 اور 2 کے درمیان تمام حقیقی اعداد کی فہرست بنائیں۔

5. pi (π) ایک غیر ناطق عدد ہے وضاحت کیجیے۔

6. صحیح بیان پر (✓) کا نشان لگائیں۔

(i) $\frac{5}{7}$ ایک غیر ناطق عدد کی مثال ہے

(ii) π ایک غیر ناطق عدد ہے۔

(iii) 0.31591 لامحدود اور غیر تکراری اشاری کسر کی ایک مثال ہے۔

(iv) 0.123 تکراری اعشاری عدد کی ایک مثال ہے۔

(v) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ، 0 اور 1 کے درمیان والے عدد ہیں۔

(vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ناطق عدد کی ایک مثال ہے۔

1.2 حقیقی اعداد کی خصوصیات

حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ جمع اور ضرب پائی جاتی ہیں۔ a اور b دو حقیقی اعداد ہو تو ان کا حاصل جمع (sum) $a+b$ اور ان کا حاصل ضرب (Product) ab یا $a \times b$ یا ab لکھا جاتا ہے۔

1.2.1 حقیقی اعداد کے خصوصیات کے بارے میں جاننا۔

(a) حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ جمع

(i) خاصیت بندش

کوئی سے دو حقیقی اعداد a اور b کے لیے۔

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}$$

e.g. (i) $5, 7 \in \mathbb{R} \Rightarrow 5+7 = 12 \in \mathbb{R}$

(ii) $\frac{4}{5}, \frac{3}{4} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{4}{5}+\frac{3}{4} = \frac{16+15}{20} = \frac{31}{4} \in \mathbb{R}$

(ii) خاصیت مبادلہ Commutative Property:

کوئی سے دو حقیقی اعداد a اور b کے لیے۔

$$a+b=b+a$$

خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع کہلاتی ہے۔

مثلاً $\sqrt{5}+\sqrt{6}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$. (ii) $\qquad$ $3+7=7+3$ (i)

(iii) خاصیت تلازم (Associative Property)

کوئی سے تین حقیقی اعداد a, b اور c کے لیے۔

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

خاصیت تلازم بلحاظ جمع کہلاتی ہے۔

مثلاً $(4+5)+6=4+(5+6)$

(iv) جمعی ذاتی عنصر Additive Identity:

$$a+0=a=0+a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

0 کو اضافی شناخت کہا جاتا ہے

مثلاً $3+0=3=0+3, \ \frac{7}{8}+0=\frac{7}{8}=0+\frac{7}{8},$

(v) جمعی معکوس (Additive Inverse)

حقیقی اعداد کے سیٹ $\mathbb{R}$ میں ہر رکن a کا ایک اور صرف ایک ہی جمعی معکوس $-a \in \mathbb{R}$ موجود ہے جیسا کہ $a+(-a)=0=(-a)+a$

مثلاً: $6+(-6)=0=(-6)+6=0$

لہٰذا 6 اور -6 ایک دوسرے کا جمعی معکوس ہیں

(b) حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ ضرب۔

(i) خاصیت بندش (Closure Property)

کسی دو حقیقی اعداد کا حاصل ضرب بھی ایک حقیقی عدد ہی ہوتا ہے۔ جیساکہ $a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow ab \in \mathbb{R}$ اس کی خاصیت بندش بلحاظ ضرب کہلاتی ہے۔

مثلاً

(i) $\quad 5,7 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow (5)(7)=35 \in \mathbb{R}$

(ii) $\quad \frac{3}{5},\frac{6}{7} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)=\frac{18}{35} \in \mathbb{R}$, etc

خاصیت مبادلہ (Commutative Property)

کوئی سے دو حقیقی اعداد a اور b کے لیے $ab = ba$ خاصیت مبادلہ بلحاظ ضرب کہلاتی ہے۔

مثلاً (i) $\sqrt{3}, \sqrt{5} \in \mathbb{R} \Rightarrow (\sqrt{3})(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})(\sqrt{3})$

(ii) $3, 4 \in \mathbb{R} \Rightarrow 3\times4 = 4\times3$ وغیرہ۔

خاصیت تلازم (Associative Property)

کوئی سے تین حقیقی اعداد a,b اور c کے لیے

$(ab)c = a(bc)$ خاصیت تلازم بلحاظ ضرب کہلاتی ہے۔

مثلاً (i) $4,5,6 \in \mathbb{R},$ پھر $(4\times5)\times6 = 4\times(5\times6),$

(ii) $\frac{2}{5}, 4, \sqrt{3} \in \mathbb{R},$ پھر $(\frac{2}{5}\times4)\times\sqrt{3} = \frac{2}{5}\times(4\times\sqrt{3})$ وغیرہ۔

(iv) ضربی ذاتی عنصر (Multiplicative Identity)

حقیقی اعداد کے سیٹ $\mathbb{R}$ میں ایک اور صرف ایک ہی حقیقی عدد $1 \in \mathbb{R}$ موجود ہے جو ضربی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔

جبکہ $a\times1 = 1\times a = a$ '1'

مثلاً $1\times3 = 3\times1 = 3,$

$\frac{3}{5}\times1 = 1\times\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$ وغیرہ۔

ضربی معکوس (Multiplicative Inverse)

سیٹ $\mathbb{R}$ میں ہر حقیقی عدد $a\ (a \neq 0)$ کا ضربی معکوس ایک اور صرف ایک ہی نمبر $\frac{1}{a}$ or $a^{-1} \in \mathbb{R}$ موجود ہوتا ہے۔

جبکہ $\frac{1}{a}$ کا ضربی معکوس کہا جاتا ہے۔

جبکہ $a\times\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\times a = 1$ یا

مثلاً اگر $3\times\frac{1}{3} = 1 = \frac{1}{3}\times3$

لہٰذا 3 اور $\frac{1}{3}$ ایک دوسری کا ضربی معکوس ہیں۔

ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع Distributive property of Multiplication over addition.

کوئی سے تین حقیقی اعداد a,b اور c کے لیے

(i) $a(b+c) = ab+ac,$ ہر ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع کہلاتی ہے۔(بائیں خاصیت تقسیمی)

(ii) $(a+b)c = ac+bc$ یہ ضرب کے خاصی تقسیمی بلحاظ جمع کہلاتی ہے۔(دائیں خاصیت تقسیمی)

مثلاً $3(5+7) = 3\times5 + 3\times7,$ (بائیں خاصیت تقسیمی)

$(3+7)2 = 3\times2 + 7\times2,$ (دائیں خاصیت تقسیمی)

نوٹ: $a(b-c) = ab-ac$ یہ ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق کہلاتی ہے۔

(d) حقیقی اعداد کی برابری کی خصوصیات

حقیقی اعداد کی برابری کی خصوصیات مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) عکسی خاصیت (Reflexive Property)

اگر $a\in\mathbb{R}$ ہو تو پھر $a = a$ ہوتا ہے۔

(ii) خاصیت تشاکل (Symmetric Property)

اگر $a,b\in\mathbb{R}$ ہو تو $a=b \Leftrightarrow b=a$

(iii) متعدی خاصیت (Transitive Property)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ پھر , $a=b$ اور $b=c \Leftrightarrow a=c.$

(iv) جمعی خاصیت (Additive Property)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ پھر , $a=b \Leftrightarrow a+c=b+c.$

(v) ضربی خاصیت (Multiplicative Property)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ اس طرح کہ , $a=b$ پھر $ac=bc.$

(vi) تنسیخی خاصیت بالحاظ جمع (Cancellation Property w.r.t addition)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$, اگر $a+c=b+c$ پھر $a=b$

(vii) تنسیخی خاصیت بالحاظ ضرب (Cancellation Property w.r.t multiplication)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ اور $c\neq0$ اگر $ac=bc$ پھر $a=b$

حقیقی اعداد کی نابرابری خصوصیات Properties of Inequalities of Real Numbers.

حقیقی اعداد کی نابرابری خصوصیات درج ذیل ہیں

(ii) خاصیت ثلاثی (Trichotomy Property)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ پھر $a>b$ یا $a<b$ یا $a=b.$

(iii) متعدی خاصیت (Transitive Property)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ پھر

(a) $a<b$ اور $b<c \Rightarrow a<c,$

(b) $a>b$ اور $b>c \Rightarrow a>c.$

(iii) جمعی خاصیت (Additive Property)

اگر $a,b,c \in \mathbb{R}$ پھر

(a) $a < b \Rightarrow a+c < b+c,$

(b) $a > b \Rightarrow a + c > b + c.$

(iv) ضربی خاصیت (Multiplicative Property)

اگر $a,b,c \in \mathbb{R}$ اور $c > 0$ پھر

(a) $a > b \Rightarrow ac > bc,$

(b) $a < b \Rightarrow ac < bc,$

اگر $c < 0$ پھر

(a) $a > b \Rightarrow ac < bc$

(b) $a < b \Rightarrow ac > bc$

(v) ضربی معکوس خاصیت

اگر $a,b \in \mathbb{R}$ کی نشانی ایک جیسی ہے تو پھر

(a) اگر $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ اور اگر $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Rightarrow a > b$

(b) اگر $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ اور اگر $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow a < b$

(vi) تنسیخی خاصیت

اگر $a,b,c \in \mathbb{R}$

(a) $a + c > b + c \Rightarrow a > b$

(b) $a + c < b + c \Rightarrow a < b$

اس طرح (a) $ac > bc \Rightarrow a > b,$ یہاں $c > 0$

(b) $ac < bc \Rightarrow a < b,$ یہاں $c > 0$

مشق 1.2

(1) درج ذیل جملوں میں حقیقی اعداد کی خاصیت کی نشاندہی کیجیے۔

(i) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{4}{3}+\left(1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}+1\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}$

(iii) $9\times\left(\frac{10}{9}+\frac{20}{9}\right)=\left(9\times\frac{10}{9}\right)+\left(9\times\frac{20}{9}\right)$

(iv) $\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{7}\right)\times\frac{7}{8}=\left(\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{5}{7}\times\frac{7}{8}\right)$

(v) $\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{5}\right)\times\frac{10}{15}=\left(\frac{7}{5}\times\frac{10}{15}\right)-\left(\frac{3}{5}\times\frac{10}{15}\right)$

(vi) $\frac{d}{c}\times\frac{e}{f}=\frac{e}{f}\times\frac{d}{c}$

(vii) $11\times(15\times21)=(11\times15)\times21$

(viii) $\frac{2}{11}\times\frac{11}{2}=\frac{11}{2}\times\frac{2}{11}=1$

(ix) $\left(\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)=0$

(x) $\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{b}{a}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)=1$

(xi) $\frac{15}{10}\times\left(\frac{8}{5}-\frac{4}{10}\right)=\left(\frac{15}{10}\times\frac{8}{5}\right)-\left(\frac{15}{10}\times\frac{4}{10}\right)$

(xii) $\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=1$

(2) مندرجہ ذیل میں خالی جگہ پر درست حقیقی عدد لکھ کر حقیقی اعداد کی خاصیت کو درست کیجیے۔

(i) $\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\square}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{5}$

(ii) $\frac{7}{10}+\left(\frac{70}{\square}+\frac{16}{33}\right)=\left(\frac{7}{\square}+\frac{\square}{10}\right)+\frac{16}{\square}$

(iii) $\frac{99}{50}\times\frac{50}{99}=\square$

(iv) $\left(\frac{59}{95}\right)\times\left(\frac{95}{59}\right)=\square$

(v) $(-21)+(\square)=0$

(vi) $\frac{5}{8}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{\square}{\square}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{8}\times\frac{\square}{\square}\right)$

(3) خاصیت کو درست کرنے کے لیے خالی جگہ پُر کریں۔

(i) $5<8$ and $8<10 \Rightarrow$ ____ $<$ ____

(ii) $10>8$ and $8>5 \Rightarrow$ ____ $<$ ____

(iii) $3<6 \Rightarrow 3+9<$ ___ $+$ ___

(iv) $4<6 \Rightarrow 4+8<$ ___ $+$ ___

(v) $8>6 \Rightarrow 8+8>$ ___ $+$ ___

(4) خالی جگہ پر کیجئے اور خاصیت کو درست کیجئے۔

(i) $5 < 7 \Rightarrow 5 \times 12 <$ ___ $\times$ ___

(ii) $7 > 5 \Rightarrow 7 \times 12 >$ ___ $\times$ ___

(iii) $6 > 4 \Rightarrow 6 \times (-7)$ ____ $4 \times (-7)$

(iv) $2 < 8 \Rightarrow 2 \times (-4)$ ____ $8 \times (-4)$

(5) درج ذیل اعداد کا جمعی اور ضربی معکوس معلوم کیجئے۔

(i) 3 **(ii)** -7 **(iii)** 0.3 **(iv)** $\frac{-\sqrt{5}}{5}$ **(v)** $\frac{9}{\sqrt{12}}$ **(vi)** 0

1.3 مجذور اور جذری مقداریں۔

1.3.1 مجذور اور جذری مقدار کی شناخت / پہچان۔

فرض کیجئے۔ $n \in Z^+$ (مثبت صحیح اعداد کا سیٹ) $n > 1,$

اور $a \in \mathbb{R}$ پھر کسی حقیقی عدد x کے لیے۔

جیسا کہ $x^2 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{a}$ (square root of a)

اس طرح $x^3 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{a}$ (cube root of a)

$x^4 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{a}$ (4th root of a)

عام طور پر

$x^n = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$ (nth root of a)

$\sqrt[n]{a}$ میں 'a' مجذور اور 'n' اشاریہ (Index of the root) کہلاتا ہے۔

$\sqrt{\ }$ کا نشان جذری نشان کہلاتا ہے۔

1.3.2 کسی بھی جملے کے جذری مقدار اور قوت نمائی شکل میں فرق۔

ہم پہلے پڑھ چکے ہیں کہ $x = \sqrt[n]{a}$ ایک جذری شکل ہے۔

اس طرح $a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{m}{n}}$ قوت نمائی شکل کی چند مثالیں ہیں۔

یاد رہے کہ

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

یہاں $\sqrt[n]{a}$ اس کی جذری شکل ہے اور $a^{\frac{1}{n}}$ اس کی قوت نمائی شکل ہے۔

جذر کے چند مغیر نتائج درج ذیل ہیں۔

$$a, b \in \mathbb{R}^{+} \wedge m, n \in Z$$

(i) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(iii) $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

(iv) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$

(v) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$

(vi) $m\sqrt{a} \pm n\sqrt{a} = (m \pm n)\sqrt{a}$

(vii) $\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}} = \sqrt{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}}$

اس طرح

(i) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(ii) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(iii) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

(iv) $\sqrt[mn]{a^n} = a^{\frac{n}{nm}} = a^{\frac{1}{m}}$

(v) $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

(vi) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a} = a^{\frac{1}{n^2}}$

(vii) $\sqrt[n]{a^n} = a$

(viii) $\dfrac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{a^n}} = 1$

1.3.3 جذری شکل میں دیے گئے جملے کو قوت نمائی شکل میں تبدیل کرنا۔

جذر اور قوت نمائی شکلوں کی خصوصیات بہت مفید ثابت ہوتی ہیں جب ہم جذر یا قوت نماوالی قدروں کو حل کرتے ہیں۔

مثال 01 جذری شکل میں دی گئی مقداروں کو قوت نمائی شکل میں تبدیل کیجیے۔

(i) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (ii) $\sqrt[3]{18}$ (iii) $\sqrt[5]{\frac{5}{7}}$ (iv) $\sqrt[9]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}$ (v) $\sqrt[4]{(ab)^3}$

حل

(i) $\sqrt{\frac{2}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\sqrt[3]{18}=(18)^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\sqrt[5]{\frac{5}{7}}=\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{5}}$

(iv) $\sqrt[9]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{9}}$ (v) $\sqrt[4]{(ab)^3}=(ab)^{\frac{3}{4}}$.

مثال 02 قوت نمائی شکل میں دی گئی مقداروں کو جذری شکل میں تبدیل کریں۔

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(12)^{\frac{n}{2}}$ (iii) $(-7)^{\frac{3}{4}}$ (iv) $\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{5}}$ (v) $\left(-\frac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}}$

حل

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ (ii) $(12)^{\frac{n}{2}}=\sqrt{(12)^n}$ (iii) $(-7)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{(-7)^3}$

(iv) $\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{\left(\frac{y}{x}\right)^{-2}}=\sqrt[5]{\left(\frac{x}{y}\right)^{2}}$ (v) $\left(-\frac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\left(-\frac{x}{y}\right)^{m}}$

مشق 1.3

1. مجذور اور اشاریہ کی نشاندہی کیجیے۔

(i) $\sqrt[3]{5}$ (ii) $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$ (iii) $\sqrt[5]{x^2yz}$

2. درج ذیل کو قوت نمائی شکل میں تبدیل کیجیے۔

(i) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)}$ (ii) $\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^5}$ (iii) $\sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^{-5}}$

(iv) $\sqrt[3]{(yz)^7}$ (v) $\sqrt[9]{27}$ (vi) $\sqrt[3]{(-64)^2}$

(vii) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^m}$ (viii) $\sqrt[5]{(xy)^3}$ (ix) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{4}{3}}}$

3. درج ذیل کو جذری شکل میں تبدیل کیجیے۔

(i) $(5^3)^{\frac{1}{7}}$ (ii) $(ab^{-2})^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\left[\left(\frac{5}{7}\right)^3\right]^{\frac{5}{7}}$

(iv) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{m}{2}}$ (v) $\left[\left(\frac{11}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)\right]^{\frac{1}{5}}$

1.4 قوت نما کے قوانین۔

1.4.1 اساس، قوت نما اور قوت نما کو دہرائیں

قوت نمائی شکل، a^n (پڑھا جائے 'a' کی قوت نما 'n') میں ہم 'a' کو اساس اور 'n' کو 'a' کی قوت کا انڈکس کہتے ہیں نتیجہ a^n، جبکہ $a \in \mathbb{R}$ اس کی قیمت کہلاتی ہے۔ 1.4.2 قوت نما کے قوانین کو استعمال کرتے ہوا ن جملوں (اعداد) کو مختصر کریں جن میں قوت نما موجود ہو۔

(i) حاصل ضرب کی قوت کا قانون

(a) If $a,b \in \mathbb{R}$ and $x,y \in Z^+$

پھر $a^x \times a^y = a^{x+y}$

درج ذیل مثالیں اس قانون پر منحصر ہیں۔

(a) $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$ (b) $3 \times 3^5 = 3^{1+5} \times 3^6 = 729$

(ii) قوت کی قوت کا قانون

اگر $a \in \mathbb{R}$ اور $x, y \in Z^+$, then $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$ ہو تو

درج ذیل مثالیں اس قانون پر منحصر ہیں

(a) $(5^2)^4 = 5^{2\times4} = 5^8$

(b) $\left\{\left(\frac{6}{11}\right)^4\right\}^3 = \left(\frac{6}{11}\right)^{4\times 3} = \left(\frac{6}{11}\right)^{12}$

(c) $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^3\right\}^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{3\times 3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^9 = -\left(\frac{3}{4}\right)^9$

(iii) حاصل ضرب کی قوت کا قانون

$a, b, \in \mathbb{R}$ اور $n \in Z^+$ کے لیے

$$(a\times b)^n = a^n \times b^n$$

درج ذیل مثالیں اس قانون پر منحصر ہیں

(a) $(xy)^3 = x^3y^3$ (b) $\left\{\left[\frac{8}{9}\right]\left[\frac{7}{11}\right]\right\}^3 = \left(\frac{8}{9}\right)^3\left(\frac{7}{11}\right)^3$

(iv) قوتوں کے حاصل تقسیم کا قانون

اگر $a, b, \in \mathbb{R}$ ہو اور $n \in Z^+$ ہو تو $b \neq 0$ جبکہ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

دی گئی مثالیں اس قانون پر منحصر ہیں۔

(a) $\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5^3}{8^3}$ (b) $\left(\frac{f}{g}\right)^4 = \frac{f^4}{g^4}, g\neq 0$

(v) کسر کی قوت کا قانون

اگر $a \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$ اور $m, n \in Z^+$ ہو تو۔

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ if } m > n$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ if } n > m,$$

اگر $m = n$ ہو تو

$$a^{m-n} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

اس طرح $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = \frac{a^n}{a^n} = 1$

دی گئی مثالیں اس قانون پر منحصر ہیں۔

(a) $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$

(b) $\frac{7^3}{7^5} = \frac{1}{7^{5-3}} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

یاد رکھیئے!

$(-a)^n = a^n$, اگر n ایک جفت قوت نما ہو۔
$= -a^n$, اگر n ایک طاق قوت نما ہو۔

یاد رکھیئے!

اگر غیر صفری حقیقی نمبر کی قوت نما صفر ہو تو اس کی قیمت 1 کے برابر ہو گی۔
مثلاً: $3^0 = 1$.

مشق 1.4

.1 حل کریں۔

(i) $\frac{3^5}{3^2}$ (ii) $\frac{2^4 \cdot 5^3}{10^2}$ (iii) $\frac{(a+b)^2 \cdot (c+d)^3}{(a+b) \cdot (c+d)^2}$

.2 قوت نما کے قوانین کا استعمال کر کے حل کریں۔

(i) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^5$

(iv) $(-3 \times 5^2)^3$ (v) $[3 \times (-4)^2]^3$ (vi) $\left(-\frac{a}{bc}\right)^5 \times \left(-\frac{a}{bc}\right)^4$

(vii) $\left(-\frac{c}{d}\right)^2 \left(-\frac{c}{d}\right)^3 \left(-\frac{c}{d}\right)^5$ (viii) $mn^2t^4n^3m^5t^7$ (ix) $a^2c^5b^2a^3c^3b^4a^4$

.3 قوت نما کے قوانین کا استعمال کر کے حل کریں۔

(i) $(5^2)^3$ (ii) $\{(xy)^3\}^5$ (iii) $\{(-4)^2\}^5$

(iv) $\{(-3)^3(-4)^2\}^3$ (v) $\left(\frac{b^2}{5}\right)^3$ (vi) $\left\{\left(-\frac{4}{9}\right)^2\right\}^3$

(vii) $\{(z^3)^2\}^4$ (viii) $\{(mm^2m^3m^4)^2\}^5$ (ix) $-[(-0.1)^2\ (-0.1)^3\ (-0.1)^4]^2$

1.5 کمپلیکس اعداد

کمپلیکس اعداد کے تصور کی تعریف کرنا اور ایک کمپلیکس عدد z کو a میں ظاہر کرنا جس میں a اور b دو حقیقی اعداد ہوں اور $z = a + ib$ خیالائی عدد ہو۔ جبکہ a حقیقی حصہ اور b خیالاتی حصہ ہو۔

ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی حقیقی عدد کا مربع کبھی بھی منفی نہیں ہوتا۔ پس مساوات $x^2 + 1 = 0$ کا حل حقیقی نہیں ہو سکتا۔ حقیقی اعداد میں اس کمی کو دور کرنے کے لیے ریاضی دانوں نے ایک نیا عدد $\sqrt{-1}$ متعارف کروایا جسے خیالی اکا کہا جاتا ہے جس کی خاصیت $i^2 = -1$ ہے جس کی وجہ سے تمام مساواتوں $a>0$, $x^2 + a = 0$ کو بھی حل کرنے کی صلاحیت ہے۔ اعداد جیسے کہ $\sqrt{-1} = i, \sqrt{-5} = \sqrt{5}i, \sqrt{-49} = 7i$ خالصتاً خیالاتی اعداد ہیں۔

کمپلیکس عدد کی تعریف:

$a+ib$ ایک ایسا عدد ہے جہاں a اور b دو حقیقی اعداد ہیں اور i ایک خیالاتی عدد ہے جیسا کہ $i=\sqrt{-1}$ اسے کمپلیکس عدد کہتے ہے اور اسے z سے ظاہر کیا جاتا ہے، جیسا کہ $z=3+4i$ ایک کمپلیکس عدد ہے۔

کسی بھی کمپلیکس عدد $a+ib$ کو جوڑے کی شکل میں (a,b) کے طور پر بھی لکھا جا سکتا ہے۔

جیسا کہ $5+8i=(5,8)$

1.5.2 $z=a+ib$ کو حقیقی حصہ a اور b ایک خیالاتی حصے کے طور پر پہچاننا۔

کمپلیکس عدد $z=a+ib$ میں، a اس کا حقیقی حصہ اور b اس کا خیالاتی حصہ کہلاتا ہے۔ کمپلیکس نمبر عدد کا حقیقی حصہ $\text{Re}(z)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور خیالاتی حصہ کو $\text{Im}(z)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال دیئے گئے کمپلیکس عدد کا حقیقی اور خیالاتی حصہ کی نشاندہی کیجئے۔

$z=3-2i$

یہاں $\text{Re}(z)=a=3$ اور $\text{Im}(z)=b=-2$

1.5.3 کمپلیکس عدد کے کانجوگیٹ کی تعریف کانجوگیٹ کمپلیکس عدد z کو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

کمپلیکس عدد z کے کانجوگیٹ کو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

جیسا کہ اگر $z=a+ib$ ہو تو $\bar{z}=a-ib$

یا اگر If $z=(a,b)$ ہو تو $\bar{z}=(a,-b)$

اور اگر $z=a-ib$ یا $\bar{z}=a+ib$

اگر $z=(a,-b)$ ہو تو $\bar{z}=(a,b)$

کمپلیکس عدد کے کانجوگیٹ میں ہم صرف خیالاتی حصہ کی نشانی بدل دیتے ہیں۔

نوٹ: اگر کسی بھی کمپلیکس عدد z, $z=\left(\bar{\bar{z}}\right)$

مثال درج ذیل کمپلیکس اعداد کا کانجوگیٹ معلوم کیجئے۔

(i) $3+4i$ (ii) $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{5}{4}\right)$

حل

(i) فرض کیجئے: $z_1=3+4i$

تو $\overline{z_1}=\overline{3+4i}$

$\overline{z_1}=3-4i$

(ii) فرض کیجئے: $z_2=\left(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{5}{4}\right)$

$\overline{z_2}=\overline{\left(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{5}{4}\right)}$

$\overline{z_2}=\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{5}{4}\right)$

1.5.4 کمپلیکس اعداد میں برابری کا تصور اور اس کی خصوصیت

دو کمپلیکس اعداد تب برابر ہوتے ہیں اگر ان کے حقیقی حصے اور خیالاتی حصے یکساں ہوں۔

اگر $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ اور $a+ib=c+id$ اگر اور اگر $a=c$ اور $b=d$

مثال 01 اگر $4x+3yi=16+9i$ تو x,y کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$4x+3yi=16+9i \Rightarrow 4x=16$ اور $3y=9,$

$\Rightarrow \frac{4x}{4}=\frac{16}{4}$ اور $\frac{3y}{3}=\frac{9}{3}, \Rightarrow x=4$ اور $y=3.$

مثال 02 $x^2+iy^2=25+i36$ x اور y کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$x^2+y^2i=25+36i \Rightarrow x^2=25$ اور $y^2=36,$

$x=\pm\sqrt{25}$ اور $y=\pm\sqrt{36} \Rightarrow x=\pm5$ اور $y=\pm6$

مشق 1.5

1. درج ذیل کمپلیکس اعداد کو a+ib کی شکل میں لکھیے۔

(i) (1,2) (ii) (2,2) (iii) (3,4)

(iv) (−1,1) (v) (−2,2) (vi) (−3,4)

2. درج ذیل کمپلیکس اعداد کے حقیقی اور خیالاتی حصے لکھیے۔

(i) $1+2i$ (ii) $9i+4$ (iii) $(-5,6)$

(iv) $-1-i$ (v) $\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)i$ (vi) $2i-1$

3. درج ذیل کمپلیکس اعداد کے کانجوگیٹ معلوم کیجئے۔

(i) $3+2i$ (ii) $(4,9)$ (iii) $(-1,1)$

(iv) $1-i$ (v) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)i$ (vi) $3i+1$

4. دیئے گئے اعداد میں تصدیق کیجئے کہ $\overline{(\overline{z})} = z$

(i) $\left(\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{9}{10}\right)i$ (ii) $\left(-\frac{9}{11}\right)+\left(\frac{10}{9}\right)i$ (iii) $\frac{1}{2}-3i$

(iv) $2+3i$ (v) $-2-3\left(-\frac{10}{9}\right)i$ (vi) $4x+3iy$

5. x اور y کی قیمت معلوم کیجئے جبکہ

(i) $x+yi=-5+5i$ (ii) $x^2+iy^2=\frac{16}{9}+\frac{9}{25}i$

(iii) $y^2+\frac{x}{3}i=121-\frac{9}{5}i$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{3}x-\frac{3}{\sqrt{2}}yi=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{9}i$

1.6 کمپلیکس اعداد پر بنیادی عوامل

1.6.1 کمپلیکس اعداد پر جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کا استعمال کیجئے

(i) کمپلیکس اعداد کی جمع

فرض کیجئے $z_1 = a+ib$ اور $z_2 = c+id$ دو کمپلیکس اعداد ہوں تو z_1 اور z_2 کی حاصل جمع

$$z_1+z_2=(a+ib)+(c+id)$$
$$=(a+c)+i(b+d)=(a+c,b+d).$$

مثال 01 اگر $z_1=6+9i$ اور $z_2=-1+2i$ تو z_1+z_2 معلوم کیجئے۔

حل: معلوم ہے کہ $z_1=6+9i=(6,9)$ اور $z_2=-1+2i=(-1,2)$

ہم جانتے ہیں کہ $\mathbf{z_1+z_2=(a+c)+i(b+d)=(a+c,b+d)}$

$$\therefore \quad z_1+z_2=(6,9)+(-1,2)$$
$$\Rightarrow \quad z_1+z_2=(6-1,9+2)$$
$$\Rightarrow \quad z_1+z_2=(5,11)$$

یاد رکھیے!
$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

(ii) کمپلیکس اعداد کی تفریق:

فرض کیجئے $z_1=a+ib$ اور $z_2=c+id, \forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$,

اگر $z_1-z_2=(a+ib)-(c+id)$ ہو تو

پھر $=(a-c)+i.(b-d)=(a-c,b-d)$

یاد رکھیے!
$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

مثال 01 اگر $z_1=-7+2i$ اور $z_2=4-9i$ ہو تو z_1-z_2 معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $z_1=-7+2i=(-7,2)$ اور $z_2=4-9i=(4,-9)$

ہم جانتے ہیں کہ $\mathbf{z_1-z_2=(a-c,b-d)}$

$$\therefore \quad z_1-z_2=(-7-4,2+9)$$
$$\Rightarrow \quad z_1-z_2=(-11,11)$$

(iii) کمپلیکس اعداد کی ضرب:

فرض کیجیے $z_2 = c + id$ اور اگر $z_1 = a + ib$ اگر دو کمپلیکس اعداد ہوں تو $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(c+ib)$$
$$= c(a+ib) + di(a+ib)$$
$$= ac + bci + adi + bdi^2$$
$$= (ac-bd) + i(ad+bc) = (ac-bd, ad+bc) \qquad i^2 = -1$$

یاد رکھیے!

$$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

مثال 01 اگر $z_1 = 3+4i = (3,4)$ اور $z_2 = -3-4i = (-3,-4)$ ہو تو $z_1 z_2$ حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل: $z_1 = 3+4i = (3,4)$ اور $z_2 = -3-4i = (-3,-4)$

ہم جانتے ہیں کہ $z_1 z_2 = (ac-bd, ad+bd)$

$$\therefore \qquad z_1 z_2 = (3,4)\cdot(-3,-4)$$
$$\Rightarrow \qquad z_1 z_2 = (-9+16, -12-12) = (7,-24)$$

(iv) کمپلیکس اعداد کی تقسیم

فرض کیجیے $z_2 = c+id = (c,d),\ z_2 \neq 0$ اور $z_1 = a+ib = (a,b)$ جبکہ اور تمام z_1 اور z_2 حقیقی اعداد ہیں۔

یاد رکھیے!

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id}$$
$$= \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id}$$
$$= \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$
$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

مثال 01 $\dfrac{2+3i}{4+2i}$ حل کیجئے۔

حل:

$$\frac{2+3i}{4+2i}$$
$$=\frac{2+3i}{4+2i}\times\frac{4-2i}{4-2i}$$
$$=\frac{(8+6)+i(12-4)}{(4)^2-(i2)^2}$$
$$=\frac{14+8i}{20}$$
$$=\frac{14}{20}+i\frac{8}{20}$$
$$=\frac{7}{10}+i\frac{4}{10}$$
$$=\left(\frac{7}{10},\frac{4}{10}\right)=\left(\frac{7}{10},\frac{2}{5}\right)$$

مثال 02 تقسیمی فارمولہ کے استعمال سے کمپلیکس اعداد پر تقسیم کا عمل کیجئے۔ $(-1,3)\div(2,-4)$

حل فارمولا:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$
$$\frac{(-1,3)}{(2,-4)}=\left(\frac{(-1)(2)+(3)(-4)}{2^2+(-4)^2},\frac{(3)(2)-(-1)(-4)}{2^2+(-4)^2}\right)$$
$$=\left(\frac{-2-12}{4+16},\frac{6-4}{4+16}\right)$$
$$=\left(\frac{-14}{20},\frac{2}{20}\right)$$
$$=\left(\frac{-7}{10},\frac{1}{10}\right)$$

مشق 1.6

.1 دیئے گئے کمپلیکس اعداد پر ریاضیاتی عوامل کو انجام دیجئے۔

(i) $(3,2)+(9,3)$ (ii) $\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$

(iii) $(15,12)-(10,-9)$ (iv) $\left(\frac{4}{5},\frac{8}{15}\right)-\left(\frac{4}{5},\frac{6}{10}\right)$

(v) $(1,2)(1,-2)$ (vi) $(4,-5)(5,-4)$

(vii) $(3,-7)\div(3,2)$ (viii) $(4,5)\div(2,-3)$

.2 حل کیجئے اور جواب کو $a+ib$ کی شکل میں لکھیے۔

(i) $\frac{-1}{1+i}$ (ii) $(1+i)^4$

(iii) $\left(\frac{1}{1+i}\right)^2$ (iv) $(1+i)^8$

.3 اگر $z_1=-4+6i$ اور $z_2=2\frac{1}{2}-2i$ ہو تو تصدیق کیجئے۔

(i) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (ii) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

.4 اگر $z_1=1+i$ اور $z_2=1-i$ ہو تو تصدیق کیجئے۔

(i) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ (ii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

اعادہ مشق 1

خالی جگہ پُر کریں۔

(i) $\sqrt{5}$ کا ضربی معکوس ____ ہے۔

(ii) $Q\cup Q'=$ ________

(iii) $\mathbb{R}$ حقیقی اعداد میں جمعی ذاتی عنصر ____ ہے۔

(iv) $5+(6+7)=(5+6)+$ ________

(v) $3+(-3)=$ ________

(vi) π ________

(vii) $\frac{22}{7}$ ایک ____ عدد ہے۔

(viii) $-3+5i$ کا کانجوگیٹ ____ ہے۔

(ix) $2i(3-i)$ میں حقیقی حصہ ____ ہے۔

(x) دو کمپلیکس اعداد (a,b) اور (c,d) کا حاصل ضرب ____ ہے۔

جیسا کہ $(a,b).(c.d) =$

2. درج ذیل بیانات کو غور سے پڑھیں اور درست کے لیے 'د' اور غلط کے لیے 'غ' لکھیے۔

(i) $\mathbb{R}$ ایک خاصیت بندش بلحاظ ضرب ہے۔ د/غ

(ii) اگر $x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$ د/غ

(iii) اگر تمام $\forall x,y,z\in\mathbb{R}, x(y-z)=xy-xz$ حقیقی اعداد ہوں تو۔۔۔ د/غ

(iv) ہر دو خیالاتی اعداد کا حاصل ضرب بھی حقیقی عدد ہوتا ہے۔ د/غ

(v) دو حقیقی اعداد کا حاصل جمع بھی ایک حقیقی عدد ہوتا ہے۔ د/غ

3. درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیے۔

(i) $\sqrt{5}$ کا جمعی معکوس ____ ہے۔

(a) $-\sqrt{5}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(c) $\sqrt{-5}$ (d) -5

(ii) $(5i).(-2i) =$

(a) -10 (b) 10

(c) $-10i$ (d) $10i$

(iii) $3(5+7)=3.5+3.7$ میں خاصیت ____ ہے۔

(a) خاصیت مبادلہ (b) خاصیت تلازم

(c) خاصیت تقسیمی (d) خاصیت بندش

(iv) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-2}=$

(a) 2 (b) -2

(c) $2i$ (d) $-2i$

خلاصہ

- ناطق اور غیر ناطق اعداد کا یونین ایک حقیقی اعداد کا سیٹ ہوتا ہے۔ جیسا کہ $\mathbb{R} = Q \cup Q'$

- لا محدود اعشاری اعداد دو قسم کے ہوتے ہیں۔ جیسا کہ تکراری اور غیر تکراری لا محدود اعشاری

- حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ جمع اور ضرب

(i) خاصیت بندش

$a+b \in \mathbb{R}$ اور $ab \in \mathbb{R}, \forall a,b \in \mathbb{R}$

(ii) خاصیت تلازم

$a+(b+c)=(a+b)+c$ اور $a(bc)=(ab)c, \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

(iii) خاصیت مبادلہ

$a+b=b+a$ اور $ab=ba, \forall a,b \in \mathbb{R}$

(iv) ذاتی عنصر کی خاصیت

$a+0=a=0+a$ اور $a \cdot 1=a=1 \cdot a \ \forall a \in \mathbb{R}$

(v) تقسیمی خاصیت

$a(b+c)=ab+ac \text{ or } (b+c)a=ba+ca, \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

(vi) معکوس کی خاصیت

$a+(-a)=0=-a+a$ اور $a \times \frac{1}{a}=1=\frac{1}{a} \times 1, \forall a, \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

- نمبر لائن: ایک افقی لائن جس پر حقیقی عدد ظاہر کیئے جاتے ہیں جسکو نمبر لائن کہتے ہیں۔
- جذر اور مجذور: $\sqrt[n]{a}$ میں، $\sqrt{\ }$ کو جذری علامت کہتے ہیں۔

- قوت نما کے قوانین:

(i) اگر $a,b\in\mathbb{R}$ اور $x\ y\in Z^+$ ہو تو $a^x\times a^y=a^{x+y}$

(ii) اگر $a\in\mathbb{R}$ اور $x\ y\in Z^+$ تو $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$ بدل دیتے ہیں

(iii) اگر $\forall a,b\in\mathbb{R}$ اور $n\in Z^+$ تو $\left(a\times b\right)^n=a^n\times b^n$

(iv) اگر $\forall a,b\in\mathbb{R}$ اور $n\in Z^+$ تو $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

- کمپلیکس اعداد: اگر $z=a+ib=\left(a,b\right)$ ایک کمپلیکس عدد ہے جبکہ b ایک حقیقی حصہ اور z ایک خیالاتی حصہ ہے کا اور $i=\sqrt{-1}$

- کسی بھی دو کمپلیکس اعداد $z_1=a+ib$ اور $z_2=c+id$

$$z_1+z_2=\left(a+c\right)+i\left(b+d\right)$$
$$z_1-z_2=\left(a-c\right)+i\left(b-d\right)$$
$$z_1z_2=\left(ac-bd\right)+i\left(ad+bc\right)$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$