مفت تقسیم کے لیے

آزمائشی اشاعت

درسی کتاب

ریاضی

برائے جماعت 9

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

طبع کنندہ

یونیورسل بک ڈپو، حیدر آباد۔

مفت تقسیم کے لیے

جملہ حقوق بحق سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو محفوظ ہیں۔

تیار کردہ: ایسوسی ایشن فار اکیڈمک کوالٹی (آفاق) برائے سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ
سندھ کے تعلیمی مدارس کراچی، حیدرآباد، سکھر، لاڑکانہ، میرپور خاص اور شہید بینظیر آباد بورڈ کیلئے بطور واحد درسی کتاب۔
نظرثانی: صوبائی ریویو کمیٹی ڈائریکٹوریٹ آف کیریکیولم اسیسمینٹ اینڈ ریسرچ، سندھ جام شورو۔
منظور کردہ: محکمۂ تعلیم مدارس و خواندگی ادارۂ نصاب جائزہ و تحقیق حکومت سندھ
مراسلہ نمبر SO(C)SELD/STBB-18/2021

نگران اعلیٰ
عبدالعلیم لاشاری
چیئرمین سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

مینجنگ ڈائریکٹر
شاہد وارثی
ایسوسی ایشن فار اکیڈمک کوالٹی (AFAQ)

پروجیکٹ ڈائریکٹر
خواجہ آصف مشتاق
ایسوسی ایشن فار اکیڈمک کوالٹی (AFAQ)

پروجیکٹ مینیجر
رفیع مصطفیٰ
ایسوسی ایشن فار اکیڈمک کوالٹی (AFAQ)

چیف سپروائزر
یوسف احمد شیخ
سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

سپروائزر
داریوش کافی
سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

مصنفین
- مسٹر آفتاب علی
- مسٹر سید آفاق احمد
- پروفیسر محمد فاروق خان
- مسٹر اویس سراج
- مس اقرا مغل
- مسٹر عمر خان

مترجمین
- مس سعدیہ جبین
- مس حفصہ

ٹیکنیکل اسسٹنس اور کوآرڈینیشن
- جناب محمد ارسلان شفاعت گدی

نظرثانی کردہ
- مسٹر عبدالسلیم
- مسٹر محمد صغیر شیخ
- مسٹر محمد وسیم
- مسٹر محمد افضل احمد
- پروفیسر محمد فاروق خان
- مسٹر اعجاز علی سہیپوٹو
- مسٹر نذیر احمد میمن
- مسٹر محمد یاسر انصاری
- مسٹر آفتاب علی

ایڈیٹر
- مسٹر میر سرفراز خلیل ساند

کنسلٹنٹ:
- کامران لطیف لغاری: اے ایس ایس
- میر سرفراز خلیل ساند: جے ایس ایس

اشاعت کا سال: 2024

مطبع: یونیورسل بک ڈپو، حیدرآباد۔

مفت تقسیم کے لیے

پیش لفظ

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ کا کام درسی کتابوں کی تیاری اور اشاعت ہے تاکہ ہماری نئی نسل کو سائنس، ٹیکنالوجی اور انسانیت کے شعبوں میں نئی صدی کے چیلنجوں سے نمٹنے کی صلاحیت، مہارت اور صلاحیت سے آراستہ کیا جا سکے۔ درسی کتابوں کا مقصد عالمی بھائی چارے کو اجاگر کرنا اور ہمارے آباؤ اجداد کے اعمال کی عکاسی کرنا اور ہمارے بھرپور ثقافتی ورثے اور روایت کے روشن نمونوں کو پیش کرنا ہے۔

نئی اشاعت میں تعارفی پیراگراف، انفارمیشن ڈبہ، خلاصے اور مختلف قسم کی وسیع مشقیں ہیں جن کے بارے میں میرے خیال میں نہ صرف دلچسپی پیدا ہوگی بلکہ کتاب کی افادیت میں بھی بہت اضافہ ہوگا۔

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ نے اپنی محدود وسائل کے باوجود اس کتاب کی اشاعت میں بہت تکلیف اور اخراجات اٹھائے۔ درسی کتاب درحقیقت آخری لفظ نہیں ہے اور اس میں ہمیشہ بہتری کی گنجائش ہوتی ہے۔ اگرچہ مصنفین نے اپنی سطح پر بہترین انداز میں پیش کرنے کی کوشش کی ہے، تاہم تصور اور ضرورت کے لحاظ سے، اب بھی کچھ کمیاں اور کوتاہیاں ہو سکتی ہیں۔ ہم اساتذہ، طالب علموں، والدین، تحقیق کرنے والوں اور اس سطح کے لیئے لکھی جانے والی کتابوں سے متعلق تمام افراد سے گذارش کرتے ہیں کہ وہ ہمیں اس کتاب سے متعلق ردِعمل اور تجاویز دیں تاکہ ہم اس کتاب کو مزید بہتر بنا سکیں۔

ہماری آرگنائزیشن ان تمام مصنفین ،اس کتاب کو نظرثانی کرنے والوں اور ایسوسی ایشن فار آکیڈمک کوالٹی (AFAQ) کی احسان مند اور شکر گذار ہے جن کی انتھک کوششوں نے اس کتاب کو اس لیول یا سطح کے لیئے لکھی جانے والی تمام کتابوں کے مقابلے کے قابل بنادیا ہے۔

چیئرمین
سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو

مفت تقسیم کے لیے

بِسۡمِ اللّٰہِ الرَّحۡمٰنِ الرَّحِیۡمِ

فہرست

یونٹ نمبر	عنوان	صفحہ نمبر
1	حقیقی اور کمپلیکس اعداد	01 - 26
2	لوگرتھم	27 - 53
3	الجبری اظہاریے اور الجبری کلیئے	54 - 83
4	عمل تجزی	84- 105
5	الجبرا توڑ پھوڑ	106 - 124
6	یک درجی مساواتیں اور غیر مساواتیں	125 - 138
7	خطی یا لائن (لینئر) گراف اور اس کے استعمالات	139 - 163
8	دو درجی مساواتیں	164 - 183
9	متماثل مثلثان	184 - 194
10	متوازی الاضلاع اور مثلث	195 - 205
11	خط اور زاویے کے ناصف	206 - 216
12	مثلث کے اضلاع اور زاویے	217 - 225
13	عملی جیومیٹری - مثلثیں	226 - 237
14	رقبہ سے متعلق مسئلے	238 - 245
15	مثلث کے اضلاع کا عکس / تخمینہ	246 - 253
16	کوآرڈینیٹ جیومیٹری کا تعارف / تجزیاتی جیومیٹری	254 - 270
	جوابات	271

مفت تقسیم کے لیے

یونٹ 1

حقیقی اور کمپلیکس اعداد

REAL AND COMPLEX NUMBER

حاصلات تعلیم:

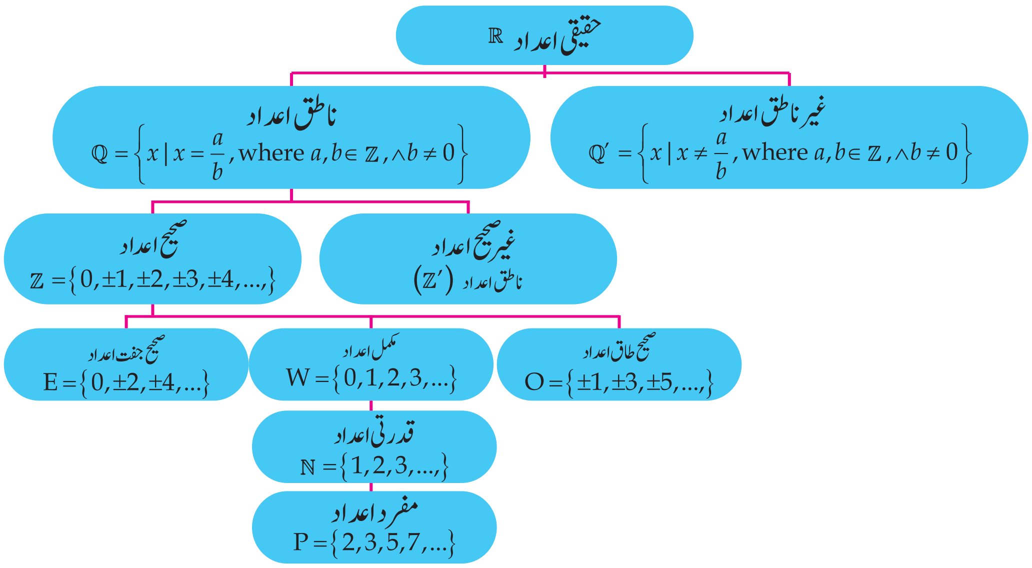
اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- جان جائیں گے کہ مکمل حقیقی اعداد کا سیٹ ناطق اور غیر ناطق اعداد کا یونین سیٹ ہوتا ہے۔
- حقیقی اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کر سکیں گے۔
- ختم ہونے والے نا ختم ہونے والے اور تکراری اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کر سکیں گے۔
- ناطق اور غیر ناطق اعداد کی اعشاری نمائندگی میں فرق کر سکیں گے۔
- حقیقی اعداد کی خصوصیات کو جان کر سکیں گے۔
- جذری اور مجذور مقداروں کے تصورات کی وضاحت کر پائیں گے۔
- جذری اور قوت نمائی شکل کے جملوں میں فرق واضح کر پائیں گے۔
- جذری جملوں کو قوت نمائی جملوں میں تبدیل کرنے اور قوت نمائی جملوں کو جذری جملوں میں بدل سکیں گے۔
- اساس، قوت نما اور قدر کی یاد دہانی کرانا۔
- قوت نمائی کے قوانین کی مدد سے اُن جملوں (مقداروں) کو مختصر کر سکیں گے۔ جن میں قوت نما موجود ہے۔
- کمپلیکس اعداد کے تصور کی تعریف کرنا اور ایک کمپلیکس عدد z کو $z=a+ib$ میں ظاہر کرنا جس میں a اور b دو حقیقی اعداد ہوں اور $i=\sqrt{-1}$ خیالاتی (imaginary) عدد ہو۔
- $z=a+ib$ میں a کو حقیقی حصہ اور b کو خیالاتی حصہ سمجھ سکیں گے۔
- کمپلیکس عدد کے کانجوگیٹ (conjugate) کی تعریف کرنا۔
- دیئے ہوئے دو کمپلیکس اعداد کے درمیان برابری کا تصور جان سکیں گے۔
- کمپلیکس اعداد کی بنیادی نشانیاں پر جمع و تفریق و ضرب اور تقسیم کو استعمال کر سکیں گے۔

تعارف:

ہم سابقہ جماعتوں میں اعداد کی مختلف اقسام کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ جیسا کہ قدرتی اعداد (گنتی کے اعداد)، مکمل اعداد صحیح اعداد، ناطق اور غیر ناطق اعداد وغیرہ۔

یہ تمام اعداد حقیقی اعداد کے سیٹ میں شامل ہوتے ہیں۔ پس، حقیقی اعداد کی درجہ بندی نیچے دی گئی ہے۔



1.1 حقیقی اعداد

1.1.1 دہرا حقیقی اعداد کا سیٹ ناطق اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ کا یونین سیٹ ہوتا ہے۔

حقیقی اعداد کا سیٹ ناطق اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ کا یونین ہوتا ہے۔ جیسا کہ $R=Q\cup Q'$

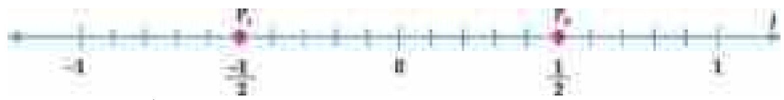
ہم پہلے ناطق اور غیر ناطق اعداد کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ حقیقی اعداد کی بہت سی خصوصیات ہوتی ہیں جیسا کہ ناطق اعداد کی خصوصیات ہوتی ہیں۔

1.1.2 حقیقی اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کرنا۔ (Represent Real Numbers on the number line)

ہم مکمل اعداد اور صحیح اعداد کو نمبر لائین پر ظاہر کرنا سابقہ جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔ اسی طرح ہم حقیقی اعداد کو بھی نمبر لائین پر ظاہر کر سکتے ہیں۔ آیئے درج ذیل مثالوں کو مشاہدہ کریں۔

مثال 01 $-\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ کو نمبر لائن l پر ظاہر کیجیے۔

حل:

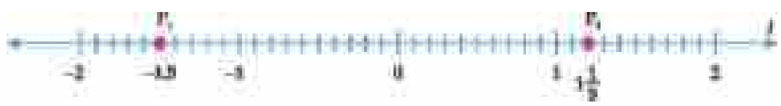


چونکہ دی گئی نمبر لائین میں نقطہ P_1 عدد $-\frac{1}{2}$ کو ظاہر کرتا ہے۔ اور نقطہ P_2 عدد $\frac{1}{2}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 02

-1.5 اور $1\frac{1}{5}$ کو نمبر لائن پر ظاہر کیجیے۔

حل: دی گئی نمبر لائن پر نقطہ P_1 عدد -1.5 کو اور نقطہ P_2 عدد $1\frac{1}{5}$ کو ظاہر کرتا ہے۔



1.1.3 بحر لائن پر----

محدود اور لا محدود اعشاری اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کرنا

وضاحت

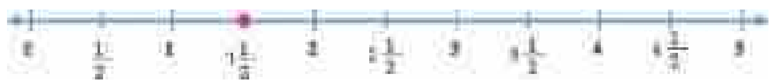
نمبر لائن پر اشاری اعداد کو ظاہر کرنے سے پہلے، نقاط کو ناطق اعداد $\frac{a}{b}$ کے ساتھ مطابقت کی جاتی ہے۔ جبکہ a, b مثبت صحیح اعداد ہوں) ہم ہر ایک حصہ کی لمبائی کو b حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ پھر a^{th} نقطہ نمبر لائن کے اصل (Origin) کے دائیں طرف $\frac{a}{b}$ کو ظاہر کرتا ہے اور بائیں طرف متماثل فاصلے پر $-\frac{a}{b}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 01

درج ذیل محدود اعشاری کسروں کو نمبر لائن پر ظاہر کریں۔

i. $\frac{3}{2}$ ii. $\frac{5}{4}$

i. $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$



ii. $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

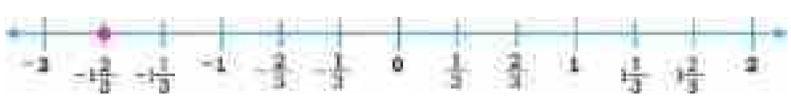
مثال 02

درج ذیل لامحدود اعشاری کسروں کو نمبر لائن پر ظاہر کریں۔

i. $\frac{11}{6}$ ii. $-\frac{5}{3}$

i. $\frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$

iii. $-\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$



ناطق اور غیر ناطق اعداد کی اعشاری نمائندگی میں فرق کرنا

جب ہم ناطق اعداد کو اعشاری اعداد کی شکل میں لکھتے ہیں تو ہمیں دو قسم کے اعشاری اعداد حاصل ہوتے ہیں۔ محدود اعشاری اعداد اور لامحدود تکراری اعشاری اعداد جبکہ غیر ناطق اعداد کو لامحدود غیر تکراری اعشاری اعداد کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے۔ ان کو نیچے دیئے گئے جدول میں ظاہر کیا گیا ہے۔

نمبر شمار	اعداد	تفریحات
1.	$\frac{1}{2} = 0.5$	محدود اعشاری کسر
2.	$\frac{1}{4} = 0.25$	محدود اعشاری کسر
3.	$\frac{1}{3} = 0.333...$	لا محدود تکراری اعشاری کسر
4.	$\frac{9}{11} = 0.818181...$	لا محدود تکراری اعشاری کسر
5.	$\sqrt{2} = 1.414213...$	لا محدود غیر تکراری اعشاری کسر
6.	$\sqrt{3} = 1.73205...$	لا محدود غیر تکراری اعشاری کسر

مشق 1.1

1. درج ذیل اعداد میں سے ناطق اور غیر ناطق اعداد کی نشاندہی کیجئے اور پھر ان تمام کو الگ الگ خانوں میں لکھیں۔

(i) $\frac{1}{5}$ **(ii)** $\frac{\sqrt{2}}{8}$ **(iii)** $\frac{5}{\sqrt{6}}$ **(iv)** $\frac{2}{8}$ **(v)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(vi)** $\sqrt{8}$

(vii) 0 **(viii)** π **(ix)** $\sqrt{5}$ **(x)** $\frac{22}{3}$ **(xi)** $\frac{1}{\pi}$ **(xii)** $\frac{11}{12}$

2. درج ذیل کسر کو اعشاری اعداد میں تبدیل کریں اور پھر محدود اعشاری کسر اور لا محدود اعشاری کسر کی نشاندہی کیجئے۔

(i) $\frac{5}{8}$ **(ii)** $\frac{4}{18}$ **(iii)** $\frac{1}{15}$ **(iv)** $\frac{49}{8}$ **(v)** $\frac{207}{15}$ **(vi)** $\frac{50}{76}$

3. درج ذیل ناطق اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کیجیے۔

(i) $\frac{8}{10}$ (ii) $-\frac{8}{10}$ (iii) $1\frac{1}{4}$ (iv) $-1\frac{1}{4}$ (v) $\frac{2}{3}$ (vi) $-\frac{2}{3}$

4. 1 اور 2 کے درمیان تمام حقیقی اعداد کی فہرست بنائیں۔

5. pi (π) ایک غیر ناطق عدد ہے وضاحت کیجیے۔

6. صحیح بیان پر (✓) کا نشان لگائیں۔

(i) $\frac{5}{7}$ ایک غیر ناطق عدد کی مثال ہے

(ii) π ایک غیر ناطق عدد ہے۔

(iii) 0.31591 لامحدود اور غیر تکراری اشاری کسر کی ایک مثال ہے۔

(iv) 0.123 تکراری اعشاری عدد کی ایک مثال ہے۔

(v) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ ، 0 اور 1 کے درمیان والے عدد ہیں۔

(vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ناطق عدد کی ایک مثال ہے۔

1.2 حقیقی اعداد کی خصوصیات

حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ جمع اور ضرب پائی جاتی ہیں۔ a اور b دو حقیقی اعداد ہو تو ان کا حاصل جمع (sum) $a+b$ اور ان کا حاصل ضرب (Product) ab یا $a\times b$ یا ab لکھا جاتا ہے۔

1.2.1 حقیقی اعداد کے خصوصیات کے بارے میں جاننا۔

(a) حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ جمع

(i) خاصیت بندش

کوئی سے دو حقیقی اعداد a اور b کے لیے۔

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}$$

e.g. (i) $5, 7 \in \mathbb{R} \Rightarrow 5+7 = 12 \in \mathbb{R}$

(ii) $\frac{4}{5}, \frac{3}{4} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{4}{5}+\frac{3}{4} = \frac{16+15}{20} = \frac{31}{4} \in \mathbb{R}$

(ii) خاصیت مبادلہ :Commutative Property

کوئی سے دو حقیقی اعداد a اور b کے لیے۔

$$a+b=b+a$$

خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع کہلاتی ہے۔

مثلاً $\sqrt{5}+\sqrt{6}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$. (ii) $3+7=7+3$ (i)

(iii) خاصیت تلازم (Associative Property)

کوئی سے تین حقیقی اعداد a, b اور c کے لیے۔

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

خاصیت تلازم بلحاظ جمع کہلاتی ہے۔

مثلاً $(4+5)+6=4+(5+6)$

(iv) جمعی ذاتی عنصر :Additive Identity

$$a+0=a=0+a, \quad \forall a\in\mathbb{R}$$

0 کو اضافی شناخت کہا جاتا ہے

مثلاً $3+0=3=0+3,\ \frac{7}{8}+0=\frac{7}{8}=0+\frac{7}{8},$

(v) جمعی معکوس (Additive Inverse)

حقیقی اعداد کے سیٹ $\mathbb{R}$ میں ہر رکن a کا ایک اور صرف ایک ہی جمعی معکوس $-a\in\mathbb{R}$ موجود ہے جیسا کہ $a+(-a)=0=(-a)+a$

مثلاً: $6+(-6)=0=(-6)+6=0$

لہٰذا 6 اور -6 ایک دوسرے کا جمعی معکوس ہیں

(b) حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ ضرب۔

(i) خاصیت بندش (Closure Property)

کسی دو حقیقی اعداد کا حاصل ضرب بھی ایک حقیقی عدد ہی ہوتا ہے۔ جیسا کہ $a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow ab\in\mathbb{R}$ اس کی خاصیت بندش بلحاظ ضرب کہلاتی ہے۔

مثلاً

(i) $5,7\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow (5)(7)=35\in\mathbb{R}$

(ii) $\frac{3}{5},\frac{6}{7}\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)=\frac{18}{35}\in\mathbb{R}$, etc

خاصیت مبادلہ (Commutative Property)

کوئی سے دو حقیقی اعداد a اور b کے لیے $ab = ba$ خاصیت مبادلہ بلحاظ ضرب کہلاتی ہے۔

مثلاً (i) $\sqrt{3}, \sqrt{5} \in \mathbb{R} \Rightarrow (\sqrt{3})(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})(\sqrt{3})$

(ii) $3, 4 \in \mathbb{R} \Rightarrow 3\times 4 = 4\times 3$ وغیرہ۔

خاصیت تلازم (Associative Property)

کوئی سے تین حقیقی اعداد a,b اور c کے لیے

$(ab)c = a(bc)$ خاصیت تلازم بلحاظ ضرب کہلاتی ہے۔

مثلاً (i) $4,5,6 \in \mathbb{R}$, پھر $(4\times 5)\times 6 = 4\times(5\times 6)$,

(ii) $\frac{2}{5}, 4, \sqrt{3} \in \mathbb{R}$, پھر $(\frac{2}{5}\times 4)\times\sqrt{3} = \frac{2}{5}\times(4\times\sqrt{3})$ وغیرہ۔

(iv) ضربی ذاتی عنصر (Multiplicative Identity)

حقیقی اعداد کے سیٹ $\mathbb{R}$ میں ایک اور صرف ایک ہی حقیقی عدد $1 \in \mathbb{R}$ موجود ہے جو ضربی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔

جبکہ $a\times 1 = 1\times a = a$ '1'

مثلاً $1\times 3 = 3\times 1 = 3,$

$\frac{3}{5}\times 1 = 1\times\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$ وغیرہ۔

ضربی معکوس (Multiplicative Inverse)

سیٹ $\mathbb{R}$ میں ہر حقیقی عدد a $(a \neq 0)$ کا ضربی معکوس ایک اور صرف ایک ہی نمبر $\frac{1}{a}$ or $a^{-1} \in \mathbb{R}$ موجود ہوتا ہے۔

جبکہ $\frac{1}{a}$ کا ضربی معکوس کہا جاتا ہے۔

جبکہ $a\times\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\times a = 1$ یا

مثلاً اگر $3\times\frac{1}{3} = 1 = \frac{1}{3}\times 3$

لہٰذا 3 اور $\frac{1}{3}$ ایک دوسری کا ضربی معکوس ہیں۔

ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع Distributive property of Multiplication over addition.

کوئی سے تین حقیقی اعداد a,b اور c کے لیے

(i) $a(b+c) = ab + ac,$ ہر ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع کہلاتی ہے۔ (بائیں خاصیت تقسیمی)

(ii) $(a+b)c = ac+bc$ یہ ضرب کے خاصی تقسیمی بلحاظ جمع کہلاتی ہے۔(دائیں خاصیت تقسیمی)

مثلاً $3(5+7) = 3\times5 + 3\times7,$ (بائیں خاصیت تقسیمی)

$(3+7)2 = 3\times2 + 7\times2,$ (دائیں خاصیت تقسیمی)

نوٹ: $a(b-c) = ab-ac$ یہ ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق کہلاتی ہے۔

(d) حقیقی اعداد کی برابری کی خصوصیات

حقیقی اعداد کی برابری کی خصوصیات مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) عکسی خاصیت (Reflexive Property)

اگر $a\in\mathbb{R}$ ہو تو پھر $a=a$ ہوتا ہے۔

(ii) خاصیت تشاکل (Symmetric Property)

اگر $a,b\in\mathbb{R}$ ہو تو $a=b \Leftrightarrow b=a$

(iii) متعدی خاصیت (Transitive Property)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ پھر , $a=b$ اور $b=c \Leftrightarrow a=c.$

(iv) جمعی خاصیت (Additive Property)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ پھر , $a=b \Leftrightarrow a+c=b+c.$

(v) ضربی خاصیت (Multiplicative Property)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ اس طرح کہ , $a=b$ پھر $ac=bc.$

(vi) تنسیخی خاصیت بالحاظ جمع (Cancellation Property w.r.t addition)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$, اگر $a+c=b+c$ پھر $a=b$

(vii) تنسیخی خاصیت بالحاظ ضرب (Cancellation Property w.r.t multiplication)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ اور $c\neq0$ اگر $ac=bc$ پھر $a=b$

حقیقی اعداد کی نابرابری خصوصیات Properties of Inequalities of Real Numbers.

حقیقی اعداد کی نابرابری خصوصیات درج ذیل ہیں

(ii) خاصیت ثلاثی (Trichotomy Property)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ پھر $a>b$ یا $a<b$ یا $a=b.$

(iii) متعدی خاصیت (Transitive Property)

اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ پھر

(a) $a<b$ اور $b<c \Rightarrow a<c,$

(b) $a>b$ اور $b>c \Rightarrow a>c.$

(iii) جمعی خاصیت (Additive Property)

اگر $a,b,c \in \mathbb{R}$ پھر

(a) $a < b \Rightarrow a+c < b+c,$

(b) $a > b \Rightarrow a + c > b + c.$

(iv) ضربی خاصیت (Multiplicative Property)

اگر $a,b,c \in \mathbb{R}$ اور $c > 0$ پھر

(a) $a > b \Rightarrow ac > bc,$

(b) $a < b \Rightarrow ac < bc,$

اگر $c < 0$ پھر

(a) $a > b \Rightarrow ac < bc$

(b) $a < b \Rightarrow ac > bc$

(v) ضربی معکوس خاصیت

اگر $a,b \in \mathbb{R}$ کی نشانی ایک جیسی ہے تو پھر

(a) اگر $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ اور اگر $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Rightarrow a > b$

(b) اگر $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ اور اگر $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow a < b$

(vi) تنسیخی خاصیت

اگر $a,b,c \in \mathbb{R}$

(a) $a + c > b + c \Rightarrow a > b$

(b) $a + c < b + c \Rightarrow a < b$

اس طرح

(a) $ac > bc \Rightarrow a > b,$ یہاں $c > 0$

(b) $ac < bc \Rightarrow a < b,$ یہاں $c > 0$

مشق 1.2

(1) درج ذیل جملوں میں حقیقی اعداد کی خاصیت کی نشاندہی کیجیے۔

(i) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{4}{3}+\left(1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}+1\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}$

(iii) $9\times\left(\frac{10}{9}+\frac{20}{9}\right)=\left(9\times\frac{10}{9}\right)+\left(9\times\frac{20}{9}\right)$

(iv) $\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{7}\right)\times\frac{7}{8}=\left(\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{5}{7}\times\frac{7}{8}\right)$

(v) $\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{5}\right)\times\frac{10}{15}=\left(\frac{7}{5}\times\frac{10}{15}\right)-\left(\frac{3}{5}\times\frac{10}{15}\right)$

(vi) $\frac{d}{c}\times\frac{e}{f}=\frac{e}{f}\times\frac{d}{c}$

(vii) $11\times(15\times21)=(11\times15)\times21$

(viii) $\frac{2}{11}\times\frac{11}{2}=\frac{11}{2}\times\frac{2}{11}=1$

(ix) $\left(\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)=0$

(x) $\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{b}{a}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)=1$

(xi) $\frac{15}{10}\times\left(\frac{8}{5}-\frac{4}{10}\right)=\left(\frac{15}{10}\times\frac{8}{5}\right)-\left(\frac{15}{10}\times\frac{4}{10}\right)$

(xii) $\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=1$

(2) مندرجہ ذیل میں خالی جگہ پر درست حقیقی عدد لکھ کر حقیقی اعداد کی خاصیت کو درست کیجیے۔

(i) $\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\square}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{5}$

(ii) $\frac{7}{10}+\left(\frac{70}{\square}+\frac{16}{33}\right)=\left(\frac{7}{\square}+\frac{\square}{10}\right)+\frac{16}{\square}$

(iii) $\frac{99}{50}\times\frac{50}{99}=\square$

(iv) $\left(\frac{59}{95}\right)\times\left(\frac{95}{59}\right)=\square$

(v) $(-21)+(\square)=0$

(vi) $\frac{5}{8}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{\square}{\square}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{8}\times\frac{\square}{\square}\right)$

(3) خاصیت کو درست کرنے کے لیے خالی جگہ پُر کریں۔

(i) $5<8$ and $8<10 \Rightarrow$ ____ $<$ ____

(ii) $10>8$ and $8>5 \Rightarrow$ ____ $<$ ____

(iii) $3<6 \Rightarrow 3+9<$ ____ $+$ ____

(iv) $4<6 \Rightarrow 4+8<$ ____ $+$ ____

(v) $8>6 \Rightarrow 8+8>$ ____ $+$ ____

(4) خالی جگہ پر کیجیے اور خاصیت کو درست کیجیے۔

(i) $5 < 7 \Rightarrow 5 \times 12 <$ ___ $\times$ ___

(ii) $7 > 5 \Rightarrow 7 \times 12 >$ ___ $\times$ ___

(iii) $6 > 4 \Rightarrow 6 \times (-7)$ ____ $4 \times (-7)$

(iv) $2 < 8 \Rightarrow 2 \times (-4)$ ____ $8 \times (-4)$

(5) درج ذیل اعداد کا جمعی اور ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

(i) 3 **(ii)** -7 **(iii)** 0.3 **(iv)** $\frac{-\sqrt{5}}{5}$ **(v)** $\frac{9}{\sqrt{12}}$ **(vi)** 0

1.3 مجذور اور جذری مقداریں۔

1.3.1 مجذور اور جذری مقدار کی شناخت / پہچان۔

فرض کیجیے۔ $n \in Z^+$ (مثبت صحیح اعداد کا سیٹ) $n > 1,$

اور $a \in \mathbb{R}$ پھر کسی حقیقی عدد x کے لیے۔

جیسا کہ $x^2 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{a}$ (square root of a)

اس طرح $x^3 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{a}$ (cube root of a)

$x^4 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{a}$ (4th root of a)

عام طور پر

$x^n = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$ (nth root of a)

$\sqrt[n]{a}$ میں 'a' مجذور اور 'n' اشاریہ (Index of the root) کہلاتا ہے۔

$\sqrt{\ }$ کا نشان جذری نشان کہلاتا ہے۔

1.3.2 کسی بھی جملے کے جذری مقدار اور قوت نمائی شکل میں فرق۔

ہم پہلے پڑھ چکے ہیں کہ $x = \sqrt[n]{a}$ ایک جذری شکل ہے۔

اس طرح $a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{m}{n}}$ قوت نمائی شکل کی چند مثالیں ہیں۔

یاد رہے کہ

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

یہاں $\sqrt[n]{a}$ اس کی جذری شکل ہے اور $a^{\frac{1}{n}}$ اس کی قوت نمائی شکل ہے۔

جذر کے چند مغیر نتائج درج ذیل ہیں۔

$a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge m, n \in Z$

(i) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(iii) $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

(iv) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$

(v) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$

(vi) $m\sqrt{a} \pm n\sqrt{a} = (m \pm n)\sqrt{a}$

(vii) $\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}} = \sqrt{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}}$

اس طرح

(i) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(ii) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(iii) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

(iv) $\sqrt[mn]{a^n} = a^{\frac{n}{nm}} = a^{\frac{1}{m}}$

(v) $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

(vi) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a} = a^{\frac{1}{n^2}}$

(vii) $\sqrt[n]{a^n} = a$

(viii) $\dfrac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{a^n}} = 1$

1.3.3 جذری شکل میں دیے گئے جملے کو قوت نمائی شکل میں تبدیل کرنا۔

جذر اور قوت نمائی شکلوں کی خصوصیات بہت مفید ثابت ہوتی ہیں جب ہم جذر یا قوت نماوالی قدروں کو حل کرتے ہیں۔

مثال 01 جذری شکل میں دی گئی مقداروں کو قوت نمائی شکل میں تبدیل کیجیے۔

(i) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (ii) $\sqrt[3]{18}$ (iii) $\sqrt[5]{\frac{5}{7}}$ (iv) $\sqrt[9]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}$ (v) $\sqrt[4]{(ab)^3}$

حل

(i) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\sqrt[3]{18} = (18)^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\sqrt[5]{\frac{5}{7}} = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{5}}$

(iv) $\sqrt[9]{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{9}}$ (v) $\sqrt[4]{(ab)^3} = (ab)^{\frac{3}{4}}$.

مثال 02 قوت نمائی شکل میں دی گئی مقداروں کو جذری شکل میں تبدیل کریں۔

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(12)^{\frac{n}{2}}$ (iii) $(-7)^{\frac{3}{4}}$ (iv) $\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{5}}$ (v) $\left(-\frac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}}$

حل

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ (ii) $(12)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{(12)^n}$ (iii) $(-7)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-7)^3}$

(iv) $\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{y}{x}\right)^{-2}} = \sqrt[5]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}$ (v) $\left(-\frac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(-\frac{x}{y}\right)^m}$

مشق 1.3

1. مجذور اور اشاریہ کی نشاندہی کیجیے۔

(i) $\sqrt[3]{5}$ (ii) $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$ (iii) $\sqrt[5]{x^2yz}$

2. درج ذیل کو قوت نمائی شکل میں تبدیل کیجیے۔

(i) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)}$ (ii) $\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^5}$ (iii) $\sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^{-5}}$

(iv) $\sqrt[3]{(yz)^7}$ (v) $\sqrt[9]{27}$ (vi) $\sqrt[3]{(-64)^2}$

(vii) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^m}$ (viii) $\sqrt[5]{(xy)^3}$ (ix) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{4}{3}}}$

3. درج ذیل کو جذری شکل میں تبدیل کیجیے۔

(i) $(5^3)^{\frac{1}{7}}$ (ii) $(ab^{-2})^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\left[\left(\frac{5}{7}\right)^3\right]^{\frac{5}{7}}$

(iv) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{m}{2}}$ (v) $\left[\left(\frac{11}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)\right]^{\frac{1}{5}}$

1.4 قوت نما کے قوانین۔

1.4.1 اساس، قوت نما اور قوت نما کو دہرائیں

قوت نمائی شکل، a^n (پڑھا جائے ’a‘ کی قوت نما ’n‘) میں ہم ’a‘ کو اساس اور ’n‘ کو ’a‘ کی قوت کا انڈکس کہتے ہیں نتیجہ جبکہ a^n، $a \in \mathbb{R}$ اس کی قیمت کہلاتی ہے۔ 1.4.2 قوت نما کے قوانین کو استعمال کرتے ہوا ان جملوں (اعداد) کو مختصر کریں جن میں قوت نما موجود ہو۔

(i) حاصل ضرب کی قوت کا قانون

(a) If $a, b \in \mathbb{R}$ and $x, y \in Z^+$

پھر $a^x \times a^y = a^{x+y}$

درج ذیل مثالیں اس قانون پر منحصر ہیں۔

(a) $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$ (b) $3 \times 3^5 = 3^{1+5} \times 3^6 = 729$

(ii) قوت کی قوت کا قانون

اگر $a \in \mathbb{R}$ اور $x, y \in Z^+$ ہو تو, then $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

درج ذیل مثالیں اس قانون پر منحصر ہیں

(a) $(5^2)^4 = 5^{2\times4} = 5^8$

(b) $\left\{\left(\frac{6}{11}\right)^{4}\right\}^{3} = \left(\frac{6}{11}\right)^{4\times3} = \left(\frac{6}{11}\right)^{12}$

(c) $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}\right\}^{3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{3\times3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{9} = -\left(\frac{3}{4}\right)^{9}$

(iii) حاصل ضرب کی قوت کا قانون

$a, b, \in \mathbb{R}$ اور $n \in Z^{+}$ کے لیے

$$(a\times b)^{n} = a^{n}\times b^{n}$$

درج ذیل مثالیں اس قانون پر منحصر ہیں

(a) $(xy)^3 = x^3y^3$ (b) $\left\{\left[\frac{8}{9}\right]\left[\frac{7}{11}\right]\right\}^{3} = \left(\frac{8}{9}\right)^{3}\left(\frac{7}{11}\right)^{3}$

(iv) قوتوں کے حاصل تقسیم کا قانون

اگر $a, b, \in \mathbb{R}$ ہو اور $n \in Z^{+}$ ہو تو $b \neq 0$ جبکہ $\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}}$

دی گئی مثالیں اس قانون پر منحصر ہیں۔

(a) $\left(\frac{5}{8}\right)^{3} = \frac{5^{3}}{8^{3}}$ (b) $\left(\frac{f}{g}\right)^{4} = \frac{f^{4}}{g^{4}}, g\neq 0$

(v) کسر کی قوت کا قانون

اگر $a \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$ اور $m, n \in Z^{+}$ ہو تو۔

$$\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}, \text{ if } m > n$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ if } n > m,$$

اگر $m = n$ ہو تو

$$a^{m-n} = a^{m-m} = a^{0} = 1$$

اس طرح $\frac{a^{m}}{a^{n}} = \frac{a^{m}}{a^{m}} = \frac{a^{n}}{a^{n}} = 1$

دی گئی مثالیں اس قانون پر منحصر ہیں۔

(a) $\frac{3^{5}}{3^{2}} = 3^{5-2} = 3^{3} = 27$

(b) $\frac{7^{3}}{7^{5}} = \frac{1}{7^{5-3}} = \frac{1}{7^{2}} = \frac{1}{49}$

یاد رکھیئے!

$(-a)^{n} = a^{n}$, اگر n ایک جفت قوت نما ہو۔
$= -a^{n}$, اگر n ایک طاق قوت نما ہو۔

یاد رکھیئے!

اگر غیر صفری حقیقی نمبر کی قوت نما صفر ہو تو اس کی قیمت 1 کے برابر ہو گی۔
مثلاً: $3^{0} = 1$.

مشق 1.4

1. حل کریں۔

(i) $\frac{3^5}{3^2}$ (ii) $\frac{2^4 \cdot 5^3}{10^2}$ (iii) $\frac{(a+b)^2 \cdot (c+d)^3}{(a+b) \cdot (c+d)^2}$

2. قوت نما کے قوانین کا استعمال کر کے حل کریں۔

(i) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^5$

(iv) $(-3 \times 5^2)^3$ (v) $[3 \times (-4)^2]^3$ (vi) $\left(-\frac{a}{bc}\right)^5 \times \left(-\frac{a}{bc}\right)^4$

(vii) $\left(-\frac{c}{d}\right)^2 \left(-\frac{c}{d}\right)^3 \left(-\frac{c}{d}\right)^5$ (viii) $mn^2t^4n^3m^5t^7$ (ix) $a^2c^5b^2a^3c^3b^4a^4$

3. قوت نما کے قوانین کا استعمال کر کے حل کریں۔

(i) $(5^2)^3$ (ii) $\{(xy)^3\}^5$ (iii) $\{(-4)^2\}^5$

(iv) $\{(-3)^3(-4)^2\}^3$ (v) $\left(\frac{b^2}{5}\right)^3$ (vi) $\left\{\left(-\frac{4}{9}\right)^2\right\}^3$

(vii) $\{(z^3)^2\}^4$ (viii) $\{(mm^2m^3m^4)^2\}^5$ (ix) $-[(-0.1)^2\ (-0.1)^3\ (-0.1)^4]^2$

1.5 کمپلیکس اعداد

کمپلیکس اعداد کے تصور کی تعریف کرنا اور ایک کمپلیکس عدد a کو z میں ظاہر کرنا جس میں a اور b دو حقیقی اعداد ہوں اور $z = a + ib$ خیالانی عدد ہو۔ جبکہ a حقیقی حصہ اور b خیالاتی حصہ ہو۔

ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی حقیقی عدد کا مربع کبھی بھی منفی نہیں ہوتا۔ پس مساوات $x^2 + 1 = 0$ کا حل حقیقی نہیں ہو سکتا۔ حقیقی اعداد میں اس کمی کو دور کرنے کے لیے ریاضی دانوں نے ایک نیا عدد $\sqrt{-1}$ متعارف کروایا جسے خیالی ایکا کہا جاتا ہے جس کی خاصیت $i^2 = -1$ ہے جس کی وجہ سے تمام مساواتوں $x^2 + a = 0\ ,\ a>0$ کو بھی حل کرنے کی صلاحیت ہے۔ اعداد جیسے کہ $\sqrt{-1} = i, \sqrt{-5} = \sqrt{5}i, \sqrt{-49} = 7i$ خالصتاً خیالاتی اعداد ہیں۔

کمپلیکس عدد کی تعریف:

$a+ib$ ایک ایسا عدد ہے جہاں a اور b دو حقیقی اعداد ہیں اور i ایک خیالاتی عدد ہے جیسا کہ $i=\sqrt{-1}$ اسے کمپلیکس عدد کہتے ہے اور اسے z سے ظاہر کیا جاتا ہے، جیسا کہ $z=3+4i$ ایک کمپلیکس عدد ہے۔

کسی بھی کمپلیکس عدد $a+ib$ کو جوڑے کی شکل میں (a,b) کے طور پر بھی لکھا جاسکتا ہے۔

جیسا کہ $5+8i=(5,8)$

1.5.2 $z=a+ib$ کو حقیقی حصہ a اور b ایک خیالاتی حصے کے طور پر پہچاننا۔

کمپلیکس عدد $z=a+ib$ میں، a اس کا حقیقی حصہ اور b اس کا خیالاتی حصہ کہلاتا ہے۔ کمپلیکس نمبر عدد کا حقیقی حصہ $\text{Re}(z)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور خیالاتی حصہ کو $\text{Im}(z)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال دیئے گئے کمپلیکس عدد کا حقیقی اور خیالاتی حصہ کی نشاندہی کیجئے۔

$z=3-2i$

یہاں $\text{Re}(z)=a=3$ اور $\text{Im}(z)=b=-2$

1.5.3 کمپلیکس عدد کے کانجوگیٹ کی تعریف کانجوگیٹ کمپلیکس عدد z کو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

کمپلیکس عدد z کے کانجوگیٹ کو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

جیسا کہ اگر $z=a+ib$ ہو تو $\bar{z}=a-ib$

یا اگر If $z=(a,b)$ ہو تو $\bar{z}=(a,-b)$

اور اگر $z=a-ib$ یا $\bar{z}=a+ib$

اگر $z=(a,-b)$ ہو تو $\bar{z}=(a,b)$

کمپلیکس عدد کے کانجوگیٹ میں ہم صرف خیالاتی حصہ کی نشانی بدل دیتے ہیں۔

نوٹ: اگر کسی بھی کمپلیکس عدد $z=\overline{(\bar{z})}, z$

مثال درج ذیل کمپلیکس اعداد کا کانجوگیٹ معلوم کیجئے۔

(i) $3+4i$ (ii) $\left(-\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right)$

حل

(i) فرض کیجئے: $z_1=3+4i$

تو $\overline{z_1}=\overline{3+4i}$

$\overline{z_1}=3-4i$

(ii) فرض کیجئے: $z_2=\left(-\frac{4}{5},-\frac{5}{4}\right)$

$\overline{z_2}=\overline{\left(-\frac{4}{5},-\frac{5}{4}\right)}$

$\overline{z_2}=\left(-\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right)$

1.5.4 کمپلیکس اعداد میں برابری کا تصور اور اس کی خصوصیت

دو کمپلیکس اعداد تب برابر ہوتے ہیں اگر ان کے حقیقی حصے اور خیالاتی حصے یکساں ہوں۔

اگر $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ اور $a+ib=c+id$ اگر اور اگر $a=c$ اور $b=d$

مثال 01 اگر $4x+3yi=16+9i$ تو x, y کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$4x+3yi=16+9i \Rightarrow 4x=16$ اور $3y=9,$

$\Rightarrow \frac{4x}{4}=\frac{16}{4}$ اور $\frac{3y}{3}=\frac{9}{3}, \Rightarrow x=4$ اور $y=3.$

مثال 02 $x^2+iy^2=25+i36$ x اور y کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$x^2+y^2i=25+36i \Rightarrow x^2=25$ اور $y^2=36,$

$x=\pm\sqrt{25}$ اور $y=\pm\sqrt{36} \Rightarrow x=\pm 5$ اور $y=\pm 6$

مشق 1.5

1. درج ذیل کمپلیکس اعداد کو $a+ib$ کی شکل میں لکھیئے۔

(i) (1,2)	(ii) (2,2)	(iii) (3,4)
(iv) (−1,1)	(v) (−2,2)	(vi) (−3,4)

2. درج ذیل کمپلیکس اعداد کے حقیقی اور خیالاتی حصے لکھیئے۔

(i) $1+2i$	(ii) $9i+4$	(iii) $(-5,6)$
(iv) $-1-i$	(v) $\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)i$	(vi) $2i-1$

3. درج ذیل کمپلیکس اعداد کے کانجوگیٹ معلوم کیجئے۔

(i) $3+2i$	(ii) $(4,9)$	(iii) $(-1,1)$
(iv) $1-i$	(v) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)i$	(vi) $3i+1$

4. دیئے گئے اعداد میں تصدیق کیجئے کہ $\overline{(\overline{z})} = z$

(i) $\left(\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{9}{10}\right)i$ (ii) $\left(-\frac{9}{11}\right)+\left(\frac{10}{9}\right)i$ (iii) $\frac{1}{2}-3i$

(iv) $2+3i$ (v) $-2-3\left(-\frac{10}{9}\right)i$ (vi) $4x+3iy$

5. x اور y کی قیمت معلوم کیجئے جبکہ

(i) $x+yi=-5+5i$ (ii) $x^2+iy^2=\frac{16}{9}+\frac{9}{25}i$

(iii) $y^2+\frac{x}{3}i=121-\frac{9}{5}i$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{3}x-\frac{3}{\sqrt{2}}yi=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{9}i$

1.6 کمپلیکس اعداد پر بنیادی عوامل

1.6.1 کمپلیکس اعداد پر جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کا استعمال کیجئے

(i) کمپلیکس اعداد کی جمع

فرض کیجئے $z_1 = a + ib$ اور $z_2 = c + id$ دو کمپلیکس اعداد ہوں تو z_1 اور z_2 کی حاصل جمع

$$z_1+z_2 = (a+ib)+(c+id)$$
$$= (a+c)+i(b+d) = (a+c,\ b+d).$$

مثال 01 اگر $z_1 = 6+9i$ اور $z_2 = -1+2i$ تو z_1+z_2 معلوم کیجئے۔

حل: معلوم ہے کہ $z_1 = 6+9i = (6,9)$ اور $z_2 = -1+2i = (-1,2)$

ہم جانتے ہیں کہ $\mathbf{z_1+z_2 = (a+c)+i(b+d) = (a+c,\ b+d)}$

$$\therefore \quad z_1+z_2 = (6,9)+(-1,2)$$
$$\Rightarrow \quad z_1+z_2 = (6-1,\ 9+2)$$
$$\Rightarrow \quad z_1+z_2 = (5,11)$$

> **یاد رکھیئے!**
> $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

(ii) کمپلیکس اعداد کی تفریق:

فرض کیجئے $z_1 = a+ib$ اور $z_2 = c+id,\ \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$،

اگر $z_1-z_2 = (a+ib)-(c+id)$ ہو تو

پھر $= (a-c)+i.(b-d) = (a-c,\ b-d)$

> **یاد رکھیئے!**
> $(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

مثال 01 اگر $z_1 = -7+2i$ اور $z_2 = 4-9i$ ہو تو z_1-z_2 معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $z_1 = -7+2i = (-7,2)$ اور $z_2 = 4-9i = (4,-9)$

ہم جانتے ہیں کہ $\mathbf{z_1-z_2 = (a-c,\ b-d)}$

$$\therefore \quad z_1-z_2 = (-7-4,\ 2+9)$$
$$\Rightarrow \quad z_1-z_2 = (-11,\ 11)$$

(iii) کمپلیکس اعداد کی ضرب:

فرض کیجیے $z_2 = c + id$ اور اگر $z_1 = a + ib$ اگر دو کمپلیکس اعداد ہوں تو $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

یادرکھیے!

$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

$$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(c+ib)$$
$$= c(a+ib)+di(a+ib)$$
$$= ac+bci+adi+bdi^2$$
$$=(ac-bd)+i(ad+bc)=(ac-bd,ad+bc) \qquad i^2=-1$$

مثال 01 اگر $z_1=3+4i=(3,4)$ اور $z_2=-3-4i=(-3,-4)$ ہو تو z_1z_2 حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل: $z_2=-3-4i=(-3,-4)$ اور $z_1=3+4i=(3,4)$

ہم جانتے ہیں کہ
$$z_1z_2=(ac-bd,ad+bd)$$
$$\therefore \qquad z_1z_2=(3,4)\cdot(-3,-4)$$
$$\Rightarrow \qquad z_1z_2=(-9+16,-12-12)=(7,-24)$$

(iv) کمپلیکس اعداد کی تقسیم

فرض کیجیے $z_2=c+id=(c,d),\ z_2\neq 0$ اور $z_1=a+ib=(a,b)$ جبکہ اور تمام z_1 اور z_2 حقیقی اعداد ہیں۔

یادرکھیے!

$\dfrac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2},\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{c+id}$$
$$=\frac{a+ib}{c+id}\times\frac{c-id}{c-id}$$
$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$
$$=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

مثال 01 $\frac{2+3i}{4+2i}$ حل کیجئے۔

حل:

$$\frac{2+3i}{4+2i}$$

$$=\frac{2+3i}{4+2i}\times\frac{4-2i}{4-2i}$$

$$=\frac{(8+6)+i(12-4)}{(4)^2-(i2)^2}$$

$$=\frac{14+8i}{20}$$

$$=\frac{14}{20}+i\frac{8}{20}$$

$$=\frac{7}{10}+i\frac{4}{10}$$

$$=\left(\frac{7}{10},\frac{4}{10}\right)=\left(\frac{7}{10},\frac{2}{5}\right)$$

مثال 02 تقسیمی فارمولہ کے استعمال سے کمپلیکس اعداد پر تقسیم کا عمل کیجئے۔ $(-1,3)\div(2,-4)$

حل فارمولا:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

$$\frac{(-1,3)}{(2,-4)}=\left(\frac{(-1)(2)+(3)(-4)}{2^2+(-4)^2},\frac{(3)(2)-(-1)(-4)}{2^2+(-4)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{-2-12}{4+16},\frac{6-4}{4+16}\right)$$

$$=\left(\frac{-14}{20},\frac{2}{20}\right)$$

$$=\left(\frac{-7}{10},\frac{1}{10}\right)$$

مشق 1.6

.1 دیئے گئے کمپلیکس اعداد پر ریاضیاتی عوامل کو انجام دیجئے۔

(i) $(3,2)+(9,3)$ (ii) $\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$

(iii) $(15,12)-(10,-9)$ (iv) $\left(\frac{4}{5},\frac{8}{15}\right)-\left(\frac{4}{5},\frac{6}{10}\right)$

(v) $(1,2)(1,-2)$ (vi) $(4,-5)(5,-4)$

(vii) $(3,-7)\div(3,2)$ (viii) $(4,5)\div(2,-3)$

.2 حل کیجئے اور جواب کو $a+ib$ کی شکل میں لکھیے۔

(i) $\frac{-1}{1+i}$ (ii) $(1+i)^4$

(iii) $\left(\frac{1}{1+i}\right)^2$ (iv) $(1+i)^8$

.3 اگر $z_1=-4+6i$ اور $z_2=2\frac{1}{2}-2i$، ہو تو تصدیق کیجئے۔

(i) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (ii) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

.4 اگر $z_1=1+i$ اور $z_2=1-i$ ، ہو تو تصدیق کیجئے۔

(i) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ (ii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

اعادہ مشق 1

خالی جگہ پُر کریں۔

(i) $\sqrt{5}$ کا ضربی معکوس ____ ہے۔

(ii) $Q\cup Q'=$ ________

(iii) $\mathbb{R}$ حقیقی اعداد میں جمعی ذاتی عنصر ____ ہے۔

(iv) $5+(6+7)=(5+6)+$ ________

(v) $3+(-3)=$ ________

(vi) π ________

(vii) $\frac{22}{7}$ ایک ____ عدد ہے۔

(viii) $-3+5i$ کا کانجوگیٹ ____ ہے۔

(ix) $2i(3-i)$ میں حقیقی حصہ ____ ہے۔

(x) دو کمپلیکس اعداد (a,b) اور (c,d) کا حاصل ضرب ____ ہے۔

جیسا کہ $(a,b).(c.d) =$

.2 درج ذیل بیانات کو غور سے پڑھیں اور درست کے لیے 'د' اور غلط کے لیے 'غ' لکھیے۔

(i) $\mathbb{R}$ ایک خاصیت بندش بلحاظ ضرب ہے۔ د/غ

(ii) اگر $x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$ د/غ

(iii) اگر تمام $\forall x,y,z \in \mathbb{R}, x(y-z)=xy-xz$ حقیقی اعداد ہوں تو۔۔۔ د/غ

(iv) ہر دو خیالاتی اعداد کا حاصل ضرب بھی حقیقی عدد ہوتا ہے۔ د/غ

(v) دو حقیقی اعداد کا حاصل جمع بھی ایک حقیقی عدد ہوتا ہے۔ د/غ

.3 درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیے۔

(i) $\sqrt{5}$ کا جمعی معکوس ____ ہے۔

(a) $-\sqrt{5}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
(c) $\sqrt{-5}$ (d) -5

(ii) $(5i).(-2i) =$

(a) -10 (b) 10
(c) $-10i$ (d) $10i$

(iii) $3(5+7)=3.5+3.7$ میں خاصیت ____ ہے۔

(a) خاصیت مبادلہ (b) خاصیت تلازم
(c) خاصیت تقسیمی (d) خاصیت بندش

(iv) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-2} =$

(a) 2 (b) -2
(c) $2i$ (d) $-2i$

خلاصہ

- ناطق اور غیر ناطق اعداد کا یونین ایک حقیقی اعداد کا سیٹ ہوتا ہے۔ جیسا کہ $\mathbb{R}=Q\cup Q'$

- لا محدود اعشاری اعداد دو قسم کے ہوتے ہیں۔ جیسا کہ تکراری اور غیر تکراری لا محدود اعشاری

- حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ جمع اور ضرب

(i) خاصیت بندش

$a+b\in\mathbb{R}$ اور $ab\in\mathbb{R}, \forall a,b\in\mathbb{R}$

(ii) خاصیت تلازم

$a+(b+c)=(a+b)+c$ اور $a(bc)=(ab)c, \forall a,b,c\in\mathbb{R}$

(iii) خاصیت مبادلہ

$a+b=b+a$ اور $ab=ba, \forall a,b\in\mathbb{R}$

(iv) ذاتی عنصر کی خاصیت

$a+0=a=0+a$ اور $a\cdot 1=a=1\cdot a \quad \forall a\in\mathbb{R}$

(v) تقسیمی خاصیت

$a(b+c)=ab+ac$ or $(b+c)a=ba+ca, \forall a,b,c\in\mathbb{R}$

(vi) معکوس کی خاصیت

$a+(-a)=0=-a+a$ اور $a\times\frac{1}{a}=1=\frac{1}{a}\times 1, \forall a,\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0$

- نمبر لائن: ایک افقی لائن جس پر حقیقی عدد ظاہر کیئے جاتے ہیں جسکو نمبر لائن کہتے ہیں۔

- جذر اور مجذور: $\sqrt[n]{a}$ میں، $\sqrt{\ }$ کو جذری علامت کہتے ہیں۔

- قوت نما کے قوانین:

(i) اگر $a,b\in\mathbb{R}$ اور $x\ y\in Z^+$ ہو تو $a^x\times a^y=a^{x+y}$

(ii) اگر $a\in\mathbb{R}$ اور $x\ y\in Z^+$ تو $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$ بدل دیتے ہیں

(iii) اگر $\forall a,b\in\mathbb{R}$ اور $n\in Z^+$ تو $\left(a\times b\right)^n=a^n\times b^n$

(iv) اگر $\forall a,b\in\mathbb{R}$ اور $n\in Z^+$ تو $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

- کمپلیکس اعداد: اگر $z=a+ib=\left(a,b\right)$ ایک کمپلیکس عدد ہے جبکہ b ایک حقیقی حصہ اور z ایک خیالاتی حصہ ہے کا اور $i=\sqrt{-1}$

- کسی بھی دو کمپلیکس اعداد $z_1=a+ib$ اور $z_2=c+id$

$$z_1+z_2=\left(a+c\right)+i\left(b+d\right)$$
$$z_1-z_2=\left(a-c\right)+i\left(b-d\right)$$
$$z_1z_2=\left(ac-bd\right)+i\left(ad+bc\right)$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

یونٹ 2

لوگرتھم
LOGARITHMS

حاصلاتِ تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- عام صورت میں دیے گئے عدد کو سائنسی انداز میں اور اسی طرح لکھیئے بیان کرنے کے قابل ہو جائیں گے۔
- لوگرتھم کی تعریف کر سکیں گے کہ اساس 'a' پر کسی عدد y کے لوگرتھم سے مراد 'a' کا وہ قوت نما 'x' ہے جس سے 'a' حاصل ہو جائے۔
(یعنی $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$, $a > 0$, $y > 0$ اور $a \neq 1$)
- کسی عدد کا log معلوم کرنے کے لیے لوگرتھم کی جدول کا استعمال کر سکیں گے۔
- ضد لوگرتھم (antilog) کے تصور کو سیکھ کر متعلقہ جدول (antilog table) کی مدد سے کسی عدد کا ضد لوگرتھم معلوم کر سکیں گے۔
- کیلکولیٹر (calculator) کی مدد سے کسی بھی عدد کا لوگرتھم اور ضد لوگرتھم معلوم کر سکیں۔
- عام اور قدرتی لوگرتھم کے درمیان فرق واضح کر سکیں گے۔
- سیکھ سکیں گے کہ $\log_{10}y$ کے بدلے $\log y$ اور $\log_e y$ کے بدلے $\ln y$

(i) $\log_{10}y = x \Leftrightarrow y = 10^x$,

(ii) $\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$.

- لوگرتھم کے مندرجہ ذیل قوانین ثابت کر سکیں گے۔

(i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$,

(iii) $\log_a m^n = n\log_a m$,

(iv) $\log_a m . \log_m n = \log_a n$.

لوگرتھم کے قوانین کو استعمال کر کے ضرب، تقسیم اور اعداد کی کوئی قوت جیسے پیچیدہ ریاضیائی عوامل کے استعمال کو جمع اور تفریق جیسے آسان ترین عوامل میں تبدیل کر سکیں گے۔

تعارف:

عظیم مسلمان ریاضی دان ابو محمد موسیٰ الخوارزمی نے لوگرتھم کو متعارف کرایا تھا ان کے بعد سترہویں صدی عیسوی میں جان نیپئر (John Napier) نے لوگرتھم کے تصور کو مزید واضح کیا اور اس کے لیے جدول تیار کیے۔ان جدول میں بنیاد 'e' استعمال کی گئی۔ 'e' ایک عظیم ناطق عدد ہے جس کی تقریباً قیمت 2.71828 ہے۔ پروفیسر ہنری برگس (Henry Briggs) نے 1631 میں 10 کی بنیاد والی جدول تیار کی۔

لوگرتھم کے استعمال نے طویل اور دشوار حسابی عمل کو مختصر اور بہت آسان کر دیا ہے۔

2.1 سائنسی ترمیم Scientific Notation

سائنسی ترمیم ایک خاص شکل ہے جس کے ذریعے با آسانی لکھا جا سکتا ہے۔

2.1.1 عام ترمیم میں دیئے گئے عدد کو سائنسی ترمیم میں لکھنا۔

ریاضی اور سائنس کی دیگر شاخوں میں انتہائی چھوٹے اور بڑے اعداد کا استعمال بھی کرنا پڑتا ہے۔ مثال کے طور پر زمین سے سورج تک فاصلہ تقریباً 150،000،000 کلومیٹر اور پلاٹینیشن ایٹم کا وزن 0.000،000،000،000،000،000،000،000،001،7 گرام ہے۔

اس طرح کے اعداد کو عام ترمیم میں لکھنا نہ صرف مشکل بلکہ زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔ سہولت کی خاطر سائنسدانوں نے بہت چھوٹے اور بہت بڑے اعداد کو لکھنے کے لیے ایک جامع، بالکل ٹھیک اور موزوں طریقہ رائج کیا جسے سائنسی ترمیم کہتے ہیں۔

مذکورہ بالا حصے (2.1.1) میں دیئے گئے عدد کو سائنسی ترمیم میں آسانی کے ساتھ بالترتیب 1.5×10^8 کلومیٹر اور 1.7×10^{-27}g گرام لکھا جا سکتا ہے۔

مندرجہ ذیل امثال سے سائنسی ترمیم کو سمجھنے میں مدد مل سکتی ہے۔

مثال 01:

درج ذیل اعداد کو سائنسی ترمیم میں لکھیئے۔

(i) 400900　　　(ii) 0.000058

حل:

(i) دیئے گئے عدد میں نقطہ اعشاریہ اکائی کے ہندسہ کے بعد ہے۔اس لیے نقطہ اعشاریہ کو پانچ درجے دائیں سے بائیں جانب حرکت میں

اس طرح $400900=4.009x10^{5}$ یہ اس عدد کی مطلوبہ ترمیم ہے

(ii) دیئے گئے عدد میں نقطہ اعشاریہ کے بعد 7 ہندسے ہیں، ساتویں درجی پر غیر صفری ہندسہ ہے، اسلیے نقطہ اعشاریہ کو چھے درجے میں

بائیں جانب حرکت دیں ۔ اس طرح $0.0000075=7.5^{-6}$

لکھیں جو مطلوبہ سائنسی ترمیم ہے۔

مثال 02:

درج ذیل اعداد کو عام ترمیم میں لکھیں۔

(i)　2.76×10^{6}　　(ii)　5.24×10^{-4}

(i)　2.76×10^{6}

چھ درجے دائیں طرف حرکت دیں گے لیکن یہاں 2 ہندسے ہیں۔بس ہم دائیں طرف چار صفر کا اضافہ کریں گے۔

چنانچہ $2.76 \times 10^{6} = 2760000$ مطلوبہ عام ترمیم ہے۔

حل:

(ii)----------میں 10 کا قوت نما منفی چار (4-) ہے اسلیئے ہم نقطہ عشاریہ کو دائیں بائیں جانب چار درجے حرکت دیں گے۔ لیکن

یہاں صرف ایک ہندسہ نقطہ اعشاریہ سے پہلے ہے۔ لہذا ہم ہندسہ 5 سے پہلے تین صفر کا اضافہ کریں گے۔

چنانچہ $5.24 \times 10^{-4} = 0.000524$ مطلوبہ عام ترمیمی عدد ہے۔

مشق 2.1

1- درج ذیل اعداد کو سائنسی ترمیم میں لکھیے۔

(i)	9700	(ii)	4,980,000	(iii)	96,000,000
(iv)	4169	(v)	84,000	(vi)	0.718
(vii)	0.00643	(viii)	0.0074	(ix)	0.21005

2- درج ذیل اعداد کو عام ترمیم میں لکھیے۔

(i)	7×10^4	(ii)	8.072×10^{-10}	(iii)	6.018×10^6
(iv)	7.865×10^8	(v)	2.05×10^{-4}	(vi)	7.25×10^{10}
(vii)	4.502×10^6	(viii)	2.865×10^{-8}	(ix)	3.056×10^6

2.2 لوگر تھمز (Logarithams)

ضرب اور تقسیم کے پیچیدہ ریاضیاتی عملیات کو باآسانی حل کرنے کے لیے ایک موزوں طریقہ اخذ کیا گیا ہے جسے لوگر تھم کہتے ہیں۔

2.2 ایک حقیقی عدد اساس 'a' کے لوگر تھم کی تعریف۔

$(a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x,\ a>0,\ y>0$ اور $a \neq 1$ جبکہ$)$

اگر $a^x = y$ ہو تو x کا اساس 'a' پر y کا لوگرتھم کہلاتا ہے اور اسے $\log_a y = x,\ a>0,\ y>0$ اور $a \neq 1$ لکھتے ہیں۔

پس، $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$

$a^x = y$ کو قوت نمائی شکل اور $\log_a y = x$ کو لوگرتھمی شکل کہتے ہیں۔

مندرجہ ذیل امثال کی مدد سے قوت نمائی شکل اور لوگر تھمی شکل کو باآسانی سمجھا جاسکتا ہے۔

مثال 01: $2^{-4} = \frac{1}{16}$ کو لوگرتھمی شکل میں لکھیں۔

حل: $2^{-4} = \frac{1}{16}$ مترادف ہے $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ کے۔

مثال 02: $\log_3 81 = 4$ کو قوت نمائی شکل میں لکھیں۔

حل: $3^4 = 81$ مترادف ہے $\log_3 81 - 4$ کے

مثال 03: $\log_4 2$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل: اگر $x = \log_4 2$

تو قوت نمائی شکل میں لکھنے سے۔

$\therefore \quad 4^x = 2$

$\Rightarrow \quad (2)^{2x} = 2^1$

$$2x = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

مثال 04: اگر $\log_x 8 = \frac{3}{2}$ ہو تو 'x' کی قیمت معلوم کریں۔

حل: چونکہ $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

لہذا

$$\Rightarrow \quad (x)^{\frac{3}{2}} = 8$$

یا

$$\Rightarrow \quad (x)^{\frac{3}{2}} = 2^3$$

مساوات کے دونوں طرفیں قوت نما $\frac{2}{3}$ لینے سے

$$\Rightarrow \quad \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad x = 2^2$$

$$\Rightarrow \quad x = 4$$

مثال 05: اگر $\log_{64} x = \frac{-2}{3}$ ہو تو x کی قیمت معلوم کریں۔

حل: چونکہ

$$(64)^{\frac{-2}{3}} = x \quad \Rightarrow \left(4^3\right)^{\frac{-2}{3}} = x$$

$$4^{-2} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4^2} = x$$

$$\frac{1}{16} = x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{16}$$

مشق 2.2

1. درجہ ذیل کو لوگرتھمی شکل میں لکھیئے۔

(i) $7^3 = 343$ (ii) $3^{-4} = \frac{1}{81}$

(iii) $10^{-3} = 0.001$ (iv) $\sqrt[3]{8} = 2$

2. درج ذیل کو قوت نمائی شکل میں لکھیئے۔

(i) $\log_{27} 81 = \frac{4}{3}$ (ii) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

(iii) $\log_{10} 1 = 0$ (iv) $\log_{10}(0.01) = -2$

3. نامعلوم عدد کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\log_{32} x = \frac{1}{2}$ (ii) $\log_a 3 = \frac{1}{2}$ (iii) $\log_{\sqrt{5}} 25 = y$

(iv) $\log_4 x = \frac{3}{2}$ (v) $\log_{10} 100 = y$ (vi) $\log_a 64 = 3$

(vii) $\log_a 1 = 0$ (viii) $\log_{55} 55 = y$ (ix) $\log_{64} 8 = \frac{x}{2}$

2.2.2 عام لوگرتھم، خاصہ اور منٹیسا

عام لوگرتھم : -عام لوگرتھم کی اساس '10' لی جاتی ہے۔ ایسے لوگرتھم کو عام لوگرتھم یا برگز لوگرتھم بھی کہا جاتا ہے۔

عام لوگرتھم کو ایسے لکھا جاتا ہے۔

$$\log y = x \Leftrightarrow y = 10^x$$

کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ اور مینٹسا:-

کسی عدد کا لوگرتھم دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے ایک صحیح عددی حصہ دوسرا کسری حصہ / عشری حصہ کسی عدد کے لوگرتھم کے صحیح عددی حصے کو لوگرتھم کا خاصہ (characteristic) کہتے ہیں اور ایک عشری حصہ جو ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اس عشری حصے کو مینٹسا (Mantissa) کہتے ہیں۔

نوٹ: کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے لیکن مینٹسا ہمیشہ مثبت ہی ہوتا ہے۔ اس کا مشاہدہ کرنے کے لیے ہم لوگرتھمی جدول کا استعمال کرتے ہیں۔

سائنسی ترمیم میں اگر عدد کا قوت نما '10' ہو تو وہ اس عدد کے لوگرتھم کا خاصہ کہلاتا ہے اور مینٹسا کی قیمت ہم لوگرتھمی جدول سے دیکھ کر لکھ سکتے ہیں۔ جسے بعد ازاں بیان کیا جائے گا۔

مثال 01: درج ذیل اعداد کا خاصہ معلوم کیجیے۔

0.765, 0.04, 0.004567, 2.134, 23.56 اور 3456.

نمبر شمار	عدد	سائنسی ترمیم	لوگرتھم کا خاصہ
1	0.765	7.65×10^{-1}	-1 or $\bar{1}$
2	0.04	4.0×10^{-2}	-2 or $\bar{2}$
3	0.0045467	4.5467×10^{-3}	-3 or $\bar{3}$
4	2.134	2.134×10^{0}	0
5	23.56	2.356×10^{1}	1
6	3456	3.456×10^{3}	3

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ:

- خاصہ کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ جو '1' سے بڑا ہو ہمیشہ غیر منفی ہوتا ہے۔
- کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ جو '1' سے چھوٹا ہو ہمیشہ منفی ہوتا ہے۔

منٹیسا:

لوگرتھمی جدول کی بدولت ہم کسی عدد کے لوگرتھم کا منٹیسا معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ جدول 7 ہندسی اعداد کا لوگرتھم حاصل کرنے کے لیے تشکیل دیئے گئے ہیں۔ لیکن جدید دور میں عملی مقاصد حاصل کرنے کے لیے 4 ہندسی اعداد کا لوگرتھم معلوم کرنے کے لیے جدول ئے گئے ہیں جو کہ صحیح اور درست حاصل کے لیے مفید ہیں۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

کسی عدد کے لوگوتھم کا منفی خاصہ $\bar{3},\bar{2}$ لکھنے کے بجائے 2-، 3- بالترتیب لکھا جا سکتا ہے جب منٹیسا منفی ہوتا ہے تو ہم اس کو لازمی مثبت عدد میں تبدیل کر لیتے ہیں کیونکہ منٹیسا ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

2.2.3 کسی عدد کا لوگرتھم

معلوم کرنے کے لیے جدول کا استعمال درج ذیل مشقوں کی مدد سے جدول ہم کسی بھی عدد کا لوگرتھم معلوم کرنے کا طریقہ سیکھیں گے۔

مثال 01: درج ذیل لوگرتھمی اعداد کا منٹیسا معلوم کیجیے۔

(i) log (43.254) (ii) log (0.002347).

حل: (i) نقطہ اعشاریہ کو وقتی طور پر نظر انداز کر کے 43.254 کو راؤنڈ آف کرنے سے چار اہم ہندسوں والا عدد 4325 بنائیں گے۔

(ii) اب لوگرتھمی جدول میں 43 کے سامنے کی قطار تلاش کریں گے۔

(iii) افقی طور پر تیسرے ہندسے یعنی '2' پر جائیں۔ 43^{rd} قطار اور 2^{nd} کالم کے نقاطع پر دیئے گئے عدد 6355 کو نوٹ کریں گے۔

(iv) دوبارہ افقی طور پر اسی قطار میں فرق والے کالم 5 کے نیچے دونوں کے تقاطع پر عدد '5' درج ہے۔

(v) 5 کو 6355 میں جمع کرکے حاصل کردہ نمبر 0.6360 مطلوبہ منٹیسا ہوگا۔

Logarithm Table

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7

Logarithm Table

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	5	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	887	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

حل: (ii)

$\log(0.002347)$ کے لیے۔

حل: نقطہ اعشاریہ اور ہندسہ 2 سے پہلے موجود صفروں کو وقتی طور پر نظر انداز کریں اور 23 قطار اور 4 کالم کے تقاطع پر موجود 3692 نمبر کو نوٹ کریں۔ 23 کے سامنے فرق والے کالم 7 کے تقاطع پر 13 درج ہے۔ 3692 اور 13 کو جمع کر کے حاصل کردہ نمبر 3705 ہے۔

لہٰذا $\log(0.002347)$ کا منٹیسا 0.3705 ہوگا۔

مثال 03: درج ذیل اعداد کا لوگرتھم معلوم کریں۔

(i) 278.27 (ii) 0.07058

حل: فرض کیا

$x = 278.27$

دونوں طرف log لگانے سے

$\therefore \log x = \log(278.27),$

مساوات کے دونوں طرف لوگرتھم لینے سے۔

(i) 278.27 کو راؤنڈ آف کرنے سے چار اہم ہندسوں والا عدد 278.2 ہے۔

(ii) $278.3 = 2.783 \times 10^2$ (سائنسی ترمیم میں لکھنے سے)

لہٰذا خاصہ=2

(iii) منٹیسا معلوم کرنے کے لیے وقتی طور پر نقطہ اعشاریہ کو نظر انداز کیا اور حاصل کردہ نمبر 2783 ہے۔

لوگرتھمی جدول کا استعمال کر کے ہم منٹیسا حاصل کرتے ہیں جو کہ ہے۔

منٹیسا= 0.8487۔

(iv) خاصہ اور منٹیسا کو جمع کر کے حاصل کردہ نمبر 2.8487 ہے۔

لہٰذا 2.4445

یاد رکھیئے!

اہم ہندسوں کے ایک ہی تسلسل کے اعداد کے لاگرتھم میں ایک ہی منٹیسا ہوتا ہے۔
مثلاً نمبرز 0.004576, 0.04576, 0.4576, 45.76 وغیرہ کا منٹیسا یکساں ہوتا ہے۔

حل:

(1) راؤنڈ آف کو نظر انداز کرنے سے چار ہندسوں والا عدد 7058۔

(2) دیئے گئے نمبر کو سائنسی ترمیم میں تبدیل کرتے ہیں لہٰذا $= -2 \text{ or } \bar{2}.$ $7058 \times 10^{-2}.$

(3) اعشاریہ کو نظر انداز کر کے منٹیسا معلوم کرتے ہیں جو خاص لوگرتھمی جدول استعمال کرتے ہوئے کا منٹیسا ہے 7058 is 0.8487.

(4) خاص اور منٹیسا کو جمع کریں۔ حاصل لوگرتھم $x = \log(0.07058) = \bar{2}.8487.$

مشق 2.3

1. درج ذیل لوگرتھم کا خاصہ اور منٹیسا معلوم کیجیے۔

(i)	8	(ii)	5054	(iii)	9.992
(iv)	765.3	(v)	0.00329	(vi)	0.0000300

2. درج ذیل اعداد کا لوگرتھم معلوم کیجیے۔

(i)	9	(ii)	55.56	(iii)	29.592
(iv)	405.3	(v)	0.00469	(vi)	0.000076

3. اگر **31.09=1.4926** ہو تو لوگرتھمی جدول کا استعمال کیے بغیر درج ذیل اعداد کا لوگرتھم معلوم کیجیے۔

(i)	log 3.109	(ii)	log 310.9	(iii)	log 0.003109
(iv)	log 3109	(v)	log 310.942	(vi)	log 310926

2.2.4 ضد لوگرتھم (Antilograthms) ضد لوگرتھم کا تصور اور متعلقہ جدول کا استعمال کسی عدد کا ضد لوگرتھم معلوم کرنے کے لیے۔

اگر $\log x = y$ ہو تو x کو y کا ضد لوگرتھم کہا جاتا ہے۔

اسے اس طرح لکھتے ہیں۔ $\text{Antilog}\,(y) = x$, if $\log x = y$

کسی عدد کا ضد لوگرتھم کو جدول استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل دو اصولوں کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

اصول 1: اگر خاصہ غیر منفی n ہو تو ضد لوگرتھم میں صحیح عددی حصے میں ہندسوں کی تعداد n+1 ہوتی ہے۔

اصول 2: اگر خاصہ منفی n ہو تو ضد لوگرتھم میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد صفروں کی تعداد n-1 ہوتی ہے۔

ضد لوگرتھم معلوم کرنے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

Antilogarithm Table

											Mean Differences								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0000	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	1	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2

Antilogarithm Table

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1821	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6

Antilogarithm Table

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2970	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	2	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4374	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	4070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14

Antilogarithm Table

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7196	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8275	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	####	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

مثال 01: وہ اعداد معلوم کیجیئے جن کے لوگرتھم کی قیمت درج ذیل ہو۔

(i) 1.3247 (ii) $\bar{2}.1324$

حل: فرض کریں۔

اب 1.3247 کی قیمت معلوم کرنا ہے۔

(i) یہاں خاصہ = 1 اور منٹیسا = 0.3247 ہے۔

(ii) ضدلوگرتھم کے جدول میں 0.32 کے سامنے والی قطار تلاش کریں۔

(iii) افقی طور پر تیسرے ہندسے کو دیکھتے جو کہ 4 ہے 32^{nd} قطار اور 4^{th} کالم کے تقاطع پر موجود نمبر 2109 نوٹ کریں۔

(iv) دوبارہ افقی طور پر اسی قطار اور فرق والے 7^{th} کالم کے نیچے دونوں کے تقاطع پر نمبر 3 لکھا ہوا ہے۔

(v) 2019 اور 3 کو جمع کرنے سے حاصل کردہ نمبر 2112 ہے۔

چونکہ خاصہ '1' ہے اسلیئے حاصل کردہ نمبر میں '1' جمع کرنے سے 2112 حاصل ہوا۔ اسلیئے 2112 میں نقطہ اعشاریہ بائیں جانب سے دو ہندسوں کے بعد لگایا جائے گا۔ مطلوبا ضدلوگرتھم 21.12 ہے۔

$x = \text{antilog}\ (\bar{2}.1324)$, Here $\text{Log}\ \bar{x} = \bar{2}.1324$

(ii) $\bar{2}.1324$ میں

حل: فرض کریں

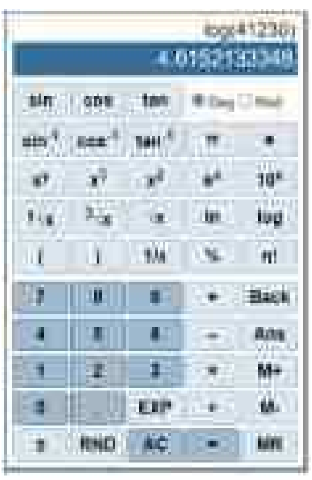
یہاں خاصہ = $\bar{2}$ اور منٹیسا = 0.1324

اب 0.13 کو ضدلوگرتھم کے جدول میں دوسرے کالم میں دیکھیئے، اس کے مطابق چار اہم ہندسوں والا حاصل کردہ نمبر 1356 ہے۔

اسی کالم کے فرق والے 4^{th} کالم میں دونوں کے تقاطع پر نمبر 1 لکھا ہوا ہے۔

پس مطلوبہ نمبر 0.01356 ہے۔

2.2.5 کیلکیولیٹر کے استعمال سے کسی عدد کا لوگرتھم اور ضدلوگرتھم معلوم کرنا۔



مثال 01: کیلکیولیٹر کے استعمال سے (41230) کی قیمت معلوم کیجیئے۔

حل: فرض کریں

(i) کیلکیولیٹر پر 'Log' کا بٹن دبائیں۔

(ii) اب نمبر 41230 کا اندراج کریں۔ (ہم اس کی قیمت معلوم کرنا چاہتے ہیں)

(iii) چھوٹی بریکٹ بند کریں اور برابر کی علامت لگائیں۔

لہٰذا ہم 4.615213335 کی قیمت کیلکیولیٹر کی سکرین پر دیکھ سکتے ہیں۔

پس جو کہ ہے log (41230) = 4.615213335

مثال 02: کیلکیولیٹر کی مدد سے (4.615213335) کی قیمت معلوم کریں۔

حل: ہم ضد لوگرتھم کا بٹن استعمال کریں گے۔

(i) پہلے شفٹ کا بٹن دبائیں۔

(ii) اب log کا بٹن دبائیں۔

(iii) چھوٹی بریکٹ میں (4.615213335) کا اندراج کریں۔

(iv) اب اینٹر کا بٹن دبائیں۔

حاصل کردہ نمبر 41230.00002 ہے جسے راؤنڈ آف کر کے حاصل کردہ نمبر 41230 ہے۔

پس antilog (4.615213335) = 41230.00002

2.3 عام لوگرتھم اور قدرتی لوگرتھم میں فرق

عام لوگرتھم کی اساس 10 ہوتی ہے اور اس کے $\log_{10}(x)$ کی بجائے $\log(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جبکہ قدرتی لوگرتھم کی اساس e ہوتی ہے (e ایک غیر ناطق عدد ہے جس کی قیمت 2.718281 ہے) اسے $\log_e(x)$ کی بجائے $\ln x$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 2.4

1. جدول کے استعمال سے اعداد معلوم کیجیے جن کا عام لوگرتھم درج ذیل ہے۔

(i)	3.56721	(ii)	$\bar{1}.7427$	(iii)	0.35749
(iv)	5.8196	(v)	$\bar{4}.3847$	(vi)	0.9187

2. کیلکیولیٹر کی مدد سے درج ذیل اعداد کا لوگرتھم معلوم کریں۔

(i)	900	(ii)	45.54	(iii)	36582
(iv)	826.3	(v)	0.00851	(vi)	0.000097

3. مندرجہ ذیل میں ____ کی قیمت معلوم کریں (بذریعہ کیلکیولیٹر)

(i)	$\log x = 1.7505$	(ii)	$\log x = 0.6609$	(iii)	$\log x = \bar{1}.6132$
(iv)	$\log x = 3.4800$	(v)	$\log x = \bar{7}.0038$	(vi)	$\log x = 0.2665$

2.4 لوگرتھم کے قوانین

2.4.1 درج ذیل لوگرتھم کے قوانین ثابت کیجیے۔

(i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a m^n = n \log_a m$

(iv) $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$

(i) قانون حقیقی اعداد m, n, a اور $a > 0,$ جبکہ $a \neq 1, \log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$ کے لیے۔

ثبوت:

فرض کیجیے $\log_a m = x$ اور $\log_a n = y$ ہو تو $m = a^x$ اور $n = a^y$

اب $mn = a^x \cdot a^y$

$mn = a^{x+y}$ (قانون قوت نما)

قوت نمائی شکل کو لوگرتھمی شکل میں تبدیل کرنے سے $\log_a (mn) = x+y$

پس $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$

نوٹ: دو حقیقی اعداد کے حاصل فرق کا لوگرتھم ان کے لوگرتھم کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

(ii) قانون حقیقی اعداد m, n, a اور $a > 0$, جبکہ $a \neq 1$, کے لیے۔

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

ثبوت:

فرض کیجیے۔ $\log_a m = x$ اور $\log_a n = y$ ہو تو $m = a^x$ اور $n = a^y$

$$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} \quad \text{(قانون قوت نما)}$$

$$\frac{m}{n} = a^{x-y}$$

قوت نمائی شکل کو لوگرتھمی شکل میں تبدیل کرنے سے۔

$$\Rightarrow \quad \log_a \frac{m}{n} = x - y$$

لہذا $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

نوٹ: دو حقیقی اعداد کے حاصل تقسیم کا لوگرتھم ان کے لوگرتھم کے فرق کے برابر ہوتا ہے۔

(iii) قانون: حقیقی اعداد $m, n,$ اور a جبکہ $a > 0$ اور $a \neq 1$, کے لیے

$$\log_a m^n = n \log_a m$$

ثبوت: فرض کیجیئے: $\log_a m = x$ Then $m = a^x$

اب $m^n = (a^x)^m$

$m^n = a^{nx}$

(قانون قوت نما)

قوت نمائی شکل کو لوگرتھمی شکل میں تبدیل کرنے سے

$\Rightarrow \quad \log_a m^n = nx$

پس $\log_a m^n = n\log_a m$

نوٹ: کسی حقیقی عدد جسکا قوت نما n ہو کا لوگرتھم اس کے لوگرتھم اور قوت نما n کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

(iv) لوگرتھم میں اساس کی تبدیلی کا اصول

حقیقی اعداد n, a, b جبکہ $a>0$, اور $a \neq 1$, ہو تو

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

ثبوت: فرض کیجیے: $\log_a n = x$

لہٰذا $n = a^x$

دونوں طرفین میں لوگرتھم اساس 'b' پر لینے سے۔

$$\log_b n = \log_b a^x$$

$$\log_b n = x\log_b a \qquad \therefore \quad \log_b m^n = n\log_b m$$

$$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

پس $$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

مثال 01: $\log_a (2bc)$ کو لوگرتھم کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیجیے۔

حل: لوگرتھم کے قوانین کا استعمال کرتے ہوئے۔

$$\log_a (2bc) = \log_a 2 + \log_a b + \log_a c,$$

پس، یہ مطلوبہ لوگرتھم کا مجموعہ ہے۔

مثال 02: $\log(52.5 \times 63 \times 4.567)$ کو لوگرتھم کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیجیے۔

حل: لوگرتھم کے قوانین کے مطابق

$$\log(52.5\times63\times4.567) = \log 52.5 + \log 63 + \log 4.567$$

پس، یہ مطلوبہ لوگرتھم کا مجموعہ ہے۔

نوٹ:
(i) $\log_a (mn) \neq \log_a m \times \log_a n$
(ii) $\log_a m + \log_a n \neq \log_a (m + n)$

مثال 03: $\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$ کو لوگرتھم کے فرق کے طور پر ظاہر کریں۔

حل: لوگرتھم کے فرق کے قانون کے مطابق۔

$$\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right) = \log 213.1 - \log 34.22.$$

پس، یہ لوگرتھم کے فرق کے مطابق لکھا گیا ہے۔

مثال 04: $\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$ کو لوگرتھم کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\log_a m^n = n\log_a m$

$$\therefore \quad \log_a 2^x = x \log_a 2.$$

مشق 2.5

1. درج ذیل لوگرتھم کو $\log_a z$ اور $\log_a x, \log_a y$ کی اصطلاحات میں لکھیئے

(i) $\log_a \frac{x^3 y}{z^2}$ (ii) $\log_a \sqrt{xy^2 z}$ (iii) $\log_a\left(\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{y^3}} \div \sqrt{y^3\sqrt{x}}\right)$

(iv) $\log_a \frac{x\sqrt{y^3}}{\sqrt[3]{z^2 x^5}}$

2. واحد لوگرتھم کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) $\log_a 20 - \log\ 15 + \frac{1}{2}\log\ \frac{9}{2}$

(ii) $\frac{1}{3}\log_a(x-1)^3 + \frac{10}{9}\log_a(x+1) - \frac{1}{9}\log_a(x+1)$

(iii) $\log x - 2\log x + 3\log(x+1) - \log(x^2-1)$.

3. اگر $\log 5 = 0.6990$ اور $\log 3 = 0.4771$, $\log 2 = 0.3010$ ہو تو متعلقہ جدول کا استعمال کیئے بغیر درج ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\log 15$ (ii) $\log 64$ (iii) $\log\sqrt{5\times 2}$ (iv) $\log 48$

(v) $\log\sqrt{18}$ (vi) $\log 30$ (vii) $\log\frac{8}{3}$ (viii) $\log\frac{5}{\sqrt{3}}$

4. ثابت کیجیئے:

(i) $\log_b m \times \log_m a = \log_b a$ (ii) $\log_a b \times \log_c a = \log_c b$

(iii) $\log_b a . \log_c b \frac{1}{\log_c a} = 1$ (iv) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

5. تصدیق کیجیے۔

(i) $\log_5 7 \times \log_7 25 = 2$ (ii) $\log_3 2 \times \log_2 81 = 4$

(iii) $\log_5 343 \times \log_7 25 = 6$ (iv) $\log_6 16 \times \log_2 216 = 12$

2.5 لوگرتھم کے قوانین کا اطلاق

2.5.1 لوگرتھم کا اطلاق ضرب، تقسیم اور قوت نمائی سوالات کے طویل عمل کو جمع اور تفرقی کے آسان ترین طریقہ کار میں تبدیل کرنے کے لیے ہوتا ہے۔

درج ذیل امثال کی مدد سے لوگرتھم کے قوانین کا اطلاق بآسانی سمجھا جاسکتا ہے۔

مثال 01: لوگرتھم کی مدد سے $(8.573)(28.74)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیئے۔ $x = (8.573)(28.74)$

دونوں طرفین میں لوگرتھم لینے سے۔

$\therefore \quad \log x = \log(8.573 \cdot 28.74)$

$\Rightarrow \quad \log x = \log(8.573) + \log(28.74)$

$\Rightarrow \quad \log x = 0.9332 + 1.4585$

$\Rightarrow \quad \log x = 2.3917$

$\therefore \quad x = \text{antilog}(2.3917)$

پس، $x = 246.4$

مثال 02: لوگرتھم کی مدد سے $\frac{213.1}{34.22}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ $x = \frac{213.1}{34.22}$

دونوں طرفین میں لوگرتھم لینے سے

$$\log x = \log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \log x = \log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \log x = \log 213.1 - \log 34.22, \quad \left(\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log\ b\right)$$

بحوالہ لوگرتھمی جدول ہمیں معلوم ہے کہ

$\log x = 2.3286 - 1.5343 = 0.7943$

$\Rightarrow \quad \log x = 0.7943,$

ضدلوگرتھم لینے سے

$x = \text{antilog}\ (0.7943),$ ضدلوگرتھم کی جدول کو دیکھنے سے

بحوالہ ضدلوگرتھم کے جدول سے ہم جانتے ہیں کہ

$x = 6.227,$ $\quad$ (∵ خاصہ $= 0$, مینٹیسا $= 0.7943$)

پس، $\frac{213.1}{34.22}$ کی مطلوبہ قیمت 6.227 ہے۔

مثال 03: لوگرتھم کے قانون کے مطابق $\sqrt{\frac{3.41\times 37.92}{2.34}}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ

$$x=\sqrt{\frac{3.41\times 37.92}{2.34}}$$

دونوں طرفین میں لوگرتھم لینے سے

$$\log x=\log\left(\frac{3.41\times 37.92}{2.34}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{3.41\times 37.92}{2.34}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\log 3.41+\log 37.92-\log 2.34)$$

$$=\frac{1}{2}(0.5325+1.5788-0.3692)$$

$$=\frac{1}{2}(1.7424)$$

$$=0.8712$$

$$x=\text{antilog }(0.8712)$$

$$=7433$$

$$=7.433$$

مثال 04: 4^5 میں ہندسوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے۔

Let $n=4^5$

مساوات کے دونوں طرفین میں لوگرتھم لینے سے۔ہم جانتے ہیں کہ

$\therefore\quad \log n=\log 4^5 \qquad (\because \log a^n=n\log a)$

$\Rightarrow\quad \log n=5\log 4$

$\Rightarrow\quad \log n=5\times 0.6021 \qquad$ (since $\log 4=0.6021$)

$\Rightarrow\quad \log n=3.0105$

ہندسوں کی تعداد = خاصہ + 1

پس، میں ہندسوں کی تعداد $4^5=3+1=4$

مشق 2.6

1. لوگرتھم کی مدد سے درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) 57.86×4.385

(ii) $25.753 \times 0.5341 \times 490.8$

(iii) $\dfrac{25.753}{0.5341}$

(iv) $\dfrac{(790.6 \times 30.32)}{25.753}$

(v) $\dfrac{99.87}{(8.369) \times (0.785)}$

(vi) $\sqrt[5]{2.709} \times \sqrt[7]{1.239}$

(vii) $\dfrac{(26.62)^{\frac{1}{2}} \times (87.19)^3}{\sqrt{69.53}}$

(viii) $\dfrac{(4308)^3 \times \sqrt{80.06}}{(0.3387)^3}$

2. درج ذیل میں ہندسوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

(i) 4^{12} **(ii)** 7^{25} **(iii)** 3^{30} **(iv)** 5^{20} **(v)** 9^{30}

لوگرتھم کی مدد سے ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

Review Exercise 2

1. دیئے گئے جملوں کو غور سے پڑھیں اور درست جواب کے انتخاب کے لیئے درست پر دائرہ لگائیں اور غلط جملے کے انتخاب کرنے پر غلط دائرہ لگائیں۔

(i) 0.025 کو سائنسی ترمیم میں 2.5×10^3 لکھا جاسکتا ہے۔ درست/غلط

(ii) لوگرتھم کی ایجاد البیرونی کی۔۔۔۔ درست/غلط

(iii) اسی عدد کے لوگرتھم کا صحیح عددی حصہ خاصہ کہلاتا ہے۔۔۔ درست/غلط۔

(iv) کسی عدد کے لوگرتھم کا منٹیسا ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔۔۔۔ درست/غلط۔

(v) $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ درست/غلط۔

2. خالی جگہ پُر کریں۔

(i) اساس 10 پر لوگرتھم ________ کہلاتا ہے۔

(ii) $\text{Log}1 =$ __________ .

(iii) لوگرتھم کا کسری حصہ ________ کہلاتا ہے۔

(iv) $\log 512 =$ __________ .

(v) $\log_a m \times \log_m n =$ __________ .

(vi) $x = \log_a y$ کی قوت نمائی شکل ________ ہوتی ہے۔

(vii) $a^{10} = y$ کی لوگرتھمی شکل ________ ہوتی ہے۔

(viii) $\log_b a \times \log_a b =$ __________ .

(ix) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) =$ __________ .

(x) $\log(10\times10) =$ __________ .

3. درست جواب پر () کا نشان لگائیں۔

(i) اگر $\log_{10}x=4$ ہو تو $x =$ ___________ .

(a) 500 (b) 100 (c) 1000 (d) 10000

(ii) $\log 54.58$ کا خاصہ ______ ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

(iii) عام لوگرتھم کی اساس ______ ہے۔

(a) 5 (b) 10 (c) e (d) 100

(iv) $\log xyz =$ ___________ .

(a) $\log x \log y \log z$ (b) $\log x + \log y + \log z$

(c) $\log (xy)^z$ (d) $\log x - \log y - \log z$

(v) 0.00789 کی سائنسی ترقیم ________ ہے۔

(a) 7.89×10^{-3} (b) 7.89×10^{3}

(c) 0.789×10^{-2} (d) 78.9×10^{-4}

(vi) اگر $x = 2$ ہو تو $x =$ ___________ .

(a) 200 (b) 1000 (c) 100 (d) $\frac{2}{10}$

(vii) اگر $\log_2 8 = x$ تو $x =$ ___________ .

(a) 64 (b) 3^2 (c) 3 (d) 2^8

(viii) قدرتی لوگرتھم کی اساس ___________ ہوتی ہے۔

(a) 10 (b) e (c) π (d) 5

(ix) $3^5 = 243$,کو لوگرتھمی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

(a) $\log_3 5 = 243$ (b) $\log_3 243 = 5$

(c) $\log_5 243 = 12$ (d) $\log_5 3 = 243$

خلاصہ

- اگر $a^x = y$، جبکہ x اور y ہو تو 'a' کو اساس x = $\log_a y$ پر $a > 0, y > 0$ کا لوگرتھم کہتے ہیں اور اسے $a \neq 1$ لکھتے ہیں۔
- $\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$
- $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$
- اگر لوگرتھم کی اساس 10 ہو تو اسے عام لوگرتھم یا برگز لوگرتھم کہتے ہیں۔ اسے $\log x$ کی بجائے $\log_{10} x$ لکھا جاتا ہے۔
قدرتی لوگرتھم کی اساس e، ہوتی ہے (ایک غیر ناطق عدد) جس کی قیمت 2.7182818 ہے اور اسے $\log_e x$ کی بجائے $\ln x$ لکھا جاتا ہے ۔
- کسی بھی لوگرتھم کا صحیح عددی حصہ خاصہ اور کسری حصہ منٹیسا کہلاتا ہے۔
- کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ جو '1' سے بڑا ہو ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔
- کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ جو '1' سے چھوٹا ہو ہمیشہ منفی ہوتا ہے۔
- لوگرتھم کا منفی خاصہ جیساکہ $\bar{1}$ کو $\bar{3}$، $\bar{2}$ کو -3, اور -1 کو -2 لکھا جا سکتا ہے۔
- ایک ہی تسلسل والے اہم ہندسوں پر مشتمل اعداد کے لوگرتھم کا منٹیسا ایک ہی (یکساں ہوتا ہے)۔
- وہ عدد جس کے لوگرتھم کی قیمت معلوم ہو ضد لوگرتھم کہلاتا ہے۔
- لوگرتھم کے قوانین۔

(i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a\left(\dfrac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a m^n = n\log_a m$

(iv) $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$

قانون کو ایسے بھی لکھا جا سکتا ہے۔ $\log_b a . \log_a n = \log_b n.$

یونٹ 3

الجبری اظہاریے اور الجبری کلیے

ALGEBRAIC EXPRESSION AND FORMULAS

حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- ان کو معلوم ہو کہ کوئی ناطق اظہاریہ طرز عمل کے لحاظ سے ناطق عدد کی طرح ہوتا ہے۔
- ناطق اظہاریے کی تعریف کر سکیں بطور دو کثیر رقمی $\frac{p(x)}{q(x)}$ حصہ $p(x)$ جہاں $q(x)$ صفر کثیر رقیمی zero polyoomial نہیں ہے۔
- مشاہدہ (پڑتال) کر سکیں کہ کوئی دیا گیا الجبری اظہاریہ ۔
  - کثیر رقمی ہے یا نہیں۔
  - ناطق اظہاریہ ہے یا نہیں۔
- ناطق اظہاریہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو مختصر ترین شکل میں تحویل کر سکیں جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ کے تمام ارکان کے عددی تر صحیح اعداد ہوں اور ان میں کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو۔
- پڑتال کر سکیں کہ کوئی دیا گیا ناطق الجبری اظہاریہ مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں۔
- دیے گئے ناطق اظہاریہ کو اس کی مختصر ترین شکل میں تبدیل کر سکیں۔
- ناطق اظہاریے کا مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
- ایک ناطق اظہاریے کو دوسرے ناطق اظہاریے سے تقسیم کر کے جواب کو مختصر ترین سکل میں لکھ سکیں۔
- کچھ خاص حقیقی اعداد پر الجبری اظہاریے کی قیمت حاصل کر سکیں۔
- درج ذیل کلیات سے واقف ہوں
- $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ اور $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

- $'a^2+b^2'$ اور $'ab'$ کی قیمت معلوم کرسکیں جبکہ $'a+b'$ اور $'a-b'$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- کلیہ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$ کی پہچان کر سکیں۔
- $a^2+b^2+c^2,$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a+b+c$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- $a+b+c$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a^2+b^2+c^2$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- $ab+bc+ca$ کی قمت معلوم کر سکیں جبکہ $a^2+b^2+c^2$ اور $a+b+c$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- کلیات کی پہچان کر سکیں۔

  $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3,$

  $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3.$
- $a^3 \pm b^3$ کی معلوم کر سکیں جبکہ $'a \pm b'$ اور $'ab'$ کی قیمت دی گئی ہوں۔
- $x^3 \pm \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $x \pm \frac{1}{x}$ کی قیمت دی گئی ہو۔
- کلیہ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$ کی پہچان کر سکیں۔
  - $x + \frac{1}{x}$ اور $x^2 + \frac{1}{x^2} - 1.$ کا حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
  - $x - \frac{1}{x}$ اور $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1.$ کا حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
  - $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2))(x^2-xy+y^2).$ کا متواتر (مسلسل) حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
- مقادیر اصم اور اس کے استعمال کی پہچان کر سکیں۔
- دوسرے درجے کی مقادیر اصم کی وضاحت کر سکیں۔
- دوسرے درجے کی مقادیر اصم پر بنیادی عوامل کا استعمال کر کے مخرج (نسب نما) کو ناطق بنا کر ہم قیمت کسر میں تحویل کر سکیں۔
- حقیقی اعداد $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ اور ان کے اتصال سے حاصل کردہ عدد، جبکہ x y قدرتی اعداد اور a b صحیح اعداد ہوں، کو ناطق بنانے کے عمل کی (بالکل ٹھیک مطالعہ کے ساتھ) وضاحت کر سکیں۔

3.1 الجبری اظہاریے:

ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں الجبری اظہاریوں کے بارے میں مطالعہ کر چکے ہیں۔ آئیے اس کی اقسام پر تبادلہ خیال کریں۔
الجبری اظہاریوں کی تین اقسام درج ذیل ہیں۔

(ا) کثیر رقمی اظہاریہ یا کثیر رقمی (ب) ناطق اظہاریہ (ج) غیر ناطق اظہاریہ

(a) کثیر رقمی اظہاریہ یا کثیر رقمی:

ایک متغیر x میں ایک کثیر رقمی اظہاریہ (محض کثیر رقمی) کو اس طرح لکھا جاتا ہے:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

جہاں 'n' ایک غیر منفی عدد اور عددی سر: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ حقیقی اعداد ہیں۔ عام طور پر، ایک کثیر رقمی کو $p(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، لہذا مذکورہ بالا کثیر رقمی کو اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$P(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

اگر $a_0 \neq 0$, تو کثیر رقمی کو ڈگری n کا کثیر رقمی کہا جاتا ہے اور a_0 کو کثیر رقمی کا معروف عددی صفر کہا جاتا ہے۔ کثیر رقمی اور ان کی ڈگریوں کی کچھ مثالیں ذیل میں دی گئی ہیں۔

(i) $8x-5$, ڈگری 1 (ii) $x^4-2x^3+5x^2+1$, ڈگری 4

(iii) $6x^{31}+3$, ڈگری 31 (iv) $12x^4-x^3+\frac{2}{3}x^2-3x+1$, ڈگری 4

(v) 4, ڈگری 0 (vi) $\sqrt{10}x^{12}+2x^6-x^5-18x+1$ ڈگری 12

جملہ $x^3-x^3y^2+x^2y^2-10$ دو متغیر x اور y کے ساتھ ایک کثیر رقمی ہے اور اس کی ڈگری 5 ہے۔
اسی طرح الجبری اظہاریہ $x^3y^5x^2-x^3y^2z^3+x^2yz-34$ تین متغیر x، y اور z کے ساتھ ایک کثیر رقمی ہے

یاد رکھیں:

- ایسی کثیر رقمی جس میں ایک رقم ہو، یک رقمی (monomial) کہا جاتا ہے۔ $3x, 7xy, 6xy^2z^5$ وغیرہ
- ایسی کثیر رقمی جس میں دو رقوم ہوں، دو رقمی (binomial) کہا جاتا ہے $x+4, 5x+y, 7x-3$ وغیرہ
- ایسی کثیر رقمی جس میں تین رقوم ہوں، تین رقمی (trinomial) کہا جاتا ہے۔ مثلاً: x^2-2x+1 وغیرہ

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x^2y^2-5xy+3$$

(b) ناطق اظہاریہ :

ایسا اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا جاسکے جبکہ $q(x)\neq 0$ اور $p(x)$ اور $q(x)$ میں کثیر رقمیاں ہوں تو اُسے ناطق اظہاریہ کہا جاتا ہے۔مثال کے طور پر $\frac{\sqrt{3}x^2-5x+4}{x^2+6x-5}$, $\frac{x^2-x+1}{x-5}$, $\frac{x+1}{x}$ وغیرہ ناطق اظہاریوں کی چند مثالیں ہیں۔

نوٹ: ہر کثیر رقمی ناطق اظہاریے ہوتے ہیں لیکن اس کی تبدیلی درست نہیں۔

(c) غیر ناطق اظہاریہ :

ایسا الجبری اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا نہ جاسکتا ہو جبکہ $q(x)\neq 0$, $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں تو اُسے غیر ناطق اظہاریہ کہا جاتا ہے۔مثال کے طور پر $\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}$, $\frac{\sqrt{x^3}+2x+3}{\sqrt{x}-9}$, $\frac{\sqrt{x}+1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ وغیرہ ناطق اظہاریوں کی چند مثالیں ہیں۔

3.1.1 معلوم کریں کہ کوئی ناطق اظہاریہ طرز عمل کے لحاظ سے ناطق عدد کی طرح ہوتا ہے۔

اگر p اور q دو صحیح اعداد ہوں تو ضروری نہیں کہ $\frac{p}{q}$ بھی ایک صحیح عدد ہو۔اس لیے غیر سسٹم کو آگے بڑھانے کے لیے $\frac{p}{q}$ کو بطور ناطق عدد متعارف کرایا گیا جبکہ $p,q\in Z$ اور $q\neq 0$ صحیح اعداد ہیں

اسی طرح اگر $p(x)$ اور $q(x)$ دو کثیر رقمی اظہاریے ہوں تو ضروری نہیں کہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ جبکہ $q(x)\neq 0$ بھی ایک کثیر رقمی ہو اس لیے ناطق اعداد کی طرح ناطق اظہاریوں کے تصور کو اجاگر کیا جاتا ہے۔

3.1.2 ناطق اظہاریوں کی تعریف کریں بطور دو کثیر رقمی $\frac{p(x)}{q(x)}$ اور $p(x)$ حصہ $q(x)$ جہاں $q(x)$ صفر کثیر رقمی نہیں ہے

ایسا الجبری اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا نہ جاسکتا ہو جبکہ $q(x)\neq 0$, $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں تو اُسے غیر ناطق اظہاریہ کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر $3x^2+4\neq 0$, $\frac{x^2-5}{3x^2+4}$ ناطق اظہاریے ہیں۔

3.1.3 مشاہدہ (پڑتال) کر سکیں کہ کوئی دیا گیا الجبری اظہاریہ

(i) کثیر رقمی ہے یا نہیں (ii) ناطق اظہاریہ ہے یا نہیں۔

درج ذیل مثالیں کثیر رقمی اور ناطق اظہاریوں کی پہچان کرنے میں مدد دیں گی۔

مثال 01 پڑتال کریں کہ مندرجہ ذیل کثیر رقمی ہیں یا نہیں۔

(i) $2x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (ii) $6x^3 - 4x^2 - 5x$

حل (i): $2x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

یہ کثیر رقمی نہیں ہے کیونکہ دوسری رقم میں مثبت اعداد نہیں ہیں۔

حل (ii): $6x^3 - 4x^2 - 5x,$

یہ کثیر رقمی ہے کیونکہ ہر رقم میں مثبت اعداد موجود ہیں۔

مثال 02 جانچ کریں کہ مندرج ذیل ناطق اظہاریے ہیں یا نہیں۔

(i) $\dfrac{x-2}{3x^2+1}$ (ii) $6x^3 - \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

حل (i): $\dfrac{x-2}{3x^2+1}$

ہندسہ (numerator) اور مخرج (denominator) دونوں کثیر رقمی ہیں۔ تو یہ ایک ناطق اظہاریہ ہے۔

حل (ii): $6x^3 - \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

یہ ایک ناطق اظہاریہ نہیں ہے، کیونکہ دوسری رقم کا مخرج (denominator) کثیر رقمی نہیں ہے۔

3.1.4 ناطق اظہاریہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو مختصر ترین شکل میں تحریر کرسکیں جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ کے تمام ارکان کے عددی سر صحیح اعداد ہوں اور ان میں کوئی جزوضربی مشترک نہ ہو۔

ناطق اظہاریوں $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو اس کی مختصر ترین شکل میں کہا جاتا ہے اگر $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمی ہوں اور اس کے عددی سر صحیح اعداد ہوں اور ان میں کوئی جزوضربی مشترک نہ ہو۔

مثال کے طور پر $\frac{x+1}{x-1}$ کی مختصر ترین شکل $\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ ہے۔

3.1.5 جانچ کریں کہ کوئی دیا گیا ناطق الجبری اظہاریہ مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں۔

ناطق اظہاریہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی جانچ کے لیے $p(x)$ اور $q(x)$ کے جزوضربی مشترک نکالیں اگر جزوضربی مشترک 1 ہے، ناطق اظہاریہ مختصر ترین شکل میں ہے۔

مثال کے طور پر i $\frac{x+1}{x-1}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے کیوں کہ $(x+1)$ اور $(x-1)$ کا جزوضربی مشترک 1 ہے۔

3.1.6 ناطق اظہاریہ کو اس کی مختصر ترین شکل میں تحریر کریں۔

فرض کریں کہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ ایک ناطق اظہاریہ ہے، جہاں $q(x) \neq 0$

قدم 1: جزوضربی کثیر رقمی $p(x)$ اور $q(x)$ تلاش کریں، اگر مناسب ہو۔

قدم 2: $p(x)$ اور $q(x)$ کے جزوضربی مشترک تلاش کریں۔

قدم 3: $p(x)$ اور $q(x)$ کے جزوضربی مشترک ختم کریں۔

مثال 01 درج ذیل ناطق اظہاریہ کو اس کی مختصر ترین شکل میں تحویل کری۔

(i) $\frac{(x^2-x)(x^2-5x+6)}{2x(x^2-3x+2)}$ (ii) $\frac{5(x^2-4)}{(3x+6)(x-3)}$

حل(i)

$$\frac{(x^2-x)(x^2-5x+6)}{2x(x^2-3x+2)}$$

$$=\frac{x(x-1)}{2x}\cdot\frac{x^2-3x-2x+6}{x^2-2x-x+2} \quad \text{(Provided } x\neq 0)$$

$$=\left(\frac{x-1}{2}\right)\cdot\frac{\{x(x-3)-2(x-3)\}}{\{x(x-2)-1(x-2)\}}$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)(x-2)}{2(x-2)(x-1)} \quad \text{Provided } x\neq 1 \text{ and } 2.$$

$$=\frac{(x-3)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(x-3)$$ جو مطلوبہ مختصر ترین شکل ہے۔

حل(ii)

$$\frac{5(x^2-4)}{(3x+6)\,(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-4}{x-3}\cdot\frac{5}{3x+6}$$

$$=\frac{x^2-2^2}{x-3}\cdot\frac{5}{3(x+2)}$$

$$=\frac{(x+2)(x-2)}{x-3}\cdot\frac{5}{3(x+2)}$$ (جزو ضربی)

$$=\frac{(x+2)(x-2)}{x-3}\cdot\frac{5}{3(x+2)} \quad x\neq -2$$

$$=\frac{5(x-2)}{3(x-3)}$$ جو مطلوبہ مختصر ترین شکل ہے۔

3.1.7 ناطق اظہاریوں کا مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب معلوم کریں۔

ناطق اظہاریوں کا مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب کو درج ذیل مثالوں کی مدد سے واضح کیا گیا ہے۔

مثال 01 $\frac{3}{x+1}+\frac{4x}{x^2-1}$ کو مختصر کریں۔

حل:

$$\frac{3}{x+1}+\frac{4x}{x^2-1}$$

$$=\frac{3}{x+1}+\frac{4x}{(x-1)(x+1)} \quad \text{(جزو ضربی)}$$

$$=\frac{3(x-1)+4x}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{3x-3+4x}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{7x-3}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{7x-3}{x^2-1}$$

لہٰذا مختصر ترین شکل میں حل کیا گیا۔

مثال 02 $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^3-1}$ کی حل کریں۔

حل:

$$\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^3-1}$$

$$=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^3-1}$$

$$=\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{(x^2+x+1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2+x+1-x-1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2}{(x+1)(x^3-1)}$$

لہٰذا مختصر ترین شکل میں حل کیا گیا۔

مثال 03 $\frac{x^2-9}{2x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+x-12}$ کو حل کریں۔

حل:

مختصر

$$\frac{x^2}{x^2+x-12}\cdot\frac{x^2-9}{2x^2}$$

$$=\frac{x^2}{x^2+4x-3x-12}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2x^2}$$

$$=\frac{1}{x(x+4)-3(x-4)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2}$$ (جزوضربی)

$$=\frac{1}{(x+4)(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2}$$ (دیا گیا $x\neq 3$)

$$=\frac{(x+3)}{2(x+4)}$$

لہٰذا مختصر ترین شکل میں حل کیا گیا۔

3.1.8 ایک ناطق اظہاریہ کو دوسرے ناطق اظہاریے سے تقسیم کر کے جواب کو مختصر ترین شکل میں لکھیں:

ایک ناطق اظہاریہ کو دوسرے سے تقسیم کرنے کی صورت میں، ہم سب سے پہلے تقسیم کو ضرب میں تبدیل کرنے کے لیے الٹتے ہیں اور نتیجے میں آنے والے حاصل ضرب کو مختصر ترین شکل میں حل کریں۔

مثال 01 $\frac{x^2-3xy}{4x+20y}\div\frac{3x-9y}{2x+10y}$ کو حل کریں۔

حل:

$$\frac{3x-9y}{2x+10y}\div\frac{x^2-3xy}{4x+20y}$$

$$=\frac{3x-9y}{2x+10y}\times\frac{4x+20y}{x^2-3xy}$$

$$=\frac{3(x-3y)}{2(x+5y)}\times\frac{4(x+5y)}{x(x-3y)}$$

$$=\frac{6}{x}$$

3.1.9 کچھ خاص حقیقی اعداد پر الجبری اظہاریوں کی قیمت حاصل کریں۔

مثال 02 $\frac{x^2+yz}{x^3+y^2-7yz^4}$ کی رقم تلاس کریں جب $x=3, y=2$ and $z=-1$

معلوم: $x=3, y=2, z=-1$

$$=\frac{x^2+yz}{x^3+y^2-7yz^4}$$

$$=\frac{(3)^2+(2)(-1)}{(3)^3+(2)^2-7(2)(-1)^4}$$

$$=\frac{9-2}{27+4-14}$$

$$=\frac{7}{17}$$

مشق 3.1

1 جانچ کریں کہ درج ذیل الجبری اظہاریے کثیر رقمی ہے یا نہیں۔

(i) $2xy^2-3x^2+5y^3-6$ (ii) $3xy^{-2}$

(iii) $6x^2-10x+7-\sqrt{45}$ (iv) $5\sqrt{x}-x+5x^2$

(v) $\frac{2}{x+2}$ (vi) $\frac{2}{x}+x^3-2$

2 مشاہدہ کریں کہ درج ذیل اظہاریے ناطق ہیں یا نہیں۔

(i) $\frac{x^2+2x+3}{x-4}$ (ii) $\frac{x^2+5\sqrt{x}-2x}{3x^2+5x+4}$ (iii) $\frac{13x^2-9x+4}{x^2+5x+\sqrt{7}}$

(iv) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ (v) $\frac{7}{x+7}$ (vi) $5\sqrt{x}-x+5x^2$

3. درج ذیل کو ان کی مختصر ترین شکل میں تحریر کریں۔

(i) $\frac{p^2-100}{p+10}$ (ii) $\frac{3a^2+3ab}{3a^2+6ab+3b^2}$ (iii) $\frac{(a-b)}{(a+b)}\times\frac{(a^2+ab)}{(2a^2-2b^2)}$

(iv) $\frac{(x+y)^2-z^2}{x+y+z}$ (v) $\frac{(m^2-6m)(3m+15)}{2m-12}$ (vi) $\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$

4. مختصر کریں:

(i) $\frac{4x-1}{2x-2}+\frac{4x+1}{2x+2}$ (ii) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}$ (iii) $\frac{xy}{xy+1}+\frac{xy+1}{xy-1}$

(iv) $\frac{x-2}{x+3}-\frac{x+1}{x+6}$ (v) $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$ (vi) $\frac{4y}{y^2-1}-\frac{y+1}{y-1}$

5. اشارہ کیے گئے عوامل انجام دیں اور حل کریں۔

(i) $\left(\frac{x^2}{4y^2-x^2}+1\right)\div\left(1-\frac{x}{2y}\right)$ (ii) $\frac{x+3}{3y-2x}\cdot\frac{4x^2-9y^2}{xy+3y}$

(iii) $\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\times\frac{x+1}{x-1}\right)$ (iv) $\frac{8(y+3)}{9}\times\frac{12(y+1)}{4(y+3)}\div\frac{8(y+1)}{5}$

(v) $\frac{q^2-25}{q^2-3q}\div\frac{q^2+5q}{q^2-9}$ (vi) $\frac{4}{z^2-4z-5}\div\frac{2}{4z^2-4}$

6. $t+\frac{1}{t}$ کی رقم معلوم کریں جب $t=\frac{x-y}{x+y}$

7. مندرج ذیل کی رقوم معلوم کریں۔

(i) $\dfrac{5(x+y)}{3x^2\sqrt{y}+6}$, if $x=-4,\ y=9$

(ii) $\dfrac{42ab^2c^3}{3a^2b+1}$, if $a=3,\ b=2$ and $c=1$

(iii) $\dfrac{(x+y)^3-z^2}{x^2y^2+z^2}$, if $x=2,\ y=-4$ and $z=3$,

(iv) $\dfrac{3x^2y}{z}-\dfrac{bc}{x+1}$, if $x=2,\ y=-1,\ z=3,\ b=4,\ c=\dfrac{1}{3}$

(v) $\dfrac{(ab^2-c)}{(a+cd^2)}\times\dfrac{(c+d)}{(a^2b-d)}$, if $a=1,\ b=3,\ c=-3$ and $d=2$.

3.2 الجبری کلیے:

ہم پہلے سے الجبری کلیے کا مطالعہ اور اس کا استعمال، پہلی جماعتوں میں کر چکے ہیں۔ اس سیکشن میں ہم مزید کچھ کلیوں اور ان کے استعمال کا مطالعہ کریں گے۔

3.2.1 کلیات کی پہچان کریں۔

(i) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

تصدیق:

$$\begin{aligned} L.H.S &= (a+b)^2+(a-b)^2 \\ &= a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2 \\ &= 2a^2+2b^2 \\ &= 2(a^2+b^2)=R.H.S \end{aligned}$$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

اور $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(ii) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

تصدیق:

$$\begin{aligned} L.H.S &= (a+b)^2-(a-b)^2 \\ &= a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2) \\ &= a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2 \\ &= 4ab=R.H.S \end{aligned}$$

$\therefore (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

اور $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

طریقہ درج ذیل مثالوں میں بیان کیا گیا ہے۔

مثال 02 (i) $a^2 + b^2$ اور ab کی رقم معلوم کریں جب $a + b = 6$ اور $a - b = 4$

حل: معلوم ہے کہ، $a + b = 6,\ a - b = 4.$

(i) $a^2 + b^2 = ?$

ہم جانتے ہیں $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$a+b = 6$ and $a - b = 4$ کی قیمتیں درج کرنے پر

$(6)^2 + (4)^2 = 2(a^2 + b^2),$

$\Rightarrow\ 36 + 16 = 2(a^2 + b^2)$

$\Rightarrow\ 52 = 2(a^2 + b^2)$

$\Rightarrow\ 26 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow\ \boxed{a^2 + b^2 = 26}$

(ii) $ab = ?$

ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$

$a+b = 6$ and $a - b = 4$ کی قیمتیں درج کرنے پر

$\therefore\ (6)^2 - (4)^2 = 4ab,$

$\Rightarrow\ 36 - 16 = 4ab,$

$\Rightarrow\ 20 = 4ab,$

$\Rightarrow\ 5 = ab,$

or $\boxed{ab = 5}$

پس $a^2 + b^2 = 26$ and $ab = 5.$

3.3.2 کلیات کی پہچان کریں۔

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

تصدیق:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c)\\ &= a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)\\ &= a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = \text{R.H.S}\end{aligned}$$

یہ طریقہ درج ذیل مثالوں میں بیان کیا گیا ہے۔

مثال 01 $a^2+b^2+c^2$ کی رقم معلوم کریں،جب $a+b+c=7$ اور $ab+bc+ca=15$

حل: معلوم ہے کہ

$a+b+c=7$ and $ab+bc+ca=15$

$a^2+b^2+c^2=?$

ہم جانتے ہیں کہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

اب قیمتیں رکھنے پر ، $a+b+c=7$ and $ab+bc+ca=15$

$\therefore \quad (7)^2=a^2+b^2+c^2+2(15)$

$\Rightarrow \quad 49=a^2+b^2+c^2+30$

$\Rightarrow \quad 49-30=a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow \quad 19=a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow \quad \boxed{a^2+b^2+c^2=19}$

لہٰذا $(a^2+b^2+c^2)$ کی رقم 19 ہے۔

مثال 02 $(a+b+c)$ کی رقم معلوم کریں جب $a^2+b^2+c^2=38$ اور $ab+bc+ac=31$

حل: ہم جانتے ہیں کہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

اب قیمتیں رکھنے پر ، $a^2+b^2+c^2=38$ and $ab+bc+ac=31$

$(a+b+c)^2=38+2(31)$

$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2=38+62$

$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2=100$

$\Rightarrow \quad (a+b+c)=\left(\pm\sqrt{100}\right)$

$\Rightarrow \quad \boxed{(a+b+c)=\pm 10}$

لہٰذا $(a+b+c)$ کی رقم ± 10 ہے۔

مثال 03 $(ab+bc+ac)$ کی رقم معلوم کریں، جب $a+b+c=8$ اور $a^2+b^2+c^2=20$

حل: معلوم ہے کہ

$a+b+c=8$ and $a^2+b^2+c^2=20$,

ہم جانتے ہیں کہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

قیمتیں رکھنے پر $a+b+c=8$ and $a^2+b^2+c^2=20$,

$(8)^2=20+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow\quad 64=20+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow\quad 64-20=2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow\quad 44=2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow\quad 22=ab+bc+ac$

$\Rightarrow\quad ab+bc+ac=22$

لہٰذا $(ab+bc+ac)$ کی رقم 22 ہے۔

3.2.3 کیوبک کلیے کی پہچان کریں۔

(i) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

تصدیق

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)^2\\&=(a+b)(a^2+2ab+b^2)\\&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\&=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2\\&=a^3+b^3+3ab(a+b)\end{aligned}$$

(ii) $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

تصدیق

$$\begin{aligned}(a-b)^3&=(a-b)(a-b)^2\\&=(a-b)(a^2-2ab+b^2)\\&=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\&=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2\\&=a^3-b^3-3ab(a-b)\end{aligned}$$

درج ذیل مثالیں کیوبک کلیے اور اس کے استعمال کو سمجھنے میں مدد دیں گے۔

مثال 01 $a^3 + b^3$ کی رقم نکالیں، جبکہ $a + b = 4$ اور $ab = 5$

حل: معلوم ہے کہ

$a + b = 4$ اور $ab = 5$

ہمیں تلاش کرنا ہے

$a^3 + b^3$

کیوں کہ $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

رقم لگا کر $a + b = 4$ اور $ab = 5,$

$(4)^3 = a^3 + b^3 + 3(5)(4)$

$\Rightarrow \quad 64 = a^3 + b^3 + 60$

$\Rightarrow \quad 64 - 60 = a^3 + b^3$

$\Rightarrow \quad 4 = a^3 + b^3$

$\Rightarrow \quad \boxed{a^3 + b^3 = 4}$

لہٰذا $(a^3 + b^3)$ کی رقم 4 ہے۔

مثال 02 $a^3 - b^3 = 5$ کی رقم معلوم کریں، جب $a - b = 5$ اور

حل: معلوم ہے کہ

$a^3 - b^3 = 5$ اور $a - b = 5$

ہمیں ab تلاش کرنا ہے

کیونکہ $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

اب رقم لگا کر $a^3 - b^3 = 5$ اور $a - b = 5,$

$(5)^3 = 5 - 3ab(5)$

$\Rightarrow \quad 125 = 5 - 15ab$

$\Rightarrow \quad 125 - 5 = -15ab$

$\Rightarrow \quad 120 = -15ab$

$\Rightarrow \quad -8 = ab$

$\Rightarrow \quad \boxed{ab = -8}$

مثال 03 $x^3+\frac{1}{x^3}$ کی رقم تلاش کریں جب $x+\frac{1}{x}=3$

حل: معلوم ہے کہ

$$x+\frac{1}{x}=3$$

دونوں طرف کیوب لیں، ہمارے پاس ہے۔

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=3^3$$

$$\Rightarrow \quad x^3+\frac{1}{x^3}+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=27 \quad \left[(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^3+\frac{1}{x^3}+3(3)=27$$

$$\Rightarrow \quad x^3+\frac{1}{x^3}+9=27$$

$$\Rightarrow \quad x^3+\frac{1}{x^3}=27-9$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^3+\frac{1}{x^3}=18}$$

مثال 04 $8x^3-\frac{1}{x^3}$ تلاش کریں جب $2x-\frac{1}{x}=4$

حل: معلوم ہے کہ

$$= \quad 2x-\frac{1}{x}=4$$

دونوں طرف کیوب لیں۔

$$(2x-\frac{1}{x})^3=(4)^3$$

$$(2x)^3-(\frac{1}{x})^3-3(2x)(\frac{1}{x})(2x-\frac{1}{x})=64$$

$$8x^3-\frac{1}{x^3}-6(4)=64$$

$$8x^3-\frac{1}{x^3}-24=64 \qquad \Rightarrow 8x^3-\frac{1}{x^3}=88$$

3.2.4 کلیہ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ کی پہچان کریں۔

(i) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

تصدیق: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3$

(ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

تصدیق: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3$

مثال 01 $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ اور $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right)$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل: معلوم ہے کہ $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$\therefore (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

پس

$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$

مثال 02 $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ اور $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right)$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل: معلوم ہے کہ $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$\therefore (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

پس

$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$

مثال 03 حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

حل: معلوم ہے کہ $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) \quad [\because (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3]$

$= x^6 - y^6.$

مشق 3.2

.1 a^2+b^2 اور ab کی رقوم معلوم کریں $a+b=8$ جبکہ $a-b=6$

.2 a^2+b^2 اور ab کی رقوم معلوم کریں $a+b=5$ جبکہ $a-b=3$

.3 $a^2+b^2+c^2$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a+b+c=9$ اور $ab+bc+ac=13.$

.4 $a^2+b^2+c^2$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a+b+c=\frac{1}{3}$ اور $ab+bc+ac=\frac{-2}{9}$

.5 $a+b+c$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a^2+b^2+c^2=29$ اور $ab+bc+ac=10$

.6 $a+b+c$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a^2+b^2+c^2=0.9$ اور $ab+bc+ac=0.8.$

.7 $ab+bc+ac,$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a+b+c=10$ اور $a^2+b^2+c^2=20.$

.8 a^3+b^3 کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a+b=$ اور 4

.9 ab کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a^3-b^3=5$ اور $ab=3.$

.10 ab کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a^3-b^3=16$ اور $a-b=4.$

.11 a^3-b^3 کی رقم تلاش کریں، جبکہ $a-b=5$ اور $ab=7.$

.12 $125x^3+y^3$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $5x+y=13$ اور $xy=10.$

.13 $216a^3-343b^3$ کی رقم تلاش کریں، جبکہ $6a-7b=11$ اور $ab=8.$

14. $x^3+\frac{1}{x^3}$ کی رقم تلاش کریں، جب $x+\frac{1}{x}=7$

15. $x^3-\frac{1}{x^3}$ کی رقم تلاش کریں، جب $x-\frac{1}{x}=11$

16. حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $\left(\frac{3}{2}b+\frac{2}{3b}\right)\left(\frac{9b^2}{4}+\frac{4}{9b^2}-1\right)$ (ii) $\left(\frac{7y^2}{9}+\frac{9}{7y^2}\right)\left(\frac{49y^4}{81}+\frac{81}{49y^4}-1\right)$

(iii) $\left(\frac{x^4}{12}+\frac{12}{x^4}\right)\left(\frac{x^8}{144}+\frac{144}{x^8}+1\right)$ (iv) $\left(c^2-\frac{1}{c^2}\right)\left(c^4+\frac{1}{c^4}+1\right)$

17. متعلقہ حاصل ضرب معلوم کریں کلیے استعمال کر کے

(i) $(2x^2+3y^2)(4x^4-6x^2y^2+9y^4)$

(ii) $(2x^2-3y^2)(4x^4+6x^2y^2+9y^4)$

(iii) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.

(iv) $(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2)(16x^4+81y^4)$

3.3 مقادیر اصم اور اس کے استعمال۔

3.3.1 مقادیر اصم اور اس کے استعمال کی پہچان کریں۔

مقادیر اصم: ایک جملہ جس میں کم از کم ایک علامت میں جذری علامت شامل ہو وہ بھی اپنی آسان شکل میں، مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر، $\sqrt{2}, \sqrt{a-4}, \sqrt[3]{\frac{5}{10}}, \left(\frac{1}{3}+\sqrt{3}\right), \left(\sqrt[5]{2}-\frac{1}{2}\right)$ مقادیر اصم ہیں۔

تمام مقادیر اصم غیر ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

اگر $\sqrt[n]{a}$ ایک غیر ناطق عدد ہے اور 'a' بہترین n^{th} قوت نما (power) نہیں ہے پھر یہ n^{th} درجہ $\sqrt[n]{a}$ کا مقدار اصم ہے کا نتیجہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔ اس کو غیر ناطق جذر بھی کہا جاتا ہے ناطق مجذوز کے ساتھ۔

مثال کے طور پر $\sqrt{\frac{5}{7}}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[7]{10}$:s مقدار اصم ہیں بالترتیب درجہ 2nd, 3rd, 4th, 5th اور 7th ہیں مگر $\sqrt[3]{27}, \sqrt{\frac{1}{4}}$ مقدار اصم نہیں ہیں کیونکہ یہ بالترتیب عدد 3 اور $\frac{1}{2}$ کو پیش کرتا ہے۔

3.3.2 دوسرے درجے کے مقادیر اصم پر بنیادی عوامل کا استعمال کر کے مخرج (نسب نما) کو ناطق بنا کر ہم قیمت کسر میں تبدیل کریں۔

(1) دوسرے درجہ کے مقادیر اصم:

(i) ایسا مقدار اصم جس میں صرف ایک علامت ہو مونو میل (monomial) مقدار اصم کہلاتا ہے۔

مثلاً $\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{a-9}, \sqrt{53}$ وغیرہ دوسرے درجہ کے مونو میل مقدار اصم ہیں۔

(ii) ایسا مقدار اصم جس میں دو مونو میل مقدار اصم کا جمع و تفریق یا مونو میل مقدار اصم اور ناطق عدد کا مجموعہ دوطرفہ (binomonil) مقدار اصم کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $\sqrt{3}-35, \sqrt{2}-13, \sqrt{11}, \sqrt{17}+$ وغیرہ دوسرے درجہ کے دوطرفہ مقدار اصم ہیں۔

(iii) دوطرفہ مقدار اصم کا جوڑ

اس قسم کے جملے

(ا) $\left(\sqrt{a}+c\sqrt{b}\right)$ اور $\left(\sqrt{a}-c\sqrt{b}\right)$ ایک دوسرے کے زوج مقادیر اصم ہیں

(ب) $a+\sqrt{b}$ اور $a-\sqrt{b}$ ایک دوسرے کے زوج مقادیر اصم ہیں

(ب) دوسرے درجہ کی مقادیر اصم پر بنیادی عوامل کا استعمال کر کے مخرج (نسب نما) کو ناطق بنا کر ہم قیمت کسر میں تحویل کریں۔

(i) مقادیر اصم کا جمع اور تفریق کرنا۔

مقادیر اصم کا جمع و تفریق درج ذیل law کے استعمال سے ہو سکتا ہے

مثال کے طور پر $a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$ اور $a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=(a-b)\sqrt{c}$

مثال 01 $\sqrt{343}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$ کو حل کریں۔

حل:

$$\sqrt{343}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$$
$$=\sqrt{7\times7\times7}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$$
$$=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$$
$$=(7-3-2)\sqrt{7}$$
$$=(7-5)\sqrt{7}$$
$$=2\sqrt{7}$$

مثال 01 $\sqrt{32}+5\sqrt{2}+\sqrt{128}+7\sqrt{2}$ کو حل کریں۔

حل:

$$\sqrt{32}+5\sqrt{2}+\sqrt{128}+7\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{16\times 2}+5\sqrt{2}+\sqrt{64\times 2}+7\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{(4)^2\times 2}+5\sqrt{2}+\sqrt{(8)^2\times 2}+7\sqrt{2}$$
$$=4\sqrt{2}+5\sqrt{2}+8\sqrt{2}+7\sqrt{2}$$
$$=(4+5+8+7)\sqrt{2}$$
$$=24\sqrt{2}$$

(ii) مقادیر اصم کا حاصل ضرب اور تقسیم

مقادیر اصم کا حاصل ضرب اور تقسیم درج ذیل قانون کو استعمال کر کے حل کیا جا سکتا ہے۔

(a) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a>0$ اور $b>0$.

مثال 01 حل کریں : $\sqrt{125}\times\sqrt{48}$

حل:

$$\sqrt{125}\times\sqrt{48}$$
$$=\sqrt{(5)^2\times 5}\times\sqrt{(4)^2\times 3}$$
$$=5\sqrt{5}\times 4\times\sqrt{3}$$
$$=(5\times 4)\left(\sqrt{5}\times\sqrt{3}\right)$$
$$=20\sqrt{15}$$

مثال 01 حل کریں : $\dfrac{\sqrt{162}}{\sqrt{144}}$

حل:

$$\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{144}}$$
$$=\frac{\sqrt{2\times 81}}{\sqrt{12\times 12}}$$
$$=\frac{\sqrt{2\times(9)^2}}{\sqrt{(12)^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{12}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

مشق 3.3

.1 حل کریں

(i) $\sqrt[4]{81x^{-8}z^{4}}$ (ii) $\sqrt[3]{256a^{6}b^{12}c^{9}}$ (iii) $\sqrt[7]{128}$ (iv) $\sqrt{7776}$

(v) $\dfrac{\sqrt[3]{(125)^2\times 8}}{\sqrt{(2\times 32)^2}}$ (vi) $\dfrac{\sqrt{21}\times\sqrt{28}}{\sqrt{121}}$ (vii) $\sqrt{\dfrac{(216)^{\frac{2}{3}}\times(125)^{\frac{1}{2}}}{(0.04)^{\frac{-3}{2}}}}$

(viii) $\dfrac{\sqrt[6]{4}\times\sqrt[3]{27}\times\sqrt{60}}{\sqrt{180}\times\sqrt[3]{0.25}\times\sqrt[4]{9}}$

.2 زوج تلاش کریں

(i) $\left(8-4\sqrt{3}\right)$ (ii) $\left(6\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right)$ (iii) $\left(8\sqrt{12}+\sqrt{8}\right)$

(iv) $\left(2-\sqrt{3}\right)$

.3 حل کریں

(i) $\left(6\sqrt{2}+4\sqrt{2}+7\sqrt{128}\right)$ (ii) $\sqrt{5}+\sqrt{125}+7\sqrt{5}$

(iii) $\left(13+15\sqrt{3}\right)+\left(7-6\sqrt{3}\right)$ (iv) $\sqrt{250}+\sqrt{490}+3\sqrt{10}$

(v) $\sqrt{245}+\sqrt{625}-\sqrt{45}$ (vi) $10\sqrt{11}-\sqrt{396}-3\sqrt{11}$

(vii) $\sqrt{17}\left(10\sqrt{17}-2\sqrt{17}\right)$ (viii) $\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}\right)$

(ix) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (x) $\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{13}-\sqrt{11}\right)$

(xi) $\left(3\sqrt{6}-4\sqrt{5}\right)^2$ (xii) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2$

3.4 ناطق بنانے کا عمل

3.4.1 حقیقی اعداد $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ، $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ اور ان کے اتصال سے حاصل کردہ عدد، جبکہ x,y قدرتی اعداد اور $a\ b$ صحیح اعداد ہوں، کو ناطق بنانے کے عمل کی (بالکل ٹھیک مطلب کے ساتھ) وضاحت کریں

اگر دو مقادیر اصم کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہے، تو ہر مقدار اصم دوسرے کا ناطقی جزو ضربی کہلائے گا۔

مثلاً: $\left(35+\sqrt{31}\right)$ اور $\left(35-\sqrt{31}\right)$ ناطق اجزاء ہیں۔

کسی دیے ہوئے مقدار اصم کو اس کے ناطقی عوامل سے ضرب دینے کے عمل کو ایک ناطق عدد حاصل کرنے کے لیے بطور حاصل ضرب دی گئی مقدار اصم کا ناطق بنانے کا عمل کہلاتی ہے۔ زوج مقادیر اصم کا حاصل ضرب ناطق عدد ہوتا ہے۔

مثال 01 $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$
$$=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$=3-2=1$$

مخرج کا ناطق بنانے کا عمل:

مذکورہ بالا بحث کا مد نظر رکھتے ہوئے، ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ، $(a+b\sqrt{x})$ یا $(a-b\sqrt{x})$ عوامل کے مخرج کا ناطق بنانے کے لیے، ہم زوج جزو ضربی $(a-b\sqrt{x})$ یا $(a+b\sqrt{x})$ سے دونوں ہندسہ (numerator) اور مخرج (denominats) کو ضرب دیں۔ ایسا کرنے سے ہم جذر (radical) کو ختم کرتے ہیں اور لہٰذا کسی بھی مقدار اصم سے پاک مخرج حاصل ہوتا ہی۔

حقیقی اعداد کی اقسام کا ناطق بنانے کا عمل:

(i) $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

جملات $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ اور $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ان کا ناطق بنانے کا عمل، جہاں $x,y\in\mathbb{N}$ اور $a,b\in\mathbf{Z}$ درج ذیل مثالیں ناطق بنانے کے تصور کو سمجھنے میں مدد دیں گی۔

مثال 01 $\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$ کو ناطق بنائیں۔

حل:

مخرج کو $5-2\sqrt{3}$ کے ساتھ ضرب اور تقسیم دیں
$5+2\sqrt{3}$ کا جوزوج ہے

$$\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{5+2\sqrt{3}}\times\frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{(5)^2-(2\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{25-12}$$

$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{13}$$

$$=\frac{5}{13}-\frac{2}{13}\sqrt{3}$$

مثال 01 $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ کو ناطق بنائیں۔

حل:

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{1}$$

$$=5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

مشق 3.4

.1 درج ذیل کے مخرج کا ناطق بنائیں۔

(i) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{1}{4\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$

(iv) $\frac{16}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$ (v) $\frac{9-\sqrt{2}}{9+\sqrt{2}}$ (vi) $\frac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}-3}$

.2 (i) اگر $x=8-3\sqrt{7}$ ، $x+\frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کریں۔

(ii) اگر $\frac{1}{x}=2\sqrt{28}-11$ ، x کی قیمت معلوم کریں۔

(iii) اگر $x=3-2\sqrt{2}$ مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

$x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$, $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^2-\frac{1}{x^2}$ اور $x^4+\frac{1}{x^4}$

.3 اگر $x=\sqrt{5}+2$ ، $x^4+\frac{1}{x^4}$ کی قیمت معلوم کریں۔

.4 اگر $\frac{1}{y}=2+\sqrt{3}$ ، $y^4+\frac{1}{y^4}$ کی قیمت معلوم کریں۔

.5 اگر $\frac{1}{z}=7-4\sqrt{3}$ ، z^2-z^{-2} کی قیمت معلوم کریں۔

اعادہ مشق 3

1. درست جواب کے گرد دائرہ بنائیں۔

(i) ہر کثیر رقمی ہوتا ہے۔

(ا) غیر ناطق اظہاریہ (ب) ناطق اظہاریہ

(ج) ایک اظہاریہ (د) ان میں سے کوئی نہیں۔

(ii) ایسا مقدار اصم جس میں دو مونو میل مقادیر اصم کا مجموعہ ہوا کہلاتا ہے۔

(ا) سہ رقمی مقدار اصم (ب) دو رقمی مقدار اصم

(ج) زوج مقادیر اصم (د) مونو میل مقدار اصم

(iii) $3x + 2y - 3$ ایک الجبری ہے۔

(ا) تاثرات (ب) مساوات

(ج) جملہ (د) اندرون مساوات

(iv) $3x^2y + 5y^4 - 10$ کی ڈگری ہے۔

(ا) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 10

(v) $\sqrt{7}$ مثال ہے کی۔

(ا) مونو میل مقدار اصم (ب) سہ رقمی مقدار اصم

(ج) دو رقمی مقدار اصم (د) زوج مقدار اصم

(vi) دو کثیر رقمی $\frac{p(x)}{q(x)}$ اور $p(x)$ جہاں $q(x)$ $q(x) \neq 0$ کہلاتا ہے۔

(ا) ناطق اظہاریہ (ب) غیر ناطق اظہاریہ

(ج) کثیر رقمی (د) زوج

(vii) $\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$ برابر ہے۔

(ا) $\frac{2x}{x^2 - y^2}$ (ب) $\frac{2y}{x^2 - y^2}$ (ج) $\frac{-2x}{x^2 - y^2}$ (د) $\frac{-2y}{x^2 - y^2}$

(viii) $2-\sqrt{3}$ کا زوج ہے:

(ا) $2+\sqrt{3}$ (ب) $-2-\sqrt{3}$

(ج) $\sqrt{2}+3$ (د) $\sqrt{3}-4$

(ix) $a^3-3ab(a-b)-b^3$ برابر ہے۔

(ا) $(a-b)^3$ (ب) $(a+b)^3$

(ج) a^3+b^3 (د) a^3-b^3

(x) اگر $a+b=5$ اور $a-b=3$ پھر ab کی رقم معلوم کریں۔

(ا)4 (ب)5 (ج)3 (د)6

(xi) $\left(5+\sqrt{15}\right)\left(5-\sqrt{15}\right)$ برابر ہے۔

(ا)10 (ب)15 (ج)25 (د)30

(xii) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ برابر ہے۔

(ا) $(a+b-c)^2$ (ب) $(a+b+c)^2$

(ج) $(a-b+c)^2$ (د) $(a+b+c)^3$

2. خالی جگہیں پُر کریں۔

(i) کسی کثیر رقمی کی ڈگری ہوتی ہے ______

(ii) $2-\sqrt{3}$ مقدار اصم ______ کا زوج ہے۔

(iii) $2x^3+x^2-4x^4+7x-9$ ______ کثیر رقمی کی ڈگری ہے

(iv) $\frac{\sqrt{x}}{3x+5}$ ایک ______ $x \neq \frac{-5}{3}$ تا ثر ہے۔

(v) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)=$ ______

خلاصہ

- ایک متغیر x میں ایک کثیر رقمی اظہاریہ (محض کثیر رقمی) کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔
$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_n$ کثیر رقمی کو $p(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- ایک الجبری اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کے طور پر لکھا جاسکتا ہے، جہاں $q(x) \neq 0$ اور $p(x), q(x)$ دونوں کثیر رقمی ہیں، ناطق اظہاریہ کہلاتا ہے۔
- ایک الجبری اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کے طور پر نہیں لکھا جاسکتا، جہاں $q(x) \neq 0$ اور $p(x)$ دونوں $q(x)$ کثیر رقمی ہیں، غیر ناطق اظہاریہ x کہلاتا ہے۔
- ایسی کثیر رقمی جس میں ایک رقم ہو، یک رقمی (Monomial) کہا جاتا ہے۔
- ایسی کثیر رقمی جس میں دو رقوم ہوں، دو رقمی (Binomial) کہا جاتا ہے۔
- ایسی کثیر رقمی جس میں تین رقوم ہوں، تین رقمی (Trinomial) کہا جاتا ہے۔
- ناطق اظہاریہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہوتا ہے اگر $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمی ہوں عددی سر کے صحیح اعداد ہوں اور ان میں کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو۔
- $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ and $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$
- $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ and $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$
- ایک تاثر مقدار اصم کہلاتا ہے اگر اس کی کم از کم ایک اصطلاح میں جذری علامت ہو۔
مثلاً: $\sqrt{\frac{3}{10}}$ $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ مقادیر اصم ہیں۔

- اگر $\sqrt[n]{a}$ ایک غیر ناطق عدد ہے اور 'a' بہترین n^{th} قوت نما نہیں ہے پھر یہ n^{th} درجہ کا مقدار اصم کہلائے گا۔
- ایک اصطلاح والے مقدار اصم کو مونو میل کہتے ہیں۔
- ایسا مقدار اصم جس میں دو مونو میل مقدار اصم کا جمع و تفریق یا مونو میل مقدار اصم اور ناطق عدد کا مجموعہ دو طرفہ (binomial) مقدار اصم کہلاتا ہے۔
- اس قسم کے جملے $\left(\sqrt{a}+c\sqrt{b}\right)$ اور $\left(\sqrt{a}-c\sqrt{b}\right)$ ایک دوسرے کے زوج مقادیر اصم (conjugate surds) ہیں۔
- $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ اور $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ معلوم $a>0$ اور $b>0$
- اگر دو مقادیر اصم کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہے، تو ہر مقدار اصم دوسرے کا ناطقی جز وضربی کہلائے گا۔

کسی دیے ہوئے مقدار اصم کو اس کے ناطقی عوامل سے ضرب دینے کے عمل کو ایک ناطق عدد حاصل کرنے کے لیے بطور حاصل ضرب دی گئی مقدار اصم کا ناطق بنانے کا عمل کہلاتی ہے۔

یونٹ 4

عمل تجزی

FACTORIZATION

طلباء کے تدریسی نتائج:

اس یونٹ کے مطالعہ کے بعد طلباء اس قابل ہونگے کہ:

- مندرجہ ذیل اظہاریوں کی تجزی دہرائیں سکیں گے۔
  - $ka + kb + kc$ (تمام رقوم میں مشترکہ جُز (عنصر)
  - $ac + ad + bc + bd$ (رقوم کے جوڑوں میں مشترکہ جز (عنصر)
  - $a^2 \pm 2ab + b^2$ (مکمل مربع)
  - $a^2 - b^2$ (دو مربع رقوم میں تفریق)
  - $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$
  - $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$
- مندرجہ ذیل اقسام کے اظہاریوں کی تجزی کر سکیں گے۔
  - قسم i- $a^4 + a^2b^2 + b^4$ اور $a^4 + b^4$
  - قسم ii- $x^2 + px + q$
  - قسم iii- $ax^2 + bx + c$
  - قسم iv- $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + k$
    $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k$
    $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$
  - قسم v- $a^3 \pm b^3$
  - قسم vi- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ اور $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- مسئلہ باقی مثالوں سے بیان کرنا اور ثابت سیکھ جائیں گے۔
- باقی معلوم کرنا (بغیر تقسیم) جبکہ ایک کثیر رقمی ایک درجہ کثیر رقمی سے تقسیم ہو۔
- کثیر رقمی کے (0) صفر کو بیان کرنا۔
- مسئلہ اجزاء بیان کرنا اور ثابت کرنا۔
- مصنوعی تقسیم کا طریقہ بیان کرنا۔
- مصنوعی تقسیم استعمال کرنا۔
  - خارج قسمت اور باقی معلوم کرنا جب دیا ہوا کثیر رقمی اظہاریہ ایک یک درجہ کثیر رقمی اظہاریے سے تقسیم ہو۔
  - نامعلوم کی قیمتیں معلوم کرنا اگرچہ کثیر رقمی اظہاریے کا صفر دیا گیا ہو۔
  - نامعلوم کی قیمتیں معلوم کرنا۔ اگر کثیر رقمی اظہاریوں کا جُز (عنصر) دیا گیا ہو۔
- مسئلہ اجزاء استعمال کر کے کعبی کثیر رقمی اظہاریے کی تجزی کرنا۔

تعارف:

ہم عمل تجزی کا مطالعہ کریں گے جو علم ریاضی میں ایک اہم کردار ادا کرتی ہے۔ یہ ہمیں مشکل ترین اظہاریوں کو سادہ اظہاریوں میں تبدیل کرنے میں مدد کریگا۔

4.1 عمل تجزی

فرض کریں کہ $p(x), q(x)$ اور $r(x)$ تین کثیر رقمی اظہارے ہیں، اسی طرح $p(x)\times q(x) = r(x)$ یہاں پر $r(x)$ ایک نتیجہ خیز کثیر رقمی اظہاریہ ہے جو $p(x)$ اور $q(x)$ کی حاصل ضرب ہے۔ اظہاریہ $r(x)$ کے اجزاء ضربی $p(x)$ اور $q(x)$ ہیں۔

ذیل میں کچھ کثیر رقمی اظہاریوں کے اجزاء ضربی کی مثالیں ہیں۔

(i) $6x^2y^3=(2\times3)(x\times x)(y\times y\times y)$

(ii) $ax + aby + abcz = a(x + by + bcz)$

(iii) $5x + 15xy= 5x(1+3y)$

(iv) $x - y=\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$

4.1.1 مندرجہ ذیل اقسام کے اظہاریوں کی عمل تجزی دہرائیں۔

(i) $ka + kb + kc$ (تمام رقوم میں مشترکہ جُز)

(ii) $ac + ad + bc + bd$ (رقوم کے جوڑوں میں مشترکہ جز)

(iii) $a^2\pm 2ab + b^2$ (مکمل مربع)

(iv) $a^2 - b^2$ (دو مربع رقوم میں تفریق)

(v) $a^2\pm 2ab + b^2 - c^2$

(vi) $\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2$

(i) $ka + kb + kc$ کے اجزاء ضربی۔

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 01: $10a + 15b - 20c$ کے اجزاء ضربی معلوم کریں۔

حل: $10a + 15b - 20c$

$= 5(2a + 3b - 4c)$

مثال 02: $\frac{4}{9}-\frac{8}{12}x-\frac{16}{15}xy$ کے اجزاء ضربی معلوم کریں۔

حل: $\frac{4}{9}-\frac{8}{12}x-\frac{16}{15}xy$

$=\frac{4}{3\cdot3}-\frac{4\cdot2}{3\cdot4}x-\frac{4\cdot4}{3\cdot5}xy$

$=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\quad\frac{2}{4}x\quad\frac{4}{5}xy\right)$ ($\frac{4}{3}$ کو مشترکہ جزو ضربی نکالنے سے)

(ii) $ac + ad + bc + bd$ کی طرح کے اظہاریوں کی اجزاءِ ضربی معلوم کریں
مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں

مثال 01: $3a - ac - 3c + c^2$ کے اجزاءِ ضربی معلوم کریں

حل:
$$3a - ac - 3c + c^2$$
$$= a(3 - c) - c(3 - c)$$
$$= (3 - c)(a - c)$$

مثال 02: $9y^2z + 3xyz - 9xy^2 - 3x^2y$ کے اجزاءِ ضربی معلوم کریں

حل:
$$9y^2z + 3xyz - 9xy^2 - 3x^2y$$
$$= 3yz(3y + x) - 3xy(3y + x)$$
$$= (3y + x)(3yz - 3xy)$$
$$= (3y + x) \times 3y(z - x)$$
$$= 3y\,(x + 3y)(z - x)$$ (مطلوبہ اجزاءِ ضربی ہیں)

(iii) $a^2 \pm 2ab + b^2$ کی طرح کے اظہاریوں کے اجزاءِ ضربی معلوم کریں جیسا کہ ہمیں معلوم ہے کہ:
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2 = (a + b)^2$$
اور
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a)^2 - 2(a)(b) + (b)^2 = (a - b)^2$$
مندرج ذیل مثالوں پر غور کریں

مثال 01: $16a^2 + 40ab + 25b^2$ کی تجزی کریں

حل:
$$16a^2 + 40ab + 25b^2$$
$$= (4a)^2 + 2(4a)(5b) + (5b)^2$$
$$= (4a + 5b)^2 \quad [\because a^2+2ab+b^2=(a+b)^2]$$

مثال 02: $4p^2 - 28pq + 49q^2$ کی تجزی کریں

حل:
$$4p^2 - 28pq + 49q^2$$
$$= (2p)^2 - 2(2p)(7q) + (7q)^2$$
$$= (2p - 7q)^2 \quad [\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$$

(iv) $a^2 - b^2$ کی طرح کے اظہاریوں کی تجزی۔
مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں

مثال 01: $4x^2 - 1$ کی تجزی کریں

حل:
$$4x^2 - 1$$
$$= (2x)^2 - (1)^2$$
$$= (2x - 1)(2x + 1) \quad [\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$$

مثال 02: $ab\ y^2 - 6z^2$ کی تجزی کریں

حل:

$$96y^2 - 6z^2$$
$$= 6(16y^2 - z^2)$$
$$= 6[(4y)^2 - z^2]$$
$$= 6(4y - z)(4y + z) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

مثال 03: $9r^4 - (6s - t^2)^2$ کی تجزی کریں

حل:

$$9r^4 - (6s - t^2)^2$$
$$= (3r^2)^2 - (6s - t^2)^2$$
$$= [3r^2 - (6s - t^2)][3r^2 + (6s - t^2)], \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$
$$= (3r^2 - 6s + t^2)(3r^2 + 6s - t^2)$$

(v) $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$ کی طرح کے اظہاریوں کی تجزی۔

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں

مثال 01: $x^2 + 4xy^2 + 4y^4 - 4z^2$ کی تجزی کریں

حل:

$$x^2 + 4xy^2 + 4y^4 - 4z^2$$
$$= \{(x)^2 + 2(x)(2y^2) + (2y^2)^2\} - (2z)^2$$
$$= (x + 2y^2)^2 - (2z)^2$$
$$= \{(x + 2y^2) + 2z\}\{(x + 2y^2) - 2z\} \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$
$$= (x + 2y^2 + 2z)(x + 2y^2 - 2z)$$

مثال 02: $9p^2 - 6pq + q^2 - 9r^2$ کی تجزی کریں

حل:

$$9p^2 - 6pq + q^2 - 9r^2$$
$$= (3p)^2 - 2(3p)(q) + q^2 - (3r)^2$$
$$= (3p - q)^2 - (3r)^2$$
$$= (3p - q + 3r)(3p - q - 3r) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

(vi) $\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2$ کی طرح کے اظہاریوں کی تجزی کرنا۔

مثال 01: $\left(\sqrt{xy}\right)^2 - \left(\sqrt{z}\right)^2$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\left(\sqrt{xy}\right)^2 - \left(\sqrt{z}\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{xy} - \sqrt{z}\right)\left(\sqrt{xy} + \sqrt{z}\right) \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مشق 4.1

1. مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $4x + 16y + 24z$ (ii) $x^2 + 3x^2y + 4x^2y^2z$

(iii) $3pqr + 6pqt + 3pqs$ (iv) $9qr(s^2 + t^2) + 18q^2r^2(s^2 + t^2)$

(v) $\frac{z^2x}{16} - \frac{x^2z^2}{8} + \frac{x^2z^3}{12}$ (vi) $a(x-y) - a^2b(x-y) + a^2b^2(x-y)$

2. مندرجہ ذیل کی تجزی کریں

(i) $7x + xz + 7z + z^2$ (ii) $9a^2b + 18ab^2 - 6ac - 12bc$

(iii) $6t - 12p + 4tq - 8pq$ (iv) $r^2 + 9rs - 7rs - 63s^2$

(v) $\frac{y^2}{4} - \frac{y^2z}{4} - \frac{z^2t}{9} + \frac{z^3t}{9}$ (vi) $\frac{10xy}{11} + \frac{5xz}{11} - \frac{14y^2}{11} - \frac{7yz}{11}$

3. اجزاءِ ضربی معلوم کریں

(i) $4a^2 + 12ab + 9b^2$ (ii) $36x^4 + 12x^2 + 1$

(iii) $x^2 + 1 + \frac{1}{4x^2}$ (iv) $81y^2 + 144yz + 64z^2$

(v) $625 + 50a^2b + a^4b^2$ (vi) $a^2 + 0.4a + 0.04$

4. تجزی کریں

(i) $b^4 - 4b^2c^2 + 4c^4$ (ii) $\frac{9}{4}x^4 - 2 + \frac{4}{9x^4}$

(iii) $2a^3b^3 - 16a^2b^4 + 32ab^5$ (iv) $9(p+q)^2 - 6(p+q)r^2 + r^4$

(v) $x^2y^2 - 0.1xy + 0.0025$ (vi) $(a-b)^2 - 18(a-b) + 81$

5. تجزی کریں

(i) $4a^2 - 9b^2$ (ii) $16x^2 - 25y^2$ (iii) $100x^2z^2 - y^4$

(iv) $\frac{1}{100}x^4 - 100y^4$ (v) $\frac{64}{81}f^2 - \frac{81}{64}g^4$ (vi) $\frac{x^4}{121} - 121y^2$

6. اجزاءِ ضربی معلوم کریں

(i) $(2x + z)^2 - (2x - z)^2$ (ii) $(4a - 9b)^2 - (2a + 5b)^2$

(iii) $169x^4 - (3t + 4)^2$ (iv) $(9x^2 - 4y^2)^2 - (4x^2 - y^2)^2$

(v) $\left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(b^2 - 2 + \frac{1}{b^2}\right)$ (vi) $9x^2 + \frac{1}{9x^2} - 4y^2 - \frac{1}{4y^2} + 4$

7. اجزاءِ ضربی معلوم کریں

(i) $(x^2 + 2xy + y^2) - 9z^4$ (ii) $(4a^2 + 8ab^2 + 4b^4) - 9c^2$

(iii) $16d^4 - (c^4 - 2c^2d + d^2)$ (iv) $4(x^2 + 2xy^2 + y^4) - 9y^6$

(v) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$ (vi) $4x^2 - y^2 - 2y - 1$

.8 تجزی کریں

(i) $(\sqrt{ab})^2 - (\sqrt{c})^2$ (ii) $(\sqrt{4x})^2 - (\sqrt{9y})^2$

(iii) $(\sqrt{yz})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)^2$ (iv) $xzt - \frac{1}{t}$

4.1.2 مندرجہ ذیل کی طرح کے اظہاریوں کی تجزی کرنا۔

قسم 1: $a^4 + a^2b^2 + b^4$ or $a^4 + 4b^4$

اس طرح کے اظہاریوں میں وہ الجبری اظہارے شامل ہیں جو نہ مربع اظہارے ہیں اور نہ ہی دو مربع اظہاریوں کی تفریق کی طرح ہیں۔ اس طرح کے اظہاریوں کی تجزی مندرجہ ذیل مثالوں میں واضح ہے۔

مثال 01: $a^4 + a^2b^2 + b^4$ کی تجزی کریں

حل:

$a^4 + a^2b^2 + b^4$

$= (a^4 + b^4) + a^2b^2$ (رقوم کی ترتیب بدلنے سے)

$= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 2a^2b^2 + a^2b^2$ ($2a^2b^2$ جمع اور تفریق کرنے سے)

$= \{(a^2)^2 + 2(a^2)(b^2) + (b^2)^2\} - a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$

$= \{(a^2 + b^2) - ab\}\{(a^2 + b^2) + ab\}$ $[\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$

$= (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$ مطلوبہ اجزاء ضربی ہیں۔

مثال 02: $a^4 + 4b^4$ کی تجزی کریں

حل:

$a^4 + 4b^4$

$= (a^2)^2 + (2b^2)^2$

$= (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) - 2(a^2)(2b^2)$ ($[2(a^2)(2b^2)]$ جمع اور تفریق کرنے سے)

$= \{(a^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) + (2b^2)^2\} - 4a^2b^2$

$= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$

$= \{(a^2 + 2b^2) - 2ab\}\{(a^2 + 2b^2) + 2ab\}$ $[\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$

$= (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$ مطلوبہ اجزاء ضربی ہیں۔

مثال 03: x^8+x^4+1 کی تجزی کریں

حل:

[$2(x^4)(1)$ جمع اور تفریق کرنے سے]

$$\begin{aligned}
& x^8+x^4+1 \\
&= (x^8+1)+x^4 \\
&= \{(x^4)^2+(1)^2+2(x^4)(1)\}-2(x^4)(1)+x^4 \\
&= (x^4+1)^2-x^4 \\
&= (x^4+1)^2-(x^2)^2 \\
&= \{(x^4+1)-x^2\}\{(x^4+1)+x^2\} \qquad [\because a^2-b^2=(a-b)(a+b)] \\
&= \{(x^4+x^2+1)\}(x^4-x^2+1) \\
&= \{(x^2+1)^2-2x^2+x^2\}(x^4-x^2+1) \\
&= \{(x^2+1)^2-x^2\}(x^4-x^2+1) \\
&= (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)
\end{aligned}$$

مطلوبہ اجزاء ضربی ہیں۔

قسم ii x^2+px+q

اس طرح کے اظہاریوں کی تجزی کے لیئے درمیانی رقم کو دو حصوں میں توڑ سکتے ہیں۔

مثال 01: $y^2+7y+12$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
& y^2+7y+12 \\
&= y^2+3y+4y+12 \\
&= y(y+3)+4(y+3) \\
&= (y+3)(y+4)
\end{aligned}$$

مثال 02: $x^2+13xy-30y^2$ کی تجزی کریں

حل:

$$\begin{aligned}
& x^2+13xy-30y^2 \\
&= x^2+15xy-2xy-30y^2 \\
&= x(x+15)-2y(x+15) \\
&= (x+15)(x-2y)
\end{aligned}$$

قسم (iii) $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$

$ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ کی تجزی کرنے کے لیے مندرجہ ذیل اقدام کی ضرورت ہے۔

(i) ac کی حاصل ضرب معلوم کرنا جہاں a عددی سر ہے x^2 کا اور c ایک مستقل ہے۔

(ii) x_1 اور x_2 دو اعداد معلوم کرنا اس طرح $x_1+x_2=b$ اور $x_1x_2=ac$

مزید وضاحت کے لیے مندرجہ ذیل طریقہ کارمددگار ہے۔

مثال :01 $10x^2-19xy+6y^2$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$10x^2-19xy+6y^2$$
$$= 10x^2 - 15xy - 4xy + 6y^2$$
$$= 5x(2x - 3y) - 2y(2x - 3y)$$
$$= (2x - 3y)(5x - 2y)$$

مثال :02 $4x^2+12x+5$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$4x^2+12x+5$$
$$= 4x^2 + 10x + 2x + 5$$
$$= 2x(2x + 5) + 1(2x + 5)$$
$$= (2x + 5)(2x + 1)$$

مشق 4.2

1. مندرجہ ذیل کی تجزی کریں

(i) $a^4+a^2x^2+x^4$ (ii) b^4+b^2+1

(iii) $a^8+a^4x^4+x^8$ (iv) z^8+z^4+1

2. تجزی کریں

(i) x^4+4y^4 (ii) $36x^4z^4+9y^4$

(iii) $4t^4+625$ (iv) $4t^4+1$

3. اجزاءضربی میں حل کریں

(i) $x^2+3x-10$ (ii) $a^2b^2-3ab-10$

(iii) $y^2+7y-98$ (iv) $x^2y^2z^2+2xyz-24$

4. اجزاءضربی میں حل کریں

(i) $9y^2+21yz-8z^2$ (ii) $42x^2-8x-2$

(iii) $4x^2+12x+5$ (iv) $3x^2-38xy-13y^2$

6. اجزاء ضربی حل کریں۔

قسم iv: $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d)+k$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+k$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+kx^2$

اس طرح کے اظہاریوں کی حاصل ضرب کے طریقہ کار کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں کی مدد سے کرتے ہیں۔

مثال 01: $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120$ کی تجزی کریں۔

حل: $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120$

فرض کریں کہ $x^2+5x = t$ تو

$(t+4)(t+6) - 120$

$= t^2+10t+24-120$

$= t^2+10t-96$

$= t^2-6t+16t-96$ (بہ ذریعہ تجزی)

$= t(t-6)+16(t-6)$

$= (t-6)(t+16)$

$= (x^2+5x-6)(x^2+5x+16)$ $\because t=x^2+5x$

$= (x^2-x+6x-6)(x^2+5x+16)$

$= [x(x-1)+6(x-1](x^2+5x+16)$

$= (x-1)(x+6)(x^2+5x+16)$

مثال 02: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$ کی تجزی کریں۔

حل:

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$

Here $1+4= 2+3 =5$

یہاں پر $(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15$

$= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15$

$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-15$

$= (t+4)(t+6)-15$ یہاں پر $t = x^2+5x$

$= t^2+10t+24-15$

$= t^2+10t+9$

$= (t+1)(t+9)$

$= (x^2+5x+1)(x^2+5x+9) \quad \because t = x^2+5x$

مثال 03: $(x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$ کی تجزی کریں۔

حل:

$(x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$

$= (x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$

$= (x^2-2^2)(x^2-3^2)-2x^2 \quad [\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2]$

$= (x^2-4)(x^2-9)-2x^2$

$= x^4-9x^2-4x^2+36-2x^2$

$= x^4-15x^2+36$

$= x^4-3x^2-12x^2+36$

$= x^2(x^2-3)-12(x^2-3)$

$= (x^2-3)(x^2-12)$

$= [(x)^2-(\sqrt{3})^2][(x)^2-(2\sqrt{3})^2]$

$= (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})$

مشق 4.3

1. مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $(x^2-4x-5)(x^2-4x-12)-144$ (ii) $(x^2+5x+6)(x^2+5x+4)-3$

(iii) $(x^2-2x+3)(x^2-2x+4)-42$ (iv) $(x^2-8x+4)(x^2-8x-4)+15$

(v) $(x^2+9x-1)(x^2+9x+5)-7$ (vi) $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-120$

2. تجزی کریں

(i) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-48$ (ii) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

(iii) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-99$ (iv) $(x-3)(x-5)(x-7)(x-9)+15$

(v) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-224$ (vi) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)-345$

3. اجزاءِ ضربی معلوم کریں۔

(i) $(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)-2x^2$

(ii) $(x-1)(x+1)(x+3)(x-3)-3x^2-23$

(iii) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)+4x^2$

(iv) $(x-2)(x+2)(x-4)(x+4)-14x^2$

(v) $(x+5)(x+2)(x-5)(x-2)+4x^2$

(vi) $(x^2-x-12)(x^2-x-12)-x^2$

قسم (v) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ اور $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

جیسا کہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

اور

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

مندرجہ ذیل مثالیں اس طرح کے اظہاریوں کو سمجھنے میں مددگار ثابت ہونگی۔

مثال 01: (i) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ (ii) $64x^3-12x^2+\frac{3x}{4}-\frac{1}{64}$ کی تجزی کریں

حل: (i)

$$8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$$

$$=(2x)^3+3(2x)^2(y)+3(2x)(y)^2+(y)^3 \qquad [\because (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3]$$

$$=(2x+y)^3.$$

حل: (ii)

$$64x^3-12x^2+\frac{3x}{4}-\frac{1}{64}$$

$$=(4x)^3-3(4x)^2\left(\frac{1}{4}\right)+3(4x)\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^3 \qquad [\because (a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3]$$

$$=\left(4x-\frac{1}{4}\right)^3$$

مشق 4.4

1. مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$

(ii) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

(iii) $64x^3+12x^2+3x+\frac{1}{64}$

(iv) $8x^3+36x^2+54x+27$

(v) $\frac{1}{27}+\frac{1}{3}y^2+y^4+y^6$

(vi) $\frac{8}{27}x^3+2x^2y+3xy+\frac{27}{8}y^3$

(vii) $\frac{64}{9}+\frac{16}{3}x+4x^2+x^3$

(viii) $\frac{z^3}{8}+\frac{z^2y}{4}+\frac{zy^2}{6}+\frac{y^3}{27}$

2. اجزاء ضربی معلوم کریں۔

(i) $d^3-6d^2c+12dc^2-8c^3$

(ii) $x^6+\frac{16}{3}x^2-4x^4-\frac{64}{27}$

(iii) $\frac{x^3}{125}-\frac{3}{25}x^2y+\frac{3}{5}xy^2-y^3$

(iv) $125z^3-75z^2y^2+15zy^4-y^6$

(v) $\frac{z^3}{27}-2z^2y+36zy^2-216y^3$

(vi) $\frac{b^6}{27}-\frac{b^4c^2}{6}+\frac{b^2c^4}{4}-\frac{c^6}{8}$

(vii) $216+\frac{9z^2}{2}-54z-\frac{z^3}{8}$

(viii) $\frac{8}{27}x^3-2x^2y+\frac{9}{2}xy^2-\frac{27}{8}y^3$

قسم vi: $a^3 \pm b^3$

جیسا کہ ہمیں معلوم ہے۔کہ

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

اور

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

مندرجہ ذیل مثالیں اس طرح کے اظہاریوں کو سمجھنے میں مددگار ثابت ہونگی۔

مثال 01: $8x^3+27$ کی تجزی کریں

حل:

$$8x^3+27$$
$$=(2x)^3+(3)^3$$
$$=(2x+3)[(2x)^2-(2x)(3)+(3)^2] \quad [\because a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)]$$
$$=(2x+3)(4x^2-6x+9)$$

اس لیے $8x^3+27=(2x+3)(4x^2-6x+9)$ ہے۔

مثال 02: $108x^4 - 256xz^3$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$108x^4 - 256xz^3$$
$$= 4x(27x^3 - 64z^3)$$
$$= 4x[(3x)^3 - (4z)^3 \qquad [\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)]$$
$$= 4x(3x-4z)[(3x)^2 + (3x)(4z) + (4z)^2]$$
$$= 4x(3x-4z)(9x^2 + 12xz + 16z^2)$$

اس لیے $108x^3 - 256xz^3 = 4x(3x-4z)[(9x^2 + 12xz + 16z^2)$

مشق 4.5

1. مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $x^3 + 8y^3$ (ii) $a^{11} + a^2b^9$ (iii) $a^6 + 1$ (iv) $a^3b^3 + 512$

(v) $a^3b^3 + 27b^6$ (vi) $\frac{x^3}{125} + \frac{125}{x^3}$ (vii) $x^9 + x^3y^6z^9$ (viii) $\frac{x^6}{27} + \frac{8}{x^3}$

2. اجزاء ضربی معلوم کریں

(i) $x^3 - 8y^3$ (ii) $x^9 - 8y^9$ (iii) $1000 - \frac{x^3y^3}{125}$ (iv) $a^6 - b^6$

(v) $\frac{x^6}{64} - \frac{64}{x^{12}}$ (vi) $x^{12} - y^{12}$ (vii) $\frac{27}{x^3} - 8y^6$ (viii) $8x^6 - \frac{1}{729}$

4.2 مسئلہ باقی اور مسئلہ اجزاء ضربی۔

مسئلہ باقی اور مسئلہ اجزاء ضربی اکثر تین یا زیادہ رقوم والے کثیر رقمی اظہاریوں کے اجزاء معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

4.2.1 مسئلہ باقی بیان کریں اور ثابت کریں اور مثالوں سے وضاحت کریں۔

بیان

جب ایک کثیر رقم $p(x)$ کا درجہ $n \geq 1$ سے تقسیم ہوتا ہو تو باقی $(x-a)$ ہوتا ہے۔

ہم R کو $R = p(a)$ کے طور پہ لکھ سکتے ہیں۔ $p(x) = q(x)(x-a) + R$, $p(x)$

(جسے الگوریتھم تقسیم کہا جاتا ہے) جہاں پر R ایک مستقل اور درجہ $q(x)$ سے کم ہوتا ہے۔ جو $p(x)$ px .

ثبوت:

الگوریتھم تقسیم کے ذریعے:

$$p(x) = q(x)(x-a)+R,$$

فرض کریں کہ $x=a$

$$p(a) = q(a)\times(a-a)+R,$$

$$p(a) = q(a)\times 0+R$$

$\Rightarrow \quad p(a) = R =$ باقی

4.2.2 باقی معلوم کریں (بغیر تقسیم) جب ایک کثیر رقمی اظہاریہ ایک یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم ہو۔

مندرجہ ذیل مثالیں ہمیں مسئلہ باقی استعمال کرنے میں مدد کریں گے۔

مثال 01: x^2-3x+4 باقی معلوم کریں جبکہ $x-2$ سے تقسیم ہو۔

حل: فرض کریں کہ: $p(x)=x^2-3x+4$

یہاں پر $a=2$ بذریعہ مسئلہ باقی۔

$p(2) = (2)^2 - 3(2) + 4$

$= 4 - 6 + 4 = 8 - 6 = 2$

$p(2) = R = 2$ باقی 2 بچے

مثال 02: k کی قیمت معلوم کریں اگر x^3+kx^2+3x-4 کثیر رقمی اظہاریہ $x+2$ سے تقسیم ہو۔ باقی 2 بچے۔

حل: یہاں پر $p(x) = x^3+kx^2+3x-4$

$\therefore \quad p(-2) = (-2)^3 + k(-2)^2 + 3(-2) - 4$

$\Rightarrow \quad -2 = 4k - 18$ (باقی 2– بچے)

$\Rightarrow \quad 4k = -2 + 18$

$\Rightarrow \quad 4k = 16$

$\Rightarrow \quad k = 4,$

4.2.3 اظہاریے کا صفر۔

فرض کریں کہ $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$ حقیقی عدد سرے کے ساتھ ایک کثیر رقمی اظہاریہ ہے۔ $x=a$ کثیر رقمی اظہاریے میں $p(x)$ شامل کرنے سے $p(x)$ کی قیمت صفر ہو جائے تو $p(a)=0$ پھر 'a' کو اظہاریے $p(x)$ کا صفر کہا جاتا ہے۔

مثال 01: اگر $p(x) = x+7$ تو پھر 7 اظہاریے کا صفر ہے۔ $p(-7) = -7+7 = 0$

4.2.4 مسئلہ اجزاءِ ضربی بیان کریں اور ثابت کریں۔

بیان:

$x-a$ یک درجی اظہاریہ ایک کثیر رقمی اظہاریے کا جز ضربی ہے، اگر $p(a)=0$, $p(x)$.

ثبوت:

$q(x)$ فرض کریں کہ R خارج قسمت ہے اور $p(x)$ باقی ہے، جب ایک کثیر رقمی اظہاریہ $x-a$ سے تقسیم ہوتا ہو۔ پھر بذریعہ الگوریتھم تقسیم ہمارے پاس ہے۔

$$p(x)=(x-a)q(x)+R.$$

بذریعہ مسئلہ باقی۔

اسی طرح $R=p(a)$,

$$\boxed{p(x)=q(x)(x-a)+p(a)}$$

اگر $p(a)=0$, پھر $p(x)=q(x)(x-a)$ اس طرح $(x-a)$ کا ایک جز ضربی ہے $p(x)$.

مندرجہ ذیل مثالیں ہمیں مسئلہ جز ضربی استعمال کرنے میں مدد کریں گے۔

مثال 01: بتائیں کہ $x+2$ کا جز ضربی ہے۔ $x^3+\frac{9}{2}x^2+3x-4$ یا نہیں۔

حل: فرض کریں کہ $p(x)=x^3+\frac{9x^2}{2}+3x-4$

$$\therefore\ R=p(-2)=(-2)^3+\frac{9}{2}(-2)^2+3(-2)-4$$

$$=-8+18-6-4$$

$$=-18+18=0\Rightarrow R=0,$$

باقی 0 ہے۔

$\therefore$ $x+2$ کا جز ضربی ہے۔ $p(x)$

مثال 02: بتائیے کہ $x+3$ کا جز ضربی ہے یا نہیں۔ $x^3-x^2-8x+12$

حل: فرض کریں کہ

$$p(x)=x^3-x^2-8x+12$$

$$R=p(-3)=(-3)^3-(-3)^2-8(-3)+12$$

$$=-27-9+24+12$$

$$R=p(-3)=-36+36=0$$

$x+3$ کا جز ضربی ہے۔ $x^3-x^2-8x+12$

مشق 4.6

1. مسئلہ باقی کی مدد سے باقی معلوم کیجیے جبکہ۔

(i) $x^3 - 6x^2 + 11x - 8$ کو $(x-1)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(ii) $x^3 + 6x^2 + 11x + 8$ کو $(x+1)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(iii) $x^3 - x^2 + 14$ کو $(x-2)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(iv) $x^3 - 3x^2 + 4x - 14$ کو $(x+2)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(v) $(2y-1)^3 + 6(3+4y) - 9$ کو $(2y+1)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(vi) $4y^3 - 4y + 3$ کو $(2y-1)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(vii) $(2y+1)^3 - 6(3-4y) - 10$ کو $(2y-1)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(viii) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ کو $(x-y)$ سے تقسیم کیا جائے۔

2. m کی قیمت معلوم کریں، اگر $p(y) = my^3 + 4y^2 + 3y - 4$ اور $q(y) = y^3 - 4y + m$ کو $(y-3)$ سے تقسیم کیا جائے تو باقی مشترک بچے۔

3. اگر کثیر رقمی $4x^3 - 7x^2 + 6x - 3k$ کو $(x+2)$ سے مکمل تقسیم ہوتا ہو تو k کی قیمت معلوم کریں۔

4. اگر $(y+2)$ کثیر رقمی $3y^2 - 4ry - 4r^2$ کا جز ضربی ہے تو r کی قیمت معلوم کریں۔

4.3 مصنوعی تقسیم

مصنوعی تقسیم کثیر رقمی اظہاریے کو یک درجی کثیر رقمی اظہاریے سے تقسیم کرنے کا طریقہ ہے۔

4.3.1 مصنوعی تقسیم کا طریقہ بیان کریں۔

مصنوعی تقسیم کا طریقہ مندرجہ ذیل مثال میں بیان کیا ہے۔

مثال 01: مصنعی تقسیم کا طریقہ استعمال کرکے $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ کو $(x-1)$ سے تقسیم کریں۔

حل: یہاں پر $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$، (1 جز ضربی ہے)

کثیر رقمی کے عدد سرے لکھنے پر

(قطار-1)	7	5	−3	1	1
(قطار-2)	3	−2	1		
(قطار-3)	10 = R	3	−2	1	

تفصیل:

قدم i: کثیر رقمی $p(x)$ کے عددی سرے اور مستقل ترتیب نزولی سے پہلی قطار میں لکھیں۔

قدم ii: قطار 3 میں پہلا عددی سرا اپنی جگہ قطار 1 کے نیچے لکھیں۔

قدم iii: جزو ضربی اور قطار 3 کے پہلے عددی سری کی حاصل ضرب قطار 2 میں قطار 1 کے سری عددی سرے کے نیچے لکھیں۔
قطار 1 اور قطار 2 کے دوسرے عددی سرے جمع کر کے نیچے قطار 3 میں لکھیں۔ یہ عمل اگلے عددی سرے کے لیے دہرائیں۔

اسی طرح $q(x)=x^2-2x+3$ اور $p(1) = R = 10$ ہے

نوٹ: $q(x)$ کا درجہ = [$p(x)$ درجہ] $-1 = 3-1=2$ اور قطار 3 کا آخری جُز باقی ہے۔

4.3.2 مصنوعی تقسیم استعمال کر کے۔

(a) خارج قسمت اور باقی معلوم کریں، جبکہ کثیر رقمی یک درجہ کثیر رقمی سے تقسیم ہو۔

(b) نامعلوم کی قیمت معلوم کریں، اگر کثیر رقمیوں کا صفر دیا گیا ہو۔

(c) نامعلوم کی قیمت معلوم کریں، اگر کثیر رقمیوں کے اجزاء دیے گئے ہوں

مثال 01: خارج قسمت اور باقی معلوم کریں۔

جب $p(x) = x^4-12x+50x^2-84x+49$ کو $x-5$ سے تقسیم کیا جائے۔

حل: معلوم ہے کہ: $p(x)=x^4-12x^3+50x^2-84x+49$

اور یک درجہ کثیر رقمی $x-a = x-5$, i.e., $a= 5$ جیسا کہ 5 = جو جزو ضربی ہے۔

$p(5) = R=?$ and $q(x)=?$

مصنوعی تقسیم کے استعمال سے خارج قسمت اور باقی معلوم کریں گے۔ ذیل مثال میں واضح ہے۔

5	1	−12	50	−84	49	(قطار 1
		5	−35	75	−45	(قطار 2
	1	−7	15	−9	4 = R	(قطار 3

اسی طرح $q(x)=x^3-7x^2+15x-9$ خارج قیمت اور باقی $R=4$ ہے۔

نوٹ: $R\neq 0$ اس لیے $(x-5)$ معلوم شدہ کثیر رقمی کا جزو ضربی نہیں ہے۔

مثال 02: m کی کس قیمت کے لیے 1 کثیر رقمی کا صفر ہے۔

$p(x)=x^3-mx^2+x-1?$

حل: معلوم ہے کہ $p(x)=x^3-mx^2+x-1$

یہاں پر جزو ضربی $a=1$ ہے۔

تو مصنوعی تقسیم کے طریقے مطابق

1	1	$-m$	1	-1	(قطار 1)
		1	$1-m$	$2-m$	(قطار 2)
	1	$1-m$	$2-m$	$1-m=R,$	(قطار 3)

جیسا کہ 1 کثیر رقمی کا صفر ہے اس لیے $x-1$ $\therefore$ $p(x)$ ایک جزو ضربی ہے۔

یہاں پر $R=0$

$$\Rightarrow \quad 1-m=0$$

$$\Rightarrow \quad m=1$$

تو پھر کثیر رقمی کے صفر کے لیے m m $p(x)$ ہے۔

مشق 4.7

1. مصنوعی تقسیم کی مدد سے مندرجہ ذیل کثیر رقمی اظہاریوں کو تقسیم کریں اور خارج قسمت اور باقی بھی معلوم کریں۔

(i) $p(x)=x^3-x^2+x-1$ *by* $x-1$

(ii) $p(x)=x^3-x^2-x-1$ *by* $x+1$

(iii) $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$ *by* $x+2$

(iv) $p(x)=x^3+6x^2-11x-6$ *by* $x-2$

(v) $p(x)=x^4-x^3+x^2-x-1$ *by* $x+2$

(vi) $p(x)=x^4+x^3-x^2+x-1$ *by* $x-1$

(vii) $p(x)=x^5+x^3-2x^2-3$ *by* $x+3$

(viii) $p(x)=x^5-x^4+x^3-3x^2+6x-6$ *by* $x-3$

(ix) $p(x)=2x^4-2x^3+100x^2-168x+95$ *by* $x-2$

(x) $p(x)=6x^4-72x^3+300x^2-564x+270$ *by* $x-5$

2. $k, -2$ کی کس قیمت کے لیے کثیر رقمی $p(x)=x^3+x^2-14x-k$ کا صفر 2 ہے۔

3. m کی کس قیمت کے لیے $(x-2)$ جزو ضربی ہوگا $x^3+mx^2-7x-10$ کا

4. m کی کس قیمت کے لیے $(x+2)$ جزو ضربی ہوگا $4x^3-7x^2+6x-3m$ کا۔

5. m کی کس قیمت کے لیے کثیر رقمی $p(x)=2x^3-4mx^2+x-1$ کا صفر -1 ہوگا۔

4.4 تین درجی کثیر رقمی اظہاریوں کی اجزاء تجزی۔

ہم پہلے ہی یک درجی اور دو درجی کثیر رقمی اظہارے حل کرنے کا طریقہ پڑھ آئے ہیں۔ اب ہم مسئلہ اجزاء ضربی کا استعمال کر کے تین درجی کثیر رقمی اظہاریوں کے اجزاء ضربی معلوم کریں گے۔

4.4.1 مسئلہ اجزاء ضربی کی مدد سے اجزاء ضربی معلوم کرنا۔ کثیر رقمی اظہاریوں کا ایک جزو ضربی یا زیادہ صفر معلوم ہونا ضروری ہے۔

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 01: $x^3-6x^2+11x-6$ کے اجزاء ضربی معلوم کریں۔

حل: فرض کریں کہ $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$

6 کے اجزاء ضربی $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

$$p(1)=(1)^3-6(1)^2+11(1)-6$$
$$p(1)=1-6+11-6$$
$$p(1)=0$$

اس لیے $x-1$ ، $p(x)$ کا جزو ضربی ہے۔

مصنوعی تقسیم کے ذریعے۔

قطار 1:	1	−6	11	−6	1
قطار 2:		1	−5	6	
قطار 3:	1	−5	6	0	

$$p(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$$
$$=(x-1)\{x^2-2x-3x+6\}$$
$$=(x-1)\{x(x-2)-3(x-2)\}$$
$$p(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

مثال 02: x^3-4x^2+x+6 کے اجزاء ضربی معلوم کریں۔

حل: 6 کے اجزاء ضربی $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

اگر $x-1$ کا جزو ضربی ہے $p(x)$

تو $p(1)=(1)^3-4(1)^2+1+6$
$$=1-4+1+6$$
$$=4\neq0$$

اس لیے $x-1$ کا جزوضربی نہیں ہے۔ $p(x)$

اگر $x+1$ کا جزوضربی ہے $p(x)$

تو $p(-1)=(-1)^3-4(-1)^2+1(-1)+6$

$=-1-4-1+6$

$=0$

اس لیے $x-1$ کا جزوضربی ہے۔ $p(x)$

بذریعہ مصنوعی تقسیم

-1	1	-4	1	6	قطار 1
		-1	5	-6	قطار 2
	1	-5	6	0	قطار 3

$$p(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$$
$$=(x+1)\{x^2-2x-3x+6\}$$
$$=(x+1)\{x(x-2)-3(x-2)\}$$
$$p(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$$

مشق 4.8

اجزاء تجزی کا استعمال کرتے ہوئے فیکٹر تلاش کریں۔

1.	x^3-x^2+x-1	**2.**	x^3+x^2-x-1	**3.**	$x^3-6x^2+11x-6$
4.	$x^3+5x^2-4x-20$	**5.**	$x^3-2x^2+9x-18$	**6.**	$6x^3+7x^2-x-2$
7.	$x^3+8x^2+19x+12$	**8.**	$2x^3+9x^2+10x+3$	**9.**	$x^3+12x^2+44x+48$

جائزہ مشق 4

1. صحیح اور غلط سوال:

مندرجہ ذیل جملے غور سے پڑھیں اور صحیح کی صورت میں T پر اور غلط کی صورت میں F پر گول دائرہ لگائیں۔

(i) $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ T/F

(ii) $a^3+27=(a+3)(a^2-3a+9)$ T/F

(iii) $b^3-8=(b-2)(b^2+2b+4)$ T/F

(iv) $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a+b)^2$ T/F

(v) $a^6 + b^6 = (a^3+b^3)(a^3-b^3)$ T/F

(vi) $a^5 + b^5 = (a+b)^5$ T/F

2. مندرجہ ذیل جملے مکمل کیجیے۔

(i) $16x^2 - y^4 = (4x - y^2)$ ____________

(ii) $x^3 - 64y^3 = (x - 4y)$ ____________

(iii) $x^2 + 5x + 6 = (x+2)$ ____________

(iv) $x^2 + y^2 = (x-y)^2$ ____________

(v) $a^3 + 27b^3 = (a + 3b)$ ____________

3. درست جواب پر ٹک (✓) لگائیے۔

(i) $a^2 + 2a - 24$ کے اجزاءِ ضربی ہیں:

(a) $a+4,\ a-6$ (b) $a-4,\ a+6$

(c) $a+3,\ a-8$ (d) $a+8,\ a-3$

(ii) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ کی اجزاءِ ضربی ہیں:

(a) $(a-b+c)(x-b-c)$ (b) $(a+b+c)(a-b-c)$

(c) $(a+b+c)(a+b-c)$ (d) $(a+b+c)(a-b-c)$

(iii) $x^3 + y^3$ کے اجزاءِ ضربی ہیں:

(a) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (b) $(x+y)(x^2+xy+y^2)$

(c) $(x+y)(x^2+xy-y^2)$ (d) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(iv) $y^3 - 27z^3$ کے اجزاءِ ضربی ہیں:

(a) $y-3z,\ y^2+3yz+9z^2$ (b) $y-3z,\ y+3z+9z^2$

(c) $y-3z,\ y^2-3yz+9z^2$ (d) $y+3z,\ y^2-3yz+9z^2$

(v) $\frac{1}{x+y} + \frac{y}{x^2-y^2} =$ کی مختصر صورت ہے:

(a) $\frac{y+1}{x^2-y^2}$ (b) $\frac{x}{x^2-y^2}$

(c) $\frac{y}{x^2-y^2}$ (d) $\frac{y-1}{x^2-y^2}$

(vi) m کی قیمت کیا ہے جب x^2+4x+m مکمل مربع ہے۔

(a) 8 (b) -8

(c) 4 (d) -4

خلاصہ

- عمل تجزی وہ عمل ہے جس میں ہم دیئے گئے کثیر رقمی اظہارات کو دو یا زیادہ اظہارات کی حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کرتے ہیں۔
- ہم مندرجہ ذیل قسم کے فارمولوں کے عوامل کو سیکھیں گے اور حل کریں گے۔

(i) $ka + kb + kc = k(a + b + c)$

(ii) $\underline{ac + ad} + \underline{bc + bd} = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2 = (a + b)^2$

(iv) $a^2 - 2ab + b^2 = (a)^2 - 2(a)(b) + (b)^2 = (a - b)^2$

(v) $a^2 - b^2 = (a-b)(a + b)$

- مسئلہ باقی اور مسئلہ اجزاء ضربی دو اہم مسائل ہیں۔ یہ اجزاء ضربی معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتے ہیں، ایسی اقسام کے کثیر رقمی اظہارات جو دیے گئے فارمولوں سے حل نہیں ہوسکتے۔

(i) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ (ii) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

(iii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (iv) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

- کثیر رقمی اظہارات کا صفر۔
- اگر کثیر رقمی 'x' میں ایک مخصوص عدد $x=a$ متغیر $p(x)$ کا متبادل ہے اسی طرح $p(a)$ کی قیمت صفر ہے، تو پھر 'a' کو کثیر رقمی $p(x)$ کا صفر کہا جاتا ہے۔
- مسئلہ اجزاء ضربی بھی بیان کرسکتے ہیں جیسے: یک درجی کثیر رقمی $(x - a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جزو ضربی ہے۔ اگر $p(a)=0$
- مصنوعی تقسیم کے طریقہ کار کا تفصیل

قدم 1: کثیر رقمی $p(x)$ کو x کی قوت نما کے لحاظ سے ترتیب نزولی میں کر کے عددی سرے اور مستقل قطار 1 میں لکھیں۔

قدم 2: قطار 3 میں پہلا عدد دوسرا اپنی جگہ قطار 1 کے نیچے لکھیں۔

قدم 3: جزو ضربی اور قطار 3 کے پہلے عددی سرے کی حاصل ضرب قطار 2 میں قطار 1 دوسرے عددی سرے کے نیچے لکھیں۔
قطار 1 اور قطار 2 کے عددی سرے جمع کر کے نیچے قطار 3 میں لکھیں یہ عمل اگلے عددی سرے کے لیے دہرائیں۔

یونٹ 5

الجبرا توڑ پھوڑ

ALGEBRAIC MANIPULATION

حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- اجزاء ضربی سے الجبرا ظہارات کا مشترک عاداعظم HCF اور ذواضعاف اقل (LCM) معلوم کر سکیں گے۔
- بذریعہ تقسیم مشترک عاداعظم HCF اور ذواضعاف اقل (LCM) معلوم کر سکیں گے۔
- عاطا عظم وار ذواضعاف اقل کے بیچ میں تعلق جان پائیں گے۔
- عاداعظم اور ذواضعاف اقل سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل (حساب) حل کریں گے۔
- عاداعظم اور ذواضعاف اقل کو استعمال کر کے جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم پر مشتمل کسوری اظہار مختصر کریں گے۔
- بذریعہ اجزاء ضربی اور بذیعہ تقسیم جذر المربع معلوم کر پائیں گے۔

تعارف:

الجبری توڑ پھوڑ کا تعلق آلجبری اظہارات کی ہیرا پھیری سے ہے۔اکثر مختصر صورت میں یا ایسی صورت جو زیادہ آسانی سے سمجھا جا سکے ۔یہ الجبری اظہار کے مسئلے(حساب)حل کرنے میں ایک بنیادی،ضروری اور اہم مہارت ہے۔

اس یونٹ میں ہم الجبری اظہارات کی بذریعہ اجزاء صنربی اور تقسیم عاد اعظم (HCF) اور ذو اضعاف اقل (LCM) معلوم کرنے اور روزمرہ زندگی میں استعمال پر بحث کریں گے۔

5.1 عاد اعظم HCF اور ذو اضعاف اقل LCM۔

5.1.1 بذریعہ اجزاء ضربی عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل معلوم کرنا۔

(a) بذریعہ اجزاء ضربی عاد اعظم معلوم کرنا۔ دیئے گئے اظہارات کا عاد اعظم HCF کرنے کے لیے، پہلے ہم کثیر رقمی اظہارات کئے اجزاء ضربی معلوم کریں گے۔ پھر ہم ان کے عام (مشترکہ) اجزاء کو صنرب کریں گے۔ مشترکہ اجزاء کی اس حاصل ضرب کو بذریعہ اجزاء ضربی عاد اعظم HCF کی طرح جانا جاتا ہے۔

نوٹ: مشترک جزو ضربی نہ ہونے کی حالت میں عاد اعظم 1HCF ہو گا۔

مثال 01: اجزاء ضربی کے استعمال سے مندرجہ ذیل کا عاد اعظم HCF معلوم کریں۔

(i) x^2+x-20 اور $x^2+12x+35$

(ii) $(x+1)^2, x^2-1$ اور x^2+4x+3

حل (i): ہم دیئے گئے اظہارات x^2+x-20 اور $x^2+12x+35$ کے اجزاء معلوم کریں کے جو اس طرح ہیں۔۔

$$x^2+x-20 = x^2+5x-4x-20$$
$$= x(x+5)-4(x+5)$$
$$=(x+5)(x-4)$$

اور

$$x^2+12x+35 = x^2+7x+5x+35$$
$$= x(x+7)+5(x+7)$$
$$= (x+5)(x+7)$$

دونو اظہارات میں $(x+5)$ مشترک جزو ضربی ہے۔

$\therefore$ اس لیے عاد اعظم $\text{HCF} = x+5$ ہے۔

حل (ii): ہم دیے گئے اظہار کے اجزاء ضربی معلوم کریں گے۔

جو ہیں۔ $(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$

$x^2-1 = (x+1)(x-1)$

اور $x^2+4x+3 = x^2+3x+x+3$

$= x(x+3)+1(x+3)$

$= (x+3)(x+1)$

تینوں اظہارات میں مشترکہ جزو ضربی $(x+1)$ ہے۔

اس لیے $x+1$ = عاد اعظم HCF ہے۔

مثال 02: اجزاء ضربی کا طریقہ استعمال کر کے مندرجہ ذیل اظہارات کا عاد اعظم معلوم کریں۔

a^3-b^3 ، a^6-b^6

حل:

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^6-b^6 = (a^2)^3-(b^2)^3$$
$$= (a^2-b^2)\{(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2\}$$
$$= (a-b)(a+b)\{(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2-a^2b^2\}$$
$$= (a-b)(a+b)\{(a^2+b^2)^2-(ab)^2\}$$
$$= (a-b)(a+b)(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$$

عاد اعظم $HCF = (a-b)(a^2+b^2+ab) = a^3-b^3$ ہے۔

(b) بذریعہ اجزاء ضربی ذو اضعاف اقل معلوم کریں۔

دو یا زیادہ کثیر رقمی اظہارات کی ذو اضعاف اقل LCM وہ چھوٹے سے چھوٹے درجے کا اظہار ہے جو دیے گئے کثیر رقمی اظہارات سے تقسیم ہوتا ہو۔ بذریعہ اجزاء ضربی ذو اضعاف اقل LCM معلوم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل فارمولا استعمال کریں گے۔

ذو اضعاف اقل (مشترک اجزاء ضربی کا حاصل ضرب) × (غیر مشترک اجزاء)

مثال 01: x^2+x-6 اور x^3-8 کا ذو اضعاف اقل معلوم کریں۔ ضربی کا حاصل ضرب)

حل: اب x^2+x-6 اور x^3-8 اجزاء ضربی معلوم کریں۔

$\therefore \quad x^3-8 = (x)^3-(2)^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$

اور $x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6 = x(x+3)-2(x+3)$

$= (x+3)(x-2)$

مشترک جذو ضربی $= (x-2)$ ہے۔

غیر مشترک جذو ضربی $= (x+3)(x^2+2x+4)$ ہے۔

$\because$ ذو اضعاف اقل LCM (مشترک اجزاء ضربی) x (غیر مشترک اجزء ضربی)

$\therefore \quad LCM = (x-2)(x^2+2x+4)(x+3) = (x^3-8)(x+3)$

مثال 02: $x^3-1,\ x^3-2x^2+x$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

اب x^3-2x^2+x اور x^3-1 کے اجزاء ضربی معلوم کریں۔

$\therefore \quad x^3-1=(x)^3-(1)^3=(x-1)(x^2+x+1)$

اور $\quad x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$

$\because$ ذواضعاف اقل = مشترک اجزاء x غیر مشترک اجزاء

$\therefore$ ذواضعاف اقل $= x(x-1)\ (x^2+x+1)$

5.1.2 عاد اعظم HCF اور ذواضعاف اقل کے درمیان تعلق جاننا۔

دو کثیر رقمی اظہاریے $p(x)$ اور $q(x)$ کا عاد اعظم HCF اور ذواضعاف اقل LCM کے تعلق کو ذیل کی طرح ظاہر کرتے ہیں۔

عاد اعظم (HCF) × (ذواضعاف اقل) = (پہلی کثیر رقم) × (دوسری کثیر رقم)

$p(x)=x^2-5x+6$ and $q(x)=x^2-9$

مثال 01 مندرجہ ذیل دیے گئے کثیر رقمی اظہاریوں $q(x)$ اور $p(x)$ کے عاد اعظم اور ذواصفاف اقل معلوم کریں اور تعلق کی تصدیق کریں۔

$$p(x)=x^2-5x+6$$
$$=x^2-3x-2x+6$$
$$=x(x-3)-2(x-3)$$
$$=(x-3)\ (x-2)$$

اور $q(x)=x^2-9=(x-3)\ (x+3)$

اس طرح عاد اعظم $\text{H.C.F}=(x-3)$ ہے۔

اور ذواضعاف اقل $\text{L.C.M}=(x-2)(x^2-9)=(x-2)(x-3)(x+3)$ ہے۔

اب $p(x)$ اور $q(x)$ کی حاصل ضرب معلوم کریں"

اس لیے۔ $\quad p(x)\times q(x)=(x^2-5x+6)\times(x^2-9) \quad \ldots(\text{i})$

$\text{LCM}\times\text{HCF}=(x-2)(x-3)(x+3)\times(x-3)$

$\Rightarrow \quad =(x^2-5x+6)\times(x^2-9) \quad \ldots(\text{ii})$

نتیجہ (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ

ذواضعاف اقل x عاد اعظم, $\text{LCM}\times\text{HCF}=p(x)\times q(x)$

مثال 02: مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کا فارمولا کی مدد سے ذواضعاف اقل LCM معلوم کریں۔

$p(x)= x^2 +14x+48$ اور $q(x)= x^2 +8x+12$

حل: اب پہلی ہم $p(x)$ اور $q(x)$ عاد اعظم معلوم کریں گی۔

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2+14x+48 \\ &= x^2+8x+6x+48 \\ &= x(x+8)+6(x+8) \\ &= (x+6)(x+8) \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} q(x) &= x^2+8x+12 \\ &= x^2+6x+2x+12 \\ &= x(x+6)+2(x+6) \\ &= (x+2)(x+6) \end{aligned}$$

اس لیے عاد اعظم HCF $p(x)$ and $q(x)$ is $(x+6)$ ہے۔

$$\because \quad \text{LCM}=\frac{p(x)\times q(x)}{\text{HCF}}$$

$$\therefore \quad \text{LCM} = \frac{(x^2+14x+48)\times(x^2+8x+12)}{(x+6)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{LCM} = \frac{(x+6)(x+8)(x+2)(x+6)}{(x+6)}$$

اس لیے ذواضعاف اقل $\boxed{\text{LCM} = (x+2)(x+6)(x+8).}$ ہے۔

5.1.3 اجزاء ضربی یا تقسیم کے طریقے سے عادِ اعظم اور ذواضعافِ اقل معلوم کرنا۔

دو یا زیادہ الجبری اظہاریوں کا بذریعہ تقسیم عادِ اعظم HCF معلوم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل مثالی طریقہ سمجھنے میں مدد کریں گے۔

مثال 01: مندرجہ ذیل اظہاریوں کا بذریعہ تقسیم عادِ اعظم HCF معلوم کریں۔

$2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ and $2x^3 + 9x^2 + 11x + 2$.

حل: اصل تقسیم سے ہمیں ملے گا۔

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 2x^3+7x^2+4x-4 & 2x^3+9x^2+11x+2 \\ & -2x^3 \pm 7x^2 \pm 4x \quad 4 \\ \hline & 2x^2 + 7x+6 \end{array}$$

دوبارہ،

$$\begin{array}{r|l} & x \\ 2x^2+7x+6 & 2x^3+7x^2+4x-4 \\ & -2x^3 \pm 7x^2 \pm 6x+0 \\ \hline & -2x-4 \end{array}$$

$-2x-4$ میں سے مشترک 2- خارج کرنے سے

$$\begin{array}{r|l} & 2x+3 \\ x+2 & 2x^2+7x+6 \\ & -2x^2 \pm 4x+0 \\ \hline & 3x+6 \\ & -3x \pm 6 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

مطلوبہ عادِ اعظم HCF $x + 2$ ہے۔

مثال 02: مندرجہ ذیل اظہارات کا بذریعہ تقسیم عادِ اعظم معلوم کریں۔

$x^2 + 2x+1,\ x^2 - 1$ اور $x^2+ 4x+ 3$

حل: پہلے ہم دو اظہارات کا عادِ اعظم معلوم کریں گے پھر ان کے عادِ اعظم سے تیسرے اظہار کا عادِ اعظم معلوم کریں گے۔

اب اصل تقسیم سے ہمیں ملے گا۔

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^2+2x+1 & x^2+4x+3 \\ & x^2 \pm 2x \pm 1 \\ \hline & 2x+2 \end{array}$$

$2x+2$ میں سے مشترک 2+ خارج کرنے سے

$$x+1\,\overline{)\;x^2+2x+1\;}\quad \text{quotient: } x+1$$
$$-x^2 \pm x+0$$
$$x+1$$
$$-x \pm 1$$
$$0 \quad 0$$

تو x^2+2x+1 اور x^2+4x+3 کا عادِ اعظم $x+1$ ہے۔ ∴

اب ہم $x+1$ اور x^2-1 کا عادِ اعظم معلوم کریں گے۔

$$x+1\,\overline{)\;x^2-1\;}\quad \text{quotient: } x-1$$
$$-x^2 \pm x$$
$$-x-1$$
$$x+1$$
$$0 \quad 0$$

تینوں کثیر رقمی اظہاریوں کا عادِ اعظم _____ ہے۔

اب ہم بذریعہ تقسیم ذواضعافِ اقل معلوم کریں گی۔

مندرجہ ذیل فارمولا کی مدد سے دو یا زیادہ کثیر رقمیوں کا ذو ضعافِ اقل معلوم کریں گے۔

$$\text{ذوضعافِ اقل} = \frac{\text{کثیر رقمیوں کا حاصلِ ضرب}}{\text{کثیر رقمیوں کا عادِ اعظم}}$$

مثال 03 $x^3-6x^2+11x-6$ اور x^3-4x+3 کا ذواضعافِ اقل LCM معلوم کریں۔

حل: $x^3-6x^2+11x-6$ اور x^3-4x+3

$$x^3-4x+3\,\overline{)\;x^3-6x^2+11x-6\;}\quad \text{quotient: } 1$$
$$-x^3 \qquad \mp 4x \pm 3$$
$$-6x^2+15x-9$$

omit میں سے 3- خارج کرنے سے۔ $-6x^2+15x-9=-3(2x^2-5x+3)$,

x^3-4x+3 کو 2 سے ضرب دینے

$$2x^2-5x+3\,\overline{)\;2x^3-8x+6\;}\quad \text{quotient: } x+5$$
$$-2x^3 \pm 3x \mp 5x^2$$
$$5x^2-11x+6$$

کو 2 سے ضرب دینے سے, $10x\ -22x+12$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5 \\
2x^2-5x+3 & 10x^2-22x+12 \\
 & \underline{-10x^2 \mp 25x \pm 15} \\
 & 3x-3
\end{array}
$$

$3x-3=3$ میں سے 3 خارج کرنے سے $(x-1)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x-3 \\
x-1 & 2x^2-5x+3 \\
 & \underline{-2x^2 \mp 2x} \\
 & -3x+3 \\
 & \underline{3x \pm 3} \\
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

تو $HCF = x-1$ ہے عاد اعظم ہے۔ $\therefore$

اب ہمیں معلوم ہے کہ $= \dfrac{p(x).q(x)}{HCF}$

تو $\therefore \quad LCM = \dfrac{(x^3-6x^2+11x-6)(x^3-4x+3)}{x-1}$

اب $x^3-6x^2+11x-6$ کو $x-1$ سے تقسیم کریں۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-5x+6 \\
x-1 & x^3-6x^2+11x-6 \\
 & \underline{-x^3 \mp x^2} \\
 & -5x^2+11x \\
 & \underline{-5x^2 \pm 5x} \\
 & 6x-6 \\
 & \underline{-6x \pm 6} \\
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

اسی طرح $\boxed{LCM = (x^3-4x+3)(x^2-5x+6).}$ ذو اضعاف اقل ہے۔

5.1.4 حقیقی زندگی کے مسائل (حساب) جو عاداعظم HCF اور ذواضعاف اقل LCM سے وابستہ ہیں۔

مثال 01: ردا کے پاس دو کپڑے کے ٹکڑے ہیں۔ ایک 45 انچ چوڑا اور دوسرا 90 انچ چوڑا ہے۔ وہ دونوں پٹیوں کو برابر چوڑائی میں کاٹنا چاہتے ہے، تو وہ کتنے چوڑائی کی پٹیاں کاٹے گی۔

حل: یہ مسئلہ (حساب) عاداعظم سے حل ہو سکتا ہے۔ کیوں کہ وہ بڑی سے بڑی ممکنہ پٹیوں کے لیے کپڑا کاٹ رہی ہے یا تقسیم کر رہی ہے۔

اس لیے 45 اور 90 کا عاداعظم

HCF of 45 and 90

$45 = 3 \times 3 \times 5$

$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

HCF = مشترک اجزاء کی حاصل ضرب

$HCF = 3 \times 3 \times 5$

عاداعظم 45(HCF) ہے۔

اس لیے ردا کو 45 انچ چوڑا ٹکڑا کاٹنا چاہئے۔

مثال 02: سرفراز ہر 8 دن بعد ورزش کرتا ہے اور عمران ہر 4 دن بعد ورزش کرتا ہے۔ اگر دونوں نے آج ورزش کی ہو تو پھر کتنے دن بعد ایک ساتھ ورزش کریں گے۔

حل: یہ حساب ذواضعاف اقل LCM سے حل ہوگا۔ کیوں کہ ہم یہ جاننے کی کوشش کر رہے ہیں کہ وہ کس وقت ایک ساتھ ورزش کریں گے، وہ وقت جو ایک ساتھ ہو۔ 8 اور 4 کی ذو اضعاف اقل ہے۔

ذواضعاف اقل — مشترکہ اجزاء ضربی x غیر مشترک اجزاء ضربی

ذواضعاف اقل $= 2 \times 2 \times 2$

ذواضعاف اقل $= 8$

اس لیے، وہ 8 دن بعد ایک ساتھ ورزش کریں گے

مشق 5.1

1. بذریعہ اجزاءِ ضربی مندرجہ ذیل کا عادِ اعظم معلوم کریں۔

(i) $72x^4y^5z^2$ اور $120x^3y^6z^8$ (ii) $18r^3s^4t^5, 120r^4s^3t^8$ اور $210r^7s^7t^3$

(iii) $x^2-3x-18$ اور x^2+5x+6 (iv) $4x^2-9$ اور $2x^2-5x+3$

(v) $(2a^2-8b^2), (4a^2+4ab-24b^2)$ اور $(2a^2-12ab+16b^2)$

(vi) x^3+x^2+x+1 اور x^3+3x^2+3x+1

2. مندرجہ ذیل کا عادِ اعظم HCF بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

(i) x^2+3x+2 اور $3x^2-3x-6$

(ii) $2x^3+15x^2+31x+12$ اور $6x^3+46x^2+100x+48$

(iii) $x^3-5x^2+10x-8$ اور x^3-4x^2+7x-6

(iv) $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ اور x^3+4x^2+4x+1 اور x^3+5x^2+7x+2

3. مندرجہ ذیل کا ذواضعافِ اقل LCM بذریعہ اجزاءِ ضربی معلوم کریں۔

(i) $27a^4b^5c^2$ اور $81ab^2c^8$ (ii) $24p^2q^3r^4, 100p^5q^4r^5$ اور $300p^3qr^8$

(iii) $21x^2-14x$ اور $3x^2-5x+2$ (iv) $x^2+11x+28$ اور x^2+x-12

(v) $6x^2+11x+3, 3x^2-2x-1$ اور $3x^2-11x-4$

(vi) x^2-y^2, x^3-y^3 اور $x^4+x^2y^2+y^4$

4. بذریعہ تقسیم ذواضعافِ اقل معلوم کریں۔

(i) $x^2-25x+100$ اور x^2-x-20

(ii) $3x^2+14x+8$ اور $6x^2+x-2$

(iii) $x^2-y^2-z^2-2yz$ اور $y^2-z^2-x^2-2xz$

(iv) $3x^3+9x^2-84x$ اور $4x^4-24x^3+32x^2$

5. اگر x^2-6x+9 اور $x^2-11x+24$ کا عادِ اعظم HCF $(x-3)$ ہے تو ذواضعافِ اقل **LCM** معلوم کریں۔

6. دو اظہارات کا عادِ اعظم $(x+3)$ ہے اور ذواضعافِ اقل $(x^3+7x^2+7x-15)$ ہے۔ اگر ایک اظہار $x^2+8x+15$ ہے تو دوسرا معلوم کریں۔

7. دو دو درجی کثیر رقمی اظہاریوں کا عادِ اعظم اور ذواضعافِ اقل بالترتیب $3x-2$ اور $3x^3+7x^2-4$ ہے تو دونوں کثیر رقموں کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

8. عادِ اعظم اور ذواضعافِ اقل کے بیچ تعلق کی تصدیق کریں یعنی = $p(x)\ \ q(x))$ کثیر رقمی اظہارات کے لیے $p(x)=x^2-8x-20$ اور $q(x)=x^2-15x+50$ ہے۔

9. ایک بڑھئے کو کچھ لکڑی کے تختے مفت دیئے گئے کچھ 12cm لمبے اور کچھ 18cm لمبے ہیں۔ وہ ان کو کاٹنا چاہتا ہے تاکہ ان کے استعمال کو آسان بنانے کے لیے اس کے پاس برابر سائز کے تختے ہوں۔

10. ٹرین A اور ٹرین B صبح 10 بجے حیدر آباد رکتی ہیں۔ ٹرین A ہر 12 منٹ کے بعد اور ٹرین B ہر 14 منٹ کے بعد رکتی ہیں۔ وہ دونوں ایک ساتھ کب رکیں گی ۔

5.2 الجبری کسور پر بنیاد عوامل

اگر $p(x)$ اور $q(x)$ آلجبری اظہاریے ہیں اور $q(x) \neq 0$ تو $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ کو الجبری کسور کہا جاتا ہے۔

الجبری کسور کی مختصر ترین صورت ایک ایسی کسور ہے جس میں شمار کنندہ اور مخروج میں 1 کے علاوہ کوئی مشترک جزوضربی نہ ہو۔

الجبری کسور میں بنیادی عوامل $(\times, \div, -, +)$ عام کسور کی طرح دیے جاتے ہیں۔

مندرجہ ذیل مثالوں میں ہم عاد اعظم اور ذواضعاف اقل کے استعمال کی وضاحت کریں گے، کسوری اظہارات مختصر ترین صورت میں کرنے کے لیے جن میں بنیادی عوامل شامل ہوں۔

5.21 عاد اعظم اور ذواضعاف اقل استعمال کریں۔ الجبری کسور جن میں جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم شامل ہوں ان کو مختصر کریں۔

مثال 01: $\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3}+\dfrac{1}{4x^2-1}$ مختصر کریں۔

حل:

$$\frac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3}+\frac{1}{4x^2-1} = \frac{x^2-3x+2x-6}{2x^2-6x+x-3}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{x(x-3)+2(x-3)}{2x(x-3)+1(x-3)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(2x+1)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)} \quad \text{where, } x \neq 3$$

$$= \frac{(x+2)}{(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{(x+2)(2x-1)+1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{2x^2 - x + 4x - 2 + 1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2x^2+3x-1}{4x^2-1}$$

مثال 02: مختصر کریں۔ $\frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+x-6}$

حل:

$$\frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+x-6}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+4x-3x-6}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x(x+2)-3(x+2)}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{2(2x-3)-(x-4)}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{4x-6-x+4}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{3x-2}{2x^2+x-6}$$

مثال 03: مختصر کریں۔ $\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b}$

حل:

$$\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b}$$

$$\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b} = \frac{a(b^2+2)}{b(a+2)-3(a+2)} \times \frac{b^2-3b-3b+9}{b(b^2+2)}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{b(b-3)-3(b-3)}{b}$$

$$=\frac{a}{(a+2)(b-3)}\times\frac{(b-3)(b-3)}{b}$$

$$=\frac{a}{(a+2)(b-3)}\times\frac{(b-3)(b-3)}{b}$$

جب کہ

اور

$$=\frac{a(b-3)}{b(a+2)}$$

مثال 04: $\frac{p^2-q^2}{r^2+2rs+s^2}\div\frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$ مختصر کریں۔

حل:

$$\frac{p^2-q^2}{r^2+2rs+s^2}\div\frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$$

$$=\frac{(p+q)(p-q)}{(r+s)^2}\div\frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$$

$$=\frac{(p+q)(p-q)}{(r+s)^2}\times\frac{3(r+s)s}{2(p+q)}$$

جب کہ $p+q\neq 0$ اور $r+s\neq 0$

$$=\frac{3s(p-q)}{2(r+s)},$$

مشق 5.2

درج ذیل کو مختصر کریں۔

(i) $\frac{4x}{x^2+2x+1}+\frac{3}{x+1}$

(ii) $\frac{3}{x(2x+1)}+\frac{6x+7}{3x(x+1)}$

(iii) $\frac{3x-1}{x^2+2x+1}-\frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$

(iv) $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}$

(v) $\frac{x^2+4x+3}{5}\times\frac{10}{x+1}$

(vi) $\frac{x^2-4x-21}{x^2-6x-7}\div\frac{x+9}{x+1}$

(vii) $\left[\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right]\div\left[\frac{2}{x+3}-1\right]$

(viii) $\left(\frac{1}{x^2-9}\right)\div\left(\frac{1}{x+3}\right)-\frac{3}{x-2}$

(ix) $\frac{1}{x^2+8x+15}+\frac{1}{x^2+7x+12}-\frac{1}{x^2+x-12}$

(x) $2\left(\frac{x^2+7x+12}{x^2-16}+\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}\right)\times\frac{x^2-2x-8}{8x^2+2x+4}$.

5.3 الجبری اظہارات کا جذر المربع

5.3.1 بذریعہ اجزاءِ ضربی اور تقسیم جذر المربع معلوم کرنا۔

الجبری اظہارات کا جذر المربع معلوم کرنے کے دو طریقوں پر بحث کریں گے۔

(a) بذریعہ اجزاءِ ضربی (b) بذریعہ تقسیم۔

(a) بذریعہ اجزاءِ ضربی جذر المربع کا طریقہ

مثال 01: $49x^2+126xy+81y^2$ کا جذر المربع بذریعہ اجزاءِ ضربی معلوم کریں۔

حل:

$$49x^2+126xy+81y^2$$
$$= (7x)^2+2(7x)(9y)+(9y)^2,$$
$$= (7x+9y)^2,$$

اس لیے

$$= \sqrt{49x^2+126xy+81y^2}$$
$$= \sqrt{(7x+9y)^2} = 7x+9y$$

(b) بذریعہ تقسیم جذر المربع۔

مثال 01: $4x^4+12x^3-19x^2-42x+49$ کا جذر المربع بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

حل: طریقہ ذیل میں واضح ہے۔

	$2x^2+3x-7$
$2x^2$	$4x^4+12x^3-19x^2-42x+49$
$+2x^2$	$\pm 4x^4$
$4x^2+3x$	$12x^3-19x^2-42x+49$
$+3x$	$\pm 12x^3 \pm 9x^2$
$4x^2+6x-7$	$-28x^2-42x+49$
-7	$\mp 28x^2 \mp 42x \pm 49$
$4x^2+6x-14$	$0 \quad 0 \quad 0$

اس لیے $\sqrt{4x^4+12x^3-19x^2-42x+49} = 2x^2+3x-7.$

مثال 02: a کی کس قیمت کے لیے $36x^4+36x^3+57x^2+24x+a$ مکمل مربع ہوگا۔

حل: بذریعہ تقسیم:

	$6x^2+3x+4$
$6x^2$	$36x^4+36x^3+57x^2+24x+a$
$+6x^2$	$\pm 36x^4$
$12x^2+3x$	$36x^3+57x^2+24x+a$
$+3x$	$\pm 36x^3 \pm 9x^2$
$12x^2+6x+4$	$48x^2+24x+a$
$+4$	$\pm 48x^2 \pm 24x \pm 16$
$12x^2+6x+8$	$a-16$

مکمل مربع ہونے کے لیے جذالمربع کے عمل میں باقی صفر ہونا چاہیے

$$a-16=0 \Rightarrow a=16,$$

A کی قیمت 16 رکھنے سے دیا گیا اظہاریہ مکمل مربع ہوگا۔

مثال 03: $x^4+4x^3+10x^2+5$, میں کیا جمع کیا جائے کہ یہ مکمل مربع بن جائے؟

حل: بذریعہ تقسیم:

	x^2+2x+3
x^2	$x^4+4x^3+10x^2+5$
x^2	$\pm x^4$
$2x^2+2x$	$4x^3+10x^2+5$
$+2x$	$\pm 4x^3 \pm 4x^2$
$2x^2+4x+3$	$6x^2+5$
$+3$	$\pm 6x^2 \pm 12x \pm 9$
$2x^2+4x+6$	$-12x-4$

یا $-(12x+4)$

یعنی باقی بچا۔ گویا $12x+4$ جمع کرنے پر دیا ہوا اظہاریہ مکمل مربع بن جائے گا۔

مشق 5.3

1. مندرجہ ذیل کا جذر المربع بذریعہ اجزاء ضربی معلوم کریں۔

(i) $36x^2-60xy+25y^2$

(ii) $9x^2+\frac{1}{x^2}+6$

(iii) $4x^4y^4-\frac{12x^3y^3}{z^2}+\frac{9x^2y^2}{z^4}$

(iv) $36(3-2x)^2-48(3-2x)y+16y^2$

(v) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3$

(vi) $(4x^2-4x+1)(9x^2-54x+81)$

(vii) $(x^2-2x+1)(x^2-6x+9)$

(viii) $(x^2+8x+15)(x^2+7x+10)(x^2+5x+6)$

2. مندرجہ ذیل کا جذر المربع بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

(i) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

(ii) $25x^4+40x^3+26x^2+8x+1$

(iii) $4x^4+8x^3+20x^2+16x+16$

(iv) $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+47-\frac{14y}{x}+\frac{14x}{y}$

(v) $x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$

(vi) $x^2+\frac{y^2}{9}+9z^2+\frac{2xy}{3}+2yz+6xz$

(vii) $(x^2+\frac{1}{x^2})^2-8(x^2+\frac{1}{x^2})+16$

(viii) $x^6+\frac{1}{x^6}-4\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+6,\ x\neq 0$

3. $4x^4+4x^3+17x^2+8x+9$ میں کیا جمع کیا جائے کہ یہ مکمل مربع بن جائے؟

4. $9x^6-12x^5+4x^4-18x^3-12x^2+18$ میں سے کیا تفریق کیا جائے کہ یہ مکمل مربع بن جائے؟

5. $'m'$ کی کس قیمت کے لیے $9x^4+12x^3+34x^2+mx+25$ مکمل مربع ہوگا؟

6. $'p'$ اور $'q'$ کی کس قیمت کے لیے $x^4+8x^3+30x^2+px+q$ اظہاریہ مکمل مربع ہے؟

7. $'a'$ اور $'b'$ کی کس قیمت کے لیے $x^4+4x^3+10x^2+ax+b$ اظہاریہ مکمل مربع ہے؟

جائزہ مشق 5

1. صحیح اور غلط سوال۔
مندرجہ ذیل جملے غور سے پڑھیں اور صحیح بیان کی صورت میں 'T' اور غلط بیان کی صورت میں 'F' پر گول دائرہ لگائیں۔

(i) HCF of $y^2 - 4$ اور $y - 2$ is $y - 2$. T/F

(ii) HCF of $a^3 - 1$ اور $a^2 - 1$ is $a + 1$. T/F

(iii) LCM of $x^3 + 1$ اور $x + 1$ is $x^3 + 1$. T/F

(iv) LCM of $x^4 - y^4$ اور $x^2 - y^2$ is $x^2 + y^2$. T/F

(v) HCF of $a^2 + 4a + 3$ اور $a^2 + 5a + 6$ is $a + 3$. T/F

2. خالی جگہیں پر کریں۔

(i) آلجبری اظہار کا عاداعظم معلوم کرنے کے ______ طریقے ہیں۔

(ii) دو کثیر رقمیوں کے عاداعظم X ذواضعاف اقل ______ ہے۔

(iii) $y - 2$ اور $y + 6$ اور $y^2 - 5y$ کا عاداعظم ______ ہے۔

(iv) y^2+5y+6 اور y^2+3y+2 کا ذواضعاف اقل ______ ہے۔

(v) $y+\frac{1}{y}$ اور $y^2-\frac{1}{y^2}$ کا عاداعظم ______ ہے۔

3. درست جوابات پر ٹک (✓) لگائیں۔

(i) x^3-8y^3 اور $x^2 - 4xy + 4y^2$ کا عاداعظم ہے

(a) $x - 4y$ (b) $x^2+2xy+y^2$
(c) $x+2y$ (d) $x-2y$

(ii) $(2y+3z)^5$ اور $(2y+3z)^3$ کا ذواضعاف اقل ہے:

(a) $2y+3z$ (b) $(2y+3z)^3$
(c) $(2y+3z)^2$ (d) $(2y+3z)^5$

(iii) $x^3 - y^3$ اور x^2+xy+y^2 کا عاداعظم ہے۔

(a) $x+y$ (b) x^2+xy+y^2
(c) $x-y$ (d) $(x-y)^2$

(iv) $(x-y)^4$ اور $(x-y)^3$ کا ذواضعاف اقل ہے۔

(a) $(x-y)$ (b) $(x-y)^3$
(c) $(x-y)^4$ (d) $(x-y)^7$

(v) $\frac{y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x+y}$ کی مختصر صورت ہے:

(a) $\frac{y+1}{x^2-y^2}$ (b) $\frac{x}{x^2-y^2}$

(c) $\frac{y}{x^2-y^2}$ (d) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$

(vi) $\frac{1}{5x-y}-\frac{y}{25x^2-y^2}$ کی مختصر صورت ہے:

(a) $\frac{5x}{25x^2-y^2}$ (b) $\frac{5x}{5x-y}$

(c) $\frac{-5x}{5x+y}$ (d) $\frac{-5x}{25x^2-y^2}$

(vii) $\frac{a^3x^3+a^3y^3}{a^2(x+y)}=$ ______________

(a) ax^2+ay^2 (b) x^2+y^2

(c) $a(x^2-xy+y^2)$ (d) $a(x^2+xy+y^2)$

(viii) $\frac{b}{a+b}-\frac{a}{a-b}=$ ______________

(a) $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ (b) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

(c) $\frac{a+b}{a^2-b^2}$ (d) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$

(ix) ذواضعاف اقل = ______________

(a) $\frac{\text{HCF}}{p\times q}$ (b) $\frac{p\times q}{\text{HCF}}$

(c) $\frac{p}{\text{HCF}}$ (d) $\frac{q}{\text{HCF}}$

(x) x^2-x+1 اور x^3+1 کا ذواضعاف اقل ہے

(a) $x+1$ (b) x^2-x+1 (c) x^3+1 (d) x^2+x+1

خلاصہ

- الجبری اظہاریوں کا عاداعظم اور ذو اضعاف اقل معلوم کرنے کے لیے دو طریقے استعمال ہوتے ہیں۔
  (i) بذریعہ اجزاءِ ضربی　　(ii) بذریعہ تقسیم۔
- کثیر رقمی اظہاریوں کا ذو اضعاف اقل x عاد اعظم = دو کثیر رقمی اظہاریوں کی حاصل ضرب۔
- ذو اضعاف اقل اور عاد اعظم کی مدد سے الجبری اظہاریوں کی جمع، ضرب، تفریق اور تقسیم مل سکتی ہے۔
- الجبری اظہاریوں کا جذر المربع معلوم کرنے کے لیے دو طریقے استعمال ہوتے ہیں۔
  (i) جذر المربع بذریعہ اجزاءِ ضربی۔
  (ii) جذر المربع بذریعہ تقسیم۔

یونٹ 6

یک درجی مساواتیں اور غیر مساواتیں

LINEAR EQUATIONS AND INEQUALITIES

حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- ایک متغیر یک درجی مساوات کا اعادہ کر سکیں۔
- ایسی یک درجی مساوات کو حل کر سکیں جس میں متغیر کے عددی سر ناطق اعداد ہوں۔
- جذری مساواتوں کو یک درجی شکل میں تبدیل کر کے حل کر سکیں۔
- کسی حقیقی عدد___ کسی مطلق قیمت_____ کی تعریف کر سکیں۔
- ایک متغیر میں مطلق قیمت کی مساوات کو حل کر سکیں۔
- ایسی غیر مساواتوں کی تعریف کر سکیں جن میں علامات $(\leq, \geq)$ اور $(<, >)$ استعمال کی گئی ہوں۔
- غیر مساواتوں کی درج ذیل خصوصیات کو سمجھ اور ان کی شناخت کر سکیں۔
- ثلاثی خاصیت، خاصیت متعدیت، جمعی خاصیت، ضربی خاصیت کو جان سکیں۔
- ایسی یک درجی غیر مساواتوں کو حل کر سکیں جن میں متغیر کے عددی سر ناطق اعداد ہوں۔

6.1 یک درجی مساواتیں Linear Equations

6.1.1: ایکو متغیر میں ایک درجی مساوات کا اعادہ کریں۔

اگر ایک کھلے جملے میں "=" نشانی شامل ہو تو پھر ایسے جملے کو مساوات کہا جاتا ہے۔ایک متغیر میں یک درجی مساوات یعنی $ax+b=0,\ a\neq 0$ مساواتیں ہیں جہاں پر متغیر Veriable کی قوت نما "1" ہے۔جو عام طور پر ظاہر نہیں کی جاتی۔

6.1.2: ایسی یک درجی مساوات حل کریں۔جس میں متغیر کے عددی سر ناطق اعداد ہوں

غیر معلوم شدہ متغیر Variable جو مساوات میں دیا گیا ہے اس کی قیمت کے لیے مساوات درست ہو جائے تو اس کو مساوات کا اصل Root کہا جاتا ہے۔

مثال 01: $3x-1=5$ حل کریں۔

حل:

$$3x-1=5$$
$$\Rightarrow\quad 3x=5+1$$
$$\Rightarrow\quad x=\frac{6}{3}$$
$$\Rightarrow\quad x=2$$

اس طرح $\{2\}$ حل سیٹ ہے۔

مثال 02: $\frac{2}{3}(x+3)=3+\frac{5x}{9}$

حل:

$$\frac{2}{3}(x+3)=3+\frac{5x}{9}$$

$$9\times\frac{2}{3}(x+3)=9\times 3+9\times\frac{5x}{9}$$

عرضیں کو سب مخروجوں کی ذواضعاف اقل 9 سے ضرب دینے سے۔

$$\Rightarrow\quad 3\times 2(x+3)=27+5x$$
$$\Rightarrow\quad 6(x+3)=27+5x$$
$$\Rightarrow\quad 6x+18=27+5x$$
$$\Rightarrow\quad 6x-5x=27-18$$
$$\Rightarrow\quad x=9$$

اس طرح $\{9\}$ حل سیٹ ہے۔

مثال 03: باپ کی عمر بیٹے کی عمر سے 13 گنا ہے۔چار سال بعد 5 گنا ہو جاتی ہے تو دونوں کی موجودہ عمریں معلوم کریں۔

حل: فرض کریں کہ بیٹے کی موجودہ عمر 21 سال ہے۔اور باپ کی عمر = $13x$ ہے

دی گئی شرط کے مطابق

$$\therefore\quad 13x+4=5(x+4)$$

$$\Rightarrow \quad 13x + 4 = 5x + 20$$

$$\Rightarrow \quad 13x - 5x + 4 = 5x - 5x + 20$$ (طرفین 5x تفریق کرنے سے)

$$\Rightarrow \quad 8x + 4 = 20$$

$$\Rightarrow \quad 8x + 4 - 4 = 20 - 4$$ (طرفین 4 تفریق کرنے سے)

$$\Rightarrow \quad 8x = 16$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8x}{8} = \frac{16}{8}$$ (عرضین 8 سے تقسیم کرنے سے)

$$\Rightarrow \quad x = 2$$

لہٰذا باپ کی موجودہ عمر $13 \times 2 = 26$ سال ہے۔

اور بیٹے کی موجودہ عمر 2 سال ہے۔

مثال 04: کسی عدد کے $\frac{1}{3}$ گنا میں 16 جمع کرنے سے نتیجہ اصل عدد کا $2\frac{1}{3}$ ہے تو عدد معلوم کریں۔

حل: فرض کریں کہ عدد x ہے دیے گئے شرط کے مطابق

$$16 + \frac{1}{3}x = 2\frac{1}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 + \frac{1}{3}x = \frac{7}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \frac{7}{3}x - \frac{1}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\right)x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \left(\frac{7-1}{3}\right)x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \frac{6}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 \times 3 = 6x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{48}{6} = x \qquad \Rightarrow x = 8$$

6.1.3: ایسی مساوات جس میں متغیر پر جذری علامت ہو۔ ان کو یک درجی مساوات میں تبدیل کریں اور حل معلوم کریں۔

ایسی مساوات جس میں کوئی جذری علامت میں متغیر ہو جذری مساوات کہلاتی ہے۔

مثلاً: $\sqrt{x} = 8$ اور $\left(3\sqrt{t} - \sqrt{t+1} = 2\right)$ جذری مساواتیں ہیں۔

جذری مساوات کا حل مندرجہ ذیل مثالوں میں واضح ہے۔

مثال 01: $\sqrt{2x+11}=\sqrt{3x+7}$

حل: $\sqrt{2x+11}=\sqrt{3x+7}$

(عرضیں مربع لینے سے)

$$\therefore \quad \left(\sqrt{2x+11}\right)^2=\left(\sqrt{3x+7}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 2x+11=3x+7$$

$$\Rightarrow \quad 2x-3x=7-11$$

$$\Rightarrow \quad -x=-4$$

$$\Rightarrow \quad x=4$$

پڑتال: دی گئی مساوات میں $x=4$ درج کرنے سے۔

$$\sqrt{2(4)+11}=\sqrt{3(4)+7}$$

یا $\sqrt{8+11}=\sqrt{12+7}$

یا $\sqrt{19}=\sqrt{19}$

لہٰذا دی گئی مساوات کا حل سیٹ $\{4\}$ ہے۔

نوٹ: بعض اوقات جذری مساوات سے حاصل شدہ اصل مساوات کو پورا نہیں کرتی اور اس کو اضافی اصل کہتے ہیں۔

مشق 6.1

1. مندرجہ ذیل مساواتیں حل کریں۔

(i) $\frac{1}{4}x=5$ (ii) $\frac{x}{4}=-3$ (iii) $-5=\frac{-x}{6}$

(iv) $\frac{-x}{8}=-5$ (v) $y-\frac{2}{5}=-\frac{1}{3}$ (vi) $2y-\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$

(vii) $\frac{2x-4}{5}=\frac{5x-12}{4}$ (viii) $\frac{3x}{5}+7=\frac{2x}{3}$ (ix) $\frac{3x}{5}+7=\frac{2x}{3}+\frac{4x}{5}$

(x) $\frac{6}{2x-5}-\frac{4}{x-3}=0$ (xi) $\frac{7x-4}{15}=\frac{7x+4}{10}$

(xii) $\frac{3x-2}{10}=\frac{7x-3}{15}-2$ (xiii) $\frac{12x-3}{12}=\frac{12x+3}{8}$

(xiv) $\frac{1}{4}x+x=-3+\frac{1}{2}x$ (xv) $\frac{1}{3}+2m=m-\frac{3}{2}$

2. جب کسی عدد میں 25 جمع کرکے نتیجے کو آدھا کیا جائے، جواب اصل عدد کا 3 گنا ہو تو عدد کیا ہے۔

3. کوئی عدد 4 میں جمع کیا جائے، نتیجہ اصل عدد کے 3 گنا میں سے 10 تفریق کرنے کے برابر ہو تو عدد کیا ہے۔

4. بلال علی سے 6 سال بڑا ہے۔ 5 سال کے بعد دونوں کی عمر کا مجموعہ 40 ہو تو دونوں کی عمریں کیا ہیں۔

5. مندرجہ ذیل مساواتیں حل کریں اور جواب کی پڑتال بھی کریں۔

(i) $6+\sqrt{x}=7$ (ii) $\sqrt{x-9}=1$ (iii) $\sqrt{\frac{y}{4}}-2=3$

(iv) $\sqrt{4x+5}=\sqrt{3x-7}$ (v) $\frac{\sqrt{3y+12}}{7}=3$ (vi) $\sqrt{x}+9=7$

(vii) $\sqrt{25y-50}=\sqrt{y-2}$ (viii) $\sqrt{x}-8=1$ (ix) $10\sqrt{x+20}=100$

6.2 مطلق قیمت میں مساوات۔

6.2.1: مطلق قیمت کی وضاحت کریں۔

کسی حقیقی عدد x کی مطلق قیمت کو $|x|$ سے ظاہر کرتے ہیں جو کہ x صفر سے عدد تک کا فاصلہ ہے، صفر کے بائیں طرف سے ہو یا دائیں جانب سے ہو۔ اس لیے مطلق قیمت کبھی بھی منفی نہیں ہوتی۔ اگر x ایک حقیقی عدد ہے تو پھر x کی مطلق قیمت $|x|$ ظاہر کرتے ہیں۔

جیسے

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{جہاں پر } x>0 \\ 0, & \text{جہاں پر } x=0 \\ -x, & \text{جہاں پر } x<0 \end{cases}$$

مثال $|-5|=5, |+7|=7, \left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}, |0|=0$

نوٹ: ایک عدد کی مطلق قیمت ہمیشہ غیر منفی ہوتی ہے۔

6.2.2 ایک متغیر کی مساوات مطلق قیمت میں حل کریں۔

مندرجہ ذیل مثالیں مطلق قیمت میں مساواتیں حل کرنے میں مددگار ہونگی۔

مثال 01: $|5x-3|-2=3$ کا حل سیٹ معلوم کریں۔

حل معلوم ہے کہ

$$|5x-3|-2=3$$

$$\Rightarrow |5x-3|=5$$

مطلق قیمت کی تعریف کے مطابق

$5x-3=5$ یا $5x-3=-5$

$\Rightarrow 5x=5+3$ یا $5x=-5+3$

$\Rightarrow 5x=8$ یا $5x=-2$

$\Rightarrow x=\frac{8}{5}$ یا $x=-\frac{2}{5}$

لہٰذا حل سیٹ ہے۔ $\left\{\frac{8}{5}\ ,\ -\frac{2}{5}\right\}$

مثال 02: $|5x-3|+7=3$ کا حل سیٹ معلوم کریں۔

حل، معلوم:

$$|5x-3|+7=3$$

$$\Rightarrow |5x-3|=-4$$

مطلق قیمت کی تعریف کے مطابق۔ مطلق قیمت کبھی بھی منفی نہیں ہوتی۔

تواس لیے حل سیٹ { } = ہوگا۔ ∴

مثال 03: $|5x-3|-2=3$ حل کریں جبکہ $x\in W$

حل، معلوم:

$$|5x-3|-2=3$$

$$\Rightarrow |5x-3|=5$$

مطلق قیمت کی تعریف کے مطابق

اس لیے $5x-3=-5$ یا $5x-3=5$

$5x=-5+3$ یا $\Rightarrow 5x=5+3$

$5x=-2$ یا $\Rightarrow 5x=8$

$x=-\frac{2}{5}$ یا $\Rightarrow x=\frac{8}{5}$

لہٰذا { } حل سیٹ ہے۔ $-\frac{2}{5}$ اور $\frac{8}{5}\notin W$

مثال 04: $|2y-5|+2=7$ حل کریں

حل معلوم $|2y-5|+2=7$

$\Rightarrow |2y-5|=7-2$

$\Rightarrow |2y-5|=5$

مطلق قیمت کی تعریف کے مطابق

اس لیے $2y-5=-5$ یا $2y-5=5$

$2y=-5+5$ یا $\Rightarrow 2y=5+5$

$2y=0$ یا $\Rightarrow 2y=10$

$y=\frac{0}{2}$ یا $\Rightarrow y=\frac{10}{2}$

$y=0$ یا $\Rightarrow y=5$

لہٰذا $\{5, 0\}$ حل سیٹ ہے۔

مشق 6.2

مندرجہ ذیل مساواتوں کا حل سیٹ معلوم کریں۔

1. $|2x+1|=6$
2. $|5x-12|=7,\ \forall\ x\in W$
3. $\left|\frac{2x}{7}\right|=12$
4. $\left|\frac{2x+1}{3}\right|=8$
5. $|5x-3|-8=4,\ \forall\ x\in N$
6. $\left|\frac{5x+1}{7}\right|-3=8$
7. $\left|\frac{2x+3}{4}\right|+2=7$
8. $\left|\frac{3x+6}{12}\right|+1=3,\ \forall\ x\in Z$
9. $\frac{3}{2}=|7x+8|$
10. $\left|\frac{2x-3}{5}\right|-12=5$
11. $|3x+1|+1=\frac{3}{4}$
12. $\left|\frac{2x+1}{7}\right|=1$

6.3 یک درجی غیر مساواتیں۔

ایک یک درجی الجبری اظہاریہ جس میں ________ یا ________ نشانیاں موجود ہوں تو غیر مساوات کہلاتی ہے۔

6.3.1: $(<, >)$ اور $(\leq, \geq)$ کی وضاحت کریں۔

مندرجہ ذیل ناطق عوامل کو غیر مساوی کہا جاتا ہے۔

'$<$' مطلب چھوٹا ہے۔

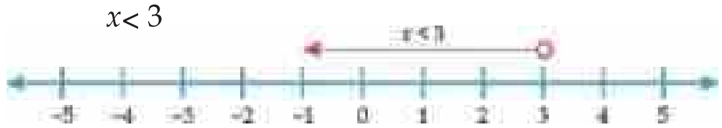
'$>$' مطلب بڑا ہے۔

'$\leq$' مطلب چھوٹا ہے یا برابر ہے۔

'$\geq$' مطلب بڑا ہے یا برابر ہے۔

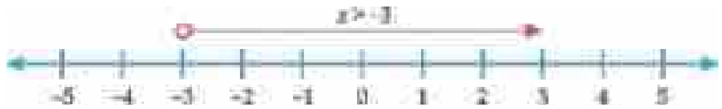
مثال :01

$x<3$



مثال :02

$x>-3$

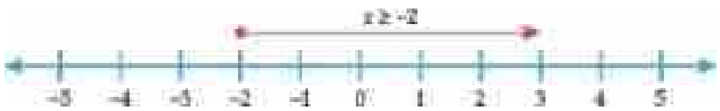


مثال :03

$x\leq 4$

مثال :04

$x\geq -2$



نوٹ: خالی گول دائرہ 'O' عدد کے شامل نہ ہونے کو ظاہر کرتا ہے اور گہرا کالا دائرہ 'O' شامل ہونے کو ظاہر کرتا ہے۔

6.3.2: غیر مساوات کو پہچاننا۔

مندرجہ ذیل کچھ اہم غیر مساواتوں کی خاصیتیں ہیں۔

(i) ثلاثی خاصیت (Trichotomy Property)

اگر a اور b حقیقی اعداد ہیں تو درج ذیل بیانات میں سے ایک اور صرف بیان درست ہے۔

$$a<b, a=b \text{ or } a>b$$

(ii) خاصیت متعدیت (Tramsitive Property)

تین حقیقی اعداد کے لیے، اگر $a<b$ اور $b<c \Rightarrow a<c$

اور $a>b$ اور $b>c \Rightarrow a>c$

(iii) جمعی خاصیت (Additive Property)

تین حقیقی اعداد کے لیے اگر

اگر $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$, $a+c > b+c$ تو $a > b$

یا اگر $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$, $a+c < b+c$ تو $a < b$

(iv) ضربی خاصیت (Multiplicative Property)

(a) اگر $c > 0$ اور $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $ac > bc$ تو If $a > b$

یا اگر $c > 0$ اور $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $ac < bc$ تو If $a < b$

(b) اگر $c < 0$ اور $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $ac < bc$ تو If $a > b$

یا اگر $c < 0$ اور $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $ac > bc$ تو If $a < b$

6.4 یک درجی غیر مساواتیں حل کرنا۔

6.4.1: ایک متغیر میں غیر مساواتوں کا حل معلوم کرنا۔

مندرجہ ذیل مثالیں حل سمجھنے اور اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرنے میں مددگار ہوں گی۔

مثال 01: $\forall x \in W$ $3x+1<7$ کا حل سیٹ معلوم کریں اور عدد خط پر ظاہر کریں۔

حل:

معلوم $\forall x \in W$ $\quad 3x+1<7$

$$(3x+1)-1<7-1$$

$$3x<6$$

$$x<\frac{6}{3}$$

$$x<2$$

لہٰذا حل سیٹ پر۔ $\{x \mid x \in W \wedge x<2\}=\{0,1\}$

حل سیٹ کو عددی خط پر اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 02: $x-11\le 9-4x \quad \forall x\in Z$ کا حل سیٹ معلوم کریں اور عددی خط پر ظاہر کریں۔

حل: معلوم $x-11\le 9-4x \quad \forall x\in Z$

$$x-11\le 9-4x$$
$$x+4x\le 9+11$$
$$5x\le 20$$
$$x\le \frac{20}{5}$$
$$x\le 4$$

لہٰذا $\{x\,|\,x\in Z$ اور $x\le 4\}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ حل سیٹ ہے۔

مثال 03: $x\in\mathbb{R}$ $2x+5>7$ حل سیٹ معلوم کریں اور عدد خط پر ظاہر کریں۔

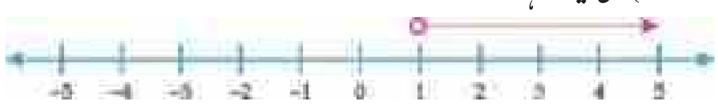
حل: معلوم $x\in\mathbb{R}$ $2x+5>7$

$$2x>7-5$$
یا $2x>2$

یا $x>1$

یہ غیر مساوات اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

لہٰذا $\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\ \wedge x>1\}$ حل سیٹ ہے۔



مثال 03: $-6<2x+1<11, \quad \forall x\in Z.$

حل: معلوم $-6<2x+1<11, \quad \forall x\in Z.$

$2x+1<11$ اور $-6<(2x+1)$

یا $2x+1<11-1$ اور $-6-1<2x$

یا $2x<10$ اور $-7<2x$

مثال 04: عائشہ نے چار ٹیسٹوں میں سے پہلے تین ٹیسٹوں میں 78، 72 اور 86 اسکور کیا۔ 80 کی سر اسری کے لیے اسکو چوتھے ٹیسٹ میں کتنا اسکور کرنا ہو گا۔

حل: فرض کریں کہ چوتھے ٹیسٹ میں x اسکور کیا تو۔

$$\frac{78+72+86+x}{4} \geq 80$$
$$78+72+86+x \geq 320$$
$$236+x \geq 320$$
$$x \geq 320-236$$
$$x \geq 84$$

عائشہ کو چوتھے ٹیست میں 84 اسکور کرنا چاہیے 80 کی سر اسری قائم رکھنے کے لیے۔

مشق 6.3

1. مندرجہ ذیل غیر مساواتوں کا حل سیٹ معلوم کریں اور عددی خط پر ظاہر کریں۔

(i) $2x-7>6+x \quad \forall x \in \mathbb{N}$

(ii) $7x-6>3x+10, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $\frac{y+5}{20} < \frac{25-4y}{10}, \forall y \in \mathbb{N}$

(iv) $|2x+3| < x+2, \forall x \in Z$

(v) $|2y+8| < 11, \forall y \in \mathbb{R}$

(vi) $5(2y-3) > 6(y-8), \forall y \in \mathbb{R}$

2. علی نے اپنے دو ٹیسٹوں میں بالترتیب 66 اور 72 مارکس اسکور کیئے اگر اسکو یونس انعام کے قابل ہونے کے لیے کم از کم 75 کی اوسط درکار ہے تو اسے اپنے تیسرے ٹیسٹ میں کتنے مارکس لینے ہونگے۔

3. 7 چھوٹا ہے ایک عدد کے مجموعے سے اور 5 کم از کم 10 ہے تو اس شرط کو پورا کرنے کے لیے سارے اعداد معلوم کریں۔

جائزہ مشق 6

1. صحیح اور غلط سوالات۔

مندرجہ ذیل جملوں کو غور سے پڑھیں اور صحیح کی صورت میں T پر اور غلط کی صورت میں F پر گول دائرہ لگائیں۔

(i) $ay+b=0$ جبکہ $a=0$ یک درجی مساوات ہے۔ T/F

(ii) $y\in\mathbb{N} \wedge 3y-2<7$ کا حل سیٹ $\{4, 5, 6,...\}$ T/F

(iii) $\sqrt{y}+1=3$ کا حل سیٹ $\{4\}$ ہے۔ T/F

(iv) $|4y|=8$ کا حل سیٹ $\{2, -2\}$ ہے T/F

(v) $x\in$, $-2\le x\le 2$ کا حل سیٹ $\{-2, 0, 2\}$ ہے۔ T/F

2. خالی جگہیں پر کریں۔

(i) $2y=-y$ کا حل سیٹ ________ ہے

(ii) $\sqrt{y+5}=5$ کا حل سیٹ ________ ہے

(iii) $|x|-4=0$ کا حل سیٹ ______ ہے۔

(iv) $\sqrt{x+5}+2=4$ کا حل سیٹ ______ ہے۔

(v) $0<y+2<5$ جبکہ $y\in\mathbb{R}$ کا حل سیٹ ______ ہے۔

3. درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

(i) یک درجی مساوات ایک متغیر میں حل سیٹ ہے۔

(a) ایک عنصر (b) دو عناصر

(c) تین عناصر (d) ایک سے زیادہ عناصر۔

(ii) $|-20|$

(a) $=20$ (b) <20

(c) $=-20$ (d) >20

(iii) $x\le 4$ کا مطلب ہے۔

(a) $x<4$ (b) $x=4$

(c) $x<4$ or $x=4$ (d) $x>4$ or $x=4$

(iv) $\sqrt{y} = 10$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) {100} (b) {10}

(c) {−10} (d) {−10,10}

(v) $\sqrt{y+4} + 2 = 8$ ؟

(a) یک درجی مساوات (b) جذری مساوات

(c) سہ درجی مساوات (d) دودرجی مساوات

(vi) $5-3y = -7$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) { −4} (b) {1, 4}

(c) { 4} (d) { 12 }

(vii) $\sqrt{5y+5} + 5 = 10$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) { ±4 } (b) { 5 }

(c) { 4 } (d) { −4 }

(viii) $\left|\frac{5y}{3}\right| = 5$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) { 3 } (b) { −5, 5 }

(c) { 3, −3 } (d) { −3 }

(ix) $|-y| = 0$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) { 1 } (b) { −1 }

(c) { 0 } (d) { }

(x) اگر $x > 0$, $y > 0$ اور $x - y < 0$ تو

(a) $x < y$ (b) $x + y < 0$

(c) $x > y$ (d) $y - x < 0$

خلاصہ

- ایک مساوات $ax + b = 0$ جہاں $a,b \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$ یک درجی مساوات کہلاتی ہے۔
- ایسی مساوات جس میں جذری علامت ہو اسے جذری مساوات کہا جاتا ہے۔ اگر جذری مساوات اضافی اصل ہو، تو حل کی تصدیق ضروری ہے۔
- اگر $x \in \mathbb{R}$ تو پھر $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x & < 0 \end{cases}$
- اگر $x,y \in \mathbb{R}$ تو پھر

(i) $|x| \geq 0$ (ii) $|-x| = |x|$ (iii) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(iv) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (v) $|x| = b$ تو پھر $x = b$ یا $x = -b$

- غیر مساواتوں کیلئے ہم $\geq$ ، $\leq$ ، $>$،$<$ استعمال کرتے ہیں۔
- ایک لکیری الجبری اظہار جس میں غیر مساوات کی علامت ہوتی ہے اسے لکیری غیر مساوات یا غیر مساوات کہا جاتا ہے۔

- غیر مساوات کی خاصیتیں

(i) $a < b$ یا $a = b$ یا $a > b, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$ (ثلاثی خاصیت)

(ii) $a > b$ اور $b > c \Rightarrow a > c, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ (خاصیت متعدیت)

(i) $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$ اور $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ (جمعی اور ضربی خاصیت)

یونٹ 7

خطی یالائن (لینئر) گراف اور اس کے مستعملات

LINEAR GRAPH AND THEIR APPLICATION

حاصلاتِ تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- دو حقیقی نمبرز کے جوڑے کی بطور مترتب جوڑا (ordered pair) پہچان کر سکیں۔
- مترتب جوڑوں کی مختلف مثالوں کے ذریعے شناخت کر سکیں۔ مثال کے طور پر ایک مترتب جوڑا (2, 3) ہے جو امتحانی ہال میں موجود ایک نشست کو ظاہر کرتا ہے، جو دوسری قطار اور تیسرے کالم کے چوراہے پر ہے۔
- مستطیلی / کارتیسی پلین بیان کریں جو دو عددی خطوط پر مشتمل ہو اور ایک دوسرے کو مشترک نقطہ 0 پر موجود دائیں زاویہ پر کاٹتی ہوں۔
- مستطیلی پلین میں مشترک نقطہ 0 اور کو آرڈینیٹ ایکسز (بالترتیب افقی اور عمودی ایکسز یا z ایکسز، ایکسز کی شناخت کریں۔
- مترتب جوڑے کی مناسبت سے مستوی میں نقطہ (a,b) کی نشاندہی کریں جس میں:
  - 'a' کو بطور x کو آرڈینیٹ (obcissa)
  - 'b' کو بطور y کو آرڈینیٹ (ordinate)
- معلوم نقاط کے سیٹ کو ملا کر مختلف جیومیٹریکل اشکال (مثلاً، قطعہ خط، مثلث اور مستطیل وغیرہ) بنائیں۔
- دو متغیرات میں خطی مساوات کو مطمئن کرنے والے رقموں کے جوڑوں کا جدول بنائیں۔
- دیے گئے جملوں کا گراف حاصل کرنے کے لیے نقاط کے جوڑے پلاٹ کریں۔
- گراف کھینچنے کے لیے مناسب پیمانے کا انتخاب کریں۔

- گراف بنائیں:
    - قسم کی مساوات کا $y = c.$
    - قسم کی مساوات کا $x = a.$
    - قسم کی مساوات کا $y = mx.$
    - قسم کی مساوات کا $y = mx + c.$
- x اور y کی رقوم کے دیے گئے جدول سے گراف کھینچیں۔
- عملی زندگی سے وابستہ مسائل کو حل کرنے کا شعور حاصل کر سکیں۔
- کنورشن گراف کو دو مقداروں سے متعلق خطی گراف سے تعبیر کریں جو براہ راست تناسب میں ہیں۔
- ایک دن کئی گراف کو پڑھیں تا کہ ایک مقدار دوسری سے ملتی ہو۔
- اس قسم کے تبادلوں کے لیے گراف پڑھیں:
    - میل اور کلومیٹر
    - ایکڑ اور ہیکٹر
    - ڈگری سیلسیئس اور فارن ہائیٹ
    - پاکستانی کرنسی اور دوسری کرنسی وغیرہ
- دو متغیرات میں دو خطی لینیئر مساواتوں کو گراف کی مدد سے حل کرنا۔

7.1 کارتیسی مستوی اور خطی گراف

7.1.1: حقیقی اعداد کے مترتب جوڑے کی شناخت کریں۔

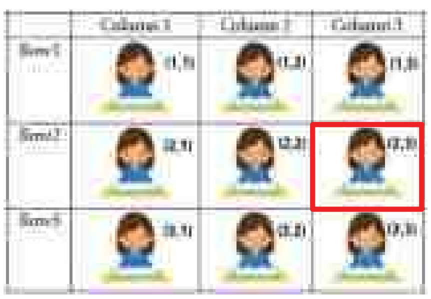
دو حقیقی نمبرز کا ایک جوڑا مترتب جوڑا کہلاتا ہے۔ جس میں اس کے ارکان کو ایک مقررہ خاص ترتیب یا اصول کے مطابق درج کیا گیا ہو۔

7.1.2: مترتب جوڑوں کی مختلف مثالوں کے ذریعے شناخت کریں۔ مثال کے طور پر ایک مترتب جوڑا (2,3) ہے جو امتحانی ہال میں موجود ایک نشست کو ظاہر کرتا ہے۔ جو دوسری قطار اور تیسرے کالم کے چوراہے پر ہے۔

آیئے اپنے گردونواح کی درج ذیل مثالیں دیکھیں۔ ان مثالوں کی وجہ سے ہم قطاروں اور کالموں کے ذریعے کسی شے کی پوزیشن کو پہچان سکتے ہیں یعنی مترتب جوڑے بناتے ہیں۔ مترتب جوڑا کسی شے یا جگہ کی پوزیشن کی نمائندگی کرتا ہے۔

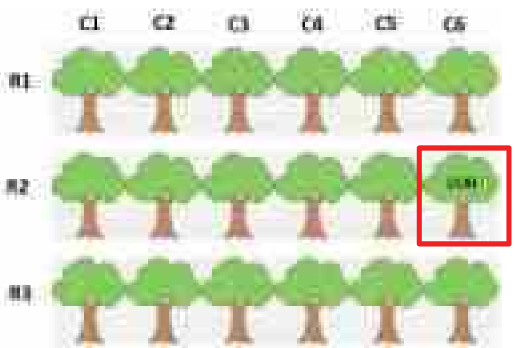
مثال 01

مترتب جوڑا (2,3) امتحانی ہال میں طالب علم کی پوزیشن کو ظاہر کرتا ہے دوسری قطار اور تیسرے کالم کے طور پر اسی طرح ہال میں موجود ہر طالب علم ایک منفرد مترتب جوڑے کے ساتھ ہے۔



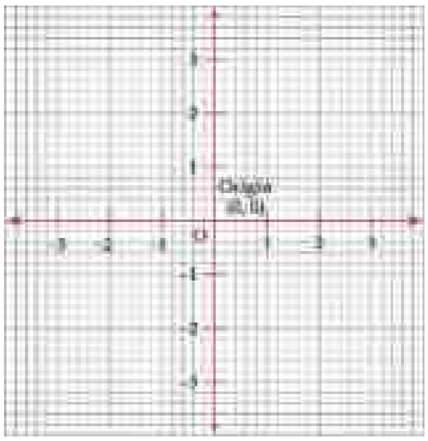
مثال 02

اگر ایک کسان نے برابر فاصلے پر باغ میں درختوں کی منصوبہ بندی کی ہے، تو (2,6) درخت کی نمائندگی کرتا ہے جو باغ میں دوسری قطار اور چھٹے کالم پر واقع ہے۔

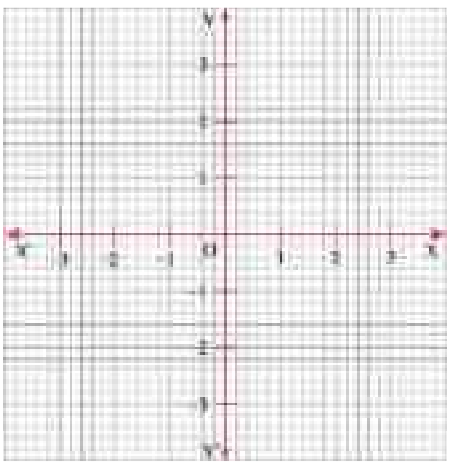


7.1.3: مستطیلی / کارتیسی پلین بیان کریں جو دو عددی خطوط پر مشتمل ہو اور ایک دوسرے کو مشترک نقطہ O پر موجود دائیں زاویہ پر کاٹتی ہوں۔

کارتیسی (مستطیلی) کوآرڈینیٹ سسٹم دو حقیقی عددی خطوط پر مشتمل ہوتا ہے جو مشترک نقطہ O پر موجود دائیں زاویہ پر ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں۔ یہ دو عددی خطوط ہموار سطح کو بیان کرتی ہیں یہ کارتیسی مستوی کہلاتا ہے۔



7.1.4: مستطیل پلین میں مشترک نقطہ O اور کوآرڈینیٹ ایکسز (بالترتیب افقی اور عمدی یا____ ایکسز، ____ ایکسز کی شناخت کریں۔



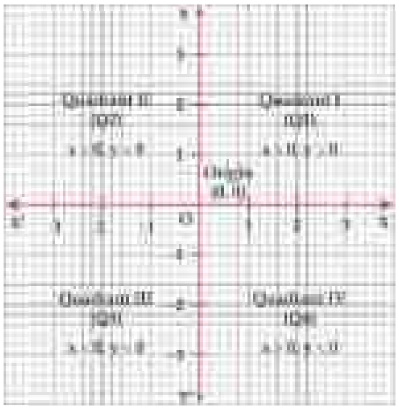
کارتیسی کوآرڈینیٹ سسٹم میں، افقی عددی خط کو x ایکسز اور عمودی عددی خط کو y ایکسز کہا جاتا ہے۔ وہ نقطہ جہاں د ونوں خطوط آپس میں ملتی ہیں اور اصل (origin) کہلاتا ہے اور اسے 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

دی گئی شکل میں افقی خط x ایکسز اور عمودی خط y ایکسز کہلاتا ہے۔ کارتیسی مستوی کا وہ نقطہ جہاں دونوں خطوط ملتے ہیں پلین کا اور اصل (origin) ہے جو کہ 'O' ہے۔

7.1.5: مترتب جوڑے a,b کی مناسبت سے مستوی میں نقطہ کی نشاندہی کریں جس میں

- 'a' کو بطور x کو آرڈینیٹ (abscissa)
- 'b' کو بطور y کو آرڈینیٹ (ordinate)

عام طور پر، کارتیسی مستوی کے کسی بھی نقطہ کی نمائندگی مترتب جوڑے (a,b) کے ذریعے کی جا سکتی ہے۔ جہاں 'a' کو



آرڈینیٹ (abscissa) ہے اور b کو y کو آرڈینیٹ (ordinate) کہتے ہیں۔

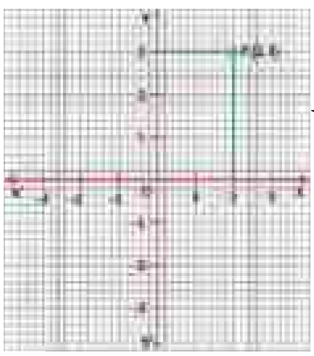
مستوی میں ایک نقطہ تلاش کرنے کے لیے، ہمیں اس کے x کو آرڈینیٹ کا پتہ ہونا چاہیے، جو اس کا y ایکسز اور y کو آرڈینیٹ سے افقی فاصلہ ہے اور x ایکسز سے اس کا عمودی فاصلہ ہے۔

x ایکسز اور y ایکسز کارتیسی مستوی کو چار کو آرڈرنٹس میں تقسیم کرتے ہیں جن کو رومن عدد I,II,III,IV نام دیا گیا ہے۔ کارتیسی مستوی کو xy مستوی بھی کہا جاتا ہے۔

- کو آڈرنیٹ I میں، دونوں x اور y کو آرڈینیٹس مثبت ہوتے ہیں

  x>0 اور y>0

- کو آرڈینیٹ II میں x کو آرڈینیٹ منفی اور y- کو آرڈینیٹ مثبت ہوتا ہے x<0 اور y>0
- کو آرڈینیٹ III میں x اور y- کو آرڈینیٹ منفی ہوتے ہیں x<0 اور y>0
- کو آرڈینیٹ IV میں x- کو آرڈینیٹ مثبت اور y- کو آرڈینیٹ منفی ہوتا ہے x>0 اور y<0
- اور جن (origin) پر x=y=0 ہوتا ہے تو اور یجن کے کو آرڈینیٹس (0,0) ہوتے ہیں۔



کارتیسی مستوی (x,y) میں نقطہ کو گراف میں لگانے کا طریقہ:

آیئے ہم مثالوں کے ذریعے پڑھیں کے کارتیسی مستوی میں نقطہ کو کس طرح پلاٹ کیا جاتا ہے۔

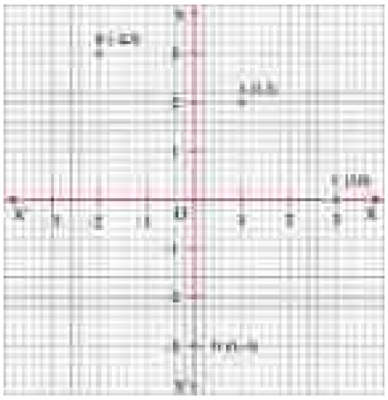
(2,3) مستوی میں نقطہ (x,y) کو پلاٹ کرنے کے لیے اور یجن سے شروع کریں y ایکسز کی دائیں طرف 2 یونٹ پر پہنچیں اور پھر x ایکسز سے 3 یونٹ اوپر کی طرف جائیں جس طرح شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ہم نقطہ x پر پہنچ جائیں گے جو P کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 01 درج ذیل نقاط کا ابیسا اور آرڈینیٹ کا تعین کریں اس میں ربع کا ذکر بھی کریں جس میں نقطہ واقع ہے۔

نقاط کا مقام تلاش کریں۔

(i) A (1, 2)   (ii) B (-2, 3)   (iii) C (3, 0)   (iv) D (0, -3)

حل: پیمانہ (Escale) 5 چھوٹے مربع 1 یونٹ



1) **A (1, 2)**

یہاں ایبسیسا 1 یونٹ اور ڈینیٹ 2 یونٹ ہیں۔ کیونکہ $x > 0$ اور $y > 0$ تو معلوم نقاط ربع (Quadrant) I میں واقع ہیں۔

(ii) **B (–2, 3)**

یہاں ایبسیسا 2 اور اورڈینیٹ 3 ہے۔ $0 < y$ اور $x < 0$ تو دیے گئے نقاط ربع II میں واقع ہیں۔

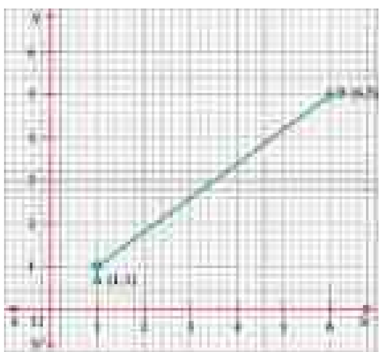
(iii) **C (3, 0)**

یہاں ایبسیسا 3 یونٹ اور اورڈینیٹ 0 یونٹ ہے، اسی لیے نقطہ x ایکسز پر موجود ہے، i.e. اوریجن (origin) کے دائیں طرف۔

(iv) **D(0, -3)**

یہاں، ایبسیسا 0 یونٹ اور اورڈینیٹ 3- یونٹ ہے اسی لیے نقطہ y ایکسز پر موجود ہے۔ i.e. اوریجن کے نیچے۔

7.1.6: مختلف جیومیٹریکل اشکال (قطعہ خط، مثلث اور مستطیل وغیرہ) بنائیں۔



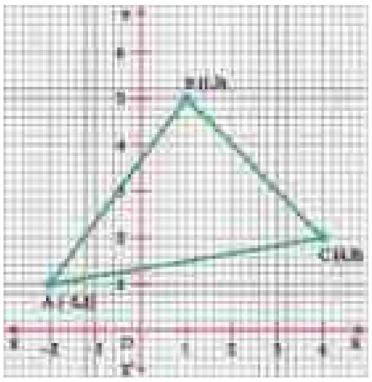
پچھلی جماعتوں میں ہم نے کئی جیومیٹریکل اشکال کے مواد کے بارے میں مطالعہ کیا ہے اور یہ بھی مطالعہ کیا ہے کہ دی گئی معلومات کے مطابق انہیں کس طرح بنایا جائے۔ اب ہم دیے گئے نقاط کا استعمال کرتے ہوئے گراف پیپر پر مختلف جیومیٹریکل اشکال بنائیں گے۔

مثال 01 ایک قطعہ خط AB کھینچیں جس کے اختتامی نقاط A(1,1) اور B(6,5) ہیں۔

طریقہ: پیمانہ: 5 چھوٹے مربع 1 یونٹ۔

پہلے ہم گراف پیپر پر خط کے نقاط ڈھونڈتے ہیں پھر ان کو ملا کر ہمیں قطعہ خط AB حاصل ہوتا ہے جیسا تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

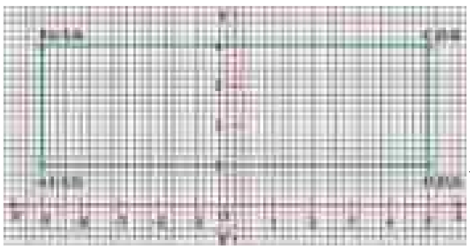
مثال 02 مثلث ABC بنائیں جس کے راس A (-2,1), B(1,5) اور C(4, 2) ہے۔



طریقہ: پیمانہ: 5 چھوٹے مربع = 1 یونٹ

پہلے، ہم نقاط A, B, and C کو گراف پیپر پر پلاٹ کریں گے۔
پھر ہم ΔABC بنانے کے لیے ان کو ملائیں گے جس طرح تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 03 ایک مستطیل ABCD بنائیں جس کے راس A (-5, 1), B (-5, 4), C(5, 4) and D (5, 1) ہیں۔



طریقہ: پیمانہ: 5 چھوٹے مربع = 1 یونٹ۔

نقاط A (-5, 1), B (-5, 4), C(5, 4) and D(5, 1) کو گراف پیپر پر پلاٹ کریں۔

گراف پیپر پر نقاط A to B, B to C, C to D and D to A سے ملائیں جس کا نتیجہ ABCD مستطیل ہے۔

7.1.7: دو متغیرات میں خطی مساوات کو مطمئن کرنے والی رقموں کے جوڑوں کا جدول بنائیں۔

یہ نیچے دی گئی مثالوں کی مدد سے بیان کیا جاسکتا ہے:

مثال 03 فرض کریں $x+y=5$ ایک خطی مساوات ہے بالترتیب دو متغیر x and y میں۔

حل: معلوم ہے کہ $x+y=5$ جس کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے: $y=5-x$

اب جدول تیار کریں x کی رقوم لکھیں اور ان سے متعلقہ y کی رقوم حاصل کریں۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	8	7	6	5	4	3	2	...

مشق 7.1

.1 درج ذیل میں سے x اور y کو آرڈینیٹ کی پہچان کریں۔

i. A(-2, 2) ii. B(5, -1) iii. C(4, 0)
iv. D(-5, -6) v. E(3, 4) vi. F($-\sqrt{8}$, $\sqrt{8}$)

.2 ربع (Quadrant) کی نشاندہی کریں جس میں درج ذیل نقاط موجود ہیں۔

i. A(2, -1) ii. B(-3, 3) iii. C($2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$)
iv. D(-2, -4) v. E(5, 4) vi. F($\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$)

.3 درج ذیل نقاط A, B, C and D کو xy مستوی میں لگائیں۔

i. A(2, 1), B(3, 2), C(-3, 4), D(-4, -5)
ii. A(2, 0), B(0, 2), C(3, -3), D(-3, 3)
iii. A(0, 0), B(-3, -3), C(5, -6), D(-6, 5)

.4 نقاط AB کو ملا کر قطعہ خط B (-6, 8) اور A(4, 6) کھینچیں۔

.5 نقاط ABC کو ملا کر مثلث C(3,-2) اور A(-1,4), B(-3,-6) کھینچیں۔

.6 نقاط ABCD ملا کر مستطیل D(7, 5) اور A(0, -1), B(0, 5), C(7, -1) کھینچیں۔

.7 نقاط OABC ملا کر مربع C(0, 5) اور O(0, 0), A(5, 0), B(5, 5) بنائیں۔

.8 نقاط OABC ملا کر متوازی الاضلاع C (6, 4) اور O(0, 0), A(2, 4), B(5, 0) بنائیں۔

.9 درج ذیل خطی مساوات کا x and y کی چند رقوم کا جدول بنائیں۔

i. $x+y-2=0$ ii. $2x-y-2=4$

iii. $\frac{1}{2}(x+2y)-6=0$ iv. $\frac{2}{3}(x-2y)=-2$

7.1.8: دیے گئے جملوں کا گراف حاصل کرنے کے لیے نقاط کے جوڑے پلاٹ کریں۔

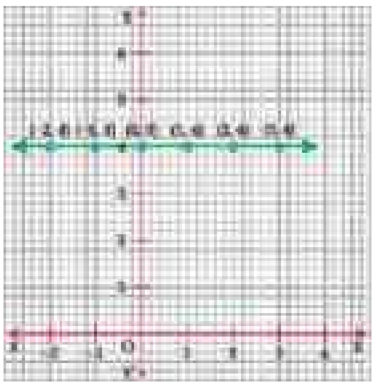
فرض کریں کہ خطی مساوات $y=2x$ دو متغیرات پر مشتمل ہے۔ یہاں x کو آزاد متغیر (independent veriable) اور y کو منحصر متغیر (dependent variable) کہا جاتا ہے۔ کیونکہ y کی رقم x کی رقم پر منحصر ہے۔ دی گئی مساوات کا گراف بنانے کے لیے ہم x اور y کے لیے رقوم کا جدول بناتے ہیں، اور پھر ان مترتب جوڑوں کو کو آرڈینیٹ مستوی پر پلاٹ کرتے ہیں۔ ایک خط کا تعین کرنے کے لیے دو نقاط کافی ہیں۔ تاہم ممکنہ غلطیوں سے بچنے کے لیے دو

7.1.10: گراف بنائیں۔

* $y=c$ قسم کی مساوات کا۔
* $x=a$ قسم کی مساوات کا۔
* $y=mx$ قسم کی مساوات کا۔
* $y=mx+c$ قسم کی مساوات کا۔

7.1.10(i):

$y=4$ قسم کی مساوات کا گراف بنائیں۔



مثال 01 کا گراف بنائیں۔پیمانہ 5 چھوٹے مربع 1 یونٹ

حل: گراف بنانے کے لیے جدول بنائیں۔

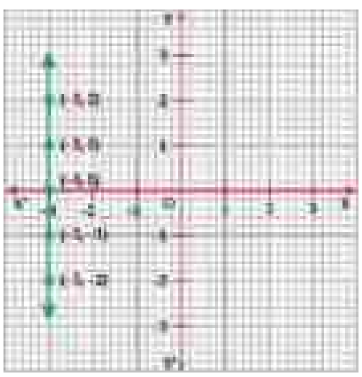
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	4	4	4	4	4	4	4	...

$y=4$ کا گراف تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

نوٹ:
$y = c$ کا گراف x-axis ایکسز کے متوازی ہے۔

7.1.10(ii):

مثال 01 $x=-3$ قسم کی مساوات کا گراف بنائیں،پیمانہ 5 چھوٹے مربع -1 یونٹ



طریقہ: گراف بنانے کے لیے جدول بنائیں۔

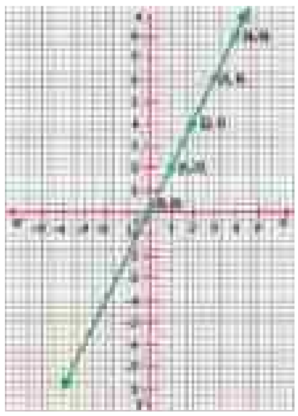
x	-3	-3	-3	-3	-3	...
y	-2	-1	0	1	2	...

مساوات کا گراف تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

نوٹ:
$x = a$ کا گراف y-axis ایکسز کے متوازی ہوتا ہے۔

x	0	1	2	3	4	...
y	0	2	4	6	8	...

مسلسل مترتب جوڑے (x,y) کو گراف میں جمع کرتے ہوئے جہاں - y کی رقم - x کی رقم سے دوگنا ہے۔ پھر ہم نقاط کے ذریعے ایک کھینچتے ہے تاکہ خط پر موجود تمام نقاط کو دکھایا جاسکے۔ گراف کے ہر سرے پر موجود تیر اشارہ کرتے ہیں کہ خط دونوں سمتوں میں لاتناہی جاری ہے۔ نتیجہ خیز گراف اس طرح نظر آئے گا جیسا کہ دی گئی تصویر میں دکھایا گیا ہے۔



7.1.9: گراف کھینچنے کے لیے مناسب پیمانے کا انتخاب کریں۔

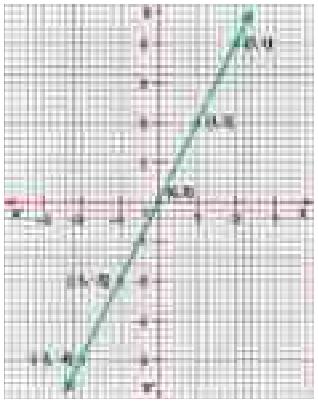
پیمانے کو اس طرح منتخب کیا جانا چاہیے کہ ڈیٹا(data) کی منصوبہ بندی کرنا آسان ہو اور پڑھنے میں آسانی ہو۔ گرڈ یونٹ کے لیے عددی رقم کا تعین کرنے کے لیے جو ہر متغیر کی حد کے لیے بہترین ہے۔

مساوات کا گراف کھینچنے کے لیے ہم ایک پیمانہ منتخب کرتے ہیں جیسے ایک چھوٹا مربع کی لمبائی 1 یونٹ کی نمائندگی کرتی ہے یا دو چھوٹے مربع 1 یونٹ کی نمائندگی کرتے ہیں وغیرہ۔ یہ کاغذ کے سائز کو مد نظر رکھتے ہوئے منتخب کیا جاتا ہے۔ بعض اوقات x and y دونوں کو آڈرینٹ کے لیے ایک ہی پیمانہ استعمال کیا جاتا ہے اور بعض اوقات کو آرڈینیٹ کی رقم کو مد نظر رکھتے ہوئے x and y کو آرڈینیٹ کے لیے مختلف پیمانہ کا استعمال کیا جاتا ہے۔

7.1.10:(iii) $y=mx$ قسم کی مساوات کا گراف بنائیں۔

مساوات $y=mx,$ کی رقم (یا اس کا y کوآرڈینیٹ) $x,$ کا ایک سے زیادہ اور کی رقم ہے۔ جہاں مسلسل حقیقی سے عدد ہے۔

مثال 01 اگر $y=2x$ کی رقم معلوم کریں اور اس کا گراف بنائیں۔



حل: پیمانہ: 5 چھوٹے مربع-1 یونٹ

گراف بنانے کے لیے جدول بنائیں۔

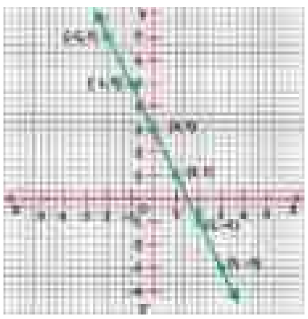
x	-2	-1	0	1	2	...
y	-4	-2	0	2	4	...

نوٹ: $y = mx$ کا گراف ہمیشہ مشترکہ نقطہ (origin) سے گزرتا کرتا ہے۔

7.1.10:(iv) $y=mx+c,$ میں جہاں m اور c کوئی حقیقی اعداد ہیں۔

مثال 01 مساوات $y = -2x+3$ کا گراف بنائیں پیمانہ: 3 چھوٹے مربع-1 یونٹ

گراف بنانے کے لیے جدول بنائیں۔



x	-2	-1	0	1	2	3	...
y	7	5	3	1	-1	-3	...

7.1.11: دیے گئے (مجرد) رقموں کے جدول سے گراف کھینچیں۔

(مجرد) رقوم کے دیے گئے جدول سے گراف کھینچنے کے لیے، x اور y کی رقوم کو نقاط کی شکل جوڑا جاتا ہے جسے پھر گراف پیپر پر پلاٹ کیا جاتا ہے۔

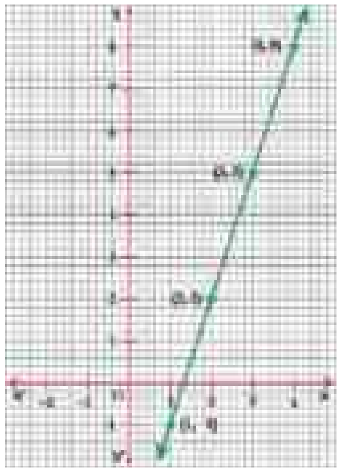
نوٹ: $y = mx + c$ کا گراف ہمیشہ y-axis پر $y=c$ ایکسز کو کاٹتا ہے۔

مثال 01 نیچے جدول میں دیے گئے نقاط کی رقوم سے گراف بنائیں"

x	1	2	3	4	...
y	-1	2	5	8	...

حل: دیے گئے جدول سے، ہمارے پاس ہے، A(1, -1), B(2,2), C(3, 5) and D(4,8) تو ہم گراف پیپر پر گراف پلاٹ کرتے ہیں۔

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع-1 یونٹ

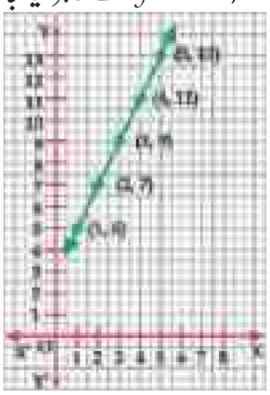


7.1.12: لاگو حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کریں۔

خطی مساوات کو حقیقی زندگی کے متعدد مسائل کے نمونے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے، جیسے کہ آپ ایک وقت میں کتنا پیسہ کماتے ہیں، یا ایک سائیکل سوار جو فاصلہ طے کرے گا جس میں پیڈلنگ کی مستحکم شرح دی جائے گی۔ ان رشتوں کو ایک کو آرڈینیٹ مستوی پر گراف کرنے سے اکثر آپ کو مسئلہ اور ان کے حل کے بارے میں سوچنے میں مدد مل سکتی ہے۔

مثال وزن (y) کلو میں اور ایک شخص کی عمر (x) سالوں میں جو اس مساوات $y=2x+3$, سے ظاہر کیا جا رہا ہے، مساوات کا عمر وزن گراف کھینچیں۔

x(age)	1	2	3	4	5	...
y(weight)	5	7	9	11	13	...



مشق 7.2

1. نیچے دی گئی مساوات کا جدول بنائیں جو رقوم کے جوڑے کے مطمئن کرے: $x + y = 6$

2. مناسب پیمانے کا استعمال کرتے ہو، نیچے دیے گئے جدول سے گراف بنائیں۔

x	0	-1	4	-4
y	2	4	5	-5

3. گراف پلاٹ کریں۔

i. $y=3$	ii. $x=3$	iii. $y=0$
iv. $y=2x+y$	v. $x=3.5$	vi. $-y=2x$

4. نیچے دیے گئے جدول میں نامعلوم کو آرڈینیٹس تلاش کریں۔

S.No	مساوات	x- کو آرڈینیٹ	y- کو آرڈینیٹ
(i)	$y=\frac{1}{2}x$		0
		4	
(ii)	$x=\frac{2}{3}y$	1	
			$\frac{3}{2}$
(iii)	$2x + 4y = 8$	0	?
			$\frac{1}{4}$
(iv)	$2x + y = 6$	1	
			0
(v)	$x - y = 2$		0
		1	?
(vi)	$x - 3y = 6$	3	?
			-1

5. وزن ___ کلو میں اور کسی شخص کی عمر ___ سالوں میں جو مساوات ______ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج ذیل جدول سے عمر و وزن گراف کھینچیں۔

6. عائشہ مسلسل 20 کلو میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے دوپہیا گاڑی چلا سکتی ہے اس صورت کے لیے فاصلہ وقت کا گراف بنائیں، خطی گراف کے ذریعے حساب لگائیں:

(ا) عائشہ نے 100 کلو میٹر کی سواری میں جو وقت لیا۔

(ب) کُل فاصلہ جو عائشہ نے 3 گھنٹوں میں طے کیا۔

7.2 کنورشن گراف

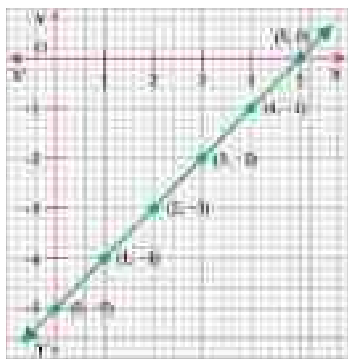
7.2.1: کنورشن گراف کو دو مقداروں سے متعلق خطی گراف سے تعبیر کریں جو براہ راست تناسب میں ہیں۔

یہاں ہم ایک کنورشن گراف لیں گے جو دو مقداروں سے متعلق خطی گراف سے تعبیر ہے اور براہ راست تناسب میں ہے۔

ہم مترتب جوڑوں کا مظاہر کرتے ہیں جو مساوات $y = x - 5$, کے گراف پر واقع ہیں جو جدول کے نیچے دی گئی حسابی اقدار ہیں۔

x	0	1	2	3	4	5
y	-5	-4	-3	-2	-1	0
(x, y)	(0, -5)	(1,-4)	(2, -3)	(3, -2)	(4, -1)	(5, 0)

دی گئی خطی مساوات کے گراف پر نقاط تلاش کریں جس میں x کو آرڈینیٹ کی رقم میں ہر یونٹ کی تبدیلی کے لئے y کو آرڈینیٹ کی رقم میں متناسب تدیلی ہوتی ہے۔



7.2.2: ایک دی گئی گراف کو پڑھیں تاکہ ایک مقدار دوسری سے ملتی ہو۔

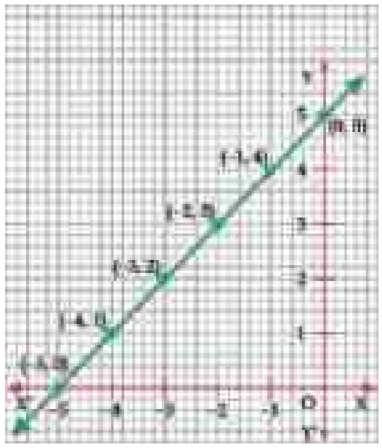
خطی مساوات $y = x - 5$ لیں۔

x کی دی گئی رقم سے ہم y کی متعلقہ رقم پڑھ سکتے ہیں $y = x - 5$ کی مدد سے, x کی دی گئی رقم سے ہ y کی متعلقہ رقم پڑھ سکتے ہیں،

مساوات $y = x - 5$ کو مساوات $x = y + 5$ میں تبدیل کرکے اور متعلقہ کنورشن گراف بناکر۔ کنورشن گراف میں ہم x y کی اصطلاح میں ظاہر کرتے ہیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے: $x = y + 5$

y	-5	-4	-3	-2	-1	0
x	0	1	2	3	4	5
(y, x)	(-5, 0)	(-4, 1)	(-3, 2)	(-2, 3)	(-1, 4)	(0, 5)

x کے حوالے سے y کا تبادلوں کا گراف پیپر پر کھینچا گیا ہے۔



7.2.3: اس قسم کے تبادلوں کے لیے گراف پڑھیں۔

میل اور کلومیٹر

ایکڑ اور ہیکٹر

ڈگری سیلیسئس اور فارن ہائیٹ

پاکستانی کرنسی اور دوسری کرنسی وغیرہ۔

اگر دونوں مقداریں متعلقہ ہیں یا تو بڑھ رہی ہیں یا کم ہو رہی ہیں، تو تعلق کا گراف سیدھی خط ہو گا جس میں دونوں مقداروں کی سطح کو آرڈینیٹ ایکسز سے ظاہر ہوتی ہے۔

(i) میل اور کلومیٹر کے تبادلوں کے لیے گراف پڑھیں۔

آیئے میل اور کلومیٹر کی قسم کے گراف پر بات کریں، دونوں فاصلہ کے یونٹ ہیں، اگر میل میں فاصلہ x محور (axis) کے ساتھ اور کلومیٹر میں فاصلہ y محور کے ساتھ ظاہر ہوتا ہے۔ آیئے درج ذیل مثالیں دیکھیں۔

مثال 03 میل اور کلومیٹر کے درمیان درج ذیل تبادلوں کے گراف کو تقریباً تبدیل کرنے کے لیے پڑھیں تبدیل کریں:

(i) 2 میل کو کلومیٹر میں

(ii) 5 میل کو کلومیٹر میں

(iii) 3 کلومیٹر کو میل میں

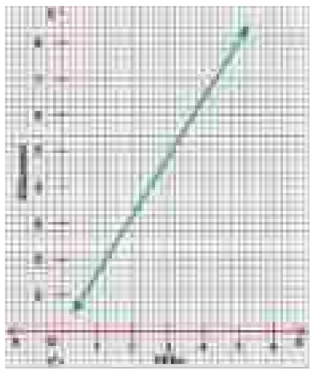
(iv) 7 کلومیٹر کو میل میں

دیے گئے پیمانے کے استعمال سے۔

میل اور کلومیٹر کے درمیان تبادلوں کا گراف۔

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع – 1 میل x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع – 1 کلومیٹر y محور کے ساتھ۔



حل:

(i) 2 میل کو کلومیٹر میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 3.20 کلومیٹر____ 2 میل۔

(ii) 5 میل کو کلومیٹر میں۔

اوپر دیئے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 8 کلومیٹر – 5 میل

(iii) 3 کلومیٹر کو میل میں۔

اوپر دیئے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 1.8 میل---- 3 کلومیٹر۔

(iv) 7 کلومیٹر کو میل میں۔

اوپر دیئے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 4.20 میل – 7 کلومیٹر

(ii) ایکڑ اور ہیکٹر کے تبادلوں کے لیے گراف پڑھیں۔

آیئے ہم ہیکٹرس اور ایکٹر کی سکل کے گراف پر تبادلہ خیال کریں، دونوں زمین کے رقبے کی اکائی پر اگر ہیکٹرس میں فاصلہ ___ محور کے ساتھ اور ایکٹر میں فاصلہ ___ محور کے ساتھ اشارہ کیا گیا ہے۔ آیئے درج ذیل مثالیں دیکھیں۔

مثال: ایکڑ اور ہیکٹرس کے درمیان درج ذیل تبادلوں کا گراف پڑھیں۔ تبدیل کریں:

(i) 2 ہیکٹرس کو ایکڑ میں۔

(ii) 6 ہیکٹرس کو ایکڑ میں

(iii) 10 ایکڑ کو ہیکٹرس میں

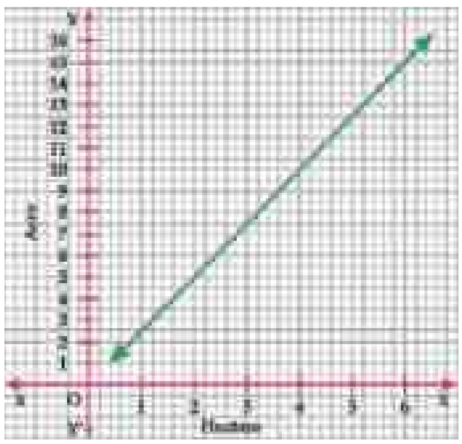
(iv) 8 ایکڑ کو ہیکٹرس میں۔

دیے گئے پیمانے کے استعمال سے

ایکڑ اور ہیکٹرس کے درمیان تبادلوں کا گراف۔

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع - 1 ہیکٹرس x محور کے ساتھ۔

2 چھوٹے مربع - 1 ایکڑ y محور کے ساتھ۔



حل:

(i) 2 ہیکٹرس کو ایکڑ میں۔

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 5 ایکڑ – 2 ہیکٹرس

(ii) 6 ہیکٹرس کو ایکڑ میں۔

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 15 ایکڑ – 6 ہیکٹرس

(iii) 10 ایکڑ کو ہیکٹرس میں۔

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 4 ہیکٹرس - 10 ایکڑ۔

(iv) 8 ایکڑ کو ہیکٹرس میں:

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 3.20 ہیکٹرس – 8 ایکڑ۔

(iii) ڈگری سیلسیئس اور ڈگری فارن ہائیٹ کا تبادلہ کا گراف پڑھیں۔

آیئے سیلسیئس اور فارن ہائیٹ کی شکل کے گراف پر بات کریں، دونوں درجہ حرارت کے اکائی ہیں اگر سیلسیئس میں درجہ حرارت x محور کے ساتھ اور فارن ہائیٹ میں درجہ حرارت y محور کی ساتھ ظاہر ہوتا ہے۔ آیئے درج ذیل مثالیں دیکھیں۔

مثال سیلسیئس اور فارن ہائیٹ کے درمیان درج ذیل تبادلوں کا گراف پڑھیں اور تبدیل کریں:

(i) 1 سیلسیئس کو فارن ہائیٹ میں

(ii) 3 سیلسیئس کو فارن ہائیٹ میں

(iii) 36 فارن ہائیٹ کو سیلسیئس میں

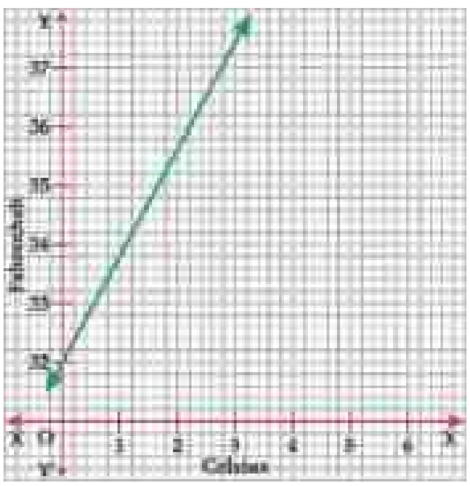
(iv) 37 فارن ہائیٹ کو سیلسیئس میں

دیے گئے پیانے کی استعمال سے۔

سیلسیئس اور فارن ہائیٹ کے درمیان تبادلوں کا گراف

پیانہ: 5 چھوٹے مربع – 1 سیلسیئس x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع – 1 سیلسیئس y محور کے ساتھ۔



حل:

(i) 1 سیلسیئس کو فارن ہائیٹ میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 33.8 فارن ائیٹ 1^{o} Celsius $\cong 33.8^{o}$ سیلسیئس

(ii) 3 سیلیسئس کو فارن ہائیٹ میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دے سکتے ہیں کہ:37.4 فارن ہائیٹ = ۳ سیلیسئس

(iii) 36 فارن ہائیٹ کو سیلیسئس میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ 2.2 سیلیسئس = 36 فارن ہائیٹ

(iv) 37 فارن ہائیٹ کو سیلیسئس میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ:2.8 سیلیسئس = 37 فارن ہائیٹ

(iv) کرنسی کا تبادلوں کا گراف پڑھیں:

مثال 1: ڈالر ($) اور پاکستانی روپے (Rs) کے درمیان درج ذیل تبادلوں کا گراف پڑھیں اور تبدیل کریں:

(i) $2 کو روپے میں

(ii) $5 کو روپے میں

(iii) 360 روپے کو ($) میں

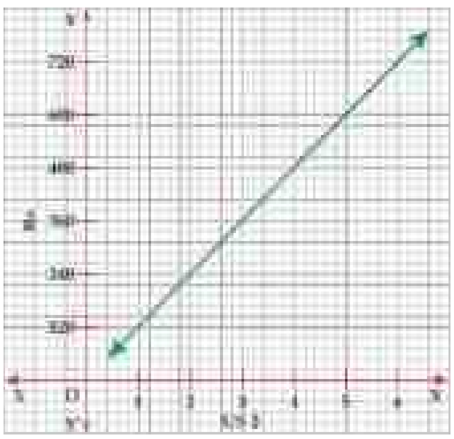
(iv) 720 روپے کو ($) میں

دیے گئے پیمانے کے استعمال سے۔

ڈالر اور پاکستانے روپے کے درمیان تبادلوں کا گراف

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع - x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع 120 روپے y محور کے ساتھ



حل:

(i) $2 کو روپے میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: $2 = 240 روپے

(ii) $5 کو روپے میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیک سکتے ہیں کہ: $\$5 = 600$ روپے

(iii) 360 روپے کو $ میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھن کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 360 روپے $= \$3$

(iv) 720 روپے کو $ میں

اوپر دیے گئے گراف کو پڑھ کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ: 720 روپے $= \$6$

7.3 دو متغیر میں مساوات کا گرافک حل:

7.3.1: دو متغیرات میں دو خطی لینیئر مساواتوں کو گراف کی مدد سے حل کرنا۔

ہم نے پہلے ہی دو متغیرات کے ساتھ دو خطی مساوات کی کھوج کا مطالعہ کیا ہے۔ اب اس سیکشن میں دو خطی مساوات کا حل دو متغیرات میں گرافک طور پر تلاش کریں گے۔ ان دو سیدھی خطوں کے درمیان کا نقطہ ان مساوات کا حل ہے۔

مثال 03 دی گئی مساوات کے لیے گرافک طور پر حل سیٹ تلاش کریں۔ $x + y = 3$ and $x - y = 5$.

حل: دی گئی مساوات مندرجہ ذیل ہیں:

$x+y = 3 \ldots \quad (1)$

and $x-y = 5 \ldots \quad (2)$

مساوات (1) اور (2) سے، ہم ان کو y کے طور پر لکھ سکتے ہیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے:

$y = 3-x \ldots \quad (3)$

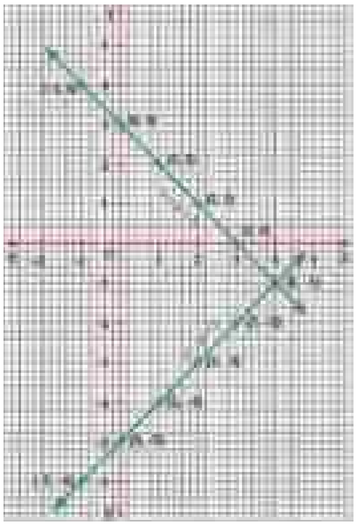
and $y = x-5 \ldots \quad (4)$

اب ہر خطی مساوات کے لیے جدول بنائیں، مساوات (3) کے لیے جدول مندرجہ ذیل ہے:

x	-1	0	1	2	3	4	...
y	4	3	2	1	0	-1	...

مساوات (4) کے لیے جدول مندرجہ ذیل ہے:

x	-1	0	1	2	3	4	...
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	...



دونوں جدول کے نقاط کو استعمال کرتے ہوئے ایک سیدھے خط کھینچیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ دی گئی مساوات کا گراف سیدھی خط 4اور

l_1 and l_2 ہے، جو نقطہ ,(4, -1) پر ملتی ہے۔

مثال کے طور پر l_2 intersect l_1 کو نقطہ (4,-1) پر کاٹتی ہے۔

لہٰذا حل سیٹ.{(4,-1)} ہے۔

مثال 02 $y=2x+4$ and $y=2x-2$

دی گئی مساوات کا گراف طور پر حل سیٹ لاش کریں

حل: دی گئی مساوات درج ذیل ہیں:

$$y = 2x + 4 \quad \ldots \quad (1)$$
$$\text{and} \quad y = 2x - 2 \quad \ldots \quad (2)$$

اب ہر خطی مساوات کے لیے الگ سیٹ بنائیں۔

مساوات (i) کے لیے جدول درج ذیل ہے:

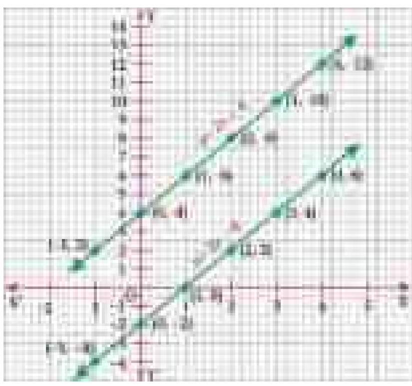
x	-1	0	1	2	3	4
y	2	4	6	8	10	12

مساوات (ii) کے لیے جدول درج ذیل ہے:

x	-1	0	1	2	3	4
y	-4	-2	0	2	4	6

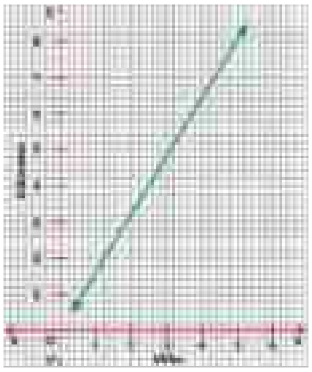
اب ایک ہی گراف پر دونوں مساوات کے لیے ان نقاط کو تلاش کریں اور پھر دونوں مساوا کے نقاط کو جوڑ کر دو خطوط بنائیں"

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ سیدھی خطوط ان مساوات سے حاصل ہوتی ہیں جن کا کوئی مشترکہ نقطہ نہیں ہوتا۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ خطوط کسی بھی مقام پر آپس میں نہیں ملتی ہیں۔ لہٰذا اس کا حل سیٹ خالی ہے۔



اس طرح، حل سیٹ ______ ہے۔

مشق 7.3



1. میل اور کلومیٹر کے درمیان تبادلوں کا گراف پڑھیں اور تبدیل کریں۔

(i) 1 میل کو کلومیٹر میں (ii) 2 کلومیٹر کو میل میں

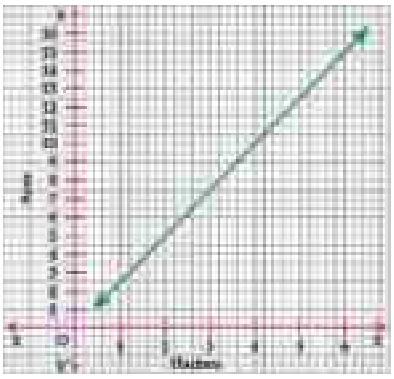
(iii) 3 میل کو کلومیٹر میں (iv) 8 کلومیٹر کو میل میں

دیے گئے پیمانے کے استعمال سے۔

میل اور کلومیٹر کے درمیان تبادلوں کا گراف:

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع 1 میل x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع 1 کلومیٹر y محور کے ساتھ



2. دیے گئے ہیکٹرس اور ایکڑ کے درمیان تبادلوں کا گراف پڑھیں اور تبدیل کریں۔

(i) 2 ہیکٹرس کو ایکڑ میں (ii) 5 ایکڑ کو ہیکٹرس میں

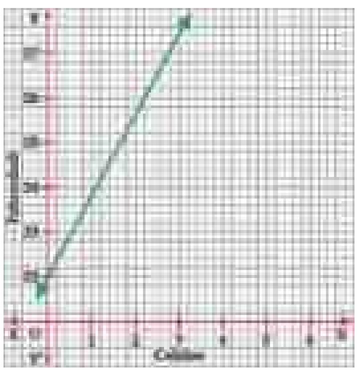
(iii) 5 ہیکٹرس کو ایکڑ میں (iv) 15 ایکڑ کو ہیکٹرس میں

دیے گئے پیمانے کے استعمال سے۔

ہیکٹرس اور ایکڑ کے درمیان تبادلوں کا گراف

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع - 1 ہیکٹرس x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع - 1 ایکڑ y محور کے ساتھ۔



3. سیلسیئس اور فارن ہائیٹ کے درمیان تبادلوں کا گراف پڑھیں اور تبدیل کریں:

(i) 2 سیلسیئس کو فارن ہائیٹ میں (ii) 32 فارن ہائیٹ کو سیلسیئس میں

(iii) 1.80 سیلسیئس کو فارن ہائیٹ میں (iv) 36.4 فارن ہائیٹ کو سیلسیئس میں

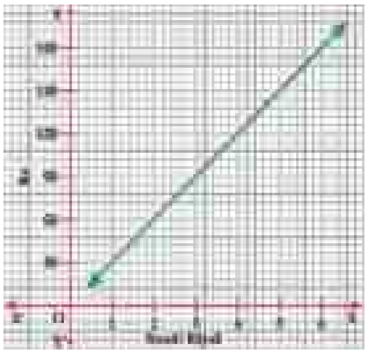
دیے گئے پیمانہ کے استعمال سے۔

سیلسیئس اور فارن ہائیٹ کے درمیان تبادلوں کا گراف:

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع - 1 سیلسیئس x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع - 1 فارن ہائیٹ y محور کے ساتھ۔

4. دیے گئے سعودی ریال اور پاکستانی روپے (Rs) کے درمیان تبادلوں کا گراف پڑھیں اور تبدیل کریں۔



(i) 3 سعودی ریال کے روپے میں

(ii) 5.2 سعودی ریال کو روپے میں۔

(iii) 150 روپے کو سعودی ریال میں

(iv) 78 روپے کو سعودی ریال میں۔

دیے گئے پیمانے کے استعمال سے۔

سعودی ریال اور پاکستانی روپے (Rs) کے درمیان تبادلوں کا گراف:

پیمانہ: 5 چھوٹے مربع – 1 سعودی ریال x محور کے ساتھ

5 چھوٹے مربع – 30 روپے y محور کے ساتھ۔

5. گرافکیل طریقہ سے مندرجہ ذیل مساوات کو حل کریں

i. $3x - 11 = y;\ x-3y=9$

ii. $x + y = 4;\ 2x - 1=5y$

iii. $2x = y + 5;\ x=2y+1$

iv. $y=3x - 5;\ x+y=11$

v. $2x + y = 3;\ x - y=0$

vi. $2x+2=y;\ y=x - 1$

vii. $5 = x + 4y;\ 2x+3y=0$

viii. $3x = 5y-2;\ 3x+5y=8$

ix. $\frac{x+2}{5}+y= 6;\ y=2x - 12$

x. $3x -2y = 13;\ 2x+3y=13$

Review Exercise 7

.1 صحیح اور غلط سوالات۔

درج ذیل جملوں کو دھیان سے پڑھیں اور 'د' یا 'غ' جو بھی ہو اس پر دائرہ لگائیں۔

(i) کارتیسی مستوی کو xy مستوی بھی کہا جاتا ہے۔ (د/غ)

(ii) دوسرے ربع میں x and y دونوں مثبت ہوتے ہیں۔ (د/غ)

(iii) نقطہ $(1, -2)$ پہلے ربع میں موجود ہوتا ہے۔ (د/غ)

(iv) $(-3, -4)$ چوتھے ربع یمں واقع ہوتا ہے۔ (د/غ)

.2 درج ذیل میں سے درست جواب پر () لگائیں:

(i) نقطہ $(-3, -4)$ واقع ہے ______ میں۔

(ا) پہلا ربع (ب) دوسرا ربع (ج) تیسرا ربع (د) چوتھا ربع۔

(ii) دو کوآرڈینیٹ محور ایک دوسی کو زاویہ ______ پر کاٹتے ہیں۔

(ا) 45 (ب) 90 (ج) 180 (د) 270

(iii) خط $y = 4$ متوازی ہے ______ کے:

(ا) x محور (ب) محور (ج) دونوں محور (د) ان میں سے کوئی نہیں۔

(iv) خط $x=-5$ متوازی ہے ______ کے

(ا) x محور (ب) y محور (ج) دونوں محور (د) کوئی نہیں۔

(v) خط $x=-5$ محور پر نقاط ہیں:

(ا) $(-5, 5)$ (ب) $(0, -5)$ (ج) $(-5, 0)$ (د) $(5, 0)$

(vi) خط $x=2$ and $x=5$ کا حل سیٹ ہے:

(ا) $\{(2, 5)\}$ (ب) $\{2, 5\}$ (ج) $\{(0, 5)\}$ (د) $\{\ \}$

(vii) کوآرڈینیٹ محور باہمی طور پر ہیں:

(ا) متوازی الاضلاع (ب) متوازی (ج) 30 پر کاٹنا (د) 45 پر کاٹنا۔

خلاصہ

- مترتب جوڑے کار تیسی مستوی میں نقاط کی پوزیشن کو ظاہر کرتا ہے۔
- 2 جہتی کار تیسی کو آرڈینیٹ سسٹم سے مراد دو متوازی الاضلاع خطوط ہیں۔ مثال کے طور پر __x__ محور اور __y__ محور۔ دونوں محور ایک دوسرے کو ایک خاص نقطہ پر کاٹتے ہیں .i.e اور یجن (origin) (0,0) کہلاتا ہے۔
- مستوی محور سے چار ربع میں تقسیم ہوتا ہے۔
- کار تیسی مستوی کو xy مستوی بھی کہاجاتا ہے۔
- ربع I میں دونوں x y کو آرڈینیٹ مھبت ہیں. $x > 0$ $y > 0$
- ربع II میں x کو آرڈینیٹ (abscissa) منفی اور y کو آرڈینیٹ (ordinate) مثبت ہوتا ہے . $x < 0$ and $y > 0$
- ربع III میں دونوں xy کو آرڈینیٹ منفی ہوتے ہیں. $x<0$ and $y<0$
- ربع IV میں x کو آرڈینیٹ مثبت اور y کو آرڈینیٹ منفی ہوتا ہے . $x > 0$ and $y < 0$
- مشترکہ نقطہ (origin) پر $x = y = 0$ تو مشترک نقطہ (origin) کے نقطہ (0،0) ہوتا ہے۔
- عام طپر پر، مترتب جوڑے () کی مناسبت سے مستوی میں نقطہ کی نشاندہی کریں جس میں (a, b) کو آرڈینیٹ (absisssa) اور x کو آرڈینیٹ (ordinate) ہے
- __$x = a$__ کا گراف __y__ محور کے متوازی ے۔
- __$y = c$__ کا گراف __x__ کے محور کے متوازی ہے۔
- __$y = mx$__ کا گراف ہمیشہ مشتک نقط (origin) سے گذرتا ہے۔
- $y = mx + c$ کا گراف y پر $y = c$. محور کو کاٹتا ہے۔

یونٹ 8

دو درجی مساوات

QUADRATIC EQUATION

حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- ایک متغیر میں دو درجی مساوات کو حل کرنا بذریعہ
  - تجزی
  - تکمیل مربع
- بذریعہ تکمیل مربع، دو درجی فارمولا اخذ کرنا۔
- دو درجی فارمولا سے دو درجی مساوات کو حل کرنا۔
- $ax^4 + bx^2 + c = 0$ قسم کی مساواتوں کو دو درجی مساواتوں میں تبدیل کر کے حل کرنا۔
- $ap(x) + \frac{c}{p(x)} = b,$ قسم کی مساواتوں کو حل کریں جہاں a, b and c ناطق اعداد ہیں۔
- $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0,$ قسم کی معکوس مساواتوں کو حل کرنا جہاں a, b and c ناطق اعداد ہیں۔
- قوت نمائی مساواتوں جن کے متغیر قوت نماؤں میں ہوں، حل کرنا۔
- $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = k,$ قسم کی مساواتوں کو جبکہ $k \neq 0.$ $a + b = c + d$ حل کرنا۔
- اس قسم کی مساواتوں کو حل کرنا۔
  - $\sqrt{(ax + b)} = cx + d.$
  - $\sqrt{(x + a)} + \sqrt{(x + b)} = \sqrt{(x + c)}$
  - $\sqrt{(x^2 + px + m)} + \sqrt{(x^2 + px + n)} = q$

8.1 دو درجی مساوات اور ان کا حل

8.1.1: واضح کریں، پھر دو درجی مساوات کو اس کی معیاری فارم (شکل) میں بیان کریں۔

ایک کثیر رقمی مساوات جس کی ڈگری 2 ہو دو درجی مساوات کہلاتی ہے۔

$ax^2+bx+c=0,$ دو درجی مساوات کی معیاری فارم (شکل) ہے، جہاں $a \neq 0$ and $a, b, c \in \mathbb{R}$. حقیقی اعداد ہیں۔ یہاں

a، x^2 کا عددی سر، b، x کا عددی سر اور c مستقل مقدار ہے۔ $ax^2+bx+c=0,$ میں، اگر $a=0$

تو یہ یک درجی مساوات $bx+c=0$ میں تبدیل ہو جاتی ہے اور اگر $b=0$ پھر یہ خالص (pure) دو درجی مساوات $ax^2+c=0$ میں تبدیل ہو جاتی ہے

درج ذیل دو درجی مساوات کی مثالیں ہیں۔

(i) $4x^2+4x+1=0,$ (دو درجی مساوات معیاری شکل میں)

(ii) $x^2-4=0,$ (خالص دو درجی مساوات)

8.1.2: ایک متغیر میں دو درجی مساوات کو حل کریں بذریعہ

- تجزی
- تکمیل مربع

یہاں ہم دو طریقوں پر غور کرتے ہیں، دو درجی مساوات کے حل کے لیے۔

(1) طریقہ تجزی (2) طریقہ تکمیل مربع

(a) طریقہ تجزی:

مثال 02 (i) $x^2+2x-15=0$ (ii) $2x^2-5x=12$ کو حل کریں۔

حل 1:

$x^2+2x-15=0$

$\Rightarrow \quad x^2+5x-3x-15=0$

$\Rightarrow \quad x(x+5)-3(x+5)=0$

$\Rightarrow \quad (x-3)(x+5)=0$

$\Rightarrow \quad x-3=0 \quad \text{or} \quad x+5=0$

$\Rightarrow \quad x=3 \quad \text{or} \quad x=-5$

لہٰذا، حل سیٹ $\{-5,3\}$ ہے۔

حل 2:

$$2x^2-5x=12$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2-5x-12=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2-8x+3x-12=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x(x-4)+3(x-4)=0$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)(2x+3)=0$$
$$\Rightarrow \quad x-4=0 \quad \text{یا} \quad 2x+3=0$$
$$\Rightarrow \quad x=4 \quad \text{یا} \quad x=\frac{-3}{2}$$

لہٰذا، حل سیٹ $\left\{-\frac{3}{2}, 4\right\}$ ہے۔

مثال 02 خالص دو درجی مساوات $4m^2-1=0$ کو تجزی طریقہ سے حل کریں۔

حل:

$$4m^2-1=0$$
$$\Rightarrow \quad (2m)^2-(1)^2=0$$
$$\Rightarrow \quad (2m-1)(2m-1)=0 \quad \left[\; a^2-b^2=(a-b)(a+b)\right]$$
$$\Rightarrow \quad 2m-1=0 \quad \text{یا} \quad 2m+1=0$$
i.e
$$\Rightarrow \quad 2m=1 \quad \text{یا} \quad 2m=-1$$
$$\Rightarrow \quad m=\frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad m=-\frac{1}{2}$$

لہٰذا، حل سیٹ $=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ ہے۔

(b) طریقہ تکمیل مربع:

طریقہ نیچے بیان کیا گیا ہے۔

(i) مساوات کو معیاری شکل میں لکھیں $ax^2+bx+c=0$

(ii) مساوات کی دونوں اطراف کو معروف عددی سر x^2 سے تقسیم کریں اگر یہ 1 نہیں ہے۔

(iii) مستقل مقدار کو دائیں ہاتھ پر منتقل کریں۔

(iv) جمع کریں $\left(\frac{x \text{ کا عددی سرا}}{2}\right)^2$ کا عددی سے

(v) بائیں ہاتھ والی مساوات کو کامل مربع کے طور پر لکھیں اور پھر دائیں ہاتھ کو حل کریں۔

(vi) معلوم مساوات کی دونوں طرف جذر (square root) لیں، مساوات کا حل تلاش کرنے کے لیے نتیجے میں آنے والی مساوات کو حل کریں اور پھر حل سیٹ لکھیں۔

$2x^2+8x-1=0$ کو حل کریں۔

حل:

$$2x^2+8x-1=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2+8x=1 \quad . . . \text{(i)}$$
$$\Rightarrow \quad x^2+4x=\frac{1}{2} \quad . . . \text{(ii)}$$
(مساوات (1) کو 2 سے تقسیم دیں)

مساوات (ii) کی دونوں اطراف پر $\left[\frac{1}{2}\times 4\right]^2=4$ کو جمع کریں۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2+4x+4=\frac{1}{2}+4$$
$$\Rightarrow \quad x^2+2(2)x+(2)^2=\frac{1}{2}+(2)^2$$
$$\Rightarrow \quad (x+2)^2=\frac{1}{2}+4$$
$$\Rightarrow \quad (x+2)^2=\frac{9}{2}$$
$$\Rightarrow \quad x+2=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \quad x+2=\frac{3}{\sqrt{2}}$	$x+2=-\frac{3}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow \quad x+2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$x+2=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow \quad x=-2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$x=-2-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow \quad x=\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}$	$x=\frac{-4-3\sqrt{2}}{2}$

لہٰذا، حل سیٹ $\left\{\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}, \frac{-4-3\sqrt{2}}{2}\right\}$ ہے۔

مشق 8.1

1. درج ذیل دو درجی مساوات کو تجزی طریقے سے حل کریں

(i) $x^2+5x+6=0$ (ii) $6x^2-x-1=0$ (iii) $x^2-11x+30=0$

(iv) $x^2-2x=0$ (v) $x^2-2x-15=0$ (vi) $12x^2-41x+24=0$

(vii) $(x-5)^2-9=0$ (viii) $(3x+4)^2-16=0$

2. درج ذیل میں سے ہر ایک کو تکمیل مربع طریقے سے حل کریں۔

(i) $x^2+6x+1=0$ (ii) $(3x+2)(x+2)=6-2(x+1)$. (iii) $3x^2-8x=-1$

(iv) $24x^2=-10x+21$ (v) $2(x^2-3)-3x=2(x+3)$ (vi) $2x^2+4x-1=0$

3. مساوات $x^2+bx-8=0$ کا ایک جذر (root) 2 ہے۔

(i) b کی رقم کیا ہے؟

(ii) مساوات کا دوسرا جذر کیا ہے؟

8.2 دو درجی فارمولا:

مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کو حل کرنے کے لیے ہم درج ذیل دو درجی فارمولا استعمال کرتے ہیں۔

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ دو درجی فارمولا کہلاتا ہے۔

8.2.1: بذریعہ تکمیل مربع، دو درجی فارمولا اخذ کریں۔

دو درجی مساوات کو معیاری شکل میں لکھیں۔ $ax^2+bx+c=0 \quad . \ . \ . \ \text{(i)}$

a کو مساوات (i) کی دونوں اطراف پر تقسیم دیں، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\dfrac{ax^2}{a}+\dfrac{bx}{a}+\dfrac{c}{a}=\dfrac{0}{a}$

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

مستقل مقدار $\dfrac{c}{a}$ کو دائیں ہاتھ پر منتقل کریں

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a} \quad . \ . \ . \ \text{(ii)}$$

$\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ کو مساوات (ii) کی دونوں اطراف پر جمع کریں۔

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2(x)\left(\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

8.2.2: دو درجی فارمولا سے دو درجی مساوات کو حل کریں۔

مثال 01 دو درجی فارمولا سے حل کریں

(i) $2x^2-5x-3=0$ (ii) $x^2+x+1=0$

حل 1:

$$2x^2-5x-3=0$$

یہاں $a=2, b=-5$ and $c=-3$

دو درجی فارمولا کو حل کرتے ہوئے۔

$$\because \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(-3)}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-(-24)}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm7}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5+7}{4} \qquad\qquad x=\frac{5-7}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{12}{4} \qquad\qquad x=\frac{-2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=3 \qquad\qquad x=-\frac{1}{2}$$

تو جذر (roots) 3 and $-\frac{1}{2}$ ہیں

لہٰذا، حل سیٹ $\left\{3,-\frac{1}{2}\right\}$ ہے۔

حل 2:

$$x^2+x+1=0$$

یہاں $a=1, b=1$ اور $c=1$

دودرجی فارمولا استعمال کرتے ہوئے۔

$$\because x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},$$

لہٰذا، حل سیٹ $=\left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$ ہے۔

مشق 8.2

درج ذیل مساوات کو دودرجی فارمولا سے حل کریں۔

(i) $x^2-2x=15$	(ii) $10x^2+19x-15=0$	(iii) $x^2=-x+1$
(iv) $2x=9-3x^2$	(v) $9x^2=12x-49$	(vi) $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1=0$
(vii) $3x^2-2x+2=0$	(viii) $6x^2-x-1=0$	(ix) $4x^2-10x=0$
(x) $x^2-1=0$	(xi) $x^2-6x+9=0$	(xii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-4}=4$

8.3 مساواتوں کو دو درجی فارم میں تبدیل کریں۔

متلف قسم کی مساوات ہیں جو دو درجی نہیں ہیں مگر انہیں دو درجی مساوات میں مناسب طریقے سے تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

8.3.1: $ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$ قسم کی مساواتوں کو دو درجی مساواتوں میں تبدیل کر کے حل کریں جہاں چو درجی دو درجی مساوات (quartic)

مساوات $ax^4 + bx^2 + c = 0$ لیں، یہ چو درجی یا دو درجی مساوات ہے اور اس کو دو درجی مساوات میں تبدیل کیا جا سکتا ہے $ay^2 + by + c = 0$ جہاں $y = x^2$ طریقہ درج ذیل مثال سے بیان کیا گیا ہے۔

مثال چو درجی مساوات $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$ کو حل کریں۔

حل: $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0 \quad . . . \text{(i)}$

اس مساوات کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$4\left(x^2\right)^2 - 25x^2 + 36 = 0 \quad . . . \text{(ii)}$$

مساوات (ii) میں $y = x^2$ لگائیں"

ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$y^2 - 25y + 36 = 0$$

یہاں $a = 4, b = -25$ and $c = 36$

$$\because \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\therefore \quad y = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(4)(36)}}{2(4)}$$

$$y = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2(4)} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{25 \pm 7}{8}$$

i.e., $y = \dfrac{25+7}{8}$ | $y = \dfrac{25-7}{8}$

$y = \dfrac{32}{8} = 4$ | $y = \dfrac{18}{8} = \dfrac{9}{4}$

لیکن, $y = x^2$, پھر

$x^2 = 4$ | $x^2 = \dfrac{9}{4}$

$x=\pm\frac{3}{2}$	$x=\pm 2$

لہٰذا، حل سیٹ $\left\{\pm 2\ ,\ \pm\frac{3}{2}\right\}=$ ہے۔

8.3.2 $ap(x)+\frac{c}{p(x)}=b,$ قسم کی مساواتوں کو حل کریں جہاں $a,\ b$ and c ناطق اعداد ہیں۔

مثال 02 $8\sqrt{x+3}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}=2$ کو حل کریں۔

حل:

$$8\sqrt{x+3}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}=2\ .\ .\ .\ (i)$$

فرض کریں $\frac{1}{\sqrt{x+3}}=\frac{1}{y}\Rightarrow y=\sqrt{x+3}$ اس رقم کو مساوات (i) میں لگائیں، ہمارے پاس ہے،

$$\Rightarrow\quad 8y-\frac{1}{y}=2$$

$$\Rightarrow\quad 8y^2-1=2y$$

$$\Rightarrow\quad 8y^2-2y-1=0$$

$$\Rightarrow\quad 8y^2-4y+2y-1=0$$

$$\Rightarrow\quad 4y(2y-1)+1(2y-1)=0$$

$$\Rightarrow\quad (4y+1)(2y-1)=0$$

$\Rightarrow\quad 4y+1=0$	$2y-1=0$
$\Rightarrow\quad y=\frac{-1}{4}$	$y=\frac{1}{2},$
$y=-\frac{1}{4},$	$y=\frac{1}{2},$ پھر ,
$\sqrt{x+3}=-\frac{1}{4}$	$\sqrt{x+3}=\frac{1}{2}$
	دونوں طرف قوت نما 2 ہیں۔
$\Rightarrow\quad x+3=\frac{1}{16}$	$x+3=\frac{1}{4}$

$$x = \frac{1}{4} - 3$$
$$x = \frac{1-12}{4}$$
$$x = -\frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{16} - 3$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1-48}{16}$$
$$\Rightarrow \quad x = -\frac{47}{16}$$

تصدیق:

$$8\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2$$

$x = -\frac{11}{4}$ کو مندرجہ بالا مساوات میں لگائیں $x = -\frac{47}{16}$ کو مندرجہ بالا مساوات میں لگائیں۔

$$8\sqrt{\frac{-11}{4} + 3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-11}{4} + 3}} = 2$$
$$8\sqrt{\frac{-11+12}{4}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-11+12}{4}}} = 2$$
$$8\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2$$
$$8\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$
$$4 - 2 = 2$$
$$2 = 2$$

تصدیق شدہ

$$8\sqrt{\frac{-47}{16} + 3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-47}{16} + 3}} = 2$$
$$8\sqrt{\frac{-47+48}{16}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-47+48}{16}}} = 2$$
$$8\sqrt{\frac{1}{16}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16}}} = 2$$
$$8\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 2$$
$$2 - 4 = 2$$
$$-2 \neq 2$$

غیر تصدیق شدہ

لہٰذا، حل سیٹ $= \left\{-\frac{11}{4}\right\}$ ہے۔

8.3.3: $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$ قسم کی معکوس مساوات کو حل کریں، جہاں $a, b\ \ c$ ناطق اعداد ہیں۔

کثیر رقمی مساوات معکوس مساوات کہلاتی ہے اگر یہ x کی جگہ $\frac{1}{x}$ درج کرنے سے تبدیل نہ ہو۔

$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$ قسم کی معکوس مساوات کو حل کرنے کا طریقہ جہاں $a,\ b,\ c$ ناطق اعداد ہیں

کو نیچے مثال سے ظاہر کیا گیا ہے۔

مثال 01 $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$ کو حل کریں۔

حل:

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0 \ . \ . \ . \ \text{(i)}$ تو مساوات (i) ہو جائے گی۔

لہٰذا، حل سیٹ $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ پھر $x+\frac{1}{x}=y,$ ہے۔

$$2\left(y^2-2\right)-9y+14=0$$
$$\Rightarrow \quad 2y^2-9y+10=0$$
$$\Rightarrow \quad 2y^2-4y-5y+10=0$$
$$\Rightarrow \quad 2y(y-2)-5(y-2)=0$$
$$\Rightarrow \quad (y-2)(2y-5)=0$$

i.e. $y-2=0$

$\Rightarrow \quad y=2$

$y=x+\frac{1}{x},$ پھر

$x+\frac{1}{x}=2$

$\Rightarrow \quad x^2+1=2x$

$\Rightarrow \quad x^2-2x+1=0$

$2y-5=0$

$y=\frac{5}{2}$

$y=x+\frac{1}{x},$ پھر

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \quad \frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \quad 2x^2+2=5x$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x-1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 4x - x + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x(x-2) - 1(x-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x-2)(2x-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x-2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 2$$
$$\Rightarrow \quad 2x-1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

حل سیٹ = $\left\{\frac{1}{2}, 2, 1\right\}$

8.3.4: قوت نمائی مساواتوں جن کے متغیر قوت ماؤں میں ہوں، حل کریں۔

ایسی مساواتیں جن میں متغیر قوت نماؤں میں ہو، قوت نمائی مساواتیں کہلاتی ہیں۔ اس قسم کی مساواتوں کا حل نیچے دی گئی مثال سے واضح کیا گیا ہے۔

مثال 02 $7^{1+x} + 7^{1-x} = 50$ کو حل کریں۔

حل

$$7^{1+x} + 7^{1-x} = 50 \quad \ldots \text{(i)}$$
$$7.7^{x} + 7.7^{-x} - 50 = 0$$
(قوت نماؤں کو تقسیم کریں)
$$\Rightarrow \quad 7.7^{x} + \frac{7}{7^{x}} = 50 \quad \ldots \text{(ii)}$$
$y = 7^{x}$ فرض کریں

$\therefore$ مندرجہ ذیل بالا مساوات (ii) درج ذیل میں تبدیل ہوتی ہے۔

$$7y + \frac{7}{y} - 50 = 0,$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2 + 7 - 50y = 0$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2 - 50y + 7 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2 - 49y - y + 7 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 7y(y-7) - 1(y-7) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (7y-1)(y-7) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 7y-1=0 \qquad\qquad y-7=0$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{7} \qquad\qquad \Rightarrow \quad y=7$$

$$\text{then } 7^x=7^{-1} \qquad\qquad y=7 \text{ then } 7^x=7^1$$

$$\Rightarrow \quad x=-1 \qquad\qquad x=1$$

لہٰذا، حل سیٹ $\{-1,1\}=$ ہے۔

8.3.5: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=k,$ قسم کی مساواتوں کو جبکہ $a+b=c+d$ اور مستقل مقدار $k\neq 0$ کو حل کریں۔

مثال 01

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=48$$

حل

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=48$$

دوبارہ ترتیب دے کر۔

$$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=48$$

$$\left(x^2+4x+x+4\right)\left(x^2+2x+3x+6\right)=48$$

$$\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)=48 \ldots \text{(i)}$$

$x^2+5x=t$ فرض کریں

(i) مساوات میں لگا کر۔

$$\Rightarrow \quad (t+4)(t+6)=48$$

$$\Rightarrow \quad t^2+4t+6t+24=48$$

$$\Rightarrow \quad t^2+10t-24=0$$

$$\Rightarrow \quad t^2+12t-2t-24=0$$

$$\Rightarrow \quad t(t+12)-2(t+12)=0$$

$$\Rightarrow \quad (t+12)(t-2)=0$$

$$\Rightarrow \quad t+12=0 \qquad\qquad t-2=0$$

$$\Rightarrow \quad t=-12 \qquad\qquad t=2$$

مساوات (ii) میں رکھنے سے | مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$\Rightarrow \quad x^2+5x=-12 \qquad\qquad x^2+5x=2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+5x+12=0 \qquad\qquad x^2+5x-2=0$$

Here: $a=1$, $b=5$ and $c=12$,

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{25-48}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{-23}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm i\sqrt{23}}{2}$$

Here: $a=1$, $b=5$ and $c=-2$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+8}}{2}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$$

لہٰذا، حل سیٹ $\left\{\frac{-5\pm i\sqrt{23}}{2}, \frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}\right\}$ ہے۔

مشق 8.3

درج ذیل مساوات کو حل کریں۔

1. $x^4-8x^2-9=0$

2. $x^4-3x^2-4=0$

3. $12x^4-11x^2+2=0$

4. $\frac{2x+3}{x+1}+6\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)=7$

5. $\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2+1}}+6\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2+1}}=5$

6. $5^{x+1}+5^{2-x}=5^3+1$

7. $2^x+\frac{16}{2^x}=8$

8. $2\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x+1}\right)+2=0$

9. $4\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-4\left(\frac{x}{x-1}\right)+1=0$

10. $9^{x+2}-6\cdot 3^{x+1}+1=0$

11. $2^2+2^{-x+6}-20=0$

12. $(x-1)(x+5)(x+8)(x+2)=880$

13. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$

14. $(x-2)(x+1)(x+3)(x-4)=24$

8.4 جذری مساواتیں

مساوات جس میں متغیر کے جذری جملے شامل ہوں جذری مساواتیں کہلاتی ہیں

جذری مساواتوں کے حل کی تصدیق ہونے چاہیے کیونکہ اس کے جذر خارجی ہو سکتے ہیں۔

8.4.1:اس قسم کی مساوتوں کا حل:

Type (i) $\sqrt{ax+b} = cx+d$ Type (ii) $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{x+c}$

Type (iii) $\sqrt{x^2+px+m} + \sqrt{x^2+px+n} = q$

مثال

قسم(i) $\sqrt{ax+b} = cx+d$

Solve $\sqrt{217-x} = x-7$

حل

$\sqrt{217-x} = x-7$

دونوں اطراف پر قوت نما2لیں

$\left(\sqrt{217-x}\right)^2 = (x-7)^2$

$\Rightarrow \quad 217-x=(x-7)^2$

$\Rightarrow \quad 217-x=x^2-14x+49$

$\Rightarrow \quad x^2-13x-168=0$

$\Rightarrow \quad x^2-21x+8x-168=0$

$\Rightarrow \quad x(x-21)+8(x-21)=0$

$\Rightarrow \quad (x-21)(x+8)=0$

i.e. $x=21$ or $x=-8$

تصدیق :$x=21$

$\sqrt{217-x} = x-7$

$\therefore \quad \sqrt{217-21} = 21-7$

$\Rightarrow \quad \sqrt{196} = 14$

$\Rightarrow \quad 14 = 14$

تصدیق

تصدیق $x=-8$

$\sqrt{217-x} = x-7$

$\therefore \quad \sqrt{217-(-8)} = -8-7$

$\Rightarrow \quad \sqrt{225} = 15$

$\Rightarrow \quad 15 \neq -15$

غیر تصدیق شدہ

لہٰذا، حل سیٹ $=\{21\}$

(ii) قسم $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{x+c}$

مثال

Solve: $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

حل

$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

دونوں اطراف پر قوت نما 2 لگائیں، ہم حاصل ہوتا ہے۔

$(\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{6x+13})^2$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{x+7})^2 + 2(\sqrt{x+7})(\sqrt{x+2}) + (\sqrt{x+2})^2 = 6x+13$

$\Rightarrow \quad x+7+2\sqrt{(x+7)(x+2)} + x+2 = 6x+13,$

$\Rightarrow \quad 2x+9+2\sqrt{x^2+7x+2x+14} = 6x+13$

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{x^2+9x+14} = 4x+4$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+9x+14} = 2x+2$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+9x+14} = 2(x+1)$

دوبارہ دونوں اطراف پر قوت نما 2 لیں

$\left(\sqrt{x^2+9x+14}\right)^2 = [2(x+1)]^2$

$\Rightarrow \quad x^2+9x+14 = 4(x+1)^2$

$\Rightarrow \quad x^2+9x+14 = 4(x^2+2x+1)$

$\Rightarrow \quad x^2+9x+14 = 4x^2+8x+4$

$\Rightarrow \quad 3x^2-x-10 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x^2+5x-6x-10 = 0$

$\Rightarrow \quad x(3x+5)-2(3x+5) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-2)(3x+5) = 0$

$x-2 = 0$

$x=2$

تصدیق:

جب $x=2$

$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

$3x+5 = 0$

i.e. $x = -\frac{5}{3}$

تصدیق:

جب $x = -\frac{5}{3}$

$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

$$\sqrt{2+7}+\sqrt{2+2}=\sqrt{6(2)+13},$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{9}+\sqrt{4}=\sqrt{25}$$

$$\Rightarrow \quad 3+2=5$$

$$\Rightarrow \quad 5=5$$

تصدیق شدہ

$$\sqrt{-\frac{5}{3}+7}+\sqrt{-\frac{5}{3}+2}=\sqrt{6\left(-\frac{5}{3}\right)+13}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{16}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{\sqrt{3}}\neq\sqrt{3}$$

غیر تصدیق شدہ

کیوں: $-\frac{5}{3}$ خارجی جذر ہے اس لیے حل $x=2,$ لہٰذا، حل سیٹ $=\{2\}$ ہے۔

قسم(iii) : $\sqrt{x^2+px+m}+\sqrt{x^2+px+n}=q$

مثال 01

Solve: $\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$

حل:

Put $y=x^2-3x$ لکھیں، معلوم مساوات میں، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$

$$\sqrt{y+21}-\sqrt{y+5}=2$$

$$\sqrt{y+21}=2+\sqrt{y+5}$$

دونوں اطراف پر قوت نما 2 لیں

$$y+21=(2)^2+4\sqrt{y+5}+(\sqrt{y+5})^2$$

$$\Rightarrow \quad y+21=(2)^2+4\sqrt{y+5}+\left(\sqrt{y+5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad y+21=4+4\sqrt{y+5}+y+5$$

$$\Rightarrow \quad 4\sqrt{y+5}=y+21-4-y-5$$

$$\Rightarrow \quad 4\sqrt{y+5}=12$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{y+5}=3$$

دوبارہ دونوں اطراف پر قوت نما2 لیں، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Rightarrow \quad y+5=9$$

$$\Rightarrow \quad y=4,$$

$y=4$ لیں $y=x^2-3x$ کی جگہ پر ہمارے پاس ہے۔

$$4=x^2-3x,$$
$$\Rightarrow \quad x^2-3x-4=0,$$
$$\Rightarrow \quad x^2-4x+x-4=0,$$
$$\Rightarrow \quad x(x-4)+1(x-4)=0,$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)(x+1)=0,$$
i.e., $x-4=0$
$$\Rightarrow \quad x=4,$$

تصدیق:

جب $x=4$

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$
$$\sqrt{(4)^2-3(4)+21}-\sqrt{(4)^2-3(4)+5}=2$$
$$\sqrt{16-12+21}-\sqrt{16-12+5}=2$$
$$\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$$
$$5-3=2$$
$$2=2$$

$$x+1=0$$
$$x=-1,$$

تصدیق:

جب $x=-1$

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$
$$\sqrt{(-1)^2-3(-1)+21}-\sqrt{(-1)^2-3(-1)+5}=2$$
$$\sqrt{1+3+21}-\sqrt{1+3+5}=2$$
$$\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$$
$$5-3=2$$
$$2=2$$

لہٰذا دونوں جذر معلوم مساوات کو مطمئن کرتے ہیں، لہٰذا حل سیٹ {-1,4} ہے۔

مشق 8.4

درج ذیل مساوات کو حل کریں۔

1. $x+\sqrt{x+5}=7$
2. $\sqrt{x-2}=8-x$
3. $\sqrt{7-5x}+\sqrt{13-5x}=3\sqrt{4-2x}$
4. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=\sqrt{6x+13}$
5. $\sqrt{2x^2+3x+4}+\sqrt{2x^2+3x+9}=5$
6. $\sqrt{y^2-3y+9}-\sqrt{y^2-3y+36}+3=0$

اعادہ مشق 8

1. خالی جگہ پُر کریں۔

(i) کثیر رقمی مساوات جس میں متغیر کی ڈگری ______ ہو دو درجی مساوات کہلاتی ہے۔

(ii) دو درجی مساوات کی معیاری شکل ______ ہوتی ہی۔

(iii) $3^x + 3^{2x} = 1$ ______ مساوات کہلاتی ہے۔

(iv) $3^x = 9$ ______ کا حل ہے۔

(v) $ax^2 + bx + c = 0$ ______ کا حل ہے

2. درست جواب پر (✓) لگائیں۔

(i) دو درجی مساوات کی ڈگری ہے:

(ا) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(ii) دو درجی مساوات کی معیاری شکل ہے:

(ا) $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ (ب) $ax^2 + c = 0, a \neq 0$

(ج) $ax^2 + bx = 0, a \neq 0$ (د) $ax^3 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$

(iii) $ax^2 + bx + c = 0$ کے لیے دو درجی فارمولا ہے۔

(ا) $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ (ب) $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(ج) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (د) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

(iv) $x^2 + 10x + 24 = 0$ کا حل سیٹ ہے:

(ا) $\{-6, -4\}$ (ب) $\{-6, 4\}$ (ج) $\{6, 4\}$ (د) $\{6, -4\}$

(v) دو درجی مساوات میں رقموں کی تعداد ہے:

(ا) 2 (ب) 3 (ج) 1 (د) 4

(vi) $x^2 - 15x + 56$ کے دو یک درجی فیکٹرز ہیں:

(ا) $(x-7)$ and $(x+8)$ (ب) $(x+7)$ and $(x-8)$

(ج) $(x-7)$ and $(x-8)$ (د) $(x+7)$ and $(x+8)$

(vii) کثیر رقمی مساوات جو $\frac{1}{x}$ کی جگہ a/ an درج کرنے سے تبدیل نہ ہوں کہلاتی ہے۔

(ا) قوت نمائی مساوات (ب) معکوس مساوات

(ج) جذری مساوات (د) ان میں سے کوئی نہیں

(viii) کثیر رقمی مساوات جو $3^x + 3^{2-x} + 6 = 0$ کی جگہ a/an درج کرنے سے تبدیل نہ ہوں کہلاتی ہے۔

(ا) قوت نمائی مساوات (ب) معکوس مساوات

(ج) جذری مساوات (د) ان میں سے کوئی نہیں

(ix) $4x^2 - 16 = 0$ کا حل سیٹ ہے:

(ا) $\{\pm 4\}$ (ب) $\{4\}$ (ج) $\{\pm 2\}$ (د)

(x) $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x + 2 = 0$ قسم کی مساوات کہلاتی ہے:

(ا) معکوس مساوات (ب) جذری مساوات

(ج) قوت نمائی مساوات (د) ان میں سے کوئی نہیں

3. درست اور غلط سوالات:

درج ذیل جملوں کو دھیان سے پڑھیں اور درست کی صورت میں 'د' پر اور غلط کی صورت میں 'غ' پر دائرہ لگائیں۔

(i) ہم دو درجی مساوات تجزی طریقے سے حل ہو سکتی ہے۔ (د/غ)

(ii) ہر چو درجی مساوات کے 2 جذر ہوتے ہیں۔ (د/غ)

(iii) ہر کیوبک مساوات کے 3 جذر ہوتے ہیں۔ (د/غ)

(iv) $ax^2 + bx + c = 0$ میں دو درجی مساوات ہے اگر $a=0$ and b, c حقیقی اعداد ہیں۔ (د/غ)

(v) خارجی جذر مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔ (د/غ)

(vi) خارجی جذر مساوات کو مطمئن نہیں کرتا۔ (د/غ)

(vii) دو درجی مساوات کا سب سے بڑا قوت نما متغیر کا 2 ہے۔ (د/غ)

خلاصہ

- ایک کثیر رقمی مساوات جس کا متغیر 2 ہو دو درجی مساوات کہلاتی ہے۔
- $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ a, b, c$ حقیقی اعداد ہوں تو یہ دو درجی مساوات کا معیاری شکل کہلاتی ہے۔
- دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ is $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ کا فارمولا ہے
- قوت نمائی مساوات میں، متغیر قوت نما میں ہوتے ہیں۔
- ایسی مساوات جس میں جذری علامت کے اندر کوئی جملہ ہو جذری مساوات کہلاتی ہے۔

یونٹ 9

متماثل مثلثان

CONGRUENT TRIANGLES

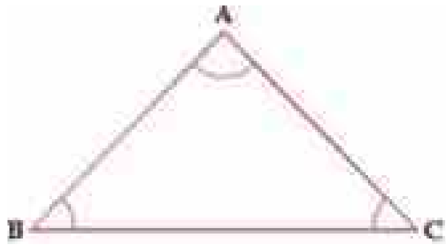
حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- مندرجہ ذیل نظریات کو ان کے نتائج کے ساتھ سمجھیں اور ان کو متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیے استعمال کریں۔
- دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور دو زاویہ دوسری مثلث کے متناظرہ ضلع اور زاویوں کے
- متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔
- اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے مخالف اضلاع بھی متماثل ہوتے ہیں۔
- دو مثلثوں کی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسری مثلث کے متناظرہ تین اضلاع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔
- اگر دو قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی مطابقت میں ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسری مثلث کے وتر اور متناظرہ ضلع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثین متماثل ہوں گی۔

تعارف:

ایک مثلث میں چھ عناصر ہیں، تین اضلاع اور تین زاویے۔ اگر ہمیں دو مثلثیں ABC اور PQR دیے جائیں تو ہم ان مثلث کے اطراف اور زاویوں کے درمیان چھ مختلف طریقوں سے (1-1) خط و کتابت قائم کرنے کے لیے ان کی چوٹیوں کو جوڑ سکتے ہیں۔ جیسا کے نیچے دیا گیا ہے:



خط و کتابت (correspondence) میں $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ اس کا مطلب ہے:

(i) ($\angle A$ اور $\angle P$ باہم مطابق زاویے ہیں) $\angle A \leftrightarrow \angle P$

(ii) ($\angle B$ اور $\angle Q$ باہم مطابق زاویے ہیں) $\angle B \leftrightarrow \angle Q$

(iii) ($\angle C$ اور $\angle R$ باہم مطابق زاویے ہیں) $\angle C \leftrightarrow \angle R$

(iv) ($\overline{AB}$ اور $\overline{PQ}$ باہم مطابق اضلاع ہیں) $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{PQ}$

(v) ($\overline{BC}$ اور $\overline{QR}$ باہم مطابق اضلاع ہیں) $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{QR}$

(vi) ($\overline{CA}$ اور $\overline{RP}$ باہم مطابق اضلاع ہیں) $\overline{CA} \leftrightarrow \overline{RP}$

9.1 متماثل مثلثان

ریاضی میں "سائز اور شکل کی ہم آہنگی" کو متماثل کہتے ہیں۔

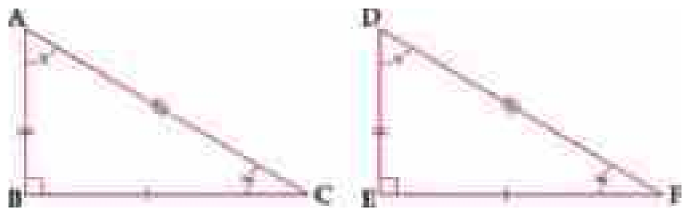
دو کاروں کے رنگ مختلف ہیں اور دی گئی شکل میں ان کی پوزیشن مختلف ہے، لیکن ان کا سائز اور شکل ایک جیسی ہے۔ یہ دونوں کاریں متماثل کہلائیں گی اگر ہم ایک کار کی تصویر دوسری گاڑی پر رکھتے ہیں تو وہ دونوں ایک دوسرے کو اوورلیپ (overlap) کریں گی۔

سرگرمی

تلاش

کیا آپ اپنے کلاس روم یا اسکول میں کسی بھی طرح کی متماثل اشکال یا اشیاء کی شناخت کر سکتے ہیں؟ ڈرائنگ یا تصویریں کھینچ کر ان متماثل اشکال کی فہرست بنائیں۔

دو مثلثیں متماثل کہلاتی ہیں اگر ان کے متعلقہ زاویے اور اضلاع متماثل ہیں۔ آیئے اشکال دیکھیں۔



یہ دو مثلثیں ABC اور DEF متماثل ہیں اور اس طرح لکھی جاتی ہیں:

$\Delta ABC \cong \quad \Delta DEF$

ΔABC اور ΔDEF کے متعلقہ اضلاع اور زاویے برابر ہیں، پیمائش میں

نوٹ: درج ذیل نتائج مفید ہیں۔

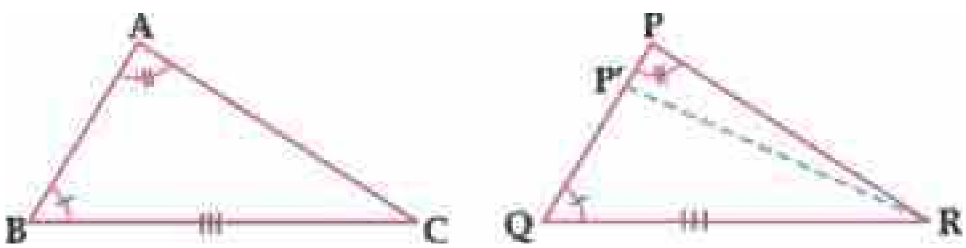
(i) ہم آہنگی کے شناخت: $\Delta ABC \cong \Delta ABC$

(ii) تناسب پراپرٹی $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ پھر $\Delta PQR \cong \Delta ABC$

(iii) ترسیلی پراپرٹی ہم آہنگی کی اگر $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ اور $\Delta PQR \cong \Delta DEF$ پھر $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مسئلہ 9.1.1 (ز-ض-ز ≅ ز-ض-ز)

دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور دو زاویے دوسری مثلث کے متناظرہ ضلع اور زاویوں کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔



معلوم:

$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$

$\angle A \cong \angle P$ اور $\angle B \cong \angle Q$, $m\overline{BC} \cong m\overline{QR}$

مطلوبہ:

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

عمل:

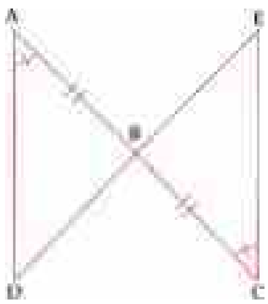
فرض کریں $\overline{PQ} \ncong \overline{AB}$ نقطہ P′ لیں PQ پر اس طرح کہ $\overline{P'Q} \cong \overline{AB}$ P کو R سے ملائیں

ثبوت:

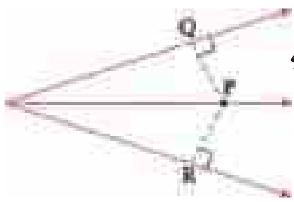
بیانات	دلائل
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ میں	
(i) $\angle A \cong \angle P$	(i) معلوم
(ii) $\angle B \cong \angle Q$	(ii) معلوم
$\therefore \quad \angle C \cong \angle R$	دونوں مثلثوں کے دو زاویے متماثل ہیں
اگر $\overline{QP} \ncong \overline{BA}$, نقطہ P′ لیں $\overline{QP}$ پر	مفروضہ
اس طرح کہ: $\overline{QP'} \cong \overline{BA}$	
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta P'QR$	
$\overline{BC} \cong \overline{QR}$	(i) معلوم
$\angle B \cong \angle Q$	(ii) معلوم
$\overline{BA} \cong \overline{QP'}$	(iii) قیاس۔
$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta P'QR$	ض-ز-ض کا موضوعہ
$\therefore \quad \angle C \cong \angle QRP'$	Δs کے مطابقت سے
مگر $\angle C \cong \angle QRP$	2 میں ثابت کیا گیا (اوپر)
$\therefore \quad \angle QRP' \cong \angle QRP$	مطابقت کی ترسیلی پراپرٹی
یہ تب ممکن ہے جب نقاط P اور P′ ایک ہوں اور	زاویہ عمل موضوعہ کے ذریعے
$\overline{RP'} \cong \overline{RP}$	
لہٰذا $\overline{BA} \cong \overline{QP}$	جیسا کہ P اور P′ اتفاق کرتے ہیں
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ میں	(i) معلوم
(i) $\overline{BC} \cong \overline{QR}$	(ii) معلوم
(ii) $\angle B \cong \angle Q$	(iii) اوپر ثابت کیا گیا۔
(iii) $\overline{BA} \cong \overline{QP}$	ض-ز-ض کا موضوعہ
$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta PQR$	

Q.E.D.

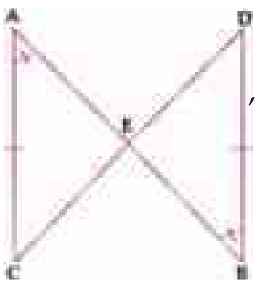
مشق 9.1



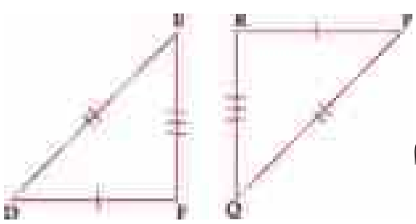
.1 دی گئی شکل میں $m\overline{AB} = m\overline{CB}$ اور $\angle A \cong \angle C$ ثابت کریں کہ
$\Delta ABD \cong \Delta CBE$



.2 ایک زاویہ کے خط کے ناصف پر ایک نقطہ سے زاویوں کے بازوؤں پر متوازی الاضلاع کھینچے جاتے ہیں۔ثابت کریں کہ یہ متوازی الاضلاع پیمائش میں برابر ہیں۔



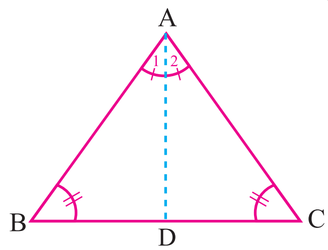
.3 دی گئی شکل میں ہمارے پاس ہے $\Delta ACE \cong \Delta BDE$, اس طرح کہ
$m\overline{AC} = m\overline{BD} = 3\ cm$, $m\angle E = (3y-2)^\circ$, $\angle A = (3x+1)^\circ$,
$m\angle B = (x+35)$, x اور y کی رقوم معلوم کریں ۔



.4 دی گئی شکل میں ہمارے پاس ہے $\Delta DEF \cong \Delta PQR$, اس طرح
کہ $m\overline{EF}$ =8cm, $m\overline{DE}$= $(6x + 1)$cm, اور $m\ \overline{RQ}$=
$(5y - 7)$cm, اور $m\overline{PQ}$ = $(10x - 19)$cm, x اور y کی رقوم
معلوم کریں۔

مسئلہ 9.1.2

اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے مخالف اضلاع بھی متماثل ہوتے ہیں۔



معلوم:

ΔABC میں، ہمارے پاس ہے $m\angle B \cong m\angle C$

مطلوبہ:

$\overline{AC} \cong \overline{AB}$

عمل: $\overline{AD}$ کا ناصف $\angle A$, کھینچیں جو $\overline{BC}$ سے نقطہ D پر ملتا ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta ADB \leftrightarrow \Delta ADC$	
(i) $m\angle B \cong m\angle C$	(i) معلوم
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) عمل
(iii) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	(iii) مشترک (شناخت کی مطابقت)
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ADC$	ض-ز-ض موضوعہ
$\therefore \overline{AC} \cong \overline{AB}$	Δs کی مطابقت سے

Q.E.D

مشق 9.2

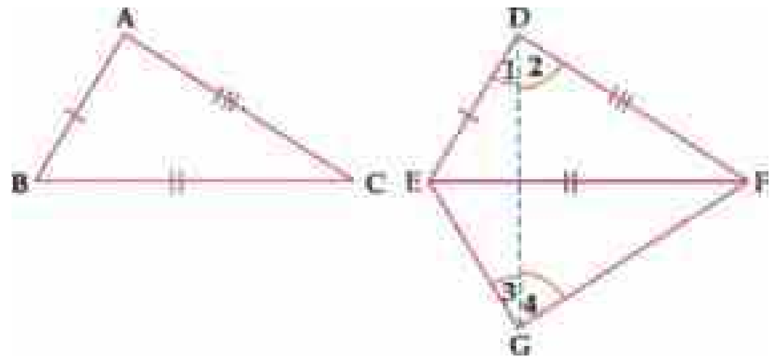
1. ABC ایک مثلث ہے جس میں $m\angle A = 35°$ اور $m\angle B = 100°$, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ثابت کریں کہ ΔBDC مساوی الساقین مثلث ہیں۔

2. اگر ایک مثلث کے زاویے کا ناصف اس کے مخالف اضلاع کے عمود پر ہے، تو مثلث ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

3. ABC ایک مثلث ہے جس میں $m\angle B = 45°$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. ثابت کریں کہ ΔDBC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

مسئلہ 9.1.3

دو مثلثوں کی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسری مثلث کے متناظرہ تین اضلاع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔



معلوم:

$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں

$\overline{CA} \cong \overline{FD}$ اور $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$

مطلوبہ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

عمل: فرض کریں کہ ΔABC کی تینوں اضلاع میں سب سے بڑا $\overline{BC}$ ہے ΔGEF بنائیں اس طرح کہ:

(i) نقطہ G

(ii) $\angle FEG \cong \angle B$

(iii) $\overline{EG} \cong \overline{BA}$ D اور G کو ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta GEF$	
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (i)	معلوم(i
$\angle B \cong \angle GEF$ (ii)	عمل(ii
$\overline{BA} \cong \overline{GE}$ (iii)	عمل(iii
$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta GEF$	ض-ز-ض موضوعہ
$\angle A \cong \angle G$ اور $\overline{AC} \cong \overline{GF}$	مثلث کی مطابقت سے
مگر $\overline{DF} \cong \overline{AC}$	معلوم
$\therefore \quad \overline{GF} \cong \overline{DF}$	ترسیلی پراپرٹی

بیانات	وجوہات
ΔDEG میں $m\angle 1 = m\angle 3$	مخالف اضلاع کے مطابقت $\overline{EG} \cong \overline{BA} \cong \overline{ED}$
اسی طرح ΔGFE میں $m\angle 2 = m\angle 4$	$\overline{DF} \cong \overline{GF}$
$\therefore\ m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	مساوات کی جمع کی پراپرٹی
یا $m\angle D = m\angle G$	$m\angle 1+m\angle 2 = m\angle D$ $m\angle 3+m\angle 4 = m\angle G$
مگر $m\angle G = m\angle A$	پر ثابت کیا گیا۔
$\therefore m\angle A = m\angle D$	ترسیلی پراپرٹی
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں	
(i) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	(i) معلوم
(ii) $\angle A \cong \angle D$	(ii) اوپر ثابت کیا گیا
(iii) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	(iii) معلوم
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$	ض۔ز۔ض کا موضوعہ

Q.E.D

نتیجہ: مساوی الاضلاع مثلث کے زاویے پیمائش میں برابر ہوتے ہیں۔

مشق 9.3

1. ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ $\overline{BC}$ بنیاد D کا درمیانی نقطہ ہے۔ ثابت کریں کہ $\overline{AD}$, $\angle A$ کو کاٹتا ہے اور $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

2. ABC اور DBC دو مساوی الساقین مثلثیں ہیں ایک مشترک بنیاد $\overline{BC}$ کے ضلع پر ثابت کریں کہ $\overleftrightarrow{AD}$، $\overline{BC}$ کا دائیں ناصف ہے۔

3. PQRS ایک مربع ہے X, Y اور Z بالترتیب $\overline{QR}$, $\overline{PQ}$ اور $\overline{RS}$ کے درمیانی نقاط ہیں۔ ثابت کریں کہ $\Delta PXY \cong \Delta SZY$ ۔

4. ثابت کریں کہ، مساوی الاضلاع مثلث میں کوئی سے دو وسطانیے متماثل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 9.1.4

اگر دو قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی کسی مطابقت میں ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسری مثلث کے وتر اور متناظرہ ضلع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوں گی۔ وتر ض ≅ وتر ض۔

معلوم: مطابقت میں

$$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$$

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ اور $\angle B \cong \angle E$ (rt $\angle$s) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (وتر)

مطلوبہ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

عمل: نقطہ G پر $\overline{DE}$ بنائیں اس طرح کہ $\overline{EG} \cong \overline{AB}$ پھر F اور G ملائیں۔

ثبوت:

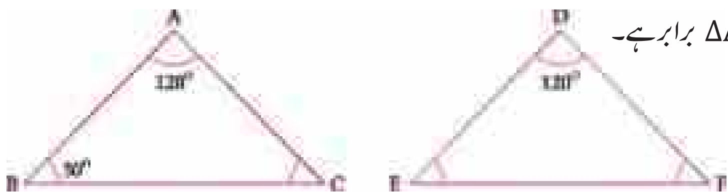
بیانات	دلائل
$m\angle DEF + m\angle GEF = 180^\circ$	ضمیمہ موضوعہ
مگر $m\angle DEF = 90^\circ$	معلوم
$\therefore m\angle GEF = 90^\circ$	$180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
$\Delta GEF \leftrightarrow \Delta ABC$	
i. $\overline{GE} \cong \overline{AB}$	عمل
ii. $\angle GEF \cong \angle ABC$	ہر ایک قائمۃ الزاویہ ہے۔
iii. $\overline{EF} \cong \overline{BC}$	معلوم
$\therefore \Delta GEF \cong \Delta ABC$	ض-ز-ص ≅ ض-ز-ض
$\therefore \overline{FG} \cong \overline{AC}$ and $\angle G \cong \angle A$	Δs کے مطابقت سے
$\therefore \overline{FG} \cong \overline{DF}$	$\therefore \overline{AC} \cong \overline{DF}$ (معلوم)
ΔDFG میں $\angle D \cong \angle G$	مخالف اضلاع کے مطابقت
$\therefore \angle D \cong \angle A$	ہر ایک $\angle G$ کے متماثل ہے۔
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں	
i. $\angle A \cong \angle D$	(i) ثابت شدہ
ii. $\angle ABC \cong \angle DEF$	(ii) قائمۃ الزاویہ
iii. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	(iii) معلوم
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$	ز-ز-ض ≅ ز-ز-ض

Q.E.D

مشق 9.4

1. ثابت کریں کہ: بنیاد کے راس کے عمود متساوی الساقین مثلث کے مخالف اضلاع کے متماثل ہیں۔
2. ثابت کریں کہ اگر ایک مثلث کے زاویے کے نصاف اس کے مخالف اضلاع کو کاٹیں، تو مثلث ایک متساوی الساقین مثلث ہوگا۔
3. ثابت کریں کہ ایک متساوی الساقین مثلث کی بنیاد کو وسطانیے کاٹتے ہیں وہ عمودی زاویے کو کاٹتی ہے اور بنیاد کے عمود پر ہوتی ہے۔
4. ثابت کریں کہ اگر مثلث کے تین ارتفاع متماثل ہوں، تو مثلث مساوی الاضلاع ہے۔

اعادہ مشق 9



1. اگر $\Delta ABC \cong \Delta DEF, m\angle F$ برابر ہے۔
   (ا) $90°$
   (ب) $60°$
   (ج) $30°$
   (د) $20°$

2. درج ذیل میں صحیح اور غلط بیانات کی شناخت کریں:

(i) ایک چوکور میں تمام زاویوں کا مجموعہ 36 ہوتا ہے۔ (د/غ)
(ii) ایک مثلث میں تمام زاویوں کا مجموعہ 270 ہوتا ہے۔ (د/غ)
(iii) مساوی الاضلاع مثلث میں، زاویے ایک ہی پیائش کے ہوتے ہیں۔ (د/غ)
(iv) ایک مثلث میں دو قائمۃ الزاویہ ہوتے ہیں۔ (د/غ)
(v) مساوی الساقین مثلث ہیں، متعلقہ زاویے اور متعلقہ اضلاع پیائش میں برابر ہوتے ہیں۔ (د/غ)

3. جملوں کو درست بنانے کے لیے خالی جگہ پُر کریں۔

(i) $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں، تو پھر $\overline{AC}$ مطابقت رکھتا ہے_______ سے۔
(ii) $\Delta KLM \leftrightarrow \Delta PQR$ میں، پھر $\angle MKL$ مطابقت رکھتا ہے_______ سے۔
(iii) مساوی الساقین مثلث میں بنیادی زاویہ ہوتا ہے_________۔
(iv) اگر مثلث کے ہر زاویہ کے پیائش $60°$ ہے، تو پھر مثلث ہے________۔
(v) ایک قائمۃ الزاویہ مثلث میں، قائمۃ الزاویہ کے مخالف ضلع کہلاتا ہے_____۔
(vi) دائیں مثلث میں حادۃ الزاویہ کے مجموعہ کی پیائش ہے______۔

4. متعلقہ حروف ا،ب،ج یا د پر دائرہ لگائیں درست جواب کے لیے:

(i) مندرجہ ذیل میں سے کون دو مثلثوں کے متماثل ہونے لیے کافی شرط نہیں ہے؟

(ا) ز-ض-ز ≅ ز-ض-ز (ب) وتر-ض ≅ وتر-ض

(ج) ض-ز-ز ≅ ض-ز-ز (د) ز-ز-ز ≅ ز-ز-ز

(ii) a,b,c میں اگر ΔABC تو ∠A ≅ ∠B زاویہ کا ناصف مثلث کو متماثل مثلث میں تقسیم کرے گا۔

(ا) ∠A (ب) ∠B (ج) ∠C (د) کوئی بھی ایک سائیڈ

(iii) ______ کا وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم نہیں کرتا:

(ا) مستطیل (ب) زوزنقہ (bapezium)

(ج) متوازی الاضلاع (د) مربع

(iv) حادۃ زاویہ مثلث میں کتنے حادۃ الزاویہ ہوتے ہیں۔

(ا) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 2 سے زیادہ

خلاصہ

اس یونٹ میں ہم نے درج ذیل مسئلے بیان اور ثابت کیے:

- دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور دو زاویے دوسری مثلث کے متناظرہ ضلع اور زاویوں کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔ (ز-ض-ز ≅ ز-ض-ز)
- اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے مخالف اضلاع بھی متماثل ہوتے ہیں۔
- دو مثلثوں کی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسری مثلث کے متناظرہ تین اضلاع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔ (ض-ض-ض ≅ ض-ض-ض)
- اگر دو قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی کسی مطابقت میں ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسری مثلث کے وتر اور متناظرہ ضلع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوں گی۔
- دو مثلثیں متماثل کہلاتی ہیں اگر ان کے درمیان کوئی مطابقت ہو اس طرح کہ تمام متعلقہ اضلاع اور مثلثیں تماثل ہوں۔ (ض-ض-ض)

یونٹ 10

متوازی الاضلاع اور مثلث

PARALLELOGRAM AND TRIANGLES

حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

مندرجہ ذیل مسائل کو ان کے نتائج کے ساتھ سمجھیں اور ان سے متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیے لاگو کریں۔

a) ثابت کر سکیں کہ ایک متوازی الاضلاع میں:
- مخالف اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔
- مخالف زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- دونوں وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

b) اگر کسی چوکور کے دو مخالف اضلاع متماثل اور متوازی ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔

c) اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے اضلاع کے متوازی اور لمبائی میں اس سے نصف ہوتا ہے۔

d) مثلث کے تینوں وسطانیے ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور یہ نقطہ ہر ایک وسطانیے کا نقطہ تثلیث ہوتا ہے۔

e) اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط ایک خط قاطعہ پر متماثل قطعات بنائیں تو وہ کسی دوسرے خط قاطعہ پر بھی متماثل قطعات بنائیں گی۔

تعارف:

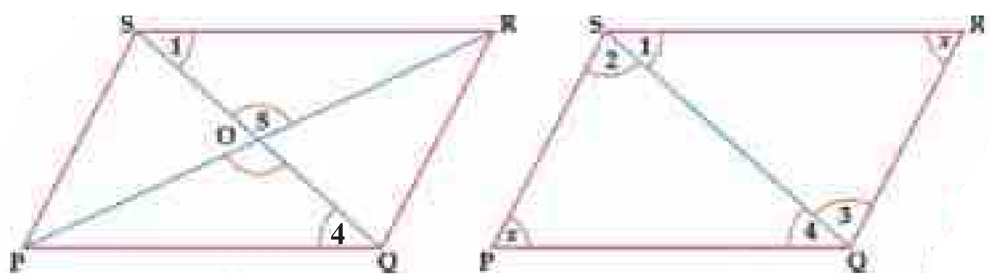
پچھلی جماعتوں میں طلبا نے بہت سے طرح کے متوازی الاضلاع، مثالث، مستطیل، مربع، معین اور ذوزنقہ وغیرہ کے بارے میں پڑھا اور ان کو بنایا۔ کثیر الاضلاع اشکال کے اضلاع اور زاویے سے متعلق اصطلاحات کو پڑھا۔ اس سبق میں بالخصوص مثلثوں اور ان کی مماثلت کے بارے میں اپنی معلومات کو بڑھائیں گے اور مسائل کو سمجھیں گی

10.1 متوازی الاضلاع اور مثالث

مسئلہ 10.1.1

ایک متوازی الاضلاع میں

- مخالف اضلاع باہم متماثل ہوتے ہیں
- مخالف زاویے باہم متماثل ہوتے ہیں۔
- دونوں وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں



شکل (ii)　　　　شکل (i)

معلوم:

^{m} PQRS

مطلوب:

1. $\overline{PS} \cong \overline{QR}$;　$\overline{PQ} \cong \overline{RS}$;
2. $\angle S \cong \angle Q$　$\angle P \cong \angle R$;
3. وتر $\overline{PR}$ اور $\overline{SQ}$ ایک دوسرے کو نقطہ O منقطع کرتے ہیں۔ (شکل ii)

عمل:

شکل (i) میں نقطہ S کو Q سے ملائیں۔

ثبوت:

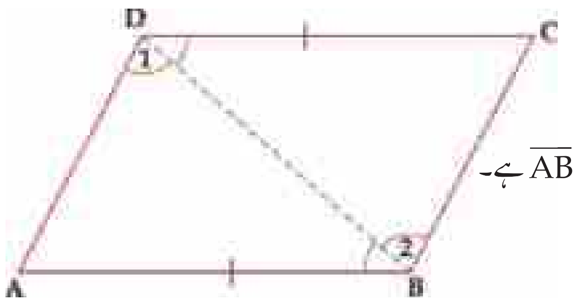
بیانات	دلائل
شکل (i) میں	
(1)	
$\overline{SQ}$, $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$ قطعہ خط ہے	خط کے متبادل زاویے
$m\angle 1 = m\angle 4$	
اسی طرح $m\angle 2 = m\angle 3$	$\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$
$\therefore m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	جمع کا موضوعہ
یا $\angle S \cong \angle Q$	زاویوں کی جمع کا موضوعہ
اسی طرح $\angle P \cong \angle R$	اوپر والے طریقے کے مطابق
لہٰذا مخالف زاویے متماثل ہیں۔	
(2)	
$\Delta SPQ \leftrightarrow \Delta QRS$	
$\angle 1 \cong \angle 4$ اور $\angle 2 \cong \angle 3$	اوپر (1) میں ثابت شدہ
$\overline{SQ} \cong \overline{SQ}$	مشترک
$\therefore \Delta SPQ \cong \Delta QRS$	ز-ض-ز ≅ ز-ض-ز
$\therefore \overline{PQ} \cong \overline{RS}$ اور $\overline{PS} \cong \overline{QR}$	متماثل مثلثوں کی وجہ سے
لہٰذا شکل (ii) میں مخالف اضلاع متماثل ہیں	
(3)	
$\Delta POQ \leftrightarrow \Delta ROS$	
$\angle 1 \cong \angle 4$	اوپر (1) میں ثابت شدہ
$\angle POQ \cong \angle SOR$	مخالف راسی زاویے
$\overline{PQ} \cong \overline{SR}$	اوپر (2) میں ثابت شدہ
$\therefore \Delta POQ \cong \Delta ROS$	ز-ز-ض ≅ ز-ز-ض
$\therefore \overline{PO} \cong \overline{OR}$ اور $\overline{OQ} \cong \overline{OS}$	متماثل مثلثوں کی بنا پر
$\overline{PR}$ اور $\overline{RS}$ وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتی ہیں۔	

Q.E.D

مشق 10.1

1. ایک خط جو متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع کو وسطی نقاط سے جوڑے وہ متوازی الاضلاع کی دوسری اضلاع کے متوازی ہوں گے۔
2. متوازی الاضلاع کے کسی بھی اضلاع کو اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔
3. ثابت کریں متوازی الاضلاع کی ایک ہی اضلاع کے دو زاویوں کے ناصف قائمہ زاویہ پر ملتے ہیں۔
4. چوکور کے وتر باہم تنصیف ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہوگا۔
5. متوازی الاضلاع کے کسی بھی اضلاع کے مخالف ہ زاویے برابر ہوتے ہیں۔

مسئلہ 10.1.2



اگر کسی چوکور کے دو مخالف اضلاع متماثل اور متوازی ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔

معلوم: چوکور ABCD میں $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ اور $\overline{CD} \quad \overline{AB}$ ہے۔

مطلوب: ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

عمل: نقطہ B کو نقطہ D سے ملائیں۔

ثبوت:

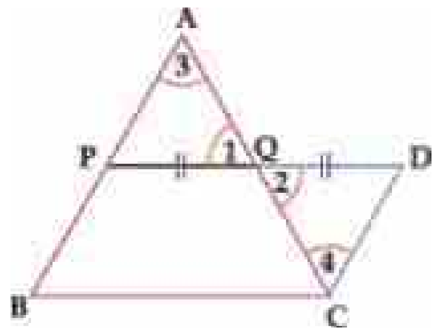
بیانات	دلائل
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BD}$ قاطع خط ہے۔	
$\therefore \angle ABD \cong \angle CBD$	خط کے متبادل زاویے
$\Delta ADB \leftrightarrow \Delta CBD$ میں	
i. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	(i) معلوم
ii. $\angle ABD \cong \angle CDB$	(ii) ثابت شدہ
iii. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	(iii) مشترک
$\therefore \Delta ADB \cong \Delta CBD$	ض-ز-ض ≅ ض-ز-ض
$\therefore \angle 1 \cong \angle 2$	متماثل مثلثوں کی بناپر
لیکن یہ متبادل مثالث ہیں	متبادل زاویوں کی تعریف سے
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	متبادل زاویے متماثل ہیں
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	معلوم
ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔	مخالف اضلاع متوازی ہیں۔

مشق 10.2

1. ثابت کریں کہ چوکور کے مخالف زاویے اگر متماثل ہیں تو وہ متوازی الاضلاع ہو گی۔
2. ثابت کریں کہ چوکور متوازی الاضلاع ہے اگر اس کے وتر باہم تنصیف کریں۔
3. اگر چوکور متوازی الاضلاع ہے، تو اس کے وتر دو متماثل مثالث بنائیں گے۔
4. اگر کسی چوکور کی ہر اضلاع کے زاویے سپلیمنٹری ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہو گی۔

مسئلہ 10.1.3

مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلاع کے متوازی اور لمبائی میں اس سے نصف ہوتا ہے۔



معلوم:

ΔABC میں P $\overline{AB}$ کا وسطی نقطہ ہے اور Q $\overline{AC}$ کا وسطی نقطہ ہے،
$\overline{PQ}$ قطعہ خط ہے جو ان کو جوڑتا ہے۔

مطلوب:

$\overline{PQ} \| \overline{BC}$ اور $m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$

عمل:

$\overline{PQ}$ کو نقطہ D تک اس طرح بنائیں کہ $\overline{PQ} \cong \overline{QD}$ نقطہ D اور C کو آپس میں ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta APQ \leftrightarrow \Delta CDQ$ میں	
i. $\overline{PQ} \cong \overline{QD}$	عمل
ii. $\angle 1 \cong \angle 2$	راسی زاویے
iii. $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$	معلوم
$\therefore$ $\Delta APQ \cong \Delta CDQ$	ض-ز-ض کا موضوعہ
$\therefore$ $\overline{AP} \cong \overline{CD}$ اور $\angle 3 \cong \angle 4$	متماثل مثالث کی بناپر

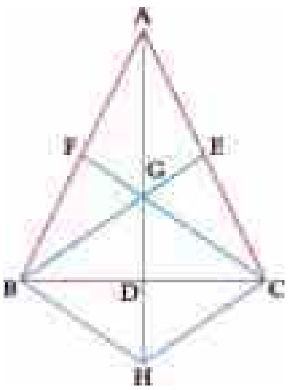
لیکن $\overline{PB} \cong \overline{AP}$	معلوم
$\therefore$ $\overline{PB} \cong \overline{CD}$	ہر ایک $\overline{AP}$ کے متماثل ہے۔
$\angle 3$ اور $\angle 4$ متبادل زاویے ہیں	متبادل زاویوں کی تعریف کے مطابق۔
$\therefore$ $\overline{AB} \quad \overline{CD}$	متبادل زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
لہذا $\overline{PB} \parallel \overline{CD}$	
PBCD ایک متوازی الاضلاع ہے	مخالف اضلاع $\parallel$ اور $\cong$ ہیں۔
$\therefore$ $\overline{PD} \cong \overline{BC}$ اور $\overline{PD} \parallel \overline{BC}$	متوازی الاضلاع کی مخالف اضلاع متوازی اور متماثل ہیں۔
$\therefore$ $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	$\overline{PD}$ اور $\overline{PQ}$ ایک ہی خط ہے۔
اور $m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$	$m\overline{PQ} = m\overline{QD} = \frac{1}{2} m\overline{PD}$

Q.E.D

مشق 10.3

1. اگر ایک قطعہ خط مثلث کی دو اضلاع کے واسطی نقاط کو آپس میں جوڑتا ہے اور وہ تیسری اضلاع کے متوازی ہوتا ہے اور اس کی لمبائی 4cm ہے تو تیسری ضلاع کی لمبائی کیا ہوگی؟
2. ثابت کیجئے کہ کسی چوکور کے مخالف اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعات خط باہم تنصیف کرتے ہیں۔
3. قطعات خط جو کہ کسی چوکور کے اضلاع کے واسطی نقاط کو آپس میں ملاتے ہیں ایک متوازی الاضلاع بنا سکتے ہیں، ثابت کیجئے۔
4. ثابت کیجئے کہ مثلث کے کسی اضلاع کے واسطی نقطہ میں سے گذرنے والا قطعہ خط جو کہ دوسرے ضلاع کے متوازی ہو وہ تیسرے اضلاع کو بھی تنصیف کرتا ہے۔
5. ثابت کیجئے کہ کسی مثلث کے تین اضلاع کو ان کے واسطی نقاط سے ملانے کے بعد جو چار مثالث بنیں گی وہ آپس میں متماثل ہوں گی۔

مسئلہ 10.1.4



مثلث کے تینوں وسطانیے ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور یہ نقطہ ہر ایک وسطانیے کا نقطہ تثلیث ہوتا ہے۔

معلوم: ΔABC جس میں وسطانیے $\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ نقطہ G پر ملتے ہیں۔

مطلوب: i) $\overline{AG}$ بڑھ کر نقطہ $\overline{BC}$ پر D کو تنصیف کرے گا۔

ii) G ہر وسطانیے کا نقطہ تثلیث ہے۔

عمل: $\overline{CH}$ اور $\overline{EB}$ کو ایک دوسرے کا متوازی بنائیں جو کہ بڑھ کر $\overline{AD}$ پر نقطہ H پر ملیں۔ اب نقطہ B اور H کو آپس میں ملائیں۔

ثبوت:

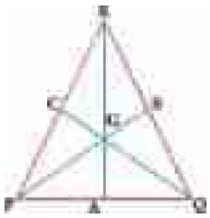
بیانات	دلائل
ΔACH, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ میں	معلوم
$\overline{EG} \parallel \overline{CH}$	عمل
$\therefore \overline{AG} \cong \overline{GH}$	عکس مسئلہ 10.1.3 کے مطابق
اسی طرح ΔABH میں	
$\overline{AG} \cong \overline{GH}$	ثابت شدہ
$\overline{AF} \cong \overline{FB}$	معلوم
$\overline{FG} \parallel \overline{BH}$	مسئلہ 10.1.3 کے مطابق
لہٰذا BGCH ایک متوازی الاضلاع ہے۔	مخالف اضلاع متوازی ہیں۔
وتر $\overline{BC}$ اور $\overline{GH}$ ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں	مسئلہ 10.1.1 کے مطابق
لہٰذا $\overline{BD} \cong \overline{DC}$, $\overline{GD} \cong \overline{DH}$	
ΔABC, $\overline{AD}$ کا وسطانیہ ہے	$\overline{BD} \cong \overline{DC}$ (اوپر ثابت شدہ)
اسی طرح $m\overline{AG} = m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$	$\overline{GD} \cong \overline{DH} \Rightarrow m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$
$\overline{AD}$, G کا نقطہ تثلیث ہے	$\overline{AG}$, $\overline{GD}$ کا دگنا ہے۔
اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ	اوپر کے نتائج سے ثابت شدہ۔
$\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ کا نقطہ تثلیث بھی G ہے۔	

Q.E.D

مشق 10.4

1. اگر ایک مثلث کے تین وسطانیے متماثل ہوں تو ثابت کریں کہ وہ مثلث ایک مساوی مثلث ہے۔

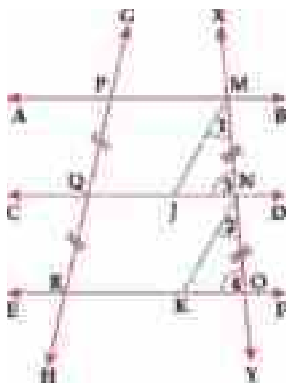
2. $\overline{PB}, \overline{QC}$ اور $\overline{RA}$ مثلث PQR کے وسطانیے ہیں جو کہ نقطہ G پر ملتے ہیں۔ یہ بتائیں کہ نقطہ G مثلث PQR کا مرکزِ ہندسی (centroid) ہے۔



3. دی گئی شکل میں $\overline{GD}$ کی لمبائی 2cm ہے معلوم کریں تو $\overline{AD}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

مسئلہ 10.1.5

اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط ایک خط قاطعہ پر متماثل قطعات بنائیں تو وہ کسی دوسرے خط قاطعہ پر بھی متماثل قطعات بنائیں گے۔



معلوم:

GH جو کہ $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{AB}$ کو بالترتیب نقطہ P, Q , R پر قطعہ کرتا ہے اس طرح کہ $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$ اسی طرح XY جو کہ $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{AB}$ کو بالترتیب نقطہ M, N, O پر قطعہ کرتا ہے۔

مطلوب: $\overline{NM} \cong \overline{NO}$

عمل:

$\overline{MJ}$ اور $\overline{NK}$ کو $\overleftrightarrow{GH}$ کے متوازی بنائیں جو $\overline{CD}$ اور $\overline{EF}$ دونوں کو بالترتیب نقطہ J اور K پر ملے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overline{PM} \parallel \overline{QJ}$	$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (معلوم)
اور $\overline{PQ} \parallel \overline{MJ}$	عمل
PMJQ ایک متوازی الاضلاع ہے۔	مخالف اضلاع متوازی ہیں۔
$\therefore \quad \overline{PQ} \cong \overline{MJ}$	متوازی الاضلاع کی مخالف اضلاع۔
اسی طرح QRKN بھی ایک متوازی الاضلاع ہے۔	$\overline{QN} \parallel \overline{RK}$ اور $\overline{QR} \parallel \overline{NK}$
$\therefore \quad \overline{QR} \cong \overline{NK}$	اوپر ثابت شدہ۔
لیکن $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$	معلوم

$\overline{MJ} \cong \overline{NK}$	مساوات کی متعدیت خاصیت
اب $\overline{MJ} \parallel \overline{NK}$	دونوں $\overline{GH}$ کے متوازی ہیں۔
$\therefore \angle 1 \cong \angle 2$	اضلاع کے متناظرہ زاویے۔
$\Delta MNJ \leftrightarrow \Delta NOK$ میں	
i. $\angle 1 \cong \angle 2$	i. اوپر ثابت شدہ
ii. $\angle 3 \cong \angle 4$	ii. اضلاع کے متناظرہ زاویے۔
iii. $\overline{MJ} \cong \overline{NK}$	iii. اوپر ثابت شدہ۔
$\therefore \Delta MNJ \cong \Delta NOK$	ز-ز-ض ≅ ز-ز-ض
$\therefore \overline{MN} \cong \overline{NO}$	مثالث کے متماثل ہونے کی بناپر

Q.E.D

مشق 10.5

1. مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے جو مثلث بنتی ہے وہ اصل مثلث کے برابر ہوتی ہے۔
2. وہ قطعہ خط جو ذوزنقہ کے دو غیر متوازی اضلاع کے وسطی نقاط کو آپس میں ملاتا ہے وہ متوازی اضلاع کے متوازی اور ان کی جمع کی رقم کا نصف ہوتا ہے۔
3. ہر قطعہ خط جو مثلث کی بنیاد کی راس سے بنایا جائے وہ اس خط کی تنصیف کرے گا جو باقی دو اضلاع کے وسطی نقاط کو آپس میں جوڑے۔

اعادہ مشق 10

1. خالی جگہ پُر کریں:

(i) متوازی الاضلاع میں، مخالف اضلاع ______ ہوتے ہیں۔
(ii) متوازی الاضلاع میں، مخالف زاویے ______ ہوتے ہیں۔
(iii) مثلث میں وسطانیے ______ ہوتے ہیں۔
(iv) متوازی الاضلاع میں، وتر ایک دوسرے کو ______ کرتے ہیں۔
(v) متوازی الاضلاع کے متناظرہ زاویے ______ ہوتے ہیں۔
(vi) مثلث کے وسطانیے ______ ہوتے ہیں۔
(vii) چوکور کے اندرونی زاویوں کی جمع کی رقم ______ ہوتی ہے۔

2. درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

(i) مربع کے وتر ایک دوسرے کے _____ ہوتے ہیں۔

(ا) عمود (ب) غیر متناظرہ (ج) متناظرہ (د) (ا) اور (ج) دونوں

(ii) چوکور کے اندرونی زاویوں کی جمع کی رقم _____ برابر ہوتی ہے۔

(ا) 2 قائمہ زاویہ (ب) 4 قائمہ زاویہ (ج) 3 قائمہ زاویہ (د) کوئی بھی نہیں

(iii) ایک قطعہ خط جو ΔABC کے خط $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کے وسطی نقاط کو جوڑتا ہے اس کی لمبائی 3.5cm ہے تو $m\overline{BC}$ ہو گی۔

(ا) 4.5cm (ب) 5.5cm (ج) 6cm (د) 7cm

(iv) مثلث ABC کے دو وسطانیے $\overline{BE}$ اور $\overline{AD}$ نقطہ G پر ملتے ہیں۔ اگر $m\overline{GD} = 1.7cm$ ہے تو $m\overline{AG}$ کیا ہو گا۔

(ا) 2.5 cm (ب) 8.85cm (ج) 3.4cm (د) 5.1cm

(v) متوازی الاضلاع ABCD کے دو زاویے $\angle A$ اور $\angle C$ کی جمع 130° ہے تو $m\angle B$ کیا ہو گا؟

(ا) 25° (ب) 115° (ج) 65° (د) کوئی بھی نہیں

(vi) اگر چوکور کے مخالف زاویے آپس میں برابر ہیں اور کوئی بھی قائمہ زاویہ نہیں ہے تو چوکور ہو گا۔

(ا) مربع (ب) متوازی الاضلاع (ج) ذوزنقہ (د) مستطیل

(vii) مرکزِ ہندسی کس کے میلاپ کا مشترکہ نقطہ ہو گا۔

(ا) مثلث کے وسطانیے (ب) متوازی الاضلاع کے وتر

(ج) مثلث کے زاویوں کے ناصف (د) مثلث کا عمودی ناصف

(viii) مثلث کے وسطانیہ پر نقطہ ہوتا ہے۔

(ا) اس کے کونیوں سے مساوی الفاصلہ (ب) اس کے اضلاع کے وسطانیوں سے مساوی الفاصلہ

(ج) مثلث کی ارتفاع سے مساوی الفاصلہ (د) کوئی بھی نہیں

خلاصہ

- متوازی الاضلاع کی مخالف اضلاع متماثل ہوتی ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے مخالف زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- سپلیمنٹری زاویوں کی خاصیت مسلسل زاویوں کے لیے بھی ہوگی۔
- متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کو باہم تنصیف کریں گے اور ہر وتر اس کو دو متماثل مثالث میں تقسیم کردے گا۔
- اگر متوازی الاضلاع کا زاویہ قائمہ زاویہ ہوگا تو اس کا ہر زاویہ قائمہ زاویہ ہوگا۔
- متوازی الاضلاع کے وتر اس کو چار متماثل مثالث میں تقسیم کرتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے زاویوں کی جمع 360 ہوتی ہے۔
- مثلث کے اندرونی زاویوں کی جمع 180 ہوتی ہے۔
- مثلث کے بیرونی زاویوں کی جمع 360 ہوتی ہے۔
- اگر تین یا تین سے زایہ متوازی خط متماثل حصوں کو تشکیل دیتے ہیں تو اس کے برعکس وہ متماثل حصوں کو دوسرے خطوں پر کاٹتے ہیں۔
- مثلث کے وسطانیے ہم نقطہ ہوتے ہیں اور ان کا میلاپ کا نقطہ ہر وسطانیہ کی تثلیث کے نقطے کے برابر ہوتا ہے۔
- وہ قطعہ خط جو مثلث کے دو اضلاع کے نقطہ وسطانیہ کو ملاتا ہے وہ تیسرے اضلاع کے متوازی ہوتا ہے اور اس کی لمبائی تیسرے اضلاع کی لمبائی کا نصف ہوتا ہے۔

یونٹ 11

خط اور زاویے کے ناصف

LINE BISECTORS AND ANGLE BISECTORS

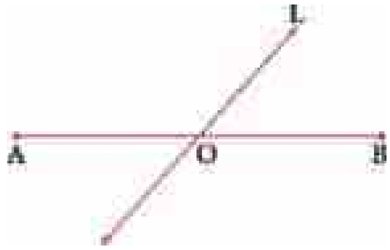
حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- مندرجہ ذیل مسائل کو سمجھ سکیں اور ان کے نتائج کو استعمال کر کے مشکلات کا حل نکال سکیں۔
- اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو گا۔
- اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو گا۔
- کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔
- اگر کسی زاویے کے اندرونے میں ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ نقطہ اس زاویے کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔
- کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

تعارف:

اس سبق میں ہم خط ناصف اور زاویے کے ناصف کے مسائل زیرِ بحث لائیں گے۔



تعریفیں:

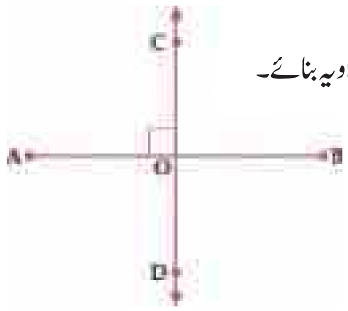
i. قطعہ کا ناصف

ایک خط جو کسی قطعہ خط کو دو برابر حصوں میں کاٹے، ناصف کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: دی گئی شکل میں قطعہ خط AB کا ناصف خط 'L' ہے جو کہ قطعہ خط 'O' کے وسطی نقطہ $\overline{AB}$ سے گذرتا ہے۔

ii. قطعہ خط کا عمودی ناصف:

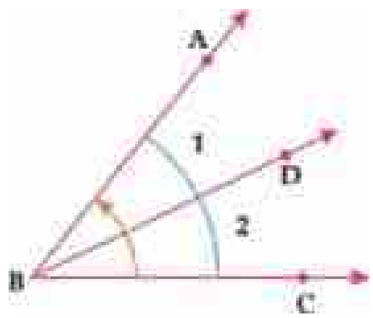
کوئی بھی خط، کسی قطعہ خط کا عمودی ناصف تب ہوگا جب وہ اس قطعہ خط کے ساتھ 90 کا زاویہ بنائے۔



مثال کے طور پر: دی گئی شکل میں $\overleftrightarrow{CD}$ قطعہ خط AB پر عمود ہے اور یہ وسطی نقطہ 'O' سے گذرتی ہے، تو $\overline{CD}$ ، $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے۔

iii. زاویے کا ناصف

کوئی خط یا قطعہ خط، زاویے کا ناصف تب کہلائے گا اگر وہ ایک زاویے کو دو برابر زاویوں میں تقسیم کر دے۔



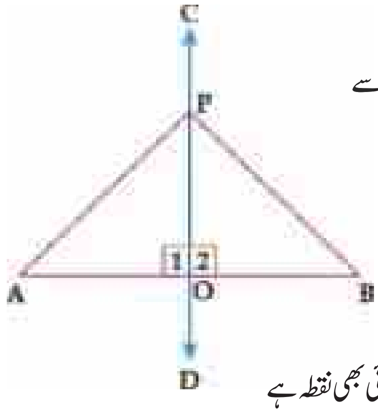
دی گئی شکل میں $\overrightarrow{BD}$ زاویے $\angle CBA$ کا ناصف ہے۔ $\overrightarrow{BD}$ زاویے $\angle CBA$ کو لہذا دو برابر زاویہ $\angle 1$ اور $\angle 2$ میں تقسیم کرتا ہے

لہذا $\angle 2 \cong \angle 1$.

مسئلہ 11.1.1

ثابت کریں:

اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوگا۔



معلوم:

$\overleftrightarrow{CD}$ عمودی ناصف ہے جو کہ $\overline{AB}$ کا نقطہ جو کہ P.O پر قطعہ کرایا ہے۔ P کوئی بھی نقطہ ہے

مطلوب:

$\overline{AP} \cong \overline{BP}$

ثبوت: لہٰذا P مساوی الفاصلہ ہے۔ A اور B کے

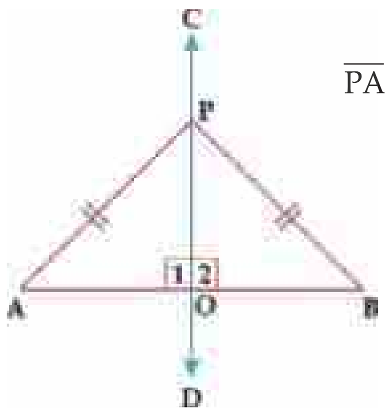
بیانات	دلائل
$\Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$	
i. $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	i۔ معلوم (O وسطی نقطہ ہے)
ii. $\angle 1 \cong \angle 2$	ii۔ معلوم (نقطہ O پر $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$)
iii. $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	iii۔ مشترک
$\therefore$ $\Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$	ض-ز-ض کا موضوعہ
$\therefore$ $\overline{AP} \cong \overline{BP}$	متماثل مثلث کی بناپر
لیکن $\overleftrightarrow{CD}$ پر اختیاری نقطہ ہے	فرض کردہ
اسی طرح کوئی بھی اور نقطہ $\overleftrightarrow{CD}$ پر A اور B سے مساوی الفاصلہ پر ہوگا۔	اوپر کے نتائج کی رو سے

Q.E.D

مسئلہ 11.1.2

ثابت کریں:

اگر کوئی نقطہ کسی قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو گا۔(عکس مسئلہ 11.1.1)



معلوم:

A اور B دو مقررہ نقطے ہیں اور نقطہ P حرکت پذیر نقطہ ہے اس طرح کے $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

مطلوب:

P نقطہ $\overline{AB}$ کے عمودی ناصف پر موجود ہے۔

عمل:

$\overline{AB}$ کو O نقطہ پر تنصیف کریں۔ نقطہ P اور O کو آپس میں ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta POA \leftrightarrow \Delta POB$	
i. $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	i۔ عمل
ii. $\overline{PA} \cong \overline{PB}$	ii۔ معلوم
iii. $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	iii۔ مشترک
$\Delta POA \cong \Delta BOP$	ض۔ض۔ض ___ ض۔ض۔ض
$\angle 1 \cong \angle 2$	متماثل مثالث کی بنا پر Δs ایک خط ہے (سپلیمینٹری موضوع)
لیکن $\angle 1$ اور $\angle 2$ سپلیمینٹری زاویے ہیں۔	اگر دو سپلیمینٹری زاویے آپس میں برابر
$\angle 1$ اور $\angle 2$ دونوں قائمہ زاویے ہیں۔	ہوں تو دونوں قائمہ زاویے ہیں۔
پس $\overline{PO}$ عمودی ناصف ہے۔ $\overline{AB}$ کا	$\overline{AO} \cong \overline{BO}$ اور $\overline{PO} \perp \overline{AB}$
پس ہر وہ نقطہ جو نقطہ A اور نقطہ B سے مساوی الفاصلہ ہو گا وہ AB کا عمودی ناصف ہو گا۔	اُوپر کے نتائج سے ثابت شدہ

Q.E.D

مشق 11.1

1- ثابت کریں کہ مثلث کے کوئی بھی دو اضلاع کے عمودی ناصف کا نقطہ قاطعہ اس مثلث کے تمام سروں سے مساوی الفاصلہ ہوگا۔

2- ثابت کیجئے کہ کسی دائرہ کا مرکز اس کے ہر ایک قطر کے عمودی ناصف پر ہوتا ہے۔

3- تین غیر ہم خط نقاط میں سے گذرنے والے دائرہ کا مرکز کہاں ہوگا اور کیوں؟

4- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو نقطہ A اور B پر کاٹتے ہیں تو ثابت کریں کہ وہ خط جو دائروں کے مرکز سے گزرے گا وہ خط $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہوگی۔

5- تین بازار A ، B اور C ایک سیدھ میں نہیں ہیں ان بازار کے تاجر ایک مقام پر مسجد بنانا چاہتے ہیں۔ جس کا فاصلہ ان تینوں بازاروں سے یکساں ہو۔ مسجد کے مقام کو متعین کر کے ثابت کریں کہ یہ مقام تینوں بازاروں سے مساوی الفاصلہ ہے۔

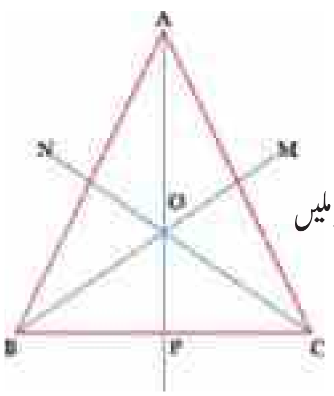
مسئلہ 11.1.3

ثابت کریں:

کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

معلوم: مثلث

مطلوب: مثلث کی اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہیں۔



عمل

$\overline{MO}$ اور $\overline{NO}$, کے عمودی ناصف $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ بنائیں جو کہ ایک دوسرے کو نقطہ O پر ملیں

$\overline{BC}$ کو نقطہ P پر تنصیف کریں۔ $\overline{OC}$,$\overline{OB}$ ،$\overline{OA}$ ،$\overline{OP}$ بنائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overline{NO}$ عمودی ناصف ہے $\overline{AB}$ $\overline{NO}$ کا $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے	عمل
$\therefore$ $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	$\overline{MO}$، $\overline{AC}$ کا عمودی ناصف ہے۔
اسی طرح $\overline{AO} \cong \overline{OC}$	ہر ایک $\overline{AO}$ سے متماثل ہے۔
$\therefore$ $\overline{OB} \cong \overline{OC}$	عمل
نقطہ P، $\overline{BC}$ کا وسطی نقطہ ہے۔ $\therefore$	
$\overline{OP}$، $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف ہے۔	مسئلہ 11.1.2 مطابق
پس مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہیں۔	ہر کوئی ایک ہی نقطہ پر مل رہا ہے۔

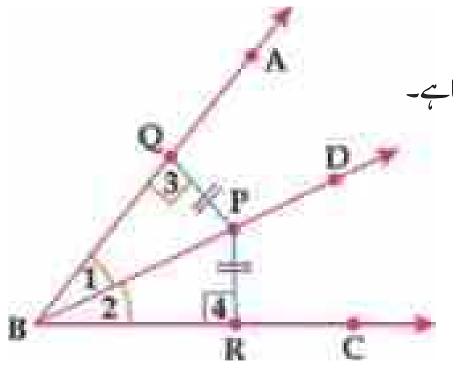
مشق 11.2

1. ثابت کریں کہ حادہ مثلث کا محیطی مرکز اس مثلث کے اندر ہی موجود ہوتا ہے۔
2. ثابت کریں مساوی الساقین ذوزنقہ کے چار اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔
3. ثابت کیجئے کہ مثلث کے ارتفاع ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

مسئلہ 11.1.4

ثابت کریں:

کسی زاویے کے ناصف پر ہر ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔



معلوم:

$\overrightarrow{BD}$، $\angle ABC$ کا ناصف ہے۔ P، $\overrightarrow{BD}$ پر کوئی نقطہ ہے

$\overline{PQ}$ اور $\overline{PR}$، $\overrightarrow{BC}$ اور $\overrightarrow{BA}$ بالترتیب عمود ہیں

مطلوب:

$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ (یعنی نقطہ P، $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے ہم فاصلہ ہیں)

ثبوت:

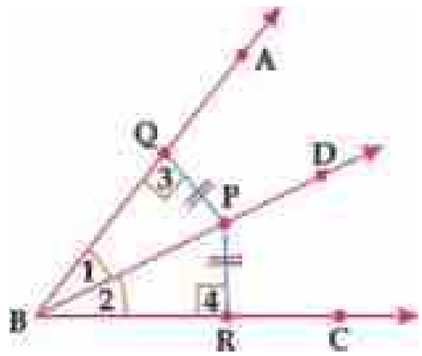
بیانات	دلائل
$\Delta PQB \leftrightarrow \Delta PRB$ میں	
i. $\angle 3 \cong \angle 4$	i. دونوں قائمہ زاویہ ہیں۔
ii. $\angle 1 \cong \angle 2$	ii. $\overrightarrow{BD}$ ناصف ہے (معلوم)
iii. $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	iii. مشترک
$\Delta PQB \cong \Delta PRB$	ز-ز-ض ≅ ز-ز-ض
$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	متماثل مثالث کی بناپر
لہذا P، $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے مساوی الفاصلہ ہے۔	

Q.E.D

مسئلہ 11.1.5

ثابت کریں:

اگر کسی زاویے کے اندرونے میں کوئی ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ نقطہ اس زاویے کے ناصف پر واقع ہوتا ہے (عکس مسئلہ 11.4)



معلوم:

P کے اندرونے میں کوئی بھی نقطہ $\overrightarrow{BD}$ ایسے لیا گیا ہے کہ وہ اس کے بازوؤں $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے مساوی $\angle ABC$, الفاصلہ ہے۔ لہٰذا $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ اور $\overline{PQ} \perp BA$ اور $\overline{PR} \perp \overrightarrow{BC}$

مطلوب:

$\angle 1 \cong \angle 2$, $\overrightarrow{BD}$ جو کہ $\angle ABC$ کا ناصف ہے۔

ثبوت:

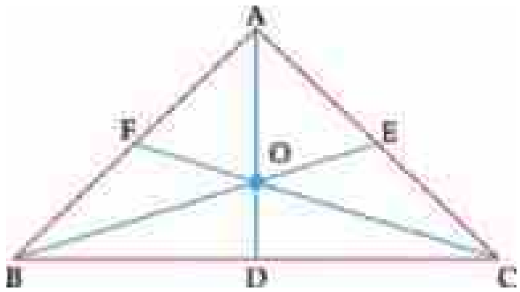
بیانات	دلائل
$\Delta PQB \leftrightarrow \Delta PRB$ میں	قائمہ زاویہ مثلث کے متنا
i. $\angle 3 \cong \angle 4$	i. دونوں قائمہ زاویہ ہیں۔
ii. $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	ii. معلوم
iii. $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	iii. مشترکہ وتر
$\Delta PQB \cong \Delta PRB$	قائمہ زاویہ مثلث میں وتر-ضلع ≅ وتر-ضلع
$\angle 1 \cong \angle 2$,	متماثل مثالث کی بناپر
لہٰذا $\overrightarrow{BD}$، $\angle ABC$ کا ناصف ہے۔	ہر کوئی ایک ہی نقطہ پر مل رہا ہے۔

Q.E.D

مسئلہ 11.1.6

ثابت کریں:

کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔



معلوم:

مثلث ΔABC میں $\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ ، $\angle B$ اور $\angle C$ بالترتیب، ناصف ہیں جو کہ ایک دوسرے کو نقطہ 'O' پر کاٹتی ہیں۔

مطلوب:

$\angle A$، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف ہم نقطہ ہونگے۔

عمل:

$\overline{OD} \perp \overline{BC}$ اور $\overline{OF} \perp \overline{AB}$ کھینچیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
متناظرہ طورپر $\overline{OD} \cong \overline{OF}$ ... (i) اسی طرح $\overline{OD} \cong \overline{OE}$ ... (ii) $\overline{OE} \cong \overline{OF}$ تو نقطہ O، $\angle A$ کے ناصف پر ہے اور نقطہ O، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف پر بھی ہے۔ ناصف پر بھی ہے۔ پس $\angle B$ $\angle A$ اور $\angle C$ کے ناصف نقطہ O پر ہم نقطہ ہیں۔	کسی زاویے کے ناصف پر ہر نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔ (i)اور(ii)سے ثابت شدہ۔ مسئلہ 11.1.5 معلوم

Q.E.D

مشق 11.3

1. دو مساوی الساقین مثلث اگر مشترکہ قاعدے پر ہیں تو ثابت کریں کہ وہ خط جو ان کے سروں کو آپس میں ملاتا ہے وہ مشترکہ قاعدے کو قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتی ہے۔
2. اگر کسی مثلث کے زاویے کا ناصف مخالف ضلع کو تنصیف کرتا ہو تو ثابت کریں کہ وہ مثلث مساوی الساقین ہے۔
3. ایک مساوی الساقین مثلث ΔABC، میں $m\overline{AB} = m\overline{AC}$ ہے ثابت کریں کہ کونے B اور C کے عمود مخالف اضلاع کے برابر ہیں۔

اعادہ مشق 11

1. ثابت کریں کہ اگر مثلث کے دو ارتفاع ہم نقطہ ہوں تو وہ مثلث مساوی الساقین مثلث ہو گی۔
2. ثابت کریں کہ ایک مثلث کے اندر لیا گیا نقطہ اس کی تینوں اضلاع سے مساوی الفاصلہ ہو۔ تو وہ مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔
3. نیچے دیئے گئے جملوں کے سامنے صحیح کے لیے 'T' اور غلط کے لیے 'F' سے نشاندہی کریں۔

(i) ضلع کی تنصیف کرنے کا مطلب اسے دو حصوں میں تقسیم کرنا ہوتا ہے۔

(ii) قائمہ زاویہ مساوی الساقین مثلث کے قاعدے پر ہر زاویہ 45 کا ہوتا ہے۔

(iii) متماثل اضلاع کی مثلث کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

4. درست جواب کی نشاندہی کریں۔

(i) حادہ زاویہ مثلث میں _____ حادہ زاویے ہوتے ہیں۔

a) ایک　　b) دو　　c) تین　　d) کوئی بھی نہیں

(ii) وہ نقطہ جو قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو وہ قطعہ خط کا _____ ہوتا ہے۔

a) عمودی ناصف　　b) عمود　　c) درمیان　　d) وسطی نقطہ

(iii) حادہ زاویہ مثلث کی اضلاع کا _____ مثلث کے اندر ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں۔

a) عمود　　b) عمودی ناصف　　c) منفرجہ　　d) حادہ

(iv) مثلث کے زاویوں کے ناصف _____ ہوتے ہیں۔

a) ہم نقطہ　　b) ہم خط　　c) نہیں ملتے　　d) نابرابر

خلاصہ

1. قطعہ خط کا ناصف قطعہ خط کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔
2. عمودی ناصف قطعہ خط کو دو برابر حصوں میں 90 پر کاٹتا ہے۔
3. قطعہ خط کے عمودی ناصف پر کوئی بھی نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔
4. کوئی بھی نقطہ اگر قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ قطعہ خط کے عمودی ناصف پر ہوتا ہے۔
5. مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔
6. کوئی بھی نقطہ اگر زاویے کے ناصف پر ہو تو وہ زاویے کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔
7. کوئی بھی نقطہ اگر زاویے کے اندر ہو اور زاویے کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ زاویے کے ناصف پر ہوتا ہے۔
8. زاویے کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

یونٹ 12

مثلث کے اضلاع اور زاویے

SIDES AND ANGLES OF A TRAINGLE

حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے طلبا درج ذیل تصورات پر دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ ثابت کر سکیں کہ :

- اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر نہ ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار (چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار سے) زیادہ ہو گی۔
- اگر کسی مثلث کے زاویے مقدار میں برابر نہ ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہو گا۔
- کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔
- کسی بھی خط کے بیرونی نقطہ سے خط تک کا عمودی فاصلہ، نقطہ اور خط کے درمیان تمام فاصلوں سے چھوٹا ہو گا۔

تعارف:

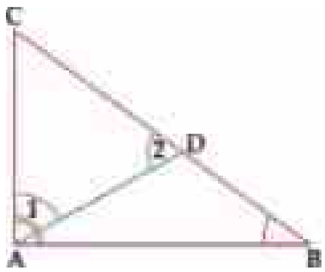
اس یونٹ میں ہم مثلث کے اضلاع اور زاویے کے مسائل پڑھیں گے اور ان مسائل کو حل کرنے کے لیے استعمال کریں گے۔

12.1 مثلث کے اضلاع اور زاویے۔

مسئلہ 12.1.1

ثابت کریں:

اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر نہ ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار (چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار سے) زیادہ ہوگی۔



معلوم

ΔABC میں $m\overline{BC} > m\,\overline{AC}$

مطلوب:

$m\angle A > m\angle B$

عمل:

$\overline{BC}$ پر نقطہ $\overline{AD}$ اس طرح لیا کہ $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ہم آہنگ ہوں
نقطہ A کو D سے ملایا۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
i) ΔACD میں $\overline{AC} \cong \overline{CD}$	i) عمل
ii) $\therefore m\angle CAD = m\angle CDA$	ii) مخالف اطراف ہم آہنگ ہیں
iii) لیکن $\angle CDA$ ΔABD - بیرونی زاویہ ہے	iii) بیرونی زاویے کی تعریف کے مطابق۔
iv) $\therefore m\angle CDA > m\angle B$	iv) مثلث کا بیرونی زاویہ سامنے والے غیر متصلہ اندرونی زاویے سے بڑا ہوگا۔
v) لیکن $m\angle A > m\angle CAD$	v) $\therefore m\angle A = m\angle CAD + m\angle DAB$
vi) $\therefore m\angle A > m\angle CDA$	vi) $\therefore m\angle CDA = m\angle CAD$
vii) $\therefore m\angle A > m\angle B$	vii) اوپر (iv) اور (vi) میں نابرابری کی خاصیت متعدیت

Q.E.D

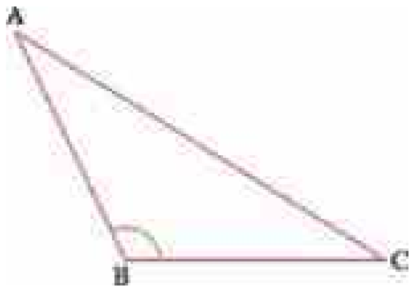
مندرجہ ذیل مثال اوپر دیئے گئے نظریے کو سمجھنے میں مدد دے گی۔

مثال 01:

ثابت کریں

کہ کسی مختلف الاضلاع مثلث میں سب سے بڑی لمبائی والے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار 60^o سے زیادہ ہوگی۔

معلوم:



$\overline{ABC}$ میں $m\overline{AC} > m\overline{AB}$ ∴ $m\overline{AC} > m\overline{BC}$

مطلوب:

$m\angle B > 60^0$

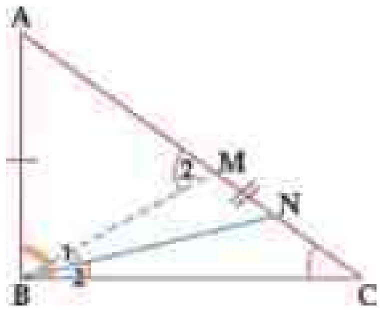
ثبوت:

بیانات	دلائل
ABC لیکن: $m\angle B > m\angle C$	(معلوم) $m\overline{AC} > m\overline{AB}$, $m\overline{AC} > m\overline{BC}$
$m\angle B > m\angle A$	(معلوم) $\angle A, \angle B$ ء $\angle C$ اندرونی زاویے ہیں
لہذا: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$	ABC ∴ $m\angle B > m\angle C$ and $m\angle B > m\angle A$
$m\angle B + m\angle B + m\angle B > 180^0$	(ثابت شدہ)
$3\, m\angle B > 180^0$	جمع کردہ دونوں اطراف کو 3 سے تقسیم کیا۔
لہذا: $m\angle B > \frac{180^0}{3}$ = $m\angle B > 60^0$	

Q.E.D

مسئلہ: 12.1.2

اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں برابر نہ ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہوگا۔



معلوم: مثلث ABC میں، $m\angle B > m\angle C$

مطلوب: $m\overline{AC} > m\overline{AB}$

عمل: $\angle ABM$ بنائیں اور $\angle C$ جو کہ $\angle MBC$,
$\overline{BN}$, کا ناصف ہے اس کو بنائیں لہذا $m\angle 1 = m\angle 2$

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\angle ANB$ کا بیرونی زاویہ ہے ΔCBN $\therefore$	
$m\angle ANB = m\angle C + m\angle 2$	بیرونی زاویہ کی تعریف کے مطابق
$= m\angle C + m\angle 1$	$m\angle 2 = m\angle 1$ (عمل)
$= m\angle ABM + m\angle 1$	$m\angle C = m\angle ABM$ (عمل)
$= m\angle ABN$	زاویے کے اضافے کے مفروضے کے تحت
$\therefore \overline{AB} \cong \overline{AN}$	$m\angle ANB = m\angle ABN$ (ثابت شدہ)
لہذا: $\therefore m\overline{AC} > m\overline{AB}$	$m\overline{AC} > m\overline{AN}$

Q.E.D

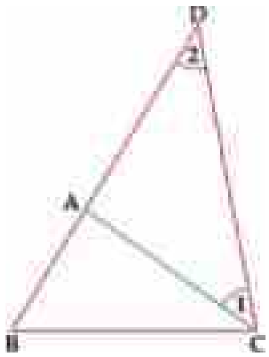
نتائج صریح:

(i) کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی باقی ہر دو اضلاع کی لمبائیوں سے بڑی ہوتی ہے۔

(ii) کسی منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے سامنے والا ضلع لمبائی میں ہر دیگر دو اضلاع سے لمبائی میں بڑا ہوتا ہے۔

مسئلہ: 12.1.3

کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔



معلوم: مثلث ABC

مطلوب:

i) $m\overline{AB}+m\overline{AC}>m\overline{BC}$

ii) $m\overline{AB}+m\overline{BC}>m\overline{CA}$

iii) $m\overline{AC}+m\overline{BC}>m\overline{AB}$

عمل:

BA کو نقطہ D تک اس بڑھائیں کہ نقطہ D کو C سے ملا دیں۔ $\overline{AD}\cong\overline{AC}$ اور $\overline{DC}$ بنائیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔADC میں $\overline{AD}\cong\overline{AC}$	عمل
$m\angle 1=m\angle 2$	متماثل اضلاع کے مخالف اطراف کے زاویہ
$m\angle BCD>m\angle 1$	$m\angle BCD=m\angle BCA+m\angle 1$
$m\angle BCD>m\angle 2$	
ΔBDC میں $m\overline{BD}>m\overline{BC}$	اعداد کی نابرابری کی خاصیت متعدیت
$m\overline{BD}=m\overline{AB}+m\overline{AD}$	بڑے زاویے کی مخالف اضلاع بڑی ہے۔
$=m\overline{AB}+m\overline{AC}$	$m\overline{AD}=m\overline{AC}$
$m\overline{AB}=m\overline{AC}>m\overline{BC}$	عمل
اس طرح ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں	$\overline{BD}$ کی مقدار رکھنے پر
$m\overline{AB}+m\overline{BC}>m\overline{AC}$ $m\overline{BC}+m\overline{AC}>m\overline{AB}$	اوپر دیے گئے عمل کے مطابق

Q.E.D

مندرجہ ذیل مثالیں اُوپر دیے گئے نظرئے کو سمجھنے میں مدد دیں گی۔

مثال 01: مندرجہ ذیل مثلث کے اضلاع کی لمبائیوں کے سیٹ ہیں۔ ان میں کس سیٹ سے مثلث بنائی جاسکتی ہے؟

(i) 3cm, 4cm, 5cm, (ii) 4cm, 5cm 4.5cm

(iii) 60mm, 80mm, 10cm (iv) 3cm, 4cm, 10cm

حل:

(i) 3cm, 4cm, 5cm

چونکہ:- $3 + 4 > 5$,$3 + 5 > 4$ $4 + 5 > 3$

دو اضلاع کی جمع کی قیمت تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہے اس لیئے دی گئی لمبائیوں کا سیٹ کسی مثلث کے اضلاع ہو سکتے ہیں۔

(ii) 4cm, 5cm 4.5cm

چونکہ: $4 + 5 > 4.5$, $5 + 4.5 > 4$ $4.5 + 3 > 4$

اس لیئے دی گئی لمبائیوں کا سیٹ کسی مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہو سکتی ہیں۔

(iii) 60mm, 80mm, 10cm

چونکہ: 10 mm = 1 cm so, 60 mm = 6 cm and 80 mm = 8 cm

اب: $8 + 10 > 6$ اور $6 + 10 > 8$, $6 + 8 > 10$

اس لیئے دی گئی لمبائیوں کا سیٹ مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہو سکتی ہیں اور یہ لمبائیاں کوئی مثلث تشکیل دے سکتی ہیں۔

مثال :02

اوپر دیئے گئے نظریے کو ذہن میں رکھتے ہوئے یہ فیصلہ کریں کہ کونسی لمبائیوں کے سیٹ ثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہو سکتی ہیں اور کسی مثلث کو تشکیل دے سکتی ہیں۔

حل:

(i) 2cm, 4cm, 7cm (ii)5.5cm, 5cm, 9.5cm

(i) 2cm, 4cm, 7cm

چونکہ: $2 + 4 < 7$, $4 + 7 > 2$ $7 + 2 > 4$

اس طرح یہ لمبائیاں کسی مثلث کو تشکیل نہیں دے سکتیں۔

(ii)5.5cm, 5cm, 9.5cm

چونکہ: $5.5 + 5 > 9.5$ ، $5 + 9.5 > 5.5$ $9.5 + 5.5 > 5$

اس طرح دی گئی لمبائیاں کسی مثلث کو تشکیل دے سکتی ہیں۔

سرگرمی:

اگر
a = 3 cm
b = 4 cm
c = 5 cm

تو بتایئے کہ Δ ABC بن سکتی ہے یا نہیں۔

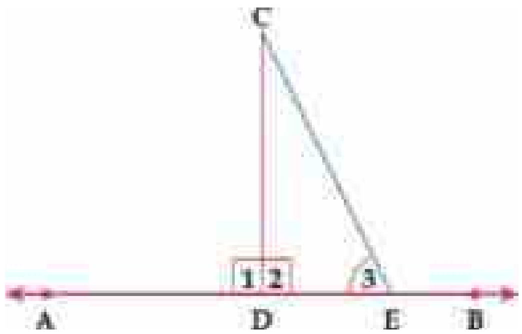
مسئلہ 12.1.4

ثابت کریں

کہ کسی بھی خط کے بیرونی نقطہ سے خط تک کا عمودی فاصلہ نقطہ اور خط کے درمیان تمام فاصلوں سے کم ہو گا۔

معلوم:

خط AB پر نقطہ C سے ایک عمود جو کہ خط AB پر نقطہ D پر ملتا ہے اور CE ایک اور قطعہ خط ہے جو خط AB پر نقطہ E پر ملتا ہے۔



مطلوب:

$m\overline{CD} < m\overline{CE}$

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\angle 1$, ΔCDE مثلث کا بیرونی زاویہ ہے $\therefore m\angle 1 > m\angle 3$	بیرونی زاویہ کی تعریف کے مطابق
	مثلث کا بیرونی زاویہ، ہر غیر متصل اندرونی زاویہ سے بڑا ہوتا ہے۔
$\therefore m\angle 2 > m\angle 3$	$m\angle 1 = m\angle 2$ (قائمہ زاویہ)
$\therefore m\overline{CE} > m\overline{CD}$	بڑے زاویہ کے سامنے بڑا ضلع ہوتا ہے
اس طرح یہ ثابت ہوتا ہے کہ $m\overline{CD}$ نقطہ C سے AB تک کا سب سے کم فاصلہ ہے۔	

Q.E.D

نوٹ: کسی خط اور ایک نقطہ (جو اس خط پر واقع ہو) کے درمیان کا فاصلہ صفر ہے۔

مشق: 12.1

1. نقطہ 0 مثلث ABC کا ایک اندرونی نقطہ ہے ثابت کریں:

$$m\overline{OA} + m\overline{OB} + m\overline{OC} > \frac{1}{2}(m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{CA}).$$

2. مثلث ABC میں اگر $\Delta ABC, m\angle B = 70^o$ ہو اور $m\angle C = 45^o$ ہو تو کون سا ضلع لمبائی میں سب سے بڑا ہو گا؟

3. اگر مثلث ABC میں $\Delta ABC, m\angle A = 55^o$ اور $m\angle B = 65^o$ ہو تو کون سا ضلع لمبائی میں سب سے چھوٹا ہو گا؟

اعادہ مشق 12

1. مندرجہ ذیل بیانات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی ( ) لگا کر کریں۔

(i) کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔ (درست/غلط)

(ii) کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کے درمیان کا فرق تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔ (درست/غلط)

(iii) خط کا کوئی بیرونی نقطہ اس خط کا ہم خط نقطہ ہو گا۔ (درست/غلط)

(iv) قائمۃ الزاویہ مثلث میں سب سے بڑا زاویہ 100^o کا ہوتا ہے۔ (درست/غلط)

(v) کسی خط پر عمود 90^o کا زاویہ بناتا ہے۔ (درست/غلط)

2. خالی جگہ پر کریں:

1. کسی بھی قائمۃ الزاویہ مثلث میں __________ مثلث کا سب سے لمبا ضلع ہو گا۔

2. قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ رکھنے والی اضلاع کی لمبائیوں کی جمع وتر کی لمبائی سے ______ ہوتی ہے۔

3. مثلث ABC $\Delta ABC, m\angle A = 50^o$ اور $m\angle B = 30^o$ ہو تو ضلع __________ باقی اضلاع سے لمبا ہو گا۔

4. کسی بھی چکور کے وتر کی لمبائی اس کے ملحقہ اطراف کی لمبائی کی جمع سے ہوتی ہے۔

3. درست جواب پر () کا نشان لگائیں۔

1. مساوی مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی 6cm ہے تو اس کے اوسط کی لمبائی 9cm سے ______ ہو گی۔

(ا) زیادہ (ب) برابر

(ج) کم (د) ان میں سے کوئی نہیں۔

خلاصہ

- اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر نہ ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار (چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار سے) زیادہ ہو گی۔
- اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں برابر نہ ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہو گا۔
- کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔
- کسی بھی خط کے بیرونی نقطہ سے خط تک کا عمودی فاصلہ، نقطہ اور خط کے درمیان تمام فاصلوں سے چھوٹا ہو گا۔

یونٹ 13

عملی جیومیٹری- مثلثیں

PRACTICAL GEOMETRY–TRIANGLES

حاصلات تعلیم:

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- ایک مثلث بنا سکیں جس کہ :
  - دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ معلوم ہو،
  - ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں،
  - جس کے دو اضلاع اور ان میں سے ایک ضلع کے متقابلہ زاویہ معلوم ہوں،(تینوں ممکن صورتیں)
- بنا سکیں:
  - ایک معلوم مثلث کے زاویوں کے ناصف،
  - عمود،
  - اضلاع کے عمودی ناصف،
  - مثلث کے وسطانیے ان کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کر سکیں
- ایک مثلث بنا سکیں جس کا رقبہ ایک معلوم چوکور کے رقبہ کے برابر ہو
- ایک مستطیل بنا سکین جس کا رقبہ ایک معلوم مثلث کے رقبہ کے برابر ہو
- ایک مربع بنا سکیں جس کا رقبہ ایک معلوم مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو
- ایک مثلث بنا سکیں جس کے قاعدے کی مقدار معلوم ہو اور جس کا رقبہ ایک معلوم مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو۔

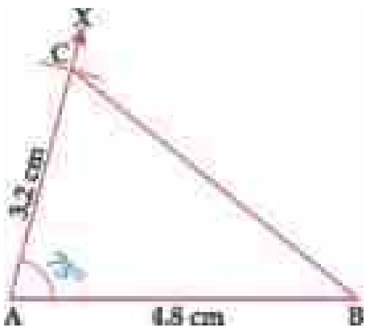
13.1 مثلثوں کی بناوٹ/ساخت:

13.1.1: ایک مثلث بنائیں جس میں معلوم ہو:

- دو اضلاع اور درمیانی زاویہ
- ایک ضلع اور دو زاویے
- دو اضلاع اور ان میں سے ایک ضلع کے متقابلہ زاویہ (تینوں ممکن صورتیں)

جب دو اضلاع اور درمیانی زاویہ معلوم ہو۔

مثال 01 ایک مثلث ABC بنائیں جس میں $m\overline{AB} = 4.8\,\text{cm},\ m\overline{AC} = 3.2\,\text{cm}$ اور $m\angle B = 70°$



عمل:

(i) $\overline{AB}$ کا قطعہ خط 4.8 cm بنائیں۔

(ii) نقطہ A پر XAB کا زاویہ 75° بنائیں

(iii) $\overline{AC}$ پر 3.2 cm $\overrightarrow{AX}$ قطع کریں

(iv) $\overline{BC}$ کھینچیں

لہٰذا ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔

جب ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں

مثال 01 ایک مثلث ΔXYZ بنائیں جس میں $m\overline{AB} = 5.5\,\text{cm},\ m\angle A = 75°$ اور $m\angle B = 40°$

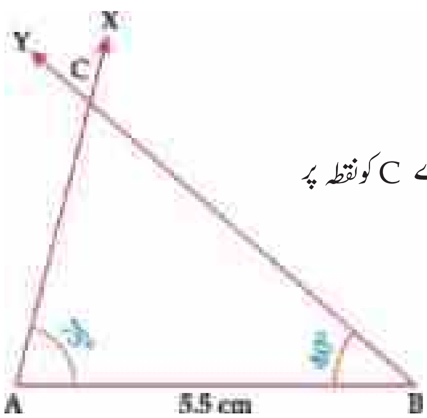
عمل:

(i) ایک مثلث $\overline{AB}$ بنائیں جس میں 5.5 cm

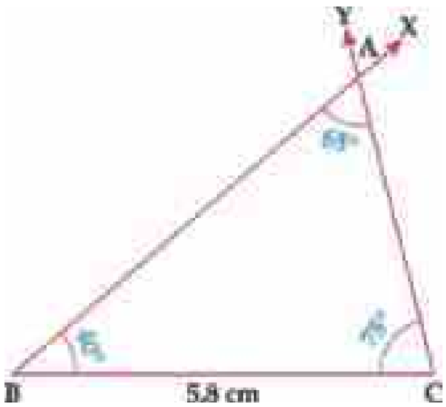
(ii) نقطہ A پر XAB کا زاویہ 75° بنائیں

(iii) نقطہ B پر YBA زاویہ 40° بنائیں، اس طرح کہ AX قطع کرے C کو نقطہ پر

لہٰذا ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔



مثال 02 ایک مثلث ΔXYZ بنائیں جس میں $m\angle A = 65^\circ$, $m\angle B = 40^\circ$ اور $m\overline{BC} = 5.8\,\text{cm}$



عمل: ہم جانتے ہیں کہ ΔABC میں

$$m\angle A + m\angle B + m\angle B = 180^\circ$$

یہاں $m\angle A = 65^\circ$ and $m\angle B = 40^\circ$

اسلیئے $m\angle C = 180^\circ - (m\angle A + m\angle B)$

$$= 180^\circ - (65^\circ + 40^\circ)$$
$$= 180^\circ - 105^\circ$$
$$= 75^\circ$$

اب ہم مشترک بنائیں گے جس میں

$m\overline{BC} = 5.8\,\text{cm}$, $m\angle B = 40^\circ$ اور $m\angle C = 75^\circ$

(i) $\overline{BC}$ 5.8 cm کھینچیں

(ii) نقطہ B, $XBC = 40^\circ$ کا زاویہ بنائیں

(iii) نقطہ C, $m\angle YCB = 75^\circ$ بنائیں

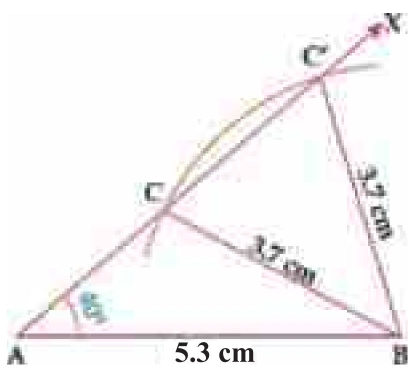
(iv) غیر مشترک بازو BX ایک دوسرے کو نقطہ CY پر کاٹتے ہیں لہٰذا A, مطلوبہ مثلث ہے۔

جب دو اضلاع اور ان میں سے ایک ضلع کے متقابلہ زاویہ معلوم ہوں (تینوں ممکن صورتیں)

صورت I:

مثال 01 ایک مثلث ABC بنائیں جس میں $m\overline{AB} = 5.3\,\text{cm}$ اور $m\angle A = 40^\circ$, $m\overline{BC} = 3.7\,\text{cm}$

عمل:



(i) $\overline{AB}$ 5.3 cm کھینچیں

(ii) نقطہ A, BAX بنائیں

(iii) نقطہ B کو مرکز مان کر رداس 3.7cm کا قوس بنائیں

جو AX 40° C اور C' کو نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

(iv) $\overline{BC'}$ اور $\overline{BC}$ کھینچیں

ΔABC' اور ΔABC مطلوبہ مثلثیں ہیں۔

صورت II:

مثال 02 ایک مثلث DEF بنائیں جب $m\angle E = 30^\circ$ اور $m\overline{DE} = 5.6\,cm,\ m\overline{DF} = 2.5\,cm$

عمل:

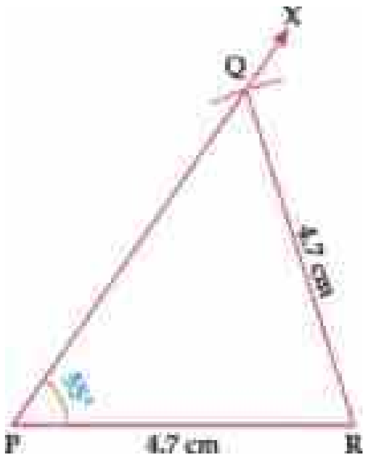
(i) $\overline{DE}$ کا قطعہ خط 5.6 cm بنائیں۔

(ii) نقطہ E 40° DEX بنائیں۔

(iii) نقطہ D کو مرکز مان کر رداس 2.5 cm, کا قوس بنائیں جو EX کو کسی بھی نقطہ پر قطع نہ کرتا ہو۔اس صورت میں کوئی مثلث نہیں بن سکتا جو معلوم شدہ کی تصدیق کرے ۔

صورت III:

مثال 03 ایک مثلث PQR بنائیں جب $m\angle P = 55^\circ$ اور $m\overline{PR} = m\overline{QR} = 4.7cm$



عمل:

(i) $\overline{PR}$ کا قطعہ خط 4.7 cm بنائیں۔

(ii) نقطہ P کا زاویہ $\angle XPR$ 55° بنائیں"

(iii) نقطہ R کو مرکز مان کر رداس 4.7 cm, کا قوس بنائیں جو EX کو نقطہ Q پر قطع کرتا ہے۔

(iv) نقطہ R اور Q کو ملائیں۔

ΔPQR مطلوبہ مثلث ہے۔

نوٹ: مندرجہ بالا صورت i، صورت ii، اور صورت iii مبہم صورتیں کہلاتی ہیں۔

مشق 13.1

1. ΔPQR بنائیں جب کہ $m\angle Q = 35^\circ$ اور $m\overline{PQ} = m\overline{QR} = 4.6\ cm$

2. ΔABC بنائیں جب کہ $m\angle A = 65^\circ$ اور $m\overline{AB} = m\overline{AC} = 5.1\ cm$

3. ΔLMN بنائیں جب کہ $\angle M = 50^\circ$ اور $m\overline{LM} = 3.7\ cm,\ \ m\overline{MN} = 2.5\ cm$

4. ΔABC بنائیں جب کہ $\angle B = 110^\circ$ اور $m\overline{AB} = 3.5\ cm,\ \ m\overline{BC} = 2.7\ cm$

5. ΔXYZ بنائیں جب کہ $\angle Z = 80^\circ$ اور $m\ \overline{XY} = 4.1\ cm,\ \ m\overline{YZ} = 5\ cm$

6. درج ذیل میں ΔABC اور ΔDEF, ΔLMN بنائیں۔

(i) $m\overline{DE} = 5cm, m\angle D = 45°$ اور $, m\angle E = 60°$

(ii) $m\overline{LM} = 6cm, m\angle L = 75°$ اور $, m\angle M = 45°$

(iii) $m\overline{BC} = 5.8cm, m\angle A = 30°$ اور $, m\angle B = 45°$

7. ΔABC بنائیں جب اس کے دو اضلاع کی لمبائی اور اس میں سے ایک ضلع کے متقابلہ زاویہ معلوم ہو، جیسے کہ:

(i) $m\overline{AC} = 4.5cm, m\overline{BC} = 4.1cm$ اور $m\angle B = 75°$

(ii) $m\overline{BC} = 5cm, m\overline{AB} = 5.5\ cm$ اور $m\angle C = 70°$

(iii) $mAB = 5cm, m\overline{BC} = 5.5cm$ اور $m\angle A = 45°$

13.1.2: بنائیں

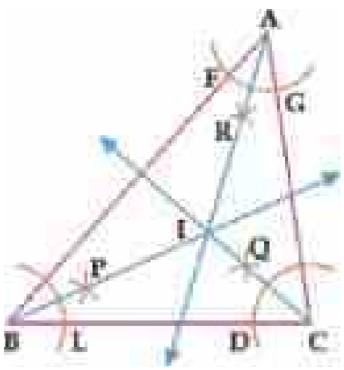
- زاویوں کے ناصف
- عمود
- اضلاع کے عمودی ناصف
- وسطانیے

(i) معلوم مثلث کے زاویوں کے ناصف بنائیں۔

مثال 01 ΔABC کے زاویوں کے ناصف بنائیں۔

معلوم: ABC ایک مثلث ہے۔ $\angle A, \angle B$ اور $\angle C$ اس کے زاویے ہیں۔

مطلوبہ: $\angle A, \angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف بنائیں۔



عمل:

(i) مثلث ABC بنائیں

(ii) نقطہ B کو مرکز مان کر کسی بھی رداس کی قوس بنائیں، جو اضلاع $\overline{BA}$ اور $\overline{BC}$ پر L اور M کاٹتا ہے۔

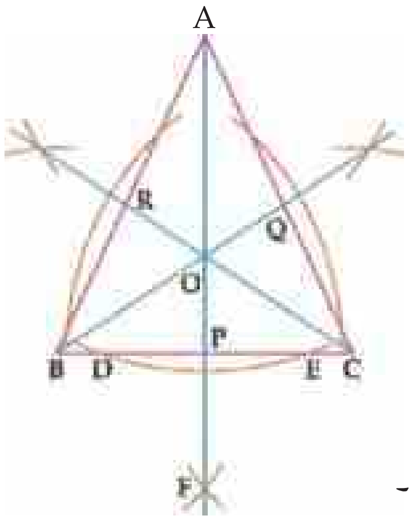
(iii) نقطہ L کو مرکز مان کر کسی بھی رداس کی قوس بنائیں۔

(iv) نقطہ M کو مرکز مان کر اور اسی رداس سے دوسری قوس بنائیں جو پچھلی قوس کو نقطہ P پر کاٹتا ہے۔

(v) نقطہ P to B سے ملائیں اور بنائیں BP $\angle B$ کا ناصف ہے۔

(vi) AR اور CQ بنانے کے لیے قدم (iii) سے (v) دہرائیں جو کہ $\angle A$ اور $\angle C$ کے ناصف ہیں، بالترتیب

(ii) معلوم مثلث کے عمود بنائیں۔



مثال 01 کوئی بھی مثلث ABC لیں اور اس کے عمود بنائیں

معلوم: ایک ΔABC A

مطلوبہ: ΔABC کے عمود بنائیں۔

عمل:

(i) مثلث ABC بنائیں۔

(ii) نقطہ A کو مرکز مان کر مناسب رداس کا قوس بنائیں جو $\overline{BC}$ کو نقطہ E اور D پر کاٹتا ہے۔

(iii) نقطہ D کو مرکز مان کر $\frac{1}{2}m\overline{DE}$ سے زیادہ کے رداس کا قوس بنائیں۔

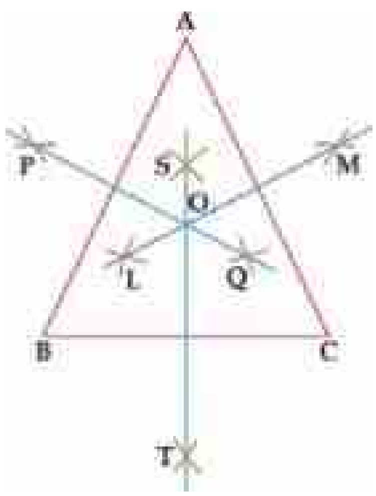
(iv) دوبارہ نقطہ E سے اسی رداس کا قوس بنائیں جو پہلی قوس کو نقطہ F کاٹے ۔

(v) F اور A کو ملائیں۔ اس طرح $\overline{AF}$ کہ قطع کرے $\overline{BC}$ کو نقطہ P پر۔ تب $\overline{AP}$ عمود ہو گا مثلث ΔABC پر A سے

(vi) قدم (ii) سے (v) دہرائیں اور $\overline{CR}$, اور $\overline{BQ}$ بنائیں، جو کہ راس ΔABC کا عمود ہے۔ لہٰذا C اور B وہ ان عمود کے سرے ہیں۔

پس $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ اور $\overline{CR}$ ان عمود کے سرے ہیں

(iii) معلوم مثلث کے عمودی ناصف بنائیں



مثال 01 مثلث ABC کے اضلاع کے عمودی ناصف بنائیں۔

معلوم: ایک مثلث ABC

مطلوبہ: اضلاع. $\overline{CA}$ اور $\overline{BC}$,$\overline{AB}$ کے عمودی ناصف بنائیں۔

عمل:

(i): مثلث ABC بنائیں۔

(ii) $\overline{AB}$ کے عمودی ناصف بنائیں، نقطہ B کو مرکز مان کر آدھے $\overline{AB}$ سے زیادہ کا رداس لیں اور $\overline{AB}$ کے دوسری طرف قوس بنائیں۔

(iii) اب A کو مرکز مان کر $\overline{AB}$ کی دوسری طرف اسی رداس کا قوس بنائیں جو پچھلی قوس کو Q اور P پر کاٹتا ہے۔

(iv) Q اور P کا عمودی ناصف ہے۔

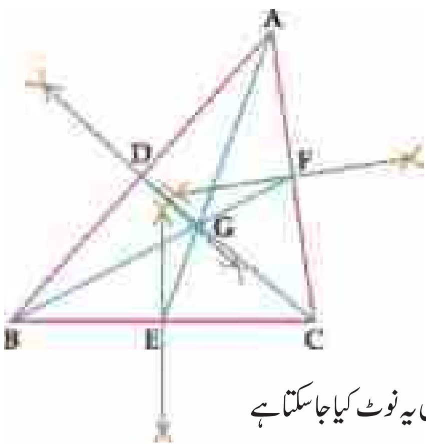
$\overline{AB}$,$\overline{PQ}$ کے عمودی ناصف ہے

(v) قدم (ii) سے (iv) دہرائیں اور $\overline{AC}$, اور $\overline{BC}$ بنائیں جو بالترتیب $\overline{LM}$, اور $\overline{ST}$ کے عمودی ناصف ہیں۔

لہٰذا $\overline{LM}$ اور $\overline{ST}$, $\overline{PQ}$ بالترتیب $\overline{AC}$, اور $\overline{BC}$,$\overline{AB}$ کے مطلوبہ عمودی ناصف ہیں ΔABC کے

(IV) معلوم مثلث کے وسطانیے بنائیں۔

مثال 01 کوئی بھی مثلث ABC لیں اور اس مثلث کے وسطانیے بنائیں۔



معلوم: ایک ΔABC A

مطلوبہ: ΔABC کے وسطانیے بنائیں۔

عمل:

(i) مثلث ABC بنائیں۔

(ii) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ کو بالترتیب نقطہ D, E اور F, پر کاٹیں۔

(iii) A کو B سے ,E; کو F سے اور C کو D کو ملائیں۔

لہٰذا $\overline{CD}$ اور $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ کے مطلوبہ وسطانیے ہیں جو نقطہ ΔABC پر ملتے ہیں یہ نوٹ کیا جا سکتا ہے کہ ہر مثلث کے وسطانیے ہم آہنگ ہوتے

ہیں(G ایک نقطے پر ملتے ہیں) اور ان کا نقطہ ہم آہنگی centroid کہلاتا ہے جو ان میں سے ہر ایک کو 2:1 پر تقسیم کرتا ہے۔

اصل پیمائش سے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{m\overline{AG}}{m\overline{GE}} = \frac{m\overline{BG}}{m\overline{GF}} = \frac{m\overline{CG}}{m\overline{GD}} = \frac{2}{1}$$

مشق 13.2

1. ایک Δ لیں اور اس کے وسطانیے بنائیں اور ثابت کریں کہ یہ ہم آہنگ ہیں

2. ایک Δ لیں اور اس کے عمود بنائیں اور ثابت کریں کہ یہ ہم آہنگ ہیں۔

3. ایک Δ لیں اور اس کے زاویون کے اندرونی ناصف بنائیں اور ثابت کریں کہ یہ ہم آہنگ ہیں۔

4. ایک مثلث ABC بنائیں جس میں $m\overline{AB} = 5$ cm, اور $m\overline{CA} = 4$ cm, $m\overline{BC} = 6$ cm کے ناصف کھینچیں B اور A

5. ایک مثلث PQR بنائیں جس میں $m\overline{PR} = 4.4$ cm اور $m\overline{QR} = 6.4$cm, $m\overline{PQ} = 5.7$cm اور راس Q اور R سے عمود بنائیں۔

6. مثلث STU بنائیں جس میں $m\overline{TU} = 7$ cm اور $\angle U = 30°$, $\angle T = 60°$ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف تلاش کریں اور ثابت کریں کہ یہ ہم آہنگ ہیں۔

7. دائیں مثلث ABC بنائیں جس میں $m\overline{CB} = 5$cm اور $\angle B = 45°$, $\angle C = 90°$ مثلث کے وسطانیے کھینچیں۔

8. ΔXYZ بنائیں اس کے تین وسطانیے کھینچیں اور ثابت کریں کہ یہ ہم آہنگ ہیں۔

   (i) $m\overline{YZ}$=4.4cm, $m\angle Y = 45°$ and $m\angle Z = 75°$

   (ii) $m\overline{XY}$=4.6cm, $m\ m\overline{XZ}$ = 4.6cm and $m\angle Y = 60°$

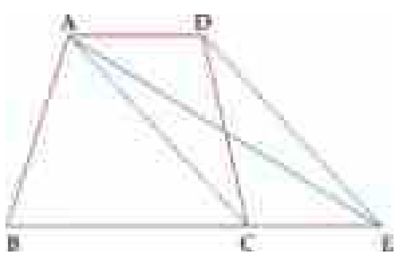
9. ΔKLM بنائیں جس میں $m\overline{MK}$=4.5cm اور $m\ \overline{LM}$ =5.2cm, $m\ \overline{KL}$ =4.8cm اسے کے عمود بنائیں اور تصدیق کریں کہ یہ ہم آہنگ ہیں۔

10. ΔPQR بنائیں جس میں $m\ \overline{PR}$=5.8cm, $m\ \overline{QR}$ = 6.5cm $m\ \overline{PQ}$ =7cm اس کے عمودی ناصف تلاش کریں اور کہ یہ ہم آہنگ ہیں۔

13.2: برابر رقبے والی اشکال

13.2.1: ایک مثلث بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم چوکور کے رقبہ کے برابر ہو۔

مثلاً: ایک مثلث بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم چوکور .ABCD کے برابر ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ، تمام مثلث کا رقبہ جو ایک جیسے قاعدے پر ہوں اور ان کا راس برابر ہو وہ اس خط پر ہوتی ہے جو قاعدے کے عمود پر ہو۔



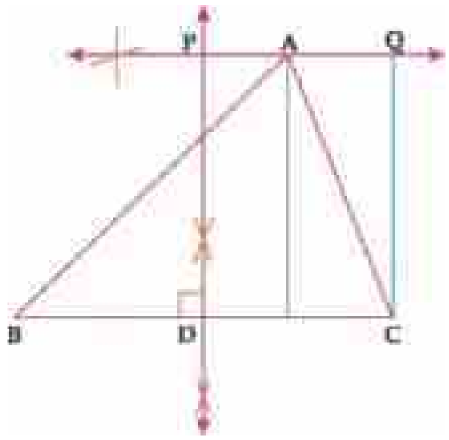
1. ABCD معلوم چوکور ہے۔

2. A کو C سے ملائیں

3. D, بنائیں جو $\overline{AC}$ کو $\overline{DE}$ کے متوازی ہو اور نقطہ E $\overline{BC}$ پر سے ملتا ہو۔

4. A کو E سے ملائیں، پھر ABE مطلوبہ مثلث ہے۔

13.2.2: ایک مستطیل بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم مثلث کے رقبہ کے برابر ہو۔

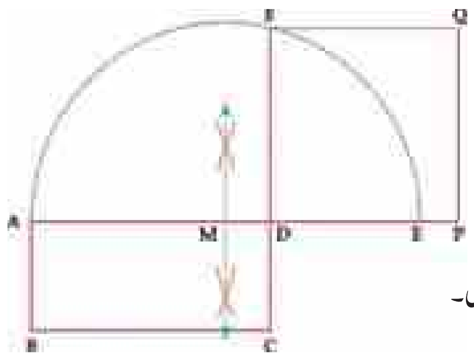


مثلاً: ایک مستطیل بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم ΔABC کے برابر ہو۔

1. ایک مثلث ABC بنائیں۔
2. $\overleftrightarrow{PD}$ پر عمودی ناصف $\overline{BC}$ بنائیں۔
3. A, سے ایک خط PQ بنائیں جو $\overline{BC}$ کے متوازی ہے۔
4. $m\overline{PQ} = m\overline{DC}$ لیں۔
5. پھر CDPQ مطلوبہ مستطیل ہے۔

13.2.3: ایک مربع بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو۔

مثلاً: ایک مربع بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم مستطیل ABCD کے برابر ہو۔

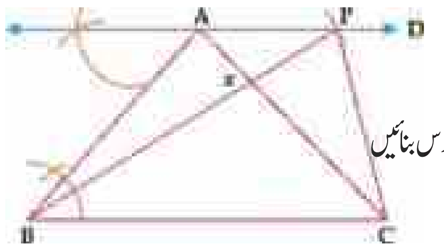


تعمیر کے مراحل درج ذیل ہیں

1. ABCD معلوم مستطیل ہے۔
2. $m\overline{DE} = m\overline{CD}$ بناتے ہوئے ضلع E سے $\overline{AD}$ بنائیں
3. $\overline{AE}$ کو M پر کاٹیں
4. مرکز M اور رداس $m\overline{AM}$ سے نیم دائرہ (semicircle) بنائیں۔
5. $\overline{CD}$ بنائیں تاکہ نیم دائرہ (semi-circle) نقطہ F پر ملے۔
6. $\overline{DF}$ پر ایک ضلع کے طور پر ایک مربع DFQP بنائیں یہ مطلوبہ مربع ہو سکتا ہے۔

13.2.4: ایک مثلث بنائیں جس کے قاعدے کی مقدار معلوم ہو اور جس کا رقبہ ایک معلوم مثلث کے رقبے کے مساوی ہو۔

تعمیر کے مراحل درج ذیل ہیں



1. ABC معلوم مثلث ہے۔

2. $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overline{BC}$ بنائیں

3. B کو مرکز مان کر اور رداس x, = اس طرح کے $m\overline{BC}=x$ ایک قوس بنائیں

جو $\overleftrightarrow{AD}$ at P پر کاٹتی ہے۔

4. $\overline{CP}$ اور $\overline{BP}$ کو ملائیں۔

5. پھر ΔBCP مطلوبہ مثلث ہے برابر قاعدی $\overline{BP} = x$ کے ساتھ اور رقبہ مساوی ہے ΔABC

مشق 13.3

1. ایک مستطیل بنائیں جس کے ملحقہ اضلاع بالترتیب 5cm اور 2.5cm ہوں۔ ایک مربع بنائیں جس کا رقبہ معلوم مستطیل کے برابر ہو۔

2. ایک مربع بنائیں جس کا رقبہ اس مستطیل کے برابر ہو جس کے ملحقہ اضلاع بالترتیب 2.2cm اور 4.5cm ہوں۔ مربع کے اضلاع کی پیائش کریں اور اس کا رقبہ تلاس کریں اور مستطیل کے رقبہ سے موازنہ کریں۔ اور پیائش سے ثابت کریں کہ مربع کا احاطہ مستطیل کے احاطے سے چھوٹا ہے۔

3. ایک مثلث بنائیں جس کا قاعدہ 4 cm ہو اور اگلے دو اضلاع 3.8cm اور 3.6cm ہوں۔ اس کو ایک برابر رقبہ کے مستطیل میں منتقل کریں۔

4. ایک مثلث بنائیں جس کا قاعدہ 6cm ہو اور اگلے دو اضلاع 6cm اور 5cm ہوں ایک مستطیل بنائیں جس کا رقبہ معلوم کے برابر Δ ہو۔

اعادہ مشق 13

1. خالی جگہ پُر کریں۔

(i) ایک مثلث کا ضلع جو سب سے بڑے زاویے کے متقابل ہو ________

(ii) قطعہ خط جو ایک مثلث کے راس سے ملتا ہو اور اس کے متقابل ضوع کے عمود یہ ہو کہلاتا ہے ________

(iii) ایک قطعہ خط جو ایک مثلث کے راس سے کھینچا ہوا ور اس کے متقابل ضلع کے درمیان نقطہ پر ملتا ہو کہلاتا ہے ________

(iv)ایک مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہوتے ہیں__________

(v)دو یا دو سے زیادہ مثلثیں ہم آہنگ کہلاتی ہیں اگر وہ مساوی الزاویہ ہوں اور ان کے متعلقہ اضلاع کی پیمائش________ ہو۔

2. درست جواب پر (✓) لگائیں۔

(i)ایک مثلث جس کے تمام تینوں اضلاع ہم آہنگ ہوں_____ مثلث کہلاتا ہے۔

(ا) سکیلین (scalene)(ب) قائمۃ الزاویہ (ج) مساوی الاضلاع (د) متساوی الساقین۔

(ii)ایک چوکور جس کا ہر زاویہ 90 کے برابر ہو اور تمام اضلاع ہم آہنگ ہو کہلاتا ہے_____

(ا)متوازی الاضلاع (ب) مستطیل (ج)ذوزنق (trapezium)(د)مربع

(iii)مثلث کے وسطانیے ہوتے ہیں۔

(ا)شریک لکیری (collinear)(ب)متماثل (ج)ہم آہنگ (د)متوازی۔

(iv)ایک مساوی الاضلاع مثلث کے_____ عمود ہم آہنگ ہوتے ہیں۔

(ا)دو (ب) تین (ج)چار (د)کوئی بھی نہیں

(v)مستطیل کے اختران (diagnols) ایک دوسرے کو____ کرتے ہیں۔

(ا)کاٹتے (bisect) (ب)سہ رخی (trisect)(ج) قائمۃ الزاویہ پر کاٹا (د)ان میں سے کوئی نہیں۔

(vi)مثلث کے_______ ایک دوسرے کو 2:1 کے تناسب پر کاٹتے ہیں۔

(ا)عمود (ب)زاویوں کے ناصف (ج)دائیں ناصف (د)وسطانیے

(vii)متساوی الساقین کے قاعدے کا ہر زاویہ_____ ہے، پھر راسی الزاویہ_____ ہو گا۔

(ا)30 (ب)60 (ج)90 (د)120.

(viii)اگر مثلث کے تین وسطانیے ہم آہنگ ہیں تو مثلث ______ ہو گا۔

(ا) قائمۃ الزاویہ (ب)مساوی الاضلاع (ج)متساوی الساقین (د)حادۃ الزاویہ۔

(ix)اگر مثلث کے دو_____ ہم آہنگ ہوں تو مثلث متساوی الساقین ہو گا۔

(ا)عمود (ب)وسطانیے (ج)دائیں ناصف (د)اضلاع

خلاصہ

- اس یونٹ میں ہم نے اشکال کی تعمیر اور متعلقہ تصورات پڑھے۔
- ایک مثلث بنائیں جس کے دو اضلاع اور درمیانی زاویہ معلوم ہو۔
- ایک مثلث بنائیں جس کا ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں"
- ایک مثلث بنائیں جس کے دو اضلاع اور ان میں سے ایک ضلع کے متقابلہ زاویہ معلوم ہو۔
- معلوم مثلث کے زاویوں کے ناصف بنائیں اور ان کی ہم آہنگی کی تصدیق کریں۔
- معلوم مثلث کے عمود بنائیں اور ان کی ہم آہنگی کی تصدیق کریں۔
- معلوم مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف بنائیں اور ان کی ہم آہنگی کی تصدیق کریں۔
- معلوم مثلث کے وسطانیے بنائیں اور ان کی ہم آہنگی کی تصدیق کریں۔
- ایک مثلث بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم چوکور کے رقبہ کے برابر ہو۔
- ایک مستطیل بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم مثلث کے رقبہ کے برابر ہو۔
- ایک مربع بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو۔
- ایک مثلث بنائیں جس کے قاعدے کی مقدار معلوم ہو اور جس کا رقبہ ایک معلوم مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو
- دو یا دو سے زیادہ خط ہم آہنگ کہلاتے ہیں اگر یہ کسی مشترکہ نقطہ سے گزریں ہوں اور یہ نقطہ نقطۂ ہم آہنگی (point of concurrency) کہلاتا ہے۔
- وہ نقطہ جہاں پر مثلث کے زاویوں کے اندرونی ناصف ایک دوسرے کو کاٹیں مثلث کا اندرونی مرکز (incentre) کہلاتا ہے۔
- مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف کے نقطہ ہم آہنگی محاصرہ مرکز (circum center) کہلاتا ہے۔
- مثلث کے وسطانیے سے مراد ایک قطعہ خط ہے جو مثلث کے راس کو متقابل ضلع کے درمیانی نقطہ سے ملاتا ہے۔
- عمودی مرکز (orthocenter) سے مراد مثلث کے تینوں عمود کا نقطہ ہم آہنگی ہے۔

یونٹ 14

رقبہ سے متعلق مسئلے

THEOREMS RELATED WITH AREA

یونٹ میں طلباء کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج (SlOs)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ :

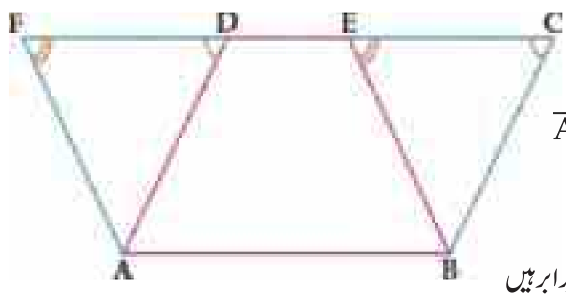
- مندرجہ ذیل نظریات Theorems کو ان کے نتائج کے ساتھ سمجھیں اور ان کو متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیے استعمال کریں۔
- ایک ہی قاعدہ پر واقع اور ایک جیسے متوازی خط کے درمیان میں واقع متوازی الاضلاع (یا ان کا ارتفاع برابر ہو) رقبہ میں برابر ہوں گی۔
- برابر قاعدوں پر واقع اور برابر ارتفاع والی متوازی الاضلاع اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔
- ایسی مثلثیں جو ایک قاعدہ پر واقع ہوں اور ان کے ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔
- ایسی مثلثیں جن کے قاعدے اور ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

تعارف:

ہم رقبہ سے متعلق مسئلے پڑھیں گے۔

14.1 رقبہ سے متعلق مسئلے۔

مسئلہ 14.1.1: ایک ہی قاعدہ پر متوازی الاضلاع اشکال جو قاعدہ خط اور اس کے متوازی کسی خط کے درمیان واقع ہوں (یا ان کے ارتفاع برابر ہوں) وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔



معلوم:

دو متوازی الاضلاع اشکال ABCD اور ABEF کا مشترکہ ہم اعدہ $\overline{AB}$ ہے اور وہ دو متوازی قطعات خط $\overline{DE}$ اور $\overline{AB}$ کے درمیان واقع ہیں۔

مطلوب:

متوازی الاضلاع ABCD اور ABEF رقبہ میں برابر ہیں

▰ABCD = ▰ABEF ·

ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔADF ↔ ΔBCE میں	
$m\overline{BC} = m\overline{AD}$ ... (i)	ABCD ‖^m کے بالمقابل اضلاع برابر ہیں
$m\angle BCE = m\angle ADF$ ... (ii)	ABCD ‖^m کے متعلقہ زاویہ
$\angle E \cong \angle F$ ... (iii)	ABEF ‖^m کے متعلقہ زاویہ
ΔBCE ≅ ΔADE	S.A.A ≅ S.A.A
▲BCE ≅ ▲ADF	ہم آہنگ اشکال رقبہ میں برابر ہیں
▰ABED + ▲BCE = ▰ABED + ▲ADF	ایک جیسے رقبہ کو دونوں طرف جمع کریں
لہٰذا ▰ABCD = ▰ABEF.	▰ABCD = ▰ABED + ▲ BCE ▰ABEF = ▰ABED + ▲ADF

Q.E.D

نتیجہ:

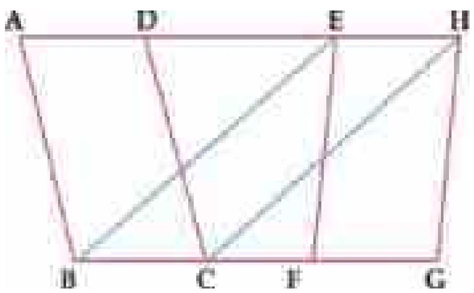
(i) ایک جیسے قاعدہ پر واقع متوازی الاضلاع اشکال اور مستطیل جن کا ارتفاع برابر ہو وہ رقبہ میں برابر ہوں گے۔

مسئلہ 14.1.2:

برابر قاعدوں پر واقع اور برابر ارتفاع والی متوازی الاضلاع اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔

معلوم:

متوازی الاضلاع اشکال ABCD اور EFGH برابر قاعدوں $\overline{FG}$ اور $\overline{BC}$ پر واقع ہیں اور ان کے ارتفاع بھی برابر ہیں۔



مطلوب: ▰ABCD = ▰EFGH

عمل: معلوم متوازی الاضلاع اشکال ABCD اور EFGH کو اس طرح رکھیں کہ ان کے برابر قاعدے $\overline{BC}$ اور $\overline{FG}$ ایک ہی خط پر واقع ہوں۔ C to H اور B to E

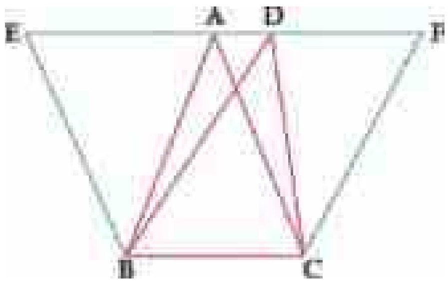
ثبوت:

بیانات	دلائل
ABCD "اور EFGH" ایک جیسے متوازی خطوط $\overline{AH}$ اور $\overline{BG}$ کے درمیان میں واقع ہیں۔	ان کے ارتفاع برابر ہیں (معلوم)
لہٰذا A, D, E اور H ایک خط مستقیم ہیں اور $\overline{BC}$ کے متوازی ہیں۔	معلوم
$m\overline{BC} = m\overline{FG}$	EFGH ایک متوازی الاضلاع ہے
$m\overline{BC} = m\overline{EH}$	متوازی خطوط کے قطعات متوازی خطوط ہی ہوتے ہیں
اب $m\overline{BC} = m\overline{EH}$ متوازی ہیں	کسی چوکور کے دو ضلعے متوازی اور برابر ہوں
لہٰذا EBCH ایک متوازی الاضلاع ہے	تو وہ متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔
اب ▰ABCD = ▰EBCH	مسئلہ 14.1.1
لیکن ▰EBCH = ▰EFGH	مسئلہ 14.1.1
لہٰذا ▰ABCD = ▰EFGH	(i) اور (ii) کی رو سے

Q.E.D.

مسئلہ 14.1.3:

ایسی مثلثیں جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور ان کے ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔



معلوم: ΔDBC اور ΔABC ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر واقع ہیں اور ایک جیسی متوازی خطوط کے درمیان میں واقع ہیں۔ $\overline{AD}$ اور $\overline{BC}$

مطلوب: $\blacktriangle ABC = \blacktriangle DBC$

عمل: کھینچیں جو $\overline{CA}$ $\overline{BE}$, پر ملتے ہیں جو $\overline{AD}$ پر بنا۔ E

پھر $\overline{BD}$ $\overline{CF}$ کھینچیں جو $\overline{AD}$ پر ملتے ہیں جو F پر بنا۔

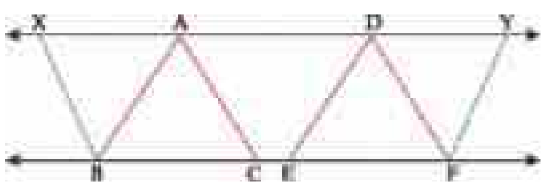
ثبوت:

بیانات	دلائل
BCAE ایک متوازی الاضلاع ہے	عمل کی رو سے
$\blacktriangle ABC = \frac{1}{2}$ (▰BCAE) ... (i)	متوازی الاضلاع $\overline{AD}$ کا وتر BCAE اسے دو برابر رقبہ کے مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔
اسی طرح BCFD ایک متوازی الاضلاع ہے	عمل کی رو سے
$\blacktriangle DBC = \frac{1}{2}$ (▰BCFD) ... (ii)	متوازی الاضلاع $\overline{CD}$ کا وتر BCFD سے دو برابر رقبہ کے مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔
▰BCAE = ▰BCFD ... (iii)	مسئلہ 14.1.1
$\blacktriangle ABC = \blacktriangle DBC$	(i),(ii) اور (iii) میں سے

Q.E.D

مسئلہ 14.1.4:

ایسی مثلثیں جن کے قاعدے اور اتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گے۔



معلوم: ΔABC اور ΔDEF کو اس طرح رکھیں کہ ان کے برابر قاعدے $\overline{BC}$ اور $\overline{EF}$ ایک جیسی خط پر موجود ہوں

مطلوب: $\blacktriangle ABC = \blacktriangle DEF$

عمل: $\overleftrightarrow{AD}$ اور $\overleftrightarrow{BF}$ کھینچیں اس طرح کے نقطے B, C, اور E, F پر موجود ہوں۔ کھینچیں $\overline{CA} \parallel \overline{BX}$ اور $\overline{ED} \parallel \overline{FY}$

تاکے نقطے X اور Y پر $\overleftrightarrow{AD}$ موجود ہوں۔

ثبوت:

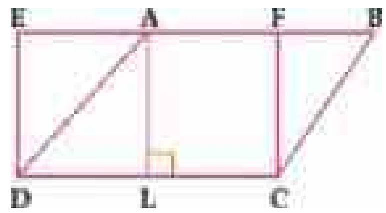
بیانات	دلائل
ΔABC اور ΔDEF ایک جیسی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں	ارتفاع برابر ہیں (معلوم
$\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{XY}$	
∴ ▰BCAX = ▰EFYD ... (i)	مسئلہ 14.1.2
لیکن , ▲ABC = $\frac{1}{2}$ (▰BCAX) ... (ii)	متوازی الاضلاع کے وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔
اور ▲DEF = $\frac{1}{2}$ (▰EFYD) ... (iii)	پچھلی دلائل کسی رو سے
∴ ▲ABC = ▲DBC	(i)،(ii)،(iii) کی رو سے

Q.E.D

نتائج:

ایسی مثلثیں جن کی راس (vertex) مشترکہ ہو اور ایک جیسی خط پر قاعدے بھی برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔

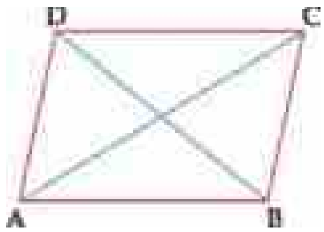
مشق 14.1



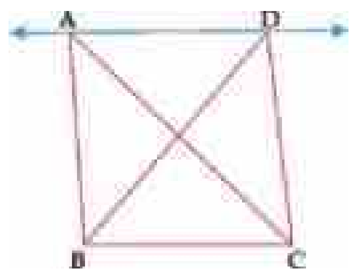
1. معلوم شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے اور EFCD ایک مستطیل ہے، اور $\overline{AL}\perp\overline{DC}$ ثابت کریں کہ

(i) ▰ABCD = ▰EFCD

(ii) ▰ABCD = $m\overline{DC}\times m\overline{AL}$.



2. معلوم سکل میں، اگر چوکور کے وتر اسے چار برابر رقبہ کے مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے تو ثابت کریں کے یہ متوازی الاضلاع اشکال ہے۔



3. معلوم شکل $\overline{AD}$ $\overline{BC}$ میں ABC قائمتہ الزاویہ ہے راس B پر جس میں $m\overline{BC}=7\text{ cm}$ اور $m\overline{AC}=11\text{ cm}$, اور ΔABC اور ΔBCD ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر واقع ہیں ΔBCD کا رقبہ تلاش کریں۔

4. ثابت کریں کہ ایک مثلث کا وسطانیہ اسے دو برابر رقبہ کے مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔

5. ثابت کریں کہ قطعہ خط جو مستطیل کے بالمقابل اضلاع کے درمیانی نقطے پر ملتا ہے، اسے دو برابر مستطیل میں تقسیم کرتا ہے۔

6. اگر دو متوازی الاضلاع جن کا رقبہ برابر ہو اور ان کے قاعدے ایک جیسے یا برابر ہو تو ان کے ارتفاع برابر ہوں گی۔

7. ثابت کریں کہ مساوی الاضلاع مثلث کے زاویوں کے ناصف اسے دو برابر رقبہ کے مثلث میں تقسیم کرتا ہے۔

8. ھابت کریں کہ معین (rhombus) کے وتر اسے چار برابر رقبہ کے مثلث میں تقسیم کرتے ہیں۔

اعادہ مشق 14

1. درست کے لیے 'د' اور غلط کے لیے 'غ' لگائیں درج ذیل میں ہر کسی کے آگے۔

(i) بند اشکال کے رقبہ سے مراد اشکال کے حد خطوط سے بند کیا ہوا علاقہ ہے۔ (د/غ)

(ii) مستطیل کا وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔ (د/غ)

(iii) متماثل اشکال رقبہ میں برابر نہیں ہوتیں۔ (د/غ)

(iv) متوازی الاضلاع کا رقبہ قاعدہ اور اونچائی کے ضرب کے برابر ہے۔ (د/غ)

(v) مثلث کے وسطانیے سے مراد راس سے بالمقابل ضلع (قاعدہ) کے عمود ہے۔ (د/غ)

(vi) دو متوازی خطوط کے درمیان عمودی فاصلہ کبھی کبھی مختلف بھی ہو سکتا ہے۔ (د/غ)

(vii) راس سے کھینچا ہوا ارتفاع ہمیشہ بالمقابل ضلع کو کاٹتا ہے۔ (د/غ)

(viii) دو مثلثیں رقبہ میں برابر ہوں گی اگر ان کے قاعدے اور ارتفاع ایک جیسے ہوں۔ (د/غ)

2. درست جواب پر (✓) لگائیں۔

(i) اگر دو خط کے درمیان عمودی فاصلہ برابر ہو تو خط ______ ہوں گی۔

(ا) ایک دوسرے کے عمود پر　　(ب) ایک دوسرے کے متوازی

(ج) ایک دوسرے کو کاٹتی۔　　(د) ان میں سے کوئی نہیں

(ii) اگر دو مثلثیں رقبہ میں برابر ہیں تو وہ ______ طور پر متماثل ہوں گی۔

(ا) غیر لازمی　(ب) لازمی　(ج) یقیناً　(د) ان میں سے کوئی نہیں

(iii) مثلث کا بالمقابل راس سے ضلع کے عمود پر ہو کہلاتا ہے ______

(ا) وسطانیے　(ب) عمودی ناصف　(ج) ارتفاع　(د) زاویوں کے ناصف

(iv) متوازی الاضلاع جس کے قاعدے اور ارتفاع ایک جیسے ہوں ہوتا ہے ______

(ا) متماثل　(ب) رقبہ میں برابر　(ج) مساوی　(د) یہ تمام

(v) دو متوازی الاضلاع قاعدے میں برابر ہیں ان کا رقبہ برابر ہوگا اگر ______

(ا) ان کے ارتفاع برابر ہوں (ب) ان کے ارتفاع ایک جیسے ہوں

(ج) وہ ایک جیسی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں (د) یہ تمام

(vi) ___ اور _____ قاعدہ اور ارتفاع میں برابر ہیں تو مثلثیں _____ ہوں گی۔

(ا) رقبہ میں برابر (ب) متماثل (ج) مساوی (د) ان میں سے کوئی نہیں۔

خلاصہ

- اس یونٹ میں ہم نے کچھ ضروری ترجیحات کا ذکر کیا، بیان کیا اور درج ذیل نظریات کو ان کے نتائج (اگر کوئی) کے ساتھ ثابت کیا۔
- ایک ہی قاعدہ پر متوازی الاضلاع اشکال جو قاعدہ خط اور اس کے متوازی کسی خط کے درمیان واقع ہوں (یا ان کے ارتفاع برابر ہوں) وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔
- برابر قاعدوں پر واقع اور ایک جیسی (یا برابر) ارتفاع والی متوازی الاضلاع اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔
- ایسی مثلثیں جو ایک قاعدہ پر واقع ہوں اور ان کے ارتفاع ایک جیسے (برابر) ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔
- ایسی مثلثیں جن کے قاعدے اور ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔
- اشکال کے رقبہ سے مراد بند اشکال کے حد خطوط سے بند کیا ہوا علاقہ ہے۔
- سہ رخی علاقہ سے مراد مثلث اور اس کے اندرونی حصے کا اتحاد ہے۔
- مثلث کے رقبہ سے مراد سہ رخی علاقہ (triangular region) کا رقبہ ہے۔
- مثلث کے ارتفاع اور اونچائی سے مراد قاعدہ کا اس کے متقابل راس سے عمودی فاصلہ ہے۔

یونٹ 15

مثلث کے اضلاع کا عکس/تخمینہ

PROJECTION OF A SIDE OF A TRIANGLE

یونٹ میں طلباء کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ما حصل/نتائج (SLOs)

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

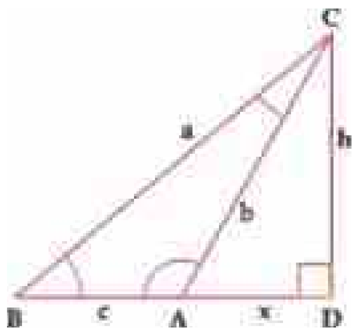
- زاویہ منفرجہ مثلث (obtuse angled triangle) میں، زاویہ منفرجہ کے بالمقابل اضلاع پر موجود مربع اس اضلاع پر جہاں زاویہ منفرجہ ہو برابر ہوتا ہے مربع کے مجموعہ کے ایک ضلع پر دوبار مستطیل کے ساتھ، اور دوسرے کا اس پر عکس۔
- کسی مثلث میں، حادۃ الزاویہ کے بالمقابل اضلاع پر موجود مربع اس اضلاع پر جہاں حادۃ الزاویہ ہو برابر ہوتا ہے مربع کے مجموعہ کے ایک ضلع پر دوبار مستطیل کے ساتھ اور دوسرے کا اس پر عکس۔
- کسی مثلث میں، کسی دو اضلاع پر موجود مربع کا مجموعہ تیسری طرف کے آدھے حصے کے دوگنا مربع کے برابر ہوتا ہے اور وسطانیے پر دوگنا مربع ہوتا ہے جو تیسری ضلع کو کاٹا ہے۔(اپولو نیئس مسئلہ)

15.1 مثلث کے اضلاع کا عکس

متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیے درج ذیل نظریات کو ان کے نتائج اور ان کے استعمالات کے ساتھ سمجھیں۔

مسئلہ 15.1.1:

زاویہ منفرجہ مثلث (obtuse angled triangle) میں، زاویہ منفرجہ کے بالمقابل اضلاع پر موجود مربع اس اضلاع پر جہاں زاویہ منفرجہ ہو برابر ہوتا ہے مربع کے مجموعہ کے ایک ضلع پر دوبار مستطیل کے ساتھ، اور دوسرے کا اس پر عکس۔



معلوم: ΔABC جس کے راس پر زاویہ منفرجہ ہے-A

مطلوب: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$

عمل: نقطہ $\overline{CD}$ پر ملنے والے $\overline{BA}$ پر عمود D کھینچیں،

توپھر $\overline{AD}$ پر $\overline{BA}$ پر $\overline{AC}$ کا عکس ہے۔

$m\overline{BC} = a,\ m\overline{CA} = b$ اور $m\overline{AB} = c,\ m\overline{AD} = x,\ m\overline{CD} = h$

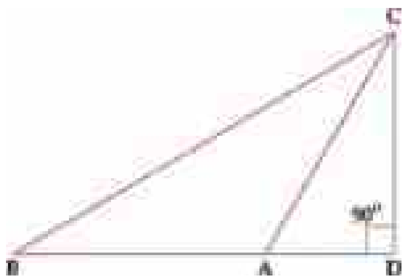
ثبوت:

بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ ΔCDA میں	
$m\angle CDA = 90^0$	عمل
تو $\left(m\overline{AC}\right)^2 = \left(m\overline{AD}\right)^2 + \left(m\overline{DC}\right)^2$	مسئلہ فیثاغورث سے
$b^2 = x^2 + h^2 \ \ldots \text{(i)}$,	قیاس سے
قائمۃ الزاویہ ΔCDB میں	
$m\angle CDA = 90^0$	عمل
تو $\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{BD}\right)^2 + \left(m\overline{CD}\right)^2$	مسئلہ فیثاغورث سے
$a^2 = \left(c + x\right)^2 + h^2$	$m\overline{BD} = m\overline{BA} + m\overline{AD}$
یا $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2 \ldots \text{(ii)}$	
$a^2 = c^2 + 2cx + b^2$	$b^2 = x^2 + h^2$
لہٰذا	
$(m\overline{BC})^2 = (m\overline{AB})^2 + 2(m\overline{AB})(m\overline{AD}) + (m\overline{AC})^2$	

Q.E.D

مثال: ΔABC میں جس کے راس A پر زاویہ منفرجہ ہے، اگر $\overline{CD}$ پر ایک ارتفاع ہے، جو نقطہ D سے ملتا ہے اور $\overline{BA}$ $m\overline{AC}=m\overline{AB}$

پھر $\left(m\overline{BC}\right)^2 = 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{BD}\right)$



معلوم: ایک ΔABC میں، $m\angle A$ منفرجہ ہے، $m\overline{AC} = m\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ $\overline{BA}$ پر بنایا ہوا ایک ارتفاع ہے، جو نقطہ D پر ملتا ہے۔

مطلوب: $\left(m\overline{BC}\right)^2 = 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{BD}\right)$

ثبوت:

دلائل	بیانات
	ΔABC میں
مسئلہ 15.1.1	$\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AB}\right)^2 + 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right) + \left(m\overline{AC}\right)^2$
معلوم ہے کہ $m\overline{AC} = m\overline{AB}$	$\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AB}\right)^2 + 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right) + \left(m\overline{AB}\right)^2$
$2m\overline{AB}$ مشترک لیں گے	$\left(m\overline{BC}\right)^2 = 2\left(m\overline{AB}\right)^2 + 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right)$
$m\overline{BD} = m\overline{AD} + m\overline{AB}$	$\left(m\overline{BC}\right)^2 = 2m\overline{AB}\left(m\overline{AB} + m\overline{AD}\right)$
	$\left(m\overline{BC}\right)^2 = 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{BD}\right)$

Q.E.D

مشق 15.1

.1 $\overline{AB}$ کی لمبائی معلوم کریں اور مثلث ABC کا رقبہ معلوم کریں، جب

(i) $m\overline{AC} = 3cm,\ m\overline{BC} = 6cm$ and $m\angle C = 120^0$

$m\overline{CD} = m\overline{BC}\ \cos\left(180^0 - m\angle C\right)$

(ii) $m\overline{AC} = 40mm,\ m\overline{BC} = 80mm$ and $m\angle C = 120^0$

$m\overline{CD} = m\overline{BC}\ \cos\left(180^0 - m\angle C\right)$

اشارہ: $\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AC}\right)^2 + \left(m\overline{AB}\right)^2 + 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right)$

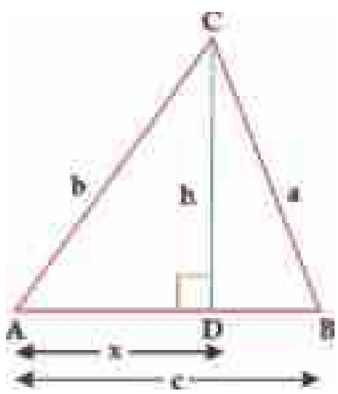
.2 ΔABC میں $m\overline{AC}$ کی لمبائی معلوم کریں جب $m\angle ABC = 135^0$ اور $m\overline{BC} = 6cm,\ m\overline{AB} = 4\sqrt{2}\ cm$
اگر ممکن ہو تو ΔABC کا رقبہ معلوم کریں۔

.3 ΔABC میں $m\overline{AC}$ کی لمبائی معلوم کریں جب $m\angle ABC = 135^0$ اور $m\overline{BC} = 6\sqrt{2}\ cm,\ m\overline{AB} = 8\ cm$

اگر ممکن ہو تو ΔABC کا رقبہ معلوم کریں۔

مسئلہ 15.1.2:

کسی مثلث میں، حادۃ الزاویہ کے بالمقابل اضلاع پر موجود مربع اس اضلاع پر جہاں حادۃ الزاویہ ہو برابر ہوتا ہے مربع کے مجموعہ کے ایک ضلع پر دو، بار مستطیل کے ساتھ اور دوسرے کا اس پر پروجیکشن۔



معلوم: ΔABC جس کے راس $\angle CAB$ پر حادۃ A ہو۔

$m\overline{BC} = a,\ m\overline{AC} = b$ and $m\overline{AB} = c$

عمل: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ بنائیں تو پھر $\overline{AD}$ پر $\overline{AC}$ on $\overline{AB}$

کا پروجیکشن ہے اور $m\overline{CD} = h$ اور $m\overline{AD} = x$

مطلوب:

$$\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AC}\right)^2 + \left(m\overline{AB}\right)^2 - 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right)$$

i.e. $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

ثبوت:

دلائل	بیانات
	قائمۃ الزاویہ ΔCDA میں،
عمل	$m\angle CDA = 90^0$,
مسئلہ فیثاغورث سے	تو $\left(m\overline{AC}\right)^2 = \left(m\overline{AD}\right)^2 + \left(m\overline{CD}\right)^2$
قیاس سے	i.e. $b^2 = x^2 + h^2$ ... (i)
	قائمۃ الزاویہ ΔCDB میں
عمل	$m\angle CDB = 90^0$
مسئلہ فیثاغورث سے	تو $\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{BD}\right)^2 + \left(m\overline{CD}\right)^2$
بناوٹ سے	i.e.
$\therefore\ m\overline{BD} = m\overline{AB} - m\overline{AD}$	$a^2 = (c-x)^2 + h^2$
	$a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$
	یا $a^2 = c^2 - 2cx + b^2$ ... (ii)
مساوات (i) کے استعمال سے	$a^2 = c^2 + b^2 - 2cx$
	لہٰذا
	$\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AC}\right)^2 + \left(m\overline{AB}\right)^2 - 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right)$

Q.E.D

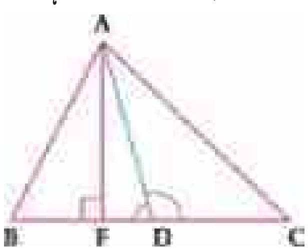
اپولو نیئس اور اپولو نیئس کا مسئلہ

اپولو نیئس ایک عظیم ماہر ارضیات اور ماہر فلکیات تھا۔

اب ہم بیان کرتے ہیں اور اس کے ایک معروف مسئلے کو ثابت کرتے ہیں "اپولو نیئس مسئلہ"

مسئلہ 15.1.3 (اپولو نیئس مسئلہ)

کسی مثلث میں، کسی دو اضلاع پر موجود مربع کا مجموعہ تیسرے ضلع کے آدھے حصے کے دگنا مربع کے برابر ہوتا ہے اور وسطانیے پر دگنا مربع ہوتا ہے جو تیسرے ضلع کو کاٹتا ہے۔ (اپولو نیئس مسئلہ)



معلوم: ΔABC میں، وسطانیہ $\overline{AD}$ نقطہ D پر $\overline{BC}$ کو کاٹتا ہے

اس طرح کہ $m\overline{BD} = m\overline{CD}$ ۔

مطلوب:

$$\left(m\overline{AB}\right)^2+\left(m\overline{AC}\right)^2=2\left(m\overline{BD}\right)^2+2\left(m\overline{AD}\right)^2$$

عمل:

$\overline{AF}\perp\overline{BC}$ کھینچیں۔

ثبوت:

دلائل	بیانات
	ΔADB میں
ΔADF قائمۃ الزاویہ مثلث ہے اور قائمۃ الزاویہ F پر ہے (عمل)	کیونکہ، $\angle ADB$ حادہ ہے
	تو،
مسئلہ 15.1.2 کے استعمال سے	$\left(m\overline{AB}\right)^2=\left(m\overline{BD}\right)^2+\left(m\overline{AD}\right)^2-2\left(m\overline{BD}\right)\left(m\overline{FD}\right)$...(i)
	اب ΔADC میں
	ہم $\angle ADC$ نقطہ D پر زاویہ منفرجہ ہے۔
	تو
$\angle ADB$ میں ضمیمہ	$m\overline{AC}^{\,2}=\left(m\overline{CD}\right)^2+\left(m\overline{AD}\right)^2+2\left(m\overline{CD}\right)\left(m\overline{FD}\right)$
مسئلہ 15.1.1 $m\overline{CD}=m\overline{BD}$	$\left(m\overline{AC}\right)^2=\left(m\overline{BD}\right)^2+\left(m\overline{AD}\right)^2+2\left(m\overline{BD}\right)\left(m\overline{FD}\right)$...(ii)
	لہٰذا
مساوات (i) اور (ii) کو جمع کریں	$\left(m\overline{AB}\right)^2+\left(m\overline{AC}\right)^2=2\left(m\overline{BD}\right)^2+2\left(m\overline{AD}\right)^2$

Q.E.D

مشق 15.2

.1 ΔABC میں $m\angle A=30^0$ ثابت کریں۔

$$\left(m\overline{BC}\right)^2=\left(m\overline{AC}\right)^2+\left(m\overline{AB}\right)^2-\sqrt{3}\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AC}\right)$$

.2 ΔABC میں، تخمینہ لگائیں $m\overline{BC}$ جب $m\angle A=60^0$ اور $m\overline{AB}=6cm\ , m\overline{AC}=5cm,$

.3 اضلاع 3cm, 4cm اور 5cm والی مثلث حادت ہے، منفرجہ ہے یا قائمۃ الزاویہ ہے۔

.4 ΔABC میں اضلاع $m\overline{BC}$ کے وسطانیے کی لمبائی معلوم کریں جبکہ $m\overline{AC}=3cm\ , m\overline{AB}=4cm$
اور $m\overline{BC}=6cm$

اعادہ مشق 15

.1 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) قائمۃ المثلث ΔABC میں $\left(m\overline{AB}\right)^2, +\left(m\overline{AC}\right)^2=$ __________

(ii) ΔABC میں دو اضلاع 4cm کے برابر ہیں یہ ______ مثلث کہلائے گی۔

(iii) ΔABC میں، جب $m\angle B=90^0$ $m\angle B=90^\circ$ پھر $\left(m\overline{AB}\right)^2+\left(m\overline{BC}\right)^2=$ __________

(iv) 17 cm اور 8cm, 15cm ____________ کے اضلاع ہیں۔

.2 ΔABC میں $m\angle C=120^0$ اور $m\overline{}=3cm, m\overline{BC}=6cm$ m نکالیں۔ $m\overline{AB}$

.3 ΔABC میں اضلاع $\overline{BC}$ کے وسطانیے کی لمبائی معلوم کریں جبکہ $m\overline{AC}=3cm\ , m\overline{AB}=4cm$
اور $m\overline{BC}=6cm$

خلاصہ

- زاویہ منفرجہ مثلث میں،زاویہ منفرجہ کے بالمقابل اضلاع پر موجود مربع اس اضلاع پر جہاں زاویہ منفرجہ ہو برابر ہوتا ہے مربع کے مجموعہ کے ایک ضلع پر دوبار مستطیل کے ساتھ،اور دوسرے کا اس پر عکس۔
- کسی مثلث میں ، حادہ الزاویہ کے بالمقابل اضلاع پر موجود مربع اس اضلاع پر جہاں حادت الزاویہ ہو برابر ہوتا ہے مربع کے مجموعہ کے ایک ضلع پر دوبار مستطیل کے ساتھ اور دسرے کا اس پر عکس۔
- کسی مثلث میں، کسی دو اضلاع پر موجود مربع کا مجموعہ تیسری طرف کے آدھے حصے کے دوگنا مربع کے برابر ہوتا ہے اور اوسطانیے پر دوگنا مربع ہوتا ہے جو تیسری ضلع کو کاٹتا ہے۔(اپوزیشن مسئلہ)

یونٹ 16

کوآرڈینیٹ جیومیٹری کا تعارف/تجزیاتی جیومیٹری

INTRODUCTION TO COORDINATE GEOMETRY / ANALYTICAL

یونٹ میں طلباء کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ما حصل/نتائج

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد، طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- کوآرڈینیٹ جیومیٹری کی وضاحت اور تعریف کر سکیں۔
- فاصلے کے فارمولا کا ثبوت دے سکیں اور اس کی مدد سے کارتیسی مستوی کے دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کر سکے۔
- فاصلے کے فارمولا کی مدد سے دو نقاط کے درمیان فاصلہ ماپ سکیں۔
- ہم خط نقاط کی تعریف کر سکیں اور ہم خط اور غیر ہم خط کے درمیان فرق کر سکیں۔
- فاصلے کا فارمولا استعمال کر کے ثابت کر سکیں کہ تین (یا اس سے زیادہ) معلوم نقاط ہم خط ہیں۔
- فاصلے کا فارمولا استعمال کر کے ثابت کر سکیں کہ تین معلوم غیر ہم خط نقاط بنا سکتے ہیں۔
  (i) متساوی الاضلاع مثلث (Equilateral Triangle)
  (ii) متساوی الساقین مثلث ((Isosceles Triangle)
  (iii) قائمۃ الزاویہ مثلث (Right Angled Triangle)
  (iv) الاضلاع مثلث (Scalene Triangle)
- فاصلے کا فارمولا استعمال کر کے ہابت کر سکیں کہ چار معلوم غیر ہم نقاط بنا سکتے ہیں:
  - ایک مربع (A square)
  - ایک مستطیل (A rectangle)
  - ایک متوازی الاضلاع (A Parallelogram)
- فارمولا کی پہچان کریں جو دو معلوم نقاط کو ملانے والے خط کا درمیانی نقطہ ظاہر کر سکی۔
- فاصلہ اور درمیانی نقطہ کا فارمولا لگا کر جیومیٹری سے متلق مختلف معیاری نتائج کی تصدیق کر سکیں۔

تعارف:

کارتیسی کوآرڈینیٹ جو سترھویں صدی میں رین ڈیکارٹس (لاطینی نام کارٹیسیز) نے ایجاد کیا ریاضی میں یوکلیڈین جیومیٹری اور الجبرا کے مابین پہلا منظم ربط فراہم کر کے انقلاب لایا۔ کارتیسی کوآرڈینیٹ سسٹم کا استعمال کرتے ہوئے، ہندسی اشکال (جیسے خط اور منحنی خطوط) مساوات کے ذریعے بیان کیے جا سکتے ہیں۔

16.1 فاصلا کا فارمولا:

16.1.1: کوآرڈینیٹ جیومیٹری کی وضاحت اور تعریف کریں۔

کوآرڈینیٹ جیومیٹری ریاضی کی سب سے اہم اور دلچسپ شاخ ہے۔ خاص طور پر یہ ریاضی کے طلباء کے اسکول میں ملنے کا مرکزی مقام ہے۔ یہ لائنوں اور منحنی خطوط کے گراف کے ذریعے الجبرا اور جیومیٹری کے مابین رابطہ فراہم کرتا ہے۔

کوآرڈینیٹ سسٹم کی مدد سے جیومیٹری کے الجبرا مطالعہ کو کوآرڈینیٹ جیومیٹری / تجزیاتی جیومیٹری کہا جاتا ہے یہ ہندسی مسائل کو الجبرا کے مطابق حل کرنے کے قابل بناتا ہے اور الجبرا میں ہندسی بصیرت فراہم کرتا ہے۔ یہ جیومیٹری کا ایک حصہ ہے جس میں نمبروں کے ترتیبی جوڑے طیارے (Plane) پر کسی نقطہ کی پوزیشن کو بیان کرنے کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔ یہاں:

کوآرڈینیٹ جیومیٹری کا تصور (جسے کارتیسی جیومیٹری بھی کہا جاتا ہے) اور اس کے فارمولے اور ان کے اخذ کی وضاحت کی جائے۔

16.1.2: فاصلہ کے فارمولا کا ثبوت دیں اور اس کی مدد سے کارتیسی مستوی کے دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

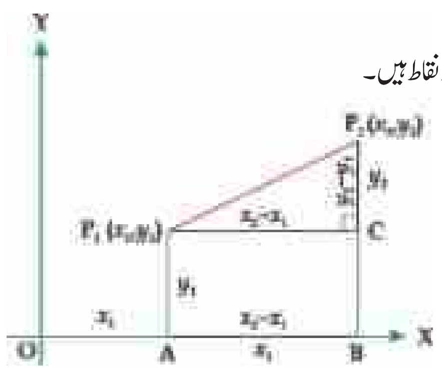
بیان:

کسی بھی دو نقاط $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ کے درمیان فاصلہ $|\overline{P_1P_2}|$ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے اور اس کی وضاحت اس طرح کی جاتی ہے:

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

فاصلہ کے فارمولا کا ماخوذ:

فرض کریں $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ طیارے (Plane) کے دو نقاط ہیں۔



P_2P_1 اور $\overline{P_1C}$ سے x ایکسز پر عمود $\overline{P_1A}$ کھینچیں اور $\overline{P_2A}$ کھینچیں جو x ایکسز کے متوازی ہے۔

$$\left|\overline{P_1C}\right| = \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{OB}\right| - \left|\overline{OA}\right| = \left|x_2 - x_1\right|$$

اور
$$\left|\overline{P_2C}\right| = \left|\overline{P_2B}\right| - \left|\overline{BC}\right| = \left|y_2 - y_1\right|$$

قائمۃ الزاویہ ΔP_1CP_2 فرض کریں اور مسئلہ فیثاغورث (Pythagaras theorem) لگائیں، ہمارے پاس ہے۔

$$\therefore \quad \left|\overline{P_1P_2}\right|^2 = \left|\overline{P_1C}\right|^2 + \left|\overline{P_2C}\right|^2$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{P_1P_2}\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2}$$

نوٹ: درمیانی نقطہ (origin) کا نقطہ $P(x, y)$ سے فاصلہ ہے: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

16.1.3: فاصلہ کا فارمولا کی مدد سے دو نقاط کے درمیان فاصلہ ماپیں

درج ذیل مثالیں فاصلہ کے فارمولا کے استعمال کو سمجھنے میں مدد دیں گی،

مثال 01: نقاط $P(2,3)$ اور $Q(-4,5)$ کے درمیان فاصلہ تلاش کریں۔

حل: فاصلہ کا فارمولا کے استعمال سے $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

یہاں

$$(x_1, y_1) = (2,3), (x_2, y_2) = (-4,5)$$

$$\therefore \quad \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-4-2)^2 + (5-3)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2} = \sqrt{36+4}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

مثال 02: دائرہ جس کا رداس 5 یونٹ ہے درمیانی نقطہ C (2،3) سے کھینچا جاتا ہے اور نقاط $N(-2,-3)$ اور $L(6,6)$, $M(0,-1)$ معلوم ہیں۔ تلاش کریں کہ کون سا نقطہ دائرہ پر موجود نہیں ہے (دلائل دیں)

حل: (3،2) اس دائرے کا درمیانی نقطہ ہے جس کا رداس 5 یونٹ ہے۔ اور $L(6,6)$, $M(0,-1)$ $N(-2,-3)$ تین معلوم نقاط ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ،

ہمیں بالترتیب N اور C to L, M کی لمبائی (فاصلہ) معلوم کرنا ہے۔ فاصلہ کے فارمولا کی مدد سے، پھر

$$\therefore \quad |\overline{CL}| = \sqrt{(6-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{CM}| = \sqrt{(0-3)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{CN}| = \sqrt{(-2-3)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ یونٹ}$$

$|\overline{CL}| =$ 5 یونٹ دائرے کا رداس

$|\overline{CM}| = 3\sqrt{2}$ یونٹ $<$ 5 یونٹ

$|\overline{CN}| = 5\sqrt{2}$ یونٹ $<$ 5 یونٹ

تو، M اور N دائرے پر نہیں ہیں۔ $(-2,-3)$

مشق 16.1

1. فاصلہ کا فارمولا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیان فاصلہ تلاش کریں۔

(i)	$(-4,5)$ and $(6,6)$	(ii)	$(2,2)$ and $(2,3)$
(iii)	$(0,1)$ and $(2,3)$	(iv)	$(0,1)$ and $(2,3)$

2. فرض کریں $B(0,b)$ اور $(a,0)$ ایکسز پر موجود دو نقاط ہیں B اور A کے درمیان فاصلہ تلاش کریں، جب

(i)	$a=-3,\ b=-4$	(ii)	$a=-9,\ b=6$
(iii)	$a=3,\ b=4$	(iv)	$a=\sqrt{2},\ b=-2\sqrt{2}$

3. نقاط $C(2,2\sqrt{3})$ اور $A(0,0), B(4,0)$ سے تشکیل شدہ مثلث کا احاطہ (Perimeter) بنائیں۔

16.2: ہم خط نقاط:

16.2.1: ہم خط نقاط کی تعیف کریں اور ہم خط اور غیر ہم خط نقاط کے درمیان فرق کریں۔

ہم خط نقاط:

ایک ہی خط پر موجود نقاط ہم خط نقاط کہلاتے ہیں

مثلاً:

C اور A, B ہم خط نقاط ہیں درج ذیل شکل میں: $|\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$

غیر ہم خط نقاط:

تین یا اس سے زیادہ نقاط غیر ہم خط نقاط کہلاتے ہیں اگر وہ ایک خط پر موجود نہ ہوں۔

درج ذیل شکل میں:

نوٹ: تین غیر ہم خط نقاط مثلث بناتے ہیں چار غیر ہم خط نقاط چوکور بناتے ہیں۔

16.2.2: فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے ثابت کریں کہ تین (یا اس سے زیادہ) معلوم نقاط ہم خط ہیں۔

مثال 01: ثابت کریں کے نقاط $A(3,-2), B(1,4)$ اور $C(-3,16)$ ہم خط نقاط ہیں۔

حل: $A(3,-2), B(1,4)$ اور $C(-3,16)$ تین معلوم نقاط ہیں۔

اب ہم فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے $|\overline{AB}|, |\overline{BC}|$ اور $|\overline{AC}|$ کا فاصلا تلاش کریں گے۔

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(1-3)^2+(4+2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-3-1)^2+(16-4)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-3-3)^2+(16+2)^2} = \sqrt{36+324} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10} \text{ یونٹ}$$

یہاں، $|\overline{AB}|+|\overline{BC}| = 2\sqrt{10}+4\sqrt{10} = 6\sqrt{10} = |\overline{AC}| = d_3,$

اسلئے نقاط A, B اور C ہم خط نقاط ہیں۔(دکھایا گیا)

مثال 02: فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے ثابت کریں کے نقاط $A(-2,-3), B(4,7)$ اور $C(9,-5)$ غیر ہم خط ہیں۔

حل: $A(-2,-3), B(4,7)$ اور $C(9,-5)$ تین معلوم نقاط ہیں۔

اب فاصلہ کا فارمولا استعمل کر کے $|\overline{AB}|, |\overline{BC}|$ اور $|\overline{AC}|$ کا فاصلہ نکالیں۔

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(4+2)^2+(7+3)^2} = \sqrt{36+100} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34} \text{ یونٹ}$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{BC}| = \sqrt{(9-4)^2+(-5-7)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \text{ یونٹ}$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{AC}| = \sqrt{(9+2)^2+(-5+3)^2} = \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ یونٹ}$$

چونکہ، $|\overline{AC}| \neq |\overline{AB}|+|\overline{AC}|$

لہٰذا تین معلوم نقاط A, B اور C غیر ہم خط ہیں۔

16.2.3: فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے ثابت کریں کہ تین معلوم غیر ہم خط نقاط بناتے ہیں۔

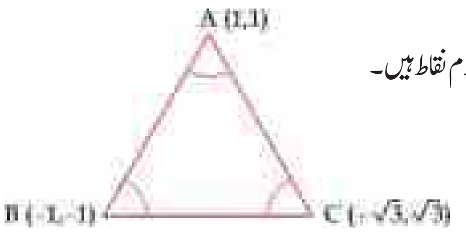
(i) ایک متساوی الاضلاع مثلث

(ii) ایک متساوی الساقین مثلث

(iii) ایک قائمتہ الزاویہ مثلث

(iv) ایک الاضلاع مثلث

مثال 01: ثابت کریں کہ تین نقاط $A(1,1),\ B(-1,-1)$ اور $C(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔



حل: $A(1,1),\ B(-1,-1)$ اور $C(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ تین معلوم نقاط ہیں۔

اب فاصلہ کا فارمولا کی مدد سے $|\overline{AB}|$، $|\overline{BC}|$ اور $|\overline{AC}|$ کے اضلاع ΔABC کا فاصلہ تلاش کریں۔

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1-1)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \text{ یونٹ}$$

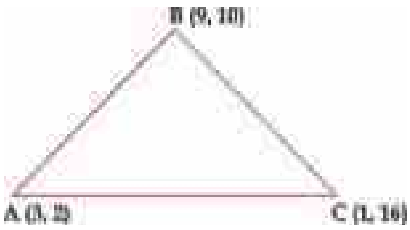
$$|\overline{BC}| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \sqrt{3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{8} \text{ یونٹ}$$

اور $$|\overline{AC}| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \text{ یونٹ}$$

چونکہ $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = 2\sqrt{2}$ یونٹ

لہٰذا یہ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے۔ ABC

مثال 01: ثابت کریں کہ نقاط $C(1,16)$ اور $B(9,10)$، $A(3,2)$ متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں۔



حل: فرض کریں کہ نقاط $C(1,16)$ اور $B(9,10)$، $A(3,2)$

معلوم نقاط ہیں فاصلہ کے فارمولا کی مدد سے:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(9-3)^2+(10-2)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(1-3)^2+(16-2)^2} = \sqrt{4+196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(1-9)^2+(16-10)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \text{ یونٹ}$$

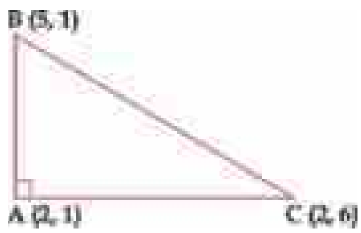
چونکہ $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = 10$ یونٹ

دو اضلاع لمبائی میں برابر ہیں۔

لہذا ABC ایک متساوی الساقین مثلث ہیں۔

مثال 03: ثابت کریں کہ $C\ (2,\ 6)$ اور $A\ (2,\ 1),\ B\ (5,\ 1)$ قائمتہ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

حل: فرض کریں کہ $C\ (2,\ 6)$ اور $A\ (2,\ 1),\ B\ (5,\ 1)$ کے راس ہیں ΔABC، فاصلہ کا فارمولا کے استعمال سے۔



$$|\overline{AB}|^2 = (5-2)^2+(1-1)^2 = 9+0 = 9$$

$$|\overline{BC}|^2 = (2-5)^2+(6-1)^2 = 9+25 = 34$$

اور

$$|\overline{AC}|^2 = (2-2)^2+(6-1)^2 = 0+25 = 25$$

یہاں

$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = 9+25 = 34$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|^2$$

مسئلہ فیثا غورث کی تبدیلی سے معلوم راس قائمتہ الزاویہ مثلث بناتے ہیں۔

مثال 04: ثابت کریں کہ نقاط $A(3,4), B(1,2)$ اور $C(0,4)$ الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔

حل: فرض کریں کہ $A(3,4), B(1,2)$ اور $C(0,4)$ معلوم نقاط ہیں۔

اب، فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے ہر اضلاع کی لمبائی معلوم کریں۔

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(1-3)^2+(2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$ یونٹ

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(0-3)^2+(4-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$ یونٹ

اور $$|\overline{AC}| = \sqrt{(0-1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$ یونٹ

چونکہ، $|\overline{AB}| \neq |\overline{BC}| \neq |\overline{AC}|$ اور نقاط غیر ہم خط ہیں۔

i.e. تینوں اضلاع کی لمبائی برابر نہیں ہے۔

لہٰذا ABC الاضلاع مثلث ہے۔

16.2.4: فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے ثابت کریں کہ چار غیر ہم خط نقاط بناتے ہیں:

(i) ایک متوازی الاضلاع

(ii) ایک مستطیل

(iii) ایک مربع

مثال 01: ثابت کریں کہ $A(-8,-3), B(-2,6), C(8,5)$ اور $C(2,-4)$ ایک متوازی الاضلاع کے مسلسل راس ہیں۔

حل: فرض کریں کہ $A(-8,-3), B(-2,6), C(8,5)$ اور $C(2,-4)$ اور ABCD ایک چوکور کے چار مسلسل راس ہیں۔

فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے،

ہمارے پاس ہے،

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-2+8)^2+(6+3)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$$ یونٹ

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(8+2)^2+(5-6)^2} = \sqrt{100+1} = \sqrt{101}$$ یونٹ

$|\overline{DC}| = \sqrt{(2-8)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$ یونٹ

اور $|\overline{AD}| = \sqrt{(2+8)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{100+1} = \sqrt{101}$ یونٹ

اب $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = \sqrt{117}$

اور $|\overline{BC}| = |\overline{AD}| = \sqrt{101}$

$\therefore$ A, B, C اور D متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

مثال 02: ثابت کریں چار نقاط $A(0,-1)$, $B(4,-3)$, $C(8,5)$ اور $D(4,7)$ ایک مستطیل کے مسلسل راس ہیں۔

حل: فرض کریں کہ $A(0,-1)$, $B(4,-3)$, $C(8,5)$ اور $D(4,7)$ ایک چوکور ABCD کے چار مسلسل نقاط ہیں۔
فاصلہ کا فارمولا استعمال کرکے،

i.e., $d = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ یونٹ

ہمارے پاس ہے،

$\therefore$ $|\overline{AB}| = \sqrt{(4-0)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$ یونٹ

$|\overline{BC}| = \sqrt{(8-4)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$ یونٹ

$|\overline{DC}| = \sqrt{(4-8)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$ یونٹ

$|\overline{AD}| = \sqrt{(4-0)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$ یونٹ

$|\overline{AC}| = \sqrt{(8-0)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100}$ یونٹ

$|\overline{BD}| = \sqrt{(4-4)^2 + (7+3)^2} = \sqrt{0+100} = \sqrt{100}$ یونٹ

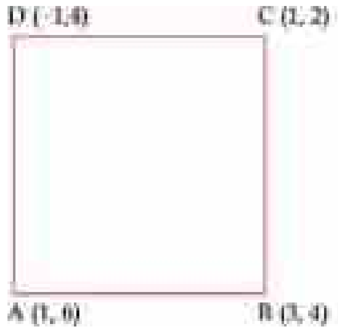
$\therefore$ $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = \sqrt{20}$

$|\overline{BC}| = |\overline{AD}| = \sqrt{80}$

$|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$

A، B، C اور D چوکور کے چار نقطے ہیں۔

مثال 03: ثابت کریں کہ چار مسلسل نقاط $A(1,6)$, $B(3,4)$, $C(1,2)$ اور $D(-1,4)$ ایک مربع بناتے ہیں۔



حل: معلوم ہے کہ $A(1,6)$, $B(3,4)$, $C(1,2)$ اور $D(-1,4)$

چوکور ABCD کے چار مسلسل نقاط ہیں۔

فاصلہ کا فارمولا استعمال کر کے،

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(3-1)^2+(4-6)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(1-3)^2+(2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ یونٹ}$$

$$|\overline{DC}| = \sqrt{(1+1)^2+(2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ یونٹ}$$

اور $|\overline{AD}| = \sqrt{(-1-1)^2+(4-6)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ یونٹ

چونکہ $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{DC}| = |\overline{AD}| = 2\sqrt{2}$ یونٹ

ابھی وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BC}$ کی لمبائی معلوم کرینگے

$$\therefore \quad |\overline{AC}| = \sqrt{(1-1)^2+(2-6)^2} = \sqrt{0+16} = 4 \text{ یونٹ،}$$

اور $|\overline{BD}| = \sqrt{(-1-3)^2+(4-4)^2} = \sqrt{16-0} = 4$ یونٹ،

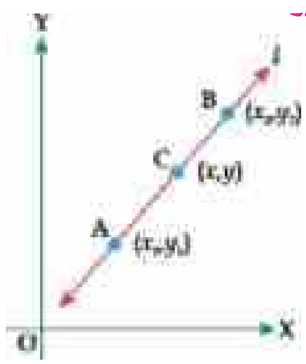
جیسا کہ وتر کی لمبائی برابر ہے تو ABCD ایک مربع ہے

مشق 16.2

1. ثابت کریں کہ نقاط P (-3, -4), Q (2, 6) and R (0, 2) ہم خط ہیں۔
2. ثابت کریں کہ نقاط A (-1, 0), B (1, 0) and C (0, $\sqrt{3}$) غیر ہم خط ہیں۔
3. ثابت کریں کہ L (0, $\sqrt{3}$), M (-1, 0) and N (1, 0) متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔
4. نقاط A (2, 3), B (8, 11) and C (0, 17) متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں یا نہیں۔
5. کیا نقاط A (-1, 2), B (7, 5) and C (2, -6) قائمۃ الزاویہ مثلث بناتے ہیں
6. اگر نقاط A (3, 1), B (9, 1) and C (6, k) ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں تو k کی رقم معلوم کریں۔
7. ثابت کریں کہ نقاط P (1, 2), Q (3, 4) and R (0, -1) ایک الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔
8. ثابت کریں کہ نقاط A (2, 3), B (8, 11), C (0, 17) and D (-6, 9) ایک مربع کے راس ہیں۔
9. ثابت کریں کہ کیوں نقاط A (-2, 0), B (0, -3), C (2, 0) and D (0, 3) ایک مربع بناتے ہیں۔
10. ثابت کریں کہ نقاط A (3, 2), B (4, 1), C (5, 4) and D (6, 3) ایک مستطیل کے راس ہیں۔
11. فاصلہ کا فارمولا استعمال کریں اور ثابت کریں کہ نقاط O (0, 0), A (3, 0), B (5, 2) and C (2, 2) ایک متوازی الاضلاع اشکال کے راس ہیں۔

16.3 درمیانی نقطہ کا فارمولا

16.3.1 فارمولا کی پہچان کریں جو دو معلوم نقاط کو ملانے والے خط کا درمیانی نقطہ ظاہر کر سکے۔



فرض کریں کہ A (x_1, y_1) کے کوئی دو نقاط ہیں اور B (x_2, y_2) کا درمیانی نقطہ ہے، پھر A اور B کا درمیانی نقطہ کہلاتا ہے۔

$$C(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مثال 01: قطع خط جو B (3, 4) اور A (2, 1) کو ملاتا ہے اس کا درمیانی نقطہ تلاش کریں۔

حل: B (3, 4) اور A (2, 1) قطعہ خط کے نقاط ہیں۔

درمیانی نقطہ۔۔۔؟

درمیانی نقطہ کا فارمولا استعمال کرکے،

درمیانی نقطہ $\overline{AB} = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

مثال 02: اگر C(3, 4) اور $A(2, 1), B(5, 2)$ کے راس ہیں، تو ΔABC اضلاع R اور P,Q کے بالترتیب درمیانی نقاط $\overline{AC}, \overline{AB}$ and $\overline{BC}$ اور ΔABC تلاش کریں

حل: درمیانی نقاط کا فارمولا استعمال کرکے،

ہمارے پاس ہے، $C(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

∴ کا درمیانی نقطہ $\overline{AC} = P = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$,

کا درمیانی نقطہ $\overline{AB} = Q = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$,

اور کا درمیانی نقطہ $\overline{BC} = R = \left(\frac{5+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (4, 3)$,

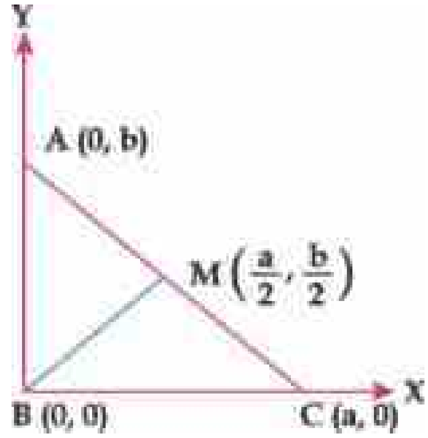
لہٰذا ΔABC کے اضلاع کے درمیانی نقاط $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ اور (4 , 3) ہیں۔

16.4 فاصلہ اور درمیانی نقطہ کا فارمولا لگا کر جیومیٹری سے متعلق مختلف معیاری نتائج کی تصدیق کر سکیں۔

مثال 01: تجزیاتی طور پر ثابت کریں کہ دائیں مثلث کے مفہوم کی درمیانی لمبائی مفروضے کی نصف لمبائی ہی۔

حل: فرض کریں ABC ایک مثلث ہے جو B کے قائمتہ الزاویہ پر ہے۔ B کو درمیانی نقطہ لیں اور $\overline{BA}$ $\overline{BC}$ کو بالترتیب y اور x x کے ایکسز لیں۔

فرض کریں $|\overline{BC}| = a, |\overline{BA}| = b$ اور B تو C, (0,0) ہے، $(a,0)$ ہے اور A is $(0,b)$ ہے اس لیے M جو $\overline{AC}$ کا درمیانی نقطہ ہے $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$ ہے $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$



اب $|\overline{AM}| = |\overline{CM}| = \frac{1}{2}|\overline{AC}|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

اور $|\overline{BM}| = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

اسلیئے

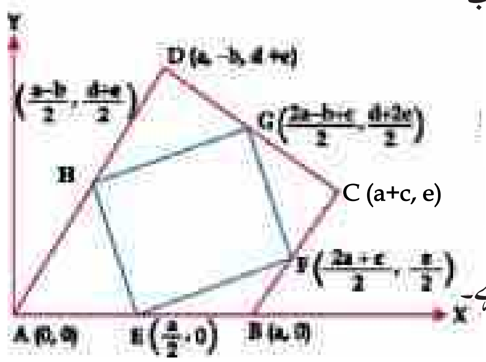
$$|\overline{BM}| = \frac{1}{2}|\overline{AC}|$$

لہٰذا وسطانیہ $|\overline{BM}|$ کی لمبائی مفروضے $|\overline{AC}|$ کی نصف لمبائی ہے۔

مثال 02: ثابت کریں کہ کسی بھی چوکور کے اطراف کے درمیانی نقطوں کو جوڑ کر حاصل اشکال متوازی الاضلاع ہے۔

حل:

فرض کریں کہ ABCD ایک چوکور ہے اور H اور E,F,G بالترتیب $\overline{AB}, \overline{BC}, , \overline{CD}$ اور $\overline{DA}$ کے درمیانی نقطہ ہیں



A کو اوریجن(origin)لیں، $\overline{AB}$ ایکسز اور A سے آنے والی خط اور $\overline{AB}$ کے عمود پر واقع کو y ایکسز لیں۔

پھر A ہے اور دوبارہ فرض کریں کہ $(0,0)$ ہے، B ہے اور C, $(a,0)$ ہے۔

اب درمیانی نقاط D اور $(a+c,e)$ بالترتیب $(a-b,d+e)$

اسلیئے، فاصلہ کے فارمولا سے۔ $\left(\frac{a}{2},0\right), \left(\frac{2a+c}{2},\frac{e}{2}\right), \left(\frac{2a-b+c}{2},\frac{d+2e}{2}\right)$ and $\left(\frac{a-b}{2},\frac{d+e}{2}\right)$

اسی طرح

$$|\overline{EF}|^2 = \left(\frac{2a+c}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2} - 0\right)^2$$

$$= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(a+c)^2 + e^2\right\} \quad \text{(i)}$$

$$|\overline{GH}|^2 = \left(\frac{2a-b+c}{2} - \frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d+2e}{2} - \frac{d+e}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(a+c)^2 + e^2\right\} \quad \text{(ii)}$$

(i)اور(ii)سے، ہمارے پاس ہے

$$|\overline{EF}| = |\overline{GH}|$$

Similarly, $|\overline{GF}| = |\overline{EH}|$

کیونکہ متقابل اضلاع برابر ہیں EFGH ایک متوازی الاضلاع۔

مشق 16.3

1. درمیانی نقطہ کا فارمولا استعمال کر کے درج ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیانی نقاط تلاش کریں۔

(i) A (2, 6) and B (-4, 8)   (ii) P (-3, -1) and Q (5, 2)

(iii) L (0, 6) and M (-8,0)   (iv) C (0, 0) and D $(2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$.

2. دائرے کا درمیانی نقطہ تلاش کریں جس کے قطر کے اختتامی نقاط A (-5, 6) and B (3, -4) ہیں

3. دائرے کا درمیانی نقطہ (3, 4) ہے اور اس سے قطر کا ایک اختتامی نقطہ (4,6) ہے۔ دوسرے اختتام کا نقطہ تلاش کریں۔

4. دائرے کا قطر نقاط (3, 4-) and B (11, 6) کے درمیان ہے۔ دائرے کا درمیانی نقطہ اور رداس تلاش کریں۔

5. ثابت کریں کہ مثلث ایک متساوی الساقین مثلث ہے صرف اور صرف اگر اس کے پاس دو برابر وسطانیے ہوں۔

6. ثابت کریں کہ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔

اعادہ مشق 16

1. درج ذیل جملوں کو دھیان سے پڑھیں اور درست کی صورت میں 'د' اور غلط کی صورت میں 'غ' پر دائرہ لگائیں"

(i) R کا درمیانی نقطہ ہے $\overline{PQ}$ اگر R کے درمیانی واقع ہے۔ (د/غ)

(ii) الاضلاع مثلث میں تمام اضلاع برابر ہوتے ہیں۔ (د/غ)

(iii) عمودی خطوط 135 کے زاویہ پر ملتی ہیں۔ (د/غ)

(iv) ہم خط نقاط مثلث بنا سکتے ہیں۔ (د/غ)

(v) غیر ہم خط نقاط مثلث بنا سکتے ہیں۔ (د/غ)

(vi) متساوی الساقین مثلث میں دو اضلاع کے زاویے برابر ہوتے ہیں۔ (د/غ)

(vii) y ایکسز پر موجود تمام نقاط ہم خط ہوتے ہیں۔ (د/غ)

(viii) x ایکسز اور y ایکسز کے کاٹنے کا مقام (0,0) ہے (د/غ)

(ix) اور جن (origin) سے (6،0) کا فاصلہ 36 یونٹ ہے۔ (د/غ)

2. خالی جگہ پُر کریں۔

(i) اگر $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$ کسی خط کے دو نقاط ہیں تو $|\overline{AB}| =$ ________

(ii) ہم خط نقاط ایک جیسی پر ہوتے ہیں۔ ________

(iii) چوتھے کواڈرینٹ میں $x>0$ and y ________

3. درست جواب پر (✓) لگائیں۔

(i) دو عمودی خطوط زاویہ پر ملتی ہیں:

(ا) 45 (ب) 60 (ج) 90 (د) 180

(ii) $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ کہلاتا ہے۔

(ا) درمیانی نقطہ فارمولا (ب) فاصلہ کا فارمولا (ج) تقسیم کا فارمولا (د) تناسب کا فارمولا

(iii) $A(3, 0)$ and $B(0, 3)$ پلین میں کوئی سے دو نقاط ہیں تو $|\overline{AB}| =$

(ا) 6 یونٹ (ب) $6\sqrt{2}$ یونٹ (ج) $3\sqrt{2}$ یونٹ (د) $3\sqrt{2}$ یونٹ

(iv) زاویوں کے تمام تین اندرونی ناصف کا نقطہ قطع کہلاتا ہے:

(ا) سینٹرویڈ (centroid) (ب) اندرونی مرکز (incentre)

(ج) عمودی مرکز (orthocentre) (د) محاصرہ مرکز (circumcentre)

خلاصہ

- دو نقاط $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ ہوں تو $d = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ یونٹ کا درمیانی فاصلہ ہوتا ہے۔
- قطعہ خط $\overline{AB}$ کا درمیانی نقطہ ہوتا ہے $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
- ہم خط نقاط سیدھی لکیر بناتے ہیں۔
- تین نقاط A, B اور C ہم خط نقاط تب ہوں گے جب

$$|\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$$

یا $$|\overline{AB}| = |\overline{AC}| + |\overline{CB}|$$

یا $$|\overline{BC}| = |\overline{BA}| + |\overline{AC}|$$

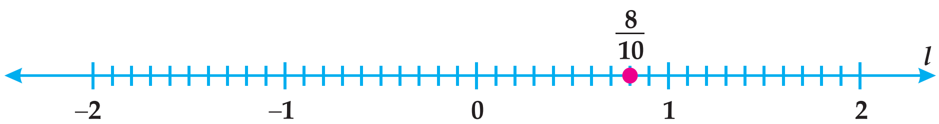
- تین غیر ہم خط نقاط A, B and C مثلث بناتے ہیں، اگر دو اضلاع کی جمع شدہ لمبائی تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہے۔
- اگر، $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| < |\overline{AC}|$ تو نقاط A, B and C سے کوئی مثلث نہیں بن سکتا۔

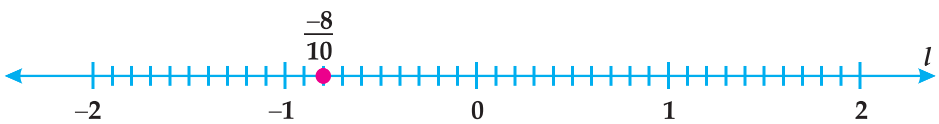
جوابات

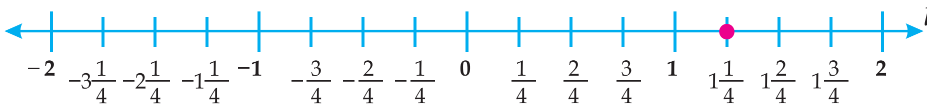
مشق 1.1

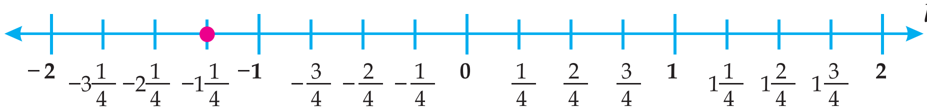
.1
i. ناطق عدد — ii. غیر ناطق عدد
iii. غیر ناطق عدد — iv. ناطق عدد
v. غیر ناطق عدد — vi. غیر ناطق عدد
vii. ناطق عدد — viii. غیر ناطق عدد
ix. غیر ناطق عدد — x. ناطق عدد
xi. غیر ناطق عدد — xii. ناطق عدد

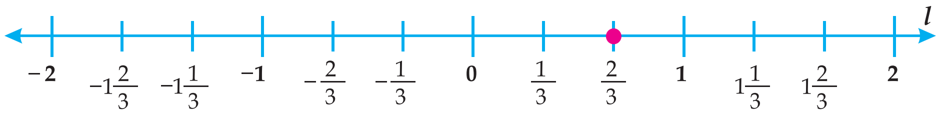
.2
i. مختتم کسر — ii. غیر مختتم کسر
iii. غیر مختتم کسر — iv. مختتم کسر
v. مختتم کسر — vi. غیر مختتم کسر

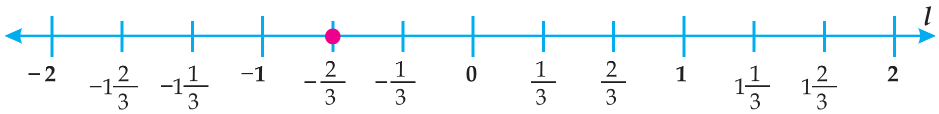
.3
i.


ii.


iii.


iv.


v.


vi.


.4 ہم ایک اور 2 کے بیچ میں تمام حقیقی اعداد کی فہرست نہیں بنا سکتے۔

.5 π ایک غیر ناطق عدد ہے کیونکہ یہ نا ختم ہونے والی کسر اعشاریہ ہے۔

.6 i. غلط ii. درست iii. درست iv. درست v. درست vi. غلط

(i, ii, iii, v) درست جوابات ہیں

مشق 1.2

.1
i. خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع
ii. خاصیت تلازم بلحاظ جمع
iii. بائیں ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع
iv. دائیں ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع
v. دائیں ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق
vi. خاصیت مبادلہ بلحاظ ضرب
vii. خاصیت تلازم بلحاظ ضرب
viii. ضربی معکوس
ix. جمعی معکوس
x. ضربی معکوس
xi. بائیں ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق
xii. ضربی معکوس

.2
i. $\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\boxed{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{\boxed{5}}$

ii. $\frac{7}{10}+\left(\frac{70}{\boxed{10}}+\frac{16}{33}\right)=\frac{7}{\boxed{10}}+\left(\frac{\boxed{70}}{10}+\frac{16}{\boxed{33}}\right)$

iii. $\frac{99}{50}\times\frac{50}{99}=\boxed{1}$

iv. $\frac{59}{95}\times\frac{95}{59}=\boxed{1}$

v. $(-21)+\left(\boxed{21}\right)=0$

vi. $\frac{5}{8}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{8}\times\frac{\boxed{5}}{\boxed{7}}\right)$

.3
i. $5<10$ ii. $10>5$ iii. $6+9$
iv. $4+8<6+8$ v. $8+8>6+8$

.4
i. 7×12 ii. 5×12 iii. $<$ iv. $>$

5.		جمعی معکوس	ضربی معکوس
	i.	-3	$\frac{1}{3}$
	ii.	7	$\frac{-1}{7}$
	iii.	-0.3	$\frac{1}{0.3}$
	iv.	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{-5}{\sqrt{5}}$
	v.	$\frac{-9}{\sqrt{12}}$	$\frac{\sqrt{12}}{9}$
	vi.	0	موجود نہیں ہے۔

مشق 1.3

1. **i.** مجذور $= 5$ ، اشاریہ $= 3$

ii. مجذور $= \frac{x}{y}$ ، اشاریہ $= 4$

iii. مجذور $= x^2yz$ ، اشاریہ $= 5$

2. i. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ ii. $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{5}{2}}$ iii. $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{5}{3}}$ iv. $(yz)^{\frac{7}{3}}$ v. $(27)^{\frac{1}{9}}$

vi. $(-64)^{\frac{2}{3}}$ vii. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{3}}$ viii. $(xy)^{\frac{3}{5}}$ ix. $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$

3. i. $\sqrt[7]{(5)^3}$ ii. $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$ iii. $\sqrt[7]{\left(\frac{5}{7}\right)^{15}}$ iv. $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$ v. $\sqrt[5]{\left(\frac{11}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)}$

مشق 1.4

1. i. 27 ii. 20 iii. $(a+b)(c+d)$

2. i. $\left(\frac{1}{3}\right)^9$ ii. $\left(\frac{3}{4}\right)^7$ iii. $\left(\frac{4}{5}\right)^8$ iv. $-3^3\times 5^6$ v. $3^3\times 4^6$

vi. $\frac{a^9}{b^9c^9}$ vii. $\frac{c^{10}}{d^{10}}$ viii. $m^6n^5t^{11}$ ix. $a^9b^6c^8$

3. i. 5^6 ii. $x^{15}y^{15}$ iii. $(4)^{10}$ iv. $-3^9\times 4^6$ v. $\frac{b^6}{5^3}$

vi. $\frac{4^6}{9^6}$ vii. z^{24} viii. m^{100} ix. $-(0.1)^{18}$

مشق 1.5

1. i. $1+2i$ ii. $2+2i$ iii. $3+4i$
iv. $-1+i$ v. $-2+2i$ vi. $-3+4i$

2. i. $\text{Re}(z)=1, \text{Im}(z)=2$ ii. $\text{Re}(z)=4, \text{Im}(z)=9$

iii. $\text{Re}(z)=-5, \text{Im}(z)=6$ iv. $\text{Re}(z)=-1, \text{Im}(z)=-1$

v. $\text{Re}(z)=\frac{-3}{4}, \text{Im}(z)=\frac{4}{5}$ vi. $\text{Re}(z)=-1, \text{Im}(z)=2$

3. i. $\bar{z}=3-2i$ ii. $\bar{z}=(4,-9)$ iii. $\bar{z}=(-1,-1)$

iv. $\bar{z}=1+i$ v. $\bar{z}=\frac{-3}{4}+\frac{4}{5}i$ vi. $\bar{z}=1-3i$

5. i. $x=-5, y=5$ ii. $x=\pm\frac{4}{3}$, $y=\pm\frac{3}{5}$

iii. $x=\frac{-27}{5}, y=\pm 11$ iv. $x=\frac{9\sqrt{30}}{\sqrt{5}}, y=\frac{-4}{27}$

مشق 1.6

1. i. $(12,5)$ ii. $\left(\frac{13}{6},\frac{13}{6}\right)$ iii. $(5,21)$

iv. $\left(0,-\frac{1}{15}\right)$ v. $(5,0)$ vi. $(0,-41)$

vii. $\left(\frac{3-6\sqrt{2}}{4},\frac{3+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$ viii. $\left(\frac{-5}{13},\frac{-27}{13}\right)$

2. i. $\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$ ii. -4

iii. $-\frac{i}{2}$ iv. 16

اعادہ مشق 1

1. i. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ii. حقیقی اعداد کا سیٹ iii. 0
   iv. 7 v. 0 vi. غیر ناطق عدد
   vii. ناطق اعداد viii. $-3-5i$ ix. 2
   x. $(ac-bd, ab+bc)$

2. i. درست ii. درست iii. درست iv. درست v. درست

3. i. a ii. b iii. c iv. b

مشق 2.1

1. i. 9.7×10^{3} ii. 4.98×10^{6} iii. 9.6×10^{7} iv. 4.169×10^{3}
   v. 8.4×10^{4} vi. $7.18\text{x}10^{-1}$ vii. $6.43\text{x}10^{-3}$ viii. $7.4\text{x}10^{-3}$
   ix. $2.1005\text{x}10^{-1}$

2. i. 70000 ii. 0.0000000008072 iii. 6018000 iv. 786500000
   v. 0.000205 vi. 72500000000 vii. 4502000 viii. 0.00000002865
   ix. 3056000

مشق 2.2

1. i. $\log_7 343 = 3$ ii. $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ iii. $\log_{10}(0.001) = -3$
   iv. $\log_8 (2) = \frac{1}{3}$

2. i. $(27)^{\frac{4}{3}} = 81$ ii. $(2)^{-3} = \frac{1}{8}$ iii. $10^{\circ} = 1$ iv. $(10)^{-2} = 0.01$

3. i. $x = 4\sqrt{2}$ ii. $a = 9$ iii. $y = 4$ iv. $x = 8$
   v. $y = 2$ vi. $a = 4$ vii. $a>o$ یا a کوئی بھی مثبت حقیقی عدد ہے۔
   viii. $y = 1$ ix. $x = 1$

مشق 2.3

1. i. خاصہ : 0, منٹیسہ : 0.9031
   ii. خاصہ : 3, منٹیسہ : 0.7036
   iii. خاصہ : 0, منٹیسہ : 0.9997
   iv. خاصہ : 2, منٹیسہ : 0.8839
   v. خاصہ : –3, منٹیسہ : 0.5172
   vi. خاصہ : –5, منٹیسہ : 0.4771

2. i. 0.9542 ii. 1.7448 iii. 1.4711 iv. 2.6078
   v. $\bar{3}.6712$ vi. $\bar{5}.8808$

3. i. 0.4926 ii. 2.4926 iii. $\bar{3}.4926$ iv. 3.4926
   v. 2.4926 vi. 5.4926

مشق 2.4

1. i. 3692 ii. 0.5530 iii. 2.278
   iv. 653800 v. 0.0002425 vi. 8.292

2. i. 2.954242509 ii. 1.658393026 iii. 4.563267445
   iv. 2.917137753 v. –2.07007044 vi. – 4.013228266

3. i. 56.2989 ii. 4.5803 iii. 0.024367
   iv. 3019.95 v. 0.0000000991 vi. 1.8471

مشق 2.5

1. i. $3\log_a x + \log_a y - 2\log_a z$
   ii. $\frac{1}{2}\log_a x + \log_a y + \frac{1}{2}\log_a z$
   iii. $\frac{-7}{12}\log_a(x) - \log_a y$
   iv. $-\frac{2}{3}\log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{2}{3}\log_a z$

2. i. $\log_a(2\sqrt{2})$
   ii. $\log_a(x^2 - 1)$
   iii. $\log\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

3. i. 1.1761 ii. 1.8062 iii. 0.5 iv. 1.6812
v. 0.6276 vi. 1.4771 vii. 0.4260 viii. 0.4604

مشق 2.6

1. i. 253.688 ii. 6750 iii. 48.2176 iv. $x = 930.80$
v. 15.20 vi. 1.2585 vii. 410130 viii. 1.84077×10^{13}

2. i. 8 ii. 22 iii. 15 iv. 14 v. 29

اعادہ مشق 2

1. i. غلط ii. غلط iii. درست iv. غلط v. درست
2. i. مشترک لوگرتھم ii. 0 iii. منٹیسہ
iv. 9 v. $\log_a n$ vi. $a^x = y$
vii. $\log_a y = 10$ viii. 1 ix. $\log_a m - \log_a n$
x. 2 xi. 0 xii. −5
3. i. *d* ii. *b* iii. *b* iv. *b* v. *a*
vi. *c* vii. *c* viii. *b* ix. *b*

مشق 3.1

1. i. کثیر رقمی ii. کثیر رقمی نہیں iii. کثیر رقمی
iv. کثیر رقمی نہیں v. کثیر رقمی نہیں vi. کثیر رقمی نہیں
2. i. ناطق ii. غیر ناطق iii. ناطق
iv. غیر ناطق v. ناطق vi. غیر ناطق
3. i. $p - 10$ ii. $\dfrac{a}{a+b}$ iii. $\dfrac{a}{2(a+b)}$
iv. $x + y - z$ v. $\dfrac{3m(m+5)}{2}$ vi. $\dfrac{x-3}{x-2}$

4. i. $\frac{4x^2-1}{x^2-1}$ ii. $\frac{3x+7}{(x+2)(x+3)}$ iii. $\frac{2\ x^2y^2+xy+1}{(xy+1)(xy-1)}$

iv. $\frac{-15}{(x+3)\ (x+6)}$ v. $\frac{-2b}{a^2-b^2}$ vi. $\frac{-(y-1)}{y+1}$

5. i. $\frac{8y^3}{(2y-x)^2\ (2y+x)}$ ii. $-\frac{2x+3y}{y}$ iii. 1

iv. $\frac{5}{3}$ v. $\frac{(q-5)(q+3)}{q^2}$ vi. $\frac{8(z-1)}{z-5}$

6. $\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$

7. i. $\frac{1}{6}$ ii. $9\frac{9}{55}$ iii. $-\frac{17}{73}$

iv. $-4\frac{4}{9}$ v. $1\frac{1}{11}$

مشق 3.2

1. $a^2+b^2=50,\ ab=7$
2. $a^2+b^2=17,\ ab=4$
3. $a^2+b^2+c^2=55$
4. $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{9}$
5. $a+b+c=\pm 7$
6. $a+b+c=\pm\sqrt{2.5}$
7. $ab+bc+ca=40$
8. $a^3+b^3=28$
9. $ab=-8$
10. $ab=-4$
11. $a^3-b^3=230$
12. $125x^3+y^3=247$
13. $216a^3-343\ b^3=12419$
14. $x^3+\frac{1}{x^3}=322$
15. $x^3-\frac{1}{x^3}=1364$

16. i. $\frac{27b^3}{8}+\frac{8}{27b^3}$ ii. $\frac{343y^6}{729}+\frac{729}{343y^6}$

iii. $\frac{x^{12}}{1728}-\frac{1728}{x^{12}}$ iv. $c^6-\frac{1}{c^6}$

17. i. $8x^6+27y^6$ ii. $8x^6-27y^6$

iii. $x^{12}-y^{12}$ iv. $256x^8-6561y^8$

مشق 3.3

1. i. $\frac{3z}{x^2}$ ii. $4\sqrt[3]{4a^2b^4c^3}$ iii. 2 iv. $36\sqrt{6}$

v. $\frac{25}{32}$ vi. $\frac{14\sqrt{3}}{11}$ vii. 6 viii. 2

2. i. $8+4\sqrt{3}$ ii. $6\sqrt{6}-2\sqrt{3}$ iii. $8\sqrt{12}-\sqrt{8}$ iv. $2+\sqrt{3}$

3. i. $66\sqrt{2}$ ii. $13\sqrt{5}$ iii. $20+9\sqrt{3}$ iv. $15\sqrt{10}$

v. $4\sqrt{5}+25$ vi. $\sqrt{11}$ vii. 136 viii. $3\sqrt{2}$

ix. $\frac{1}{3}$ x. 2 xi. $134-24\sqrt{30}$ xii. $30+12\sqrt{6}$

مشق 3.4

1. i. $2-\sqrt{3}$ ii. $3-2\sqrt{2}$ iii. $-\left(\frac{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{2}\right)$

iv. $16\left(2\sqrt{3}-11\right)$ v. $\frac{83-18\sqrt{2}}{79}$ vi. $\frac{11+3\sqrt{3}}{2}$

2. i. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=256$ ii. $x=-\left(\frac{4\sqrt{7}+11}{9}\right)$

iii. $x+\frac{1}{x}=6, x-\frac{1}{x}=-4\sqrt{2}, x^2+\frac{1}{x^2}=34, x^2-\frac{1}{x^2}=-24\sqrt{2}, x^4+\frac{1}{x^4}=1154$

3. 322 4. 194 5. $112\sqrt{3}$

اعادہ مشق 3

1. i. b ii. b iii. a
   iv. a v. a vi. a
   vii. b viii. a ix. a
   x. a xi. a xii. b

2. i. سب سے زیادہ قوت نما ii. $2+\sqrt{3}$
   iii. 4 iv. غیر ناطق اظہاریہ
   v. x^4+y^4

مشق 4.1

1. i. $4(x+4y+6z)$ ii. $x^2(1+3y+4y^2z)$
   iii. $3pq(r+2t+s)$ iv. $9qr(s^2+t^2)(1+2qr)$
   v. $\frac{xz^2}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{2}+\frac{xz}{3}\right)$ vi. $a(x-y)(1-ab+ab^2)$

2. i. $(7+z)(x+z)$ ii. $3(3ab-2c)(a+2b)$
   iii. $2(t-2p)(3+2q)$ iv. $(r+9s)(r-7s)$

v. $(1-z)\left(\frac{y^2}{4}-\frac{z^2t}{9}\right)$ vi. $\frac{1}{11}(2y+z)(5x-7y)$

3. i. $(2a+3b)^2$ ii. $(6x^2+1)^2$

iii. $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^2$ iv. $(9y+8z)^2$

v. $(25+a^2b)^2$ vi. $(a+0.2)^2$

4. i. $(b^2-2c^2)^2$ ii. $\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{2}{3x^2}\right)^2$

iii. $2ab^3(a-4b)^2$ iv. $(3p + 3q - r^2)^2$

v. $(xy-0.05)^2$ vi. $(a - b - 9)^2$

5. i. $(2a-3b)(2a+3b)$ ii. $(4x-5y)(4x+5y)$

iii. $(10xz+y^2)(10xz-y^2)$ iv. $\left(\frac{x^2}{10}+10y^2\right)\left(\frac{x^2}{10}-10y^2\right)$

v. $\left(\frac{8f}{9}-\frac{9g^2}{8}\right)\left(\frac{8f}{9}+\frac{9g^2}{8}\right)$ vi. $\left(\frac{x^2}{11}-11y\right)\left(\frac{x^2}{11}+11y\right)$

6. i. $8xz$

ii. $4(3a - 2b)(a - 7b)$

iii. $(13x^2 - 3t - 4)(13x^2 + 3t + 4)$

iv. $(13x^2 - 5y^2)(5x^2 - 3y^2)$

v. $\left(a+\frac{1}{a}+b-\frac{1}{b}\right)\left(a+\frac{1}{a}-b+\frac{1}{b}\right)$

vi. $\left(3x+\frac{1}{3x}+2y-\frac{1}{2y}\right)\left(3x+\frac{1}{3x}-2y+\frac{1}{2y}\right)$

7. i. $(x + y - 3z^2)(x + y + 3z^2)$ ii. $(2a + 2b^2 - 3c)(2a + 2b^2 + 3c)$

iii. $(4d^2 - c^2 + d)(4d^2 + c^2 - d)$ iv. $(2x + 2y^2 + 3y^3)(2x + 2y^2 - 3y^3)$

v. $(x+y-1)(x-y-3)$ vi. $(2x+y+1)(2x-y-1)$

8. i. $\left(\sqrt{ab}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{c}\right)$ ii. $\left(2\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)$

iii. $\left(\sqrt{yz}-\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)\left(\sqrt{yz}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)$ iv. $\left(\sqrt{xzt}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{xzt}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

مشق 4.2

1. i. $\left(a^2+x^2+ax\right)\left(a^2+x^2-ax\right)$ ii. $\left(b^2-b+1\right)\left(b^2+b+1\right)$

iii. $(a^2+x^2-ax)(a^2+x^2+ax)(a^4+x^4-a^2x^2)$

iv. $\left(z^2+z+1\right)\left(z^2-z+1\right)\left(z^4-z^2+1\right)$

2. i. $\left(x^2+2xy+2y^2\right)\left(x^2-2xy+2y^2\right)$ ii. $9\left(2x^2z^2+2xyz+y^2\right)\left(2x^2z^2-2xyz+y^2\right)$

iii. $\left(2t^2+10t+25\right)\left(2t^2-10t+25\right)$ iv. $\left(2t^2+2t+1\right)\left(2t^2-2t+1\right)$

3. i. $(x-2)(x+5)$ ii. $(ab+2)(ab-5)$

iii. $(y-7)(y+14)$ iv. $(xyz-4)(xyz+6)$

4. i. $(3y+8z)(3y-z)$ ii. $2(7x+1)(3x-1)$

iii. $(2x+1)(2x+5)$ iv. $(3x+y)(x-13y)$

مشق 4.3

1. i. $(x-2)^2(x-7)(x+3)$ ii. $\left(x^2+5x+3\right)\left(x^2+5x+7\right)$

iii. $(x-3)(x+1)\left(x^2-2x+10\right)$ iv. $\left(x^2-8x+1\right)\left(x^2-8x-1\right)$

v. $\left(x^2+9x-2\right)\left(x^2+9x+6\right)$ vi. $(x-6)(x+1)\left(x^2-5x+16\right)$

2. i. $\left(x^2+5x-2\right)\left(x^2+5x+12\right)$ ii. $(x^2+7x+16)(x+6)(x+1)$

iii. $(x-5x-5)(x-5x+15)$ iv. $\left(x^2-12x+30\right)(x-8)(x-4)$

v. $\left(x^2-5x-10\right)\left(x^2-5x+20\right)$ vi. $\left(x^2-7x+27\right)\left(x^2-7x-5\right)$

3. i. $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right)\left(x-2\sqrt{3}\right)$

ii. $(x^2+1)\left(x+\sqrt{14}\right)\left(x-\sqrt{14}\right)$ iii. $\left(x+\sqrt{3}\right)^2\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

iv. $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+4\sqrt{2}\right)\left(x-4\sqrt{2}\right)$

v. $\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+2\sqrt{5}\right)\left(x-2\sqrt{5}\right)$ vi. $\left(x+2\sqrt{3}\right)\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x^2-2x-12\right)$

مشق 4.4

1. i. $(b+c)^3$ ii. $(2x+y)^3$ iii. $\left(4x+\frac{1}{4}\right)^3$

iv. $(2x+3)^3$ v. $\left(\frac{1}{3}+y^2\right)^3$ vi. $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y\right)^3$

vii. $\left(\frac{4}{3}+x\right)^3$ viii. $\left(\frac{z}{2}+\frac{y}{3}\right)^3$

2. i. $(d-2c)^3$ ii. $\left(x^2-\frac{4}{3}\right)^3$ iii. $\left(\frac{x}{5}-y\right)^3$

iv. $(5z-y^2)^3$ v. $\left(\frac{z}{3}-6y\right)^3$ vi. $\left(\frac{b^2}{3}-\frac{c^2}{2}\right)^3$

vii. $\left(6-\frac{z}{2}\right)^3$ viii. $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y\right)^3$

مشق 4.5

1. i. $(x+2y)\left(x^2-2xy+4y^2\right)$ ii. $a^2(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\left(a^6-a^3b^3+b^6\right)$

iii. $\left(a^2+1\right)\left(a^4-a^2+1\right)$ iv. $(ab+8)\left(a^2b^2-8ab+64\right)$

v. $b^3(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$ vi. $\left(\frac{x}{5}+\frac{5}{x}\right)\left(\frac{x^2}{25}-1+\frac{25}{x^2}\right)$

vii. $x^3\,(x^2+y^2z^3)(x^4-x^2y^2z^3+y^4z^6)$

viii. $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x^4}{9}-\frac{2x}{3}+\frac{4}{x^2}\right)$

2. i. $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$ ii. $(x^3-2y^3)(x^6+2x^3y^3+4y^6)$

iii. $\left(10-\frac{xy}{5}\right)\left(100+2xy+\frac{x^2y^2}{25}\right)$

iv. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

v. $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x^2}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x^2}\right)\left(\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\left(\frac{x^4}{4}+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$

vi. $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4-x^2y^2)(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$

vii. $\left(\frac{3}{x}-2y^2\right)\left(\frac{9}{x^2}+\frac{6y^2}{x}+4y^4\right)$ viii. $\left(2x^2-\frac{1}{9}\right)\left(4x^4+\frac{2x^2}{9}+\frac{1}{81}\right)$

مشق 4.6

1. i. $R=-2$ ii. $R=2$ iii. $R=18$ iv. $R=-42$ v. $R=-11$

vi. $R=\frac{3}{2}$ vii. $R=-8$ viii. $R=3y^4$

2. $m=-1$ 3. $k=-24$ 4. $r=1,\ r=-3$

مشق 4.7

1. i. $R=0,\ q(x)=x^2+1$ ii. $R=-2,\ q(x)=x^2-2x+1$

iii. $R=-60,\ q(x)=x^2-8x+27$ iv. $R=4,\ q(x)=x^2+8x+5$

v. $R=29,\ q(x)=x^3-3x^2+7x-15$ vi. $R=1,\ q(x)=x^3+2x^2+x+2$

vii. $R=-291,\ q(x)=x^4-3x^3+10x^2-32x+96$

viii. $R=174,\ q(x)=x^4+2x^3+7x^2+18x+60$

ix. $R=175,\ q(x)=2x^3+2x^2+104x+40$

x. $R = -300,\ q(x) = 6x^3 - 42x^2 + 90x - 114$

2. $k = 24$　　3. $m = 4$　　4. $m = -24$　　5. $m = -1$

مشق 4.8

1. i. $(x-1)(x^2+1)$　　ii. $(x+1)^2(x-1)$
iii. $(x-1)(x-2)(x-3)$　　iv. $(x+2)(x-2)(x+5)$
v. $(x-2)(x^2+9)$　　vi. $(x+1)(2x-1)(3x+2)$
vii. $(x+1)(x+3)(x+4)$　　viii. $(x+1)(2x+1)(x+3)$
ix. $(x+2)(x+4)(x+6)$

اعادہ مشق 4

1. i. درست　　ii. درست　　iii. درست　　iv. غلط
v. غلط　　vi. غلط

2. i. $4x + y^2$　　ii. $x^2 + 4xy + 16y^2$　　iii. $x + 3$
iv. $2xy$　　v. $a^2 - 3ab + 9b^2$

3. i. b　　ii. c　　iii. d　　iv. a　　v. b　　vi. c

مشق 5.1

1. i. مشترک عاداعظم $= 24x^3y^5z^2$　　ii. مشترک عاداعظم $= 6r^3s^3t^3$
iii. مشترک عاداعظم $= (x+3)$　　iv. مشترک عاداعظم $= (2x-3)$
v. مشترک عاداعظم $= 2(a-2b)$　　vi. مشترک عاداعظم $= (x+1)$

2. i. مشترک عاداعظم $= (x+1)$　　ii. مشترک عاداعظم $= x^2 + 7x + 12$
iii. مشترک عاداعظم $= (x-2)$　　iv.

3. i. مشترک ذواضعاف اقل $= 81a^4b^5c^8$　　ii. $600p^5q^4r^8$
iii. $7x(x-1)(3x-2)$　　iv. $(x+4)(x+7)(x-3)$
v. $(3x+1)(x-1)(2x+3)$

vi. $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

4. i. $(x-20)(x-5)(x+4)$ ii. $(3x+2)(x+4)(2x-1)$

iii. $(x+y+z)(x-y-z)(x-z-x)$ iv. $12x^3(x-4)(x+7)(x-2)$

5. $(x-8)(x-3)^2$ 6. x^2+2x-3

7. $9x^4+15x^3-12x-14x^2+8$ 9. 6 سینٹی میٹر

10. 11بج کر 54منٹ

مشق 5.2

1. i. $\dfrac{7x+3}{(x+1)^2}$ ii. $\dfrac{12x^2+29x+16}{3x(2x+1)(x+1)}$

iii. $\dfrac{-4x^3+x^2+9x-4}{(x+1)^2(x-3)}$ iv. $\dfrac{2(x^2+3x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

v. $2x+6$ vi. $\dfrac{x+3}{x+9}$

vii. $\dfrac{-(x+3)(4x+7)}{(x+1)^2(x+2)}$ viii. $\dfrac{-2x-7}{(x-2)(x-3)}$

ix. $\dfrac{x^2-5x-42}{(x^2-9)(x+4)(x+5)}$ x. $\dfrac{2(x^2+5)}{4x^2+x+2}$

مشق 5.3

1. i. $6x-5y$ ii. $3x+\dfrac{1}{x}$ iii. $2x^2y^2-\dfrac{3xy}{z^2}$

iv. $18-12x-4y$ v. $x+\dfrac{1}{x}+1$

vi. $3(2x-1)(x-3)$ vii. $(x-1)(x-3)$ viii. $(x+3)(x+5)(x+2)$

2. i. x^2+x+1 ii. $5x^2+4x+1$ iii. $2x^2+2x+4$

iv. $\left(\frac{x}{y}+7-\frac{y}{x}\right)$ v. $x-1+\frac{1}{x}$ vi. $x+\frac{y}{3}+3z$

vii. $x^2-4+\frac{1}{x^2}$ viii. $x^3-2+\frac{1}{x^3}$

3. 7 4. $-\left(24x^2-9\right)$ 5. $m=20$ 6. $p=-56,\ q=-49$

اعادہ مشق 5

1. i. درست ii. غلط iii. درست iv. غلط v. درست
2. i. دو ii. $p(x)\,q(x)$ iii. 1
   iv. $(y+1)(y+2)(y+3)$ v. $y+\frac{1}{y}$
3. i. d ii. d iii. b iv. c v. b vi. d
   vii. c viii. b ix. b x. c

مشق 6.1

1. i. $x=20$ ii. $x=-12$ iii. $x=30$ iv. $x=40$
   v. $y=\frac{1}{15}$ vi. $y=\frac{11}{20}$ vii. $x=\frac{44}{17}$ viii. $x=105$
   ix. $\frac{105}{13}$ x. $x=1$ xi. $x=-\frac{20}{7}$ xii. $x=12$
   xiii. $x=-\frac{5}{4}$ xiv. $x=-4$ xv. $m=\frac{-11}{6}$
2. $\{5\}$ 3. $x=7$ 4. بلال = 18 سال
   علی = 12 سال
5. i. $\{1\}$ ii. $\{10\}$ iii. $\{100\}$
   iv. $\{-12\}$ v. $\{143\}$ vi. $\{\ \}$
   vii. $\{2\}$ viii. $\{81\}$ ix. $\{80\}$

مشق 6.2

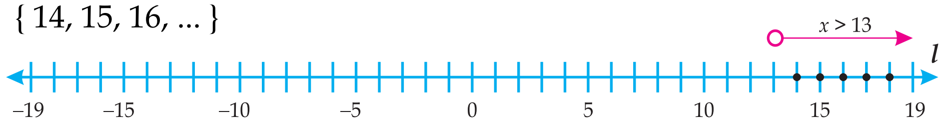
1\. i. $\left\{-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ ii. $\{1\}$ iii. $\{-42, 42\}$ iv. $\left\{-\frac{25}{2}, \frac{23}{2}\right\}$

v. $\{3\}$ vi. $\left\{-\frac{78}{5}, \frac{76}{5}\right\}$ vii. $\left\{-\frac{23}{2}, \frac{17}{2}\right\}$ viii. $\{-10, 6\}$

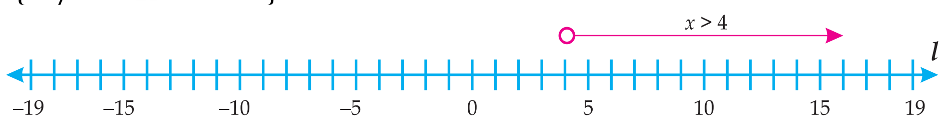
ix. $\left\{\frac{-19}{14}, \frac{-13}{14}\right\}$ x. $\{-41, 44\}$ xi. $\{\ \}$ xii. $\{-4, 3\}$

مشق 6.3

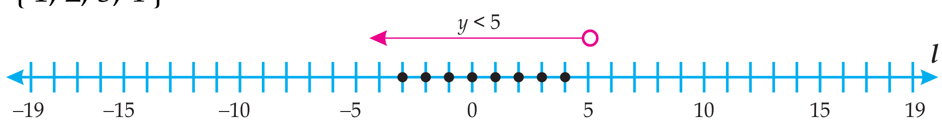
1\. i. $\{14, 15, 16, \ldots\}$



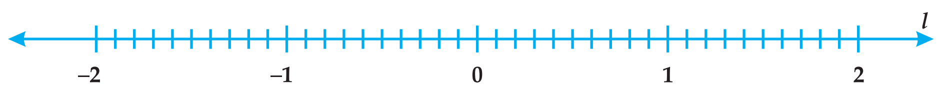
ii. $\{x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge x > 4\}$



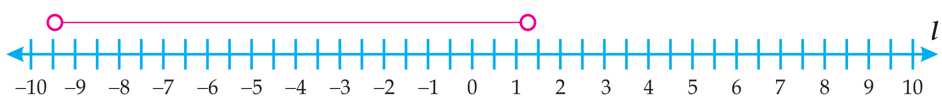
iii. $\{1, 2, 3, 4\}$



iv. $\{\ \}$



v. $\left\{y / y \in \mathbb{R}\ \frac{-19}{2} < y < \frac{3}{2}\right\}$



2۔ 4 سے بڑے سب حقیقی اعداد۔

3۔ علی کو کم سے کم 187 اسکور بونس انعام کے لیے کرنا چاہیے۔

اعادہ مشق 6

1. i. غلط ii. غلط iii. درست iv. درست v. غلط

2. i. $\{0\}$ ii. $\{20\}$ iii. $\{\pm 4\}$
iv. $\{-1\}$ v. $\{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge -2 < y < 3\}$

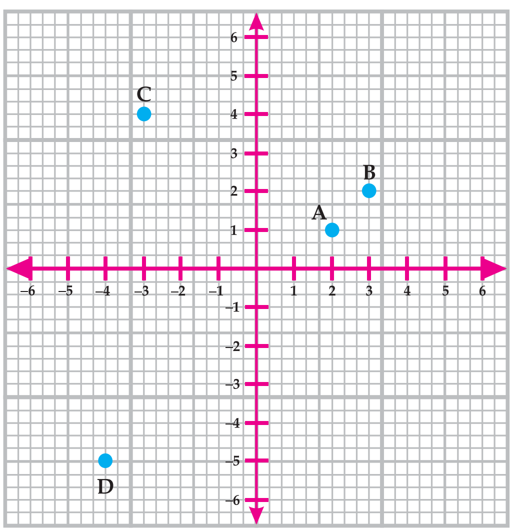
3. i. a ii. a iii. c iv. a v. b vi. c
vii. c viii. c ix. c x. a

مشق 7.1

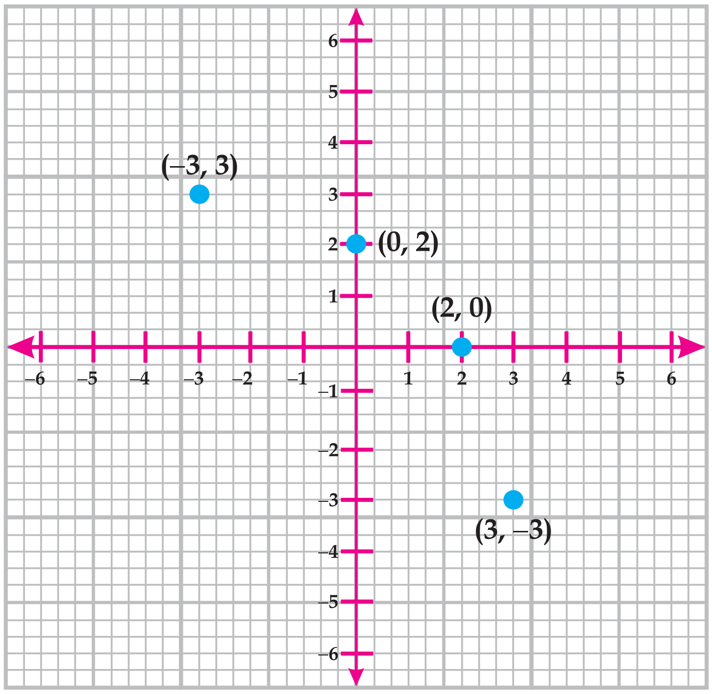
1. i. x کوآرڈینیٹ $= -2$ ، y کوآرڈینیٹ $= 2$
ii. x کوآرڈینیٹ $= 5$ ، y کوآرڈینیٹ $= -1$
iii. x کوآرڈینیٹ $= 4$ ، y کوآرڈینیٹ $= 0$
iv. x کوآرڈینیٹ $= -5$ ، y کوآرڈینیٹ $= -6$
v. x کوآرڈینیٹ $= 3$ ، y کوآرڈینیٹ $= 4$
vi. x کوآرڈینیٹ $= -\sqrt{8}$ ، y کوآرڈینیٹ $= \sqrt{8}$

2. i. IV - ربع میں ہے۔ ii. II - ربع میں ہے۔
iii. IV - ربع میں ہے۔ iv. III - ربع میں ہے۔
v. I - ربع میں ہے۔ vi. I - ربع میں ہے۔

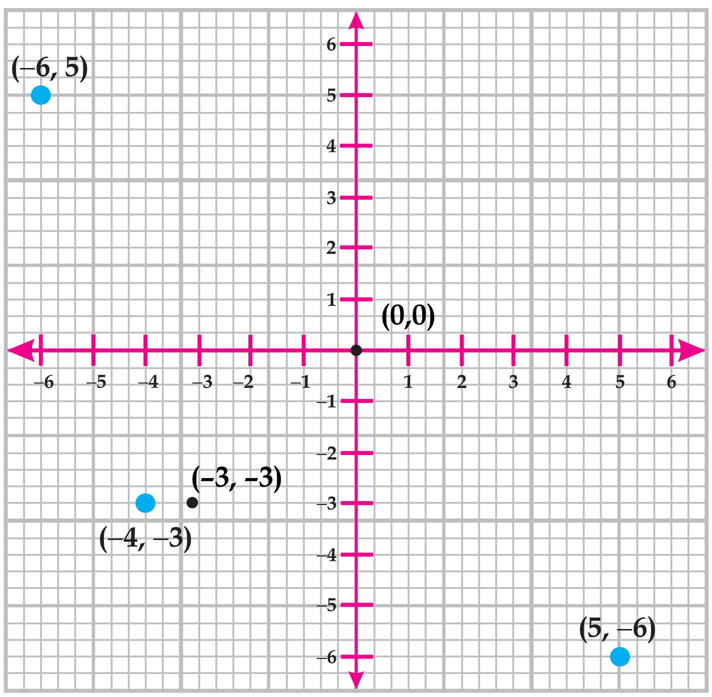
3. i.



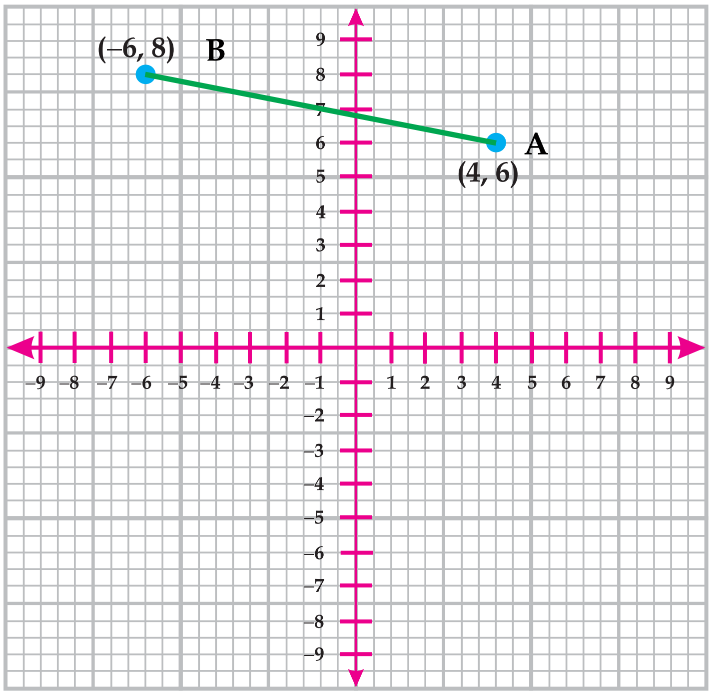
ii.



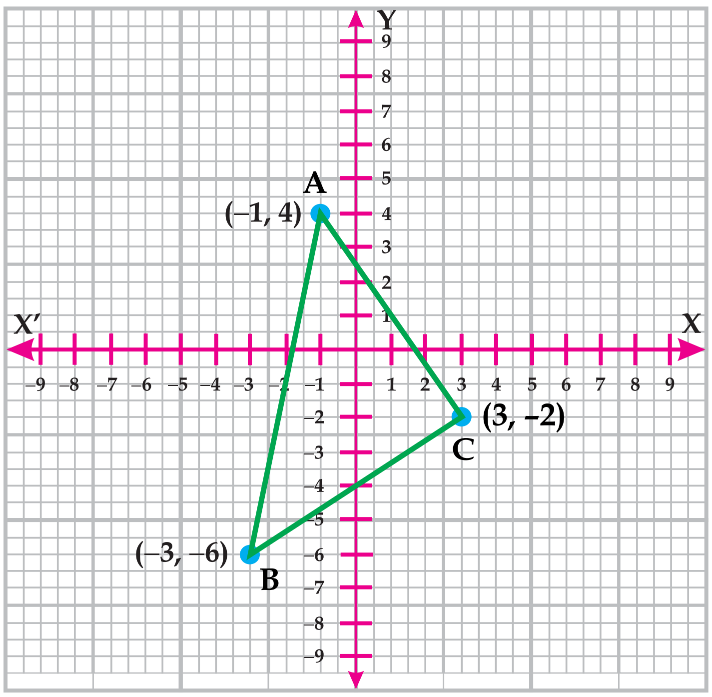
iii.



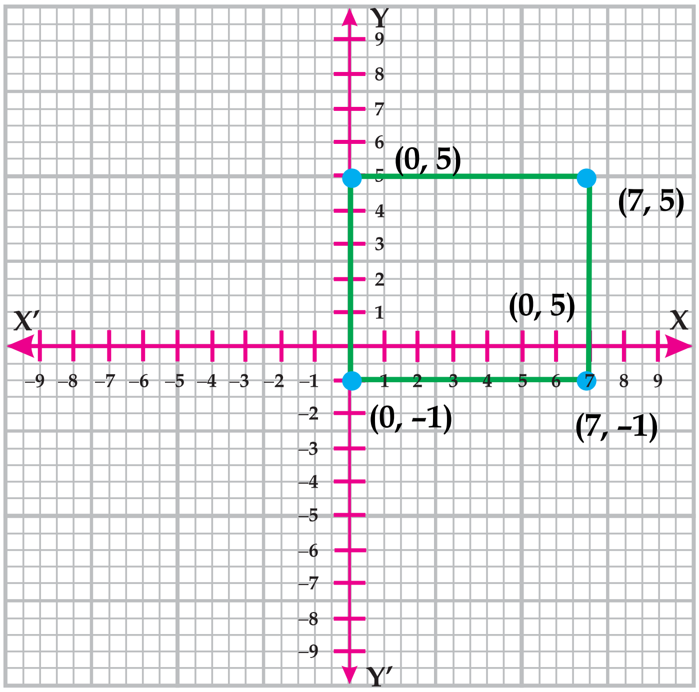
4.



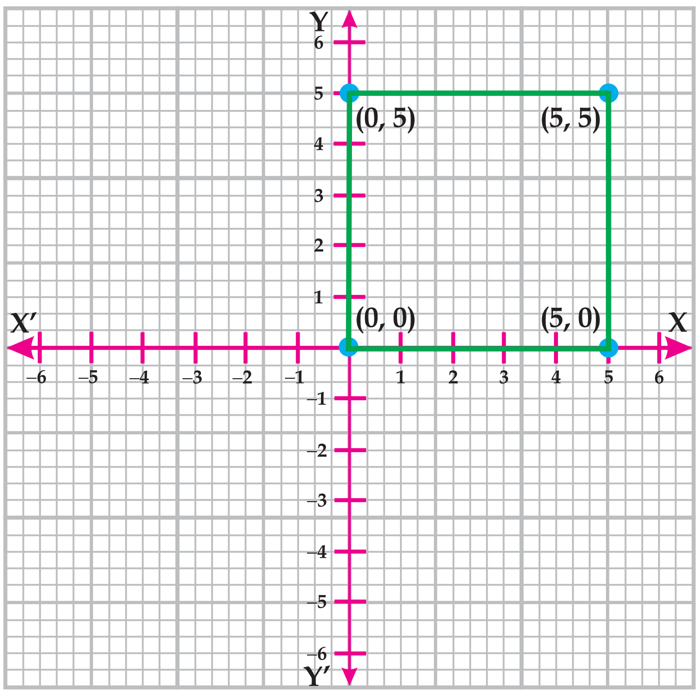
5.



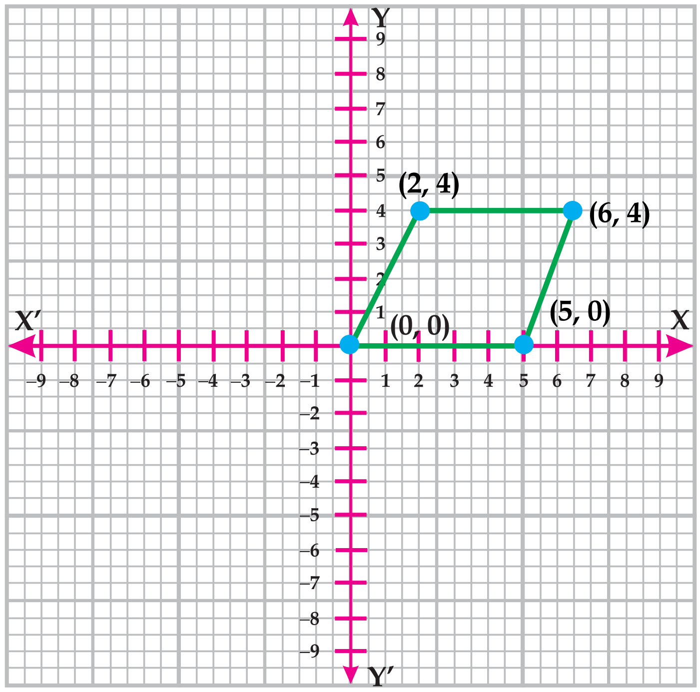
6.



7.



8.



9. **i.** $y = 2 - x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	5	4	3	2	1	0	–1

ii. $y = 2x - 6$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–12	–10	–8	–6	–4	–2	0

iii. $x = 12 - 2y$

y	–3	–2	–1	0	1	2	3
x	18	16	14	12	10	8	6

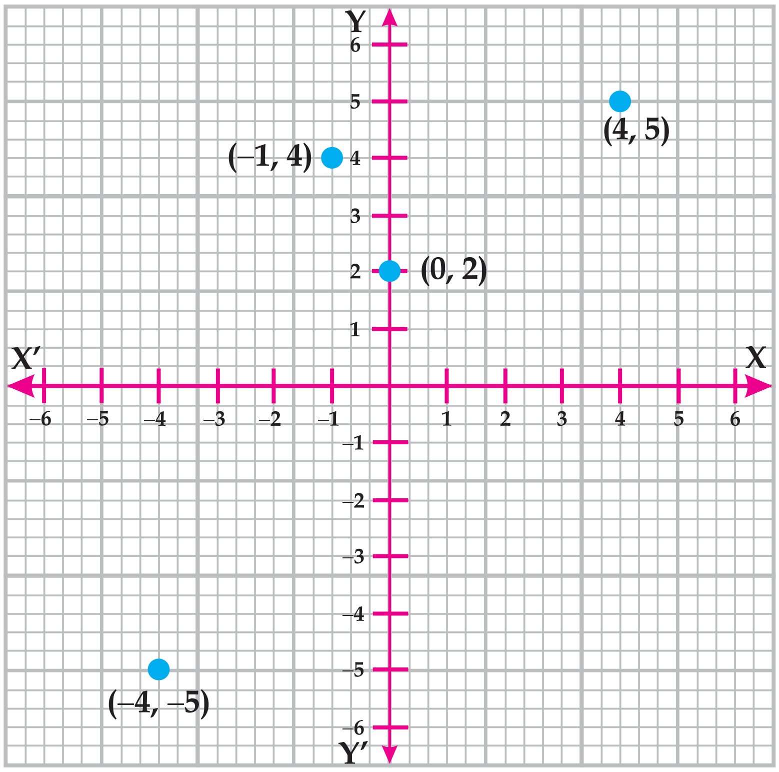
iv. $x = 2y - 3$

y	–3	–2	–1	0	1	2	3
x	–9	–7	–5	–3	–1	1	3

مشق 7.2

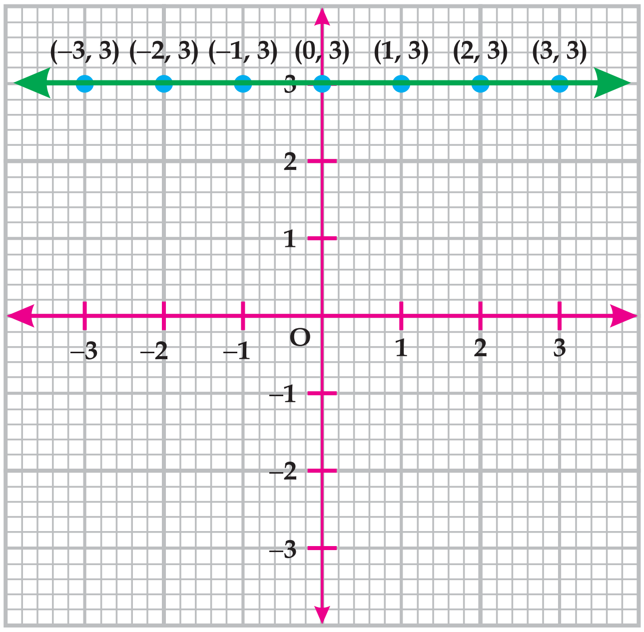
1. $y = 6 - x$

y	–3	–2	–1	0	1	2	3
x	9	8	7	6	5	4	3



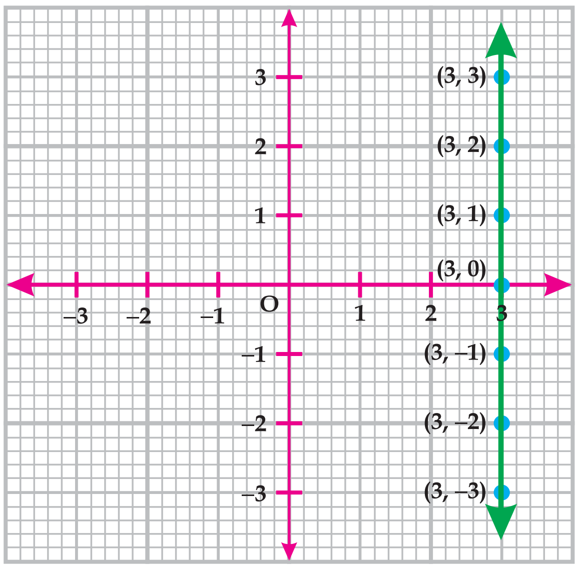
3. i.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	3	3	3	3	3	3	3



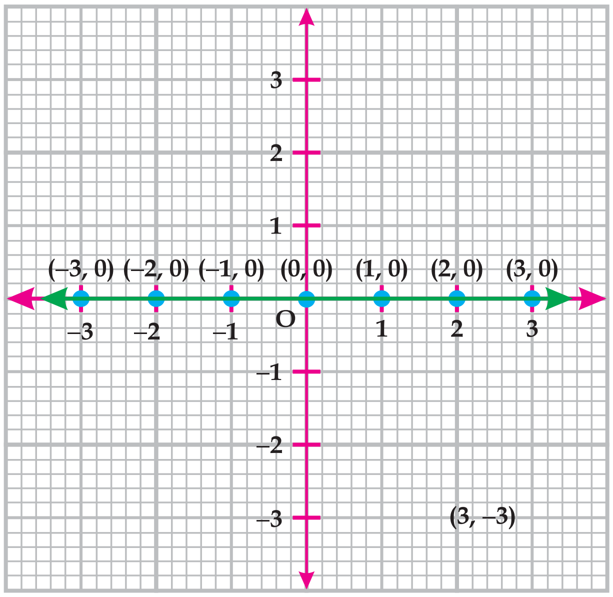
ii.

x	3	3	3	3	3	3	3
y	–3	–2	–1	0	1	2	3



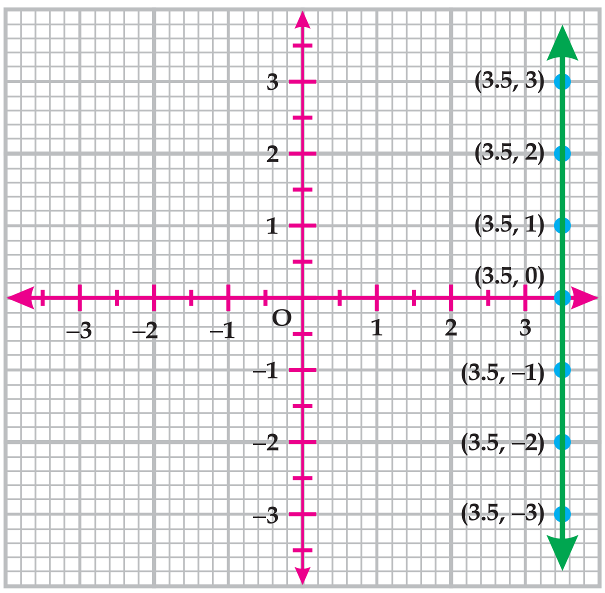
iii.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0	0	0	0	0	0	0



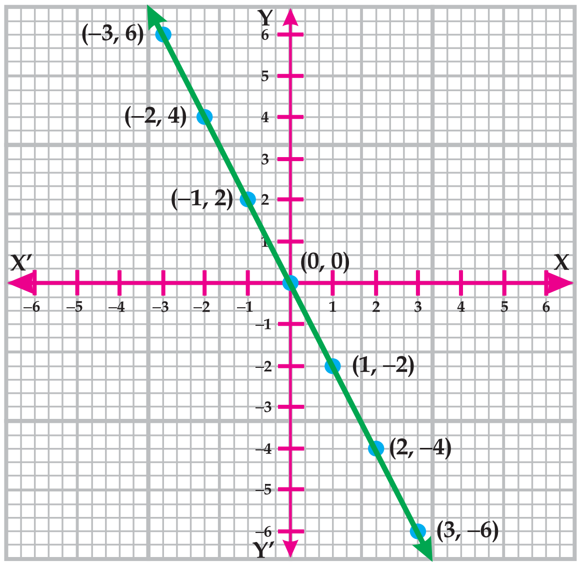
v.

x	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5
y	–3	–2	–1	0	1	2	3



vi.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	6	4	2	0	–2	–4	–6



4. i.

مساوات	x- محددات	y- محددات
$y = \frac{1}{2}x$	0	0
	4	2

ii.

مساوات	x- محددات	y- محددات
$y = \frac{2}{3}y$	1	$\frac{3}{2}$
	1	$\frac{3}{2}$

iii.

مساوات	x- محددات	y- محددات
$2x+4y=8$	0	2
	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$

iv.

مساوات	x- محددات	y- محددات
$2x+y=6$	1	4
	3	0

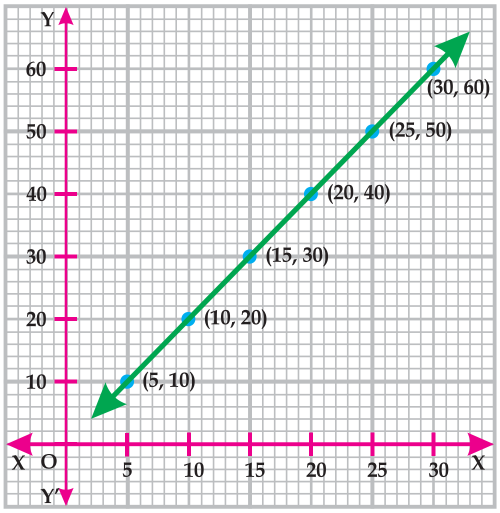
v.

مساوات	محددات - x	محددات - y
$x-y=2$	2	0
	1	–1

vi.

مساوات	محددات - x	محددات - y
$x-3y=6$	3	–1
	3	–1

5.



6. a. عائشہ نے 100 کلو میٹر سواری لے لئے 5 گھنٹے لیئے۔

b. عائشہ نے 60 کلو میٹر کا فاصلہ 3 گھنٹے میں طے کیا۔

مشق 7.3

1. i. 1.6 کلو میٹر ii. 4.8 کلو میٹر iii. 1.2 میل iv. 4.9 میل یا 5 میل

2. i. 5 ایکڑ ii. 12 ایکڑ iii. 2 ہیکٹر iv. 6 ہیکٹر

3. i. 35.6°F ii. 35.4°F iii. 0°C iv. 2.44°C

4. i. 90° ii. 156 روپے iii. 5 ریال iv. 2.6 ریال

5. i. $\{3,-2\}$ ii. $\{3,1\}$ iii. $\{3,1\}$ iv. $\{4,7\}$ v. $\{1,1\}$

vi. $\{-3,-4\}$ vii. $\{-3,2\}$ viii. $\{1,1\}$ ix. $\{8,4\}$ x. $\{5,1\}$

اعادہ مشق 7

1. i. درست ii. غلط iii. غلط iv. غلط

3. i. *c* ii. *b* iii. *a* iv. *b* v. *c* vi. *a* vii. *a*

مشق 8.1

1. i. $\{-2,-3\}$ ii. $\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\}$ iii. $\{6,5\}$ iv. $\{2,0\}$

v. $\{5,-3\}$ vi. $\left\{\frac{8}{3},\frac{3}{4}\right\}$ vii. $\{8,2\}$ viii. $\left\{0,-\frac{8}{3}\right\}$

2. i. $\{-3+2\sqrt{2}, -3-2\sqrt{2}\}$ ii. $\left\{0,-\frac{10}{3}\right\}$ iii. $\left\{\frac{4+\sqrt{13}}{3},\frac{4-\sqrt{13}}{3}\right\}$

iv. $\left\{\frac{3}{4},-\frac{7}{6}\right\}$ v. $\left\{4,-\frac{3}{2}\right\}$ vi. $\left\{\frac{-2+\sqrt{6}}{2},\frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right\}$

3. i. $b=-2$ ii. $\frac{-4}{3}$

مشق 8.2

1. i. $\{5,-3\}$ ii. $\left\{\frac{3}{5},-\frac{5}{2}\right\}$

iii. $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ iv. $\left\{\frac{1+2\sqrt{7}}{3},\frac{-1-2\sqrt{7}}{3}\right\}$

v. $\left\{\frac{2+3i\sqrt{5}}{3},\frac{2-3i\sqrt{5}}{3}\right\}$ vi. $\left\{\frac{-3+\sqrt{41}}{4},\frac{-3-\sqrt{41}}{4}\right\}$

vii. $\left\{\frac{1+i\sqrt{5}}{3},\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right\}$ viii. $\left\{\frac{1}{2},\frac{-1}{3}\right\}$

ix. $\left\{\frac{5}{2},0\right\}$ x. $\{1,-1\}$

xi. $\{3\}$ xii. $\{\sqrt{14}, -\sqrt{14}\}$

مشق 8.3

1. $\{\pm 3, \pm i\}$
2. $\{\pm 2, \pm i\}$
3. $\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$
4. $\left\{-\frac{3}{4}, -2\right\}$
5. $\left\{\pm\frac{\sqrt{6}\,i}{2}, \pm\frac{2\sqrt{14}\,i}{7}\right\}$
6. $\{-1, 2\}$
7. $\{2\}$
8. $\{-2, 1\}$
9. $\{-1\}$
10. $\{-2\}$
11. $\{2, 4\}$
12. $\left\{3, -10, \frac{-7\pm\sqrt{79}\,i}{2}\right\}$
13. $\left\{-6, 1, \frac{-5\pm\sqrt{39}\,i}{2}\right\}$
14. $\left\{0, 1, \frac{1\pm\sqrt{57}}{2}\right\}$

مشق 8.4

1. $\{4\}$
2. $\{6\}$
3. $\{1, 3\}$
4. $\{2\}$
5. $\left\{0, \frac{-3}{2}\right\}$
6. $\{0, 3\}$

اعادہ مشق 8

1. i. 2 ii. $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ iii. قوت نمائی
iv. $x=2$ v. $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. i. b ii. a iii. c iv. a v. a
vi. c vii. b viii. a ix. c x. a

3. i. غلط ii. غلط iii. غلط iv. غلط
v. غلط vi. درست vii. درست

اعادہ مشق 9

1. 30°

2. i. درست ii. غلط iii. درست iv. غلط v. غلط

3. i. $\overline{DF}$ ii. $\angle RPQ$ iii. مماثل
   iv. مساوی الاضلاع v. وتر vi. 90°

4. i. *b* ii. *c* iii. *b* iv. *c*

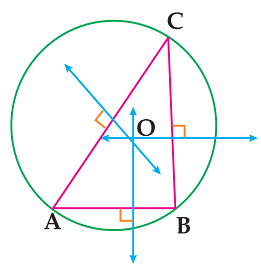
اعادہ مشق 10

1. i. مماثل ii. مماثل iii. مماثل iv. ناصف
   v. برابر vi. مماثل vii. 360°

2. i. *d* ii. *b* iii. *d* iv. *c* v. *b*
   vi. *b* vii. *a* viii. *a*

مشق 11.1

3. تین غیر ہم خط نقاط سے صرف اور صرف دائرہ گزر سکتا ہے۔ دائرہ کا مرکزی نقطہ کے ناصف کا تقاطع ان غیر ہم نقاط کو باہم ملانے سے ملتا ہے۔ یہ نقطہ تقاطع کے تین غیر ہم خط سے ہم فاصلہ ہیں۔



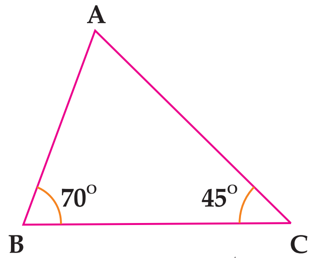
اعادہ مشق 11

3. i. درست ii. درست iii. درست

4. i. *c* ii. *c* iii. *b* iv. *a*

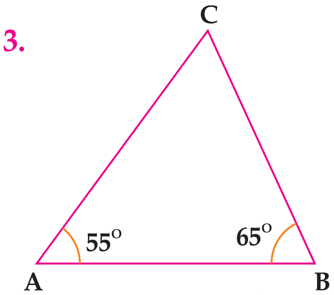
مشق 12.1

2.



ضلع AC لمباترین ہے

3.



ضلع BC چھوٹاترین ہے

اعادہ مشق 12

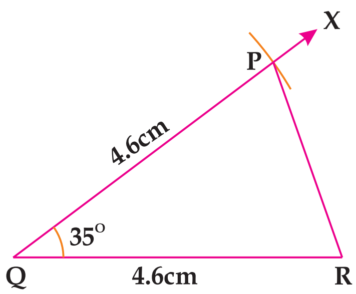
1. i. درست ii. غلط iii. درست iv. غلط v. درست

2. i. عمود ii. بڑاہے iii. BC

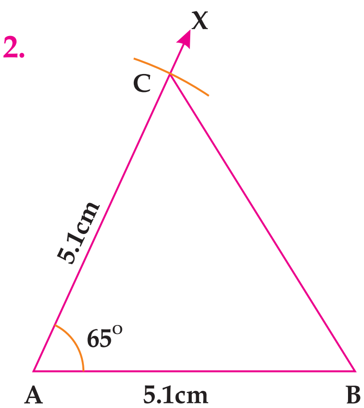
3. i. a ii. b

مشق 13.1

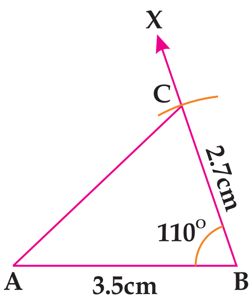
1.



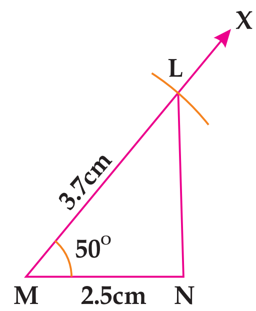
2.



3.

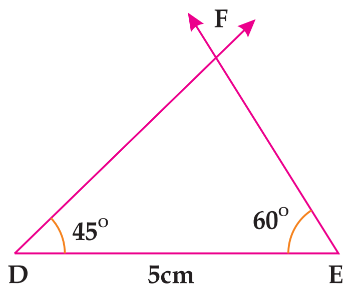

X
C
2.7cm
110°
A
3.5cm
B

4.

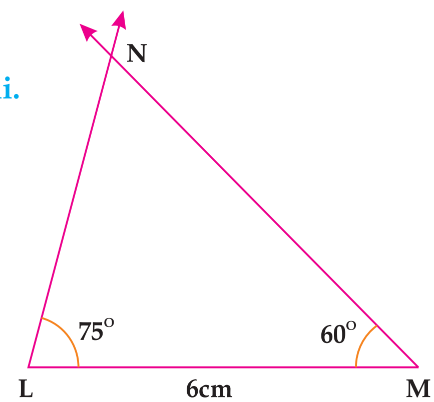

X
L
3.7cm
50°
M
2.5cm
N

6.

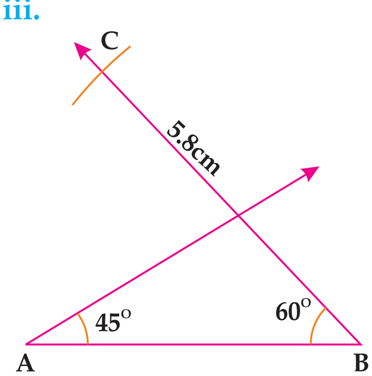
i.


F
45°
60°
D
5cm
E

ii.

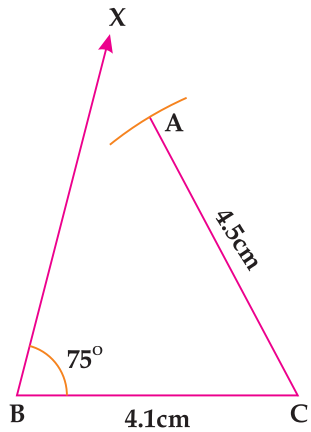

N
75°
60°
L
6cm
M

iii.

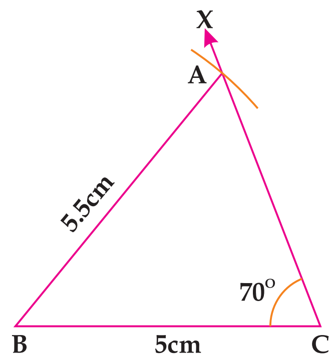

C
5.8cm
45°
60°
A
B

7.

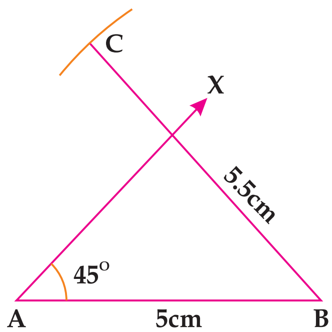
i.



ii.

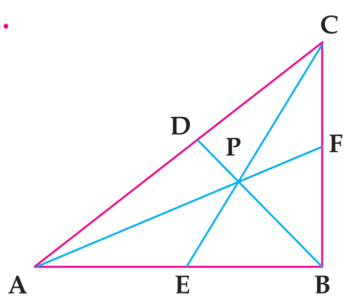


iii.

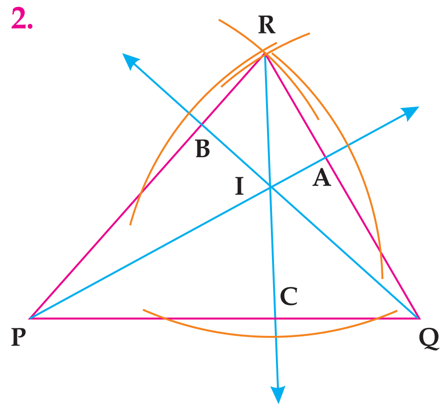


مشق 13.2

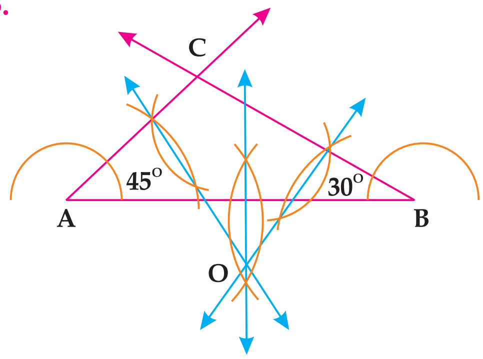
1.



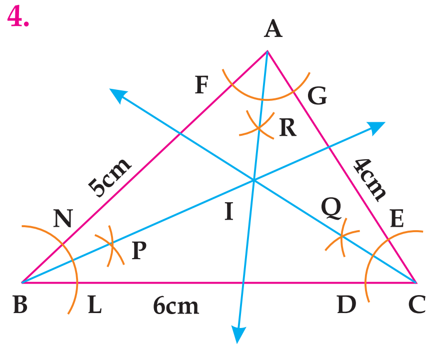
2.



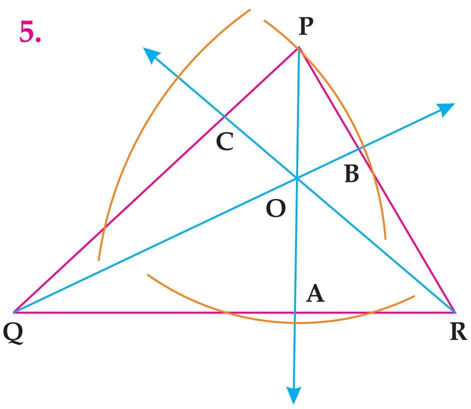
3.


C
45°
30°
A
B
O

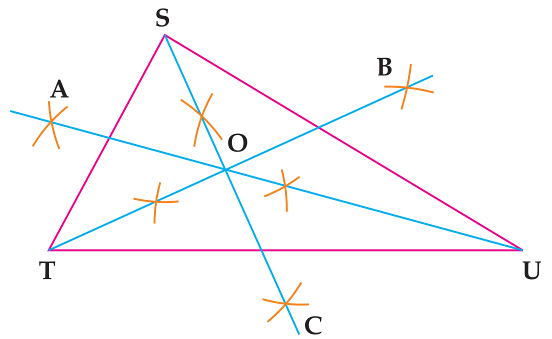
4.


A
F
G
R
5cm
4cm
N
I
Q
E
P
B
L
6cm
D
C

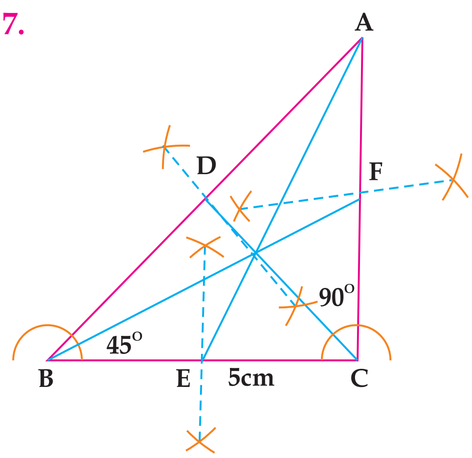
5.


P
C
B
O
A
Q
R

6.

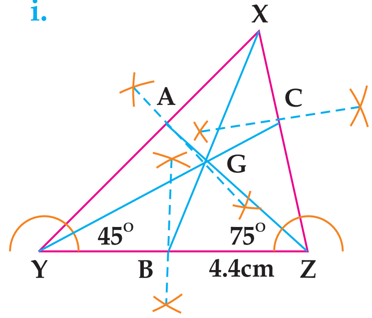

S
B
A
O
T
U
C

7.

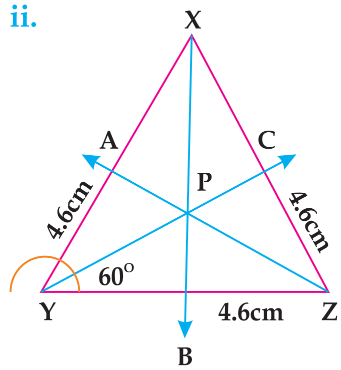

A
D
F
90°
45°
B
E
5cm
C

8.

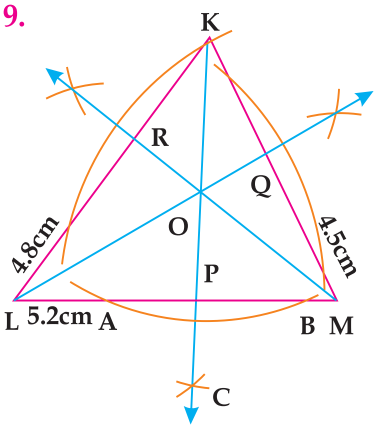
i.



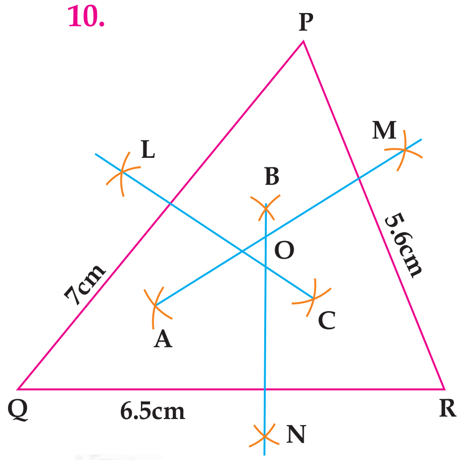
ii.



9.

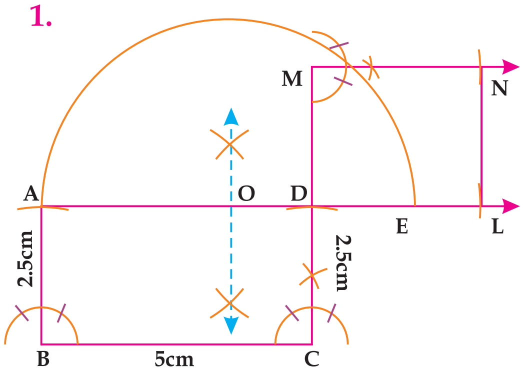


10.

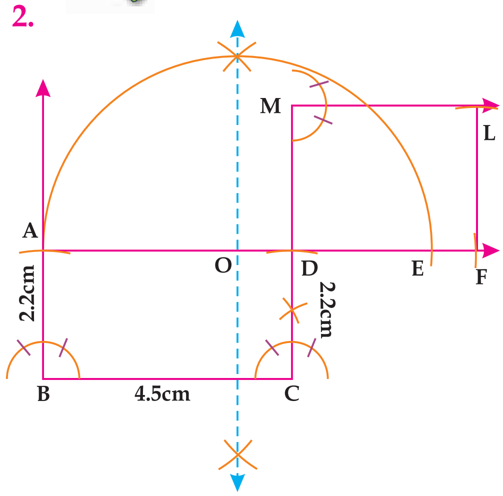


مشق 13.3

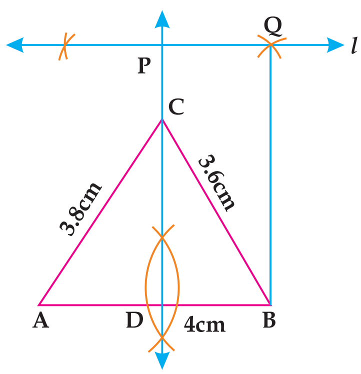
1.



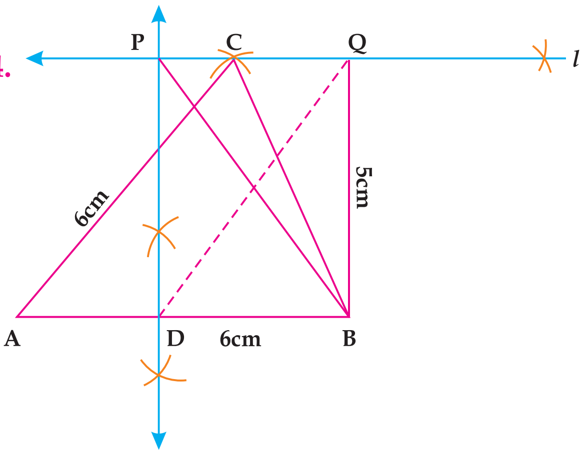
2.



3.



4.



اعادہ مشق 13

1. i. وتر　ii. مثلث کے ارتفاع　iii. وسطانیہ
   iv. ہم فاصلہ　v. برابر

2. i. *c*　ii. *d*　iii. *c*　iv. *b*　v. *a*
   vi. *d*　vii. *c*　viii. *b*　ix. *d*

مشق 14.1

3. $\Delta BCD = 21\sqrt{2}\ cm^2$

اعادہ مشق 14

1. i. درست　ii. درست　iii. غلط　iv. درست　v. غلط
   vi. غلط　vii. غلط　viii. درست

2. i. *b*　ii. *b*　iii. *c*　iv. *d*　v. *d*　vi. *b*

مشق 15.1

1. i. ضلع $\overline{AB} = 3\sqrt{7}cm$, رقبہ $= \frac{9\sqrt{3}}{2}cm^2$

ii. ضلع $\overline{AB}$ کی لمبائی $= 4\sqrt{7}cm$, رقبہ $= 8\sqrt{3}cm^2$

2. ضلع $\overline{AC}$ کی لمبائی $= \sqrt{116}cm$, رقبہ $= 12cm^2$

3. ضلع $\overline{AC}$ کی لمبائی $= \sqrt{232}cm$, رقبہ $= 24cm^2$

مشق 15.2

2. $m\overline{BC} = 46cm$

4. قائمۃ الزاویہ مثلث

5. وسطانیے کی لمبائی $= \sqrt{\frac{7}{2}}\ cm$

اعادہ مشق 15

1. i. $(m\overline{BC})^2$ ii. مساوی الاضلاع iii. $(m\overline{AC})^2$ iv. مثلث

2. $m\overline{AB} = 8cm$

مشق 16.1

1. i. $\sqrt{101}$ ii. 1 iii. $2\sqrt{2}$ iv. $2\sqrt{2}$

2. i. 5 ii. $\sqrt{117}$ iii. 5 iv. $\sqrt{10}$

3. $P = 12$

مشق 16.2

4. نقطہ A, B اور C مساوی الساقین مثلث بناتے ہیں

5. نقطہ A, B اور C قائمۃ الزاویہ مثلث بناتے ہیں

6. $k = 1 \pm 3\sqrt{3}$

9. کیونکہ چوکور کے اضلاع برابر ہوتے ہیں اسلئے یہ نقطے برابر ہیں

مشق 16.3

1. i. $(-1,7)$ ii. $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ iii. $(-4,3)$ iv. $\left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$

2. $(-1,1)$ 3. $B=(2,2)$ 4. درمیانی نقطہ (4, 5)
رداس = $5\sqrt{2}$ س-م

اعادہ مشق 16

1. i. درست ii. غلط iii. غلط iv. غلط v. درست
vi. درست vii. درست viii. درست ix. غلط

2. i. $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ii. خط iii. $y<0$

3. i. c ii. a iii. d iv. d