یونٹ 25

دائرے کے وتر

CHORD OF A CIRCLE

طلباء کے آموزثر حاصلات

اس کی یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- مندرجہ ذیل اثباتی مسائل اور ان کے نتائج صریح کو سمجھ اور متعلقہ سوالات کو حل کرنے لیئے ان کو استعمال کر سکیں۔
  - تین غیر ہم خط نقاط سے ایک اور حرف ایک دائرہ گذر سکتا ہے
  - دائرکے مرکز سے کسی وترا (جو قطر نہ ہو) کی تنفیف کرنے والا قطعہ خط، وتر پر عمور ہوتا ہے۔
  - دائرے کے مرکز سے کس وتر پر عمود اس کی تنصیف کرتا ہے۔
  - اگر دائرے کے دو وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے ہم فاصلہ ہونگے۔
  - اگر دائرے کے دو وتر مرکز سے اہم فاصلہ ہوں تو وہ متماثل ہوتے ہیں۔

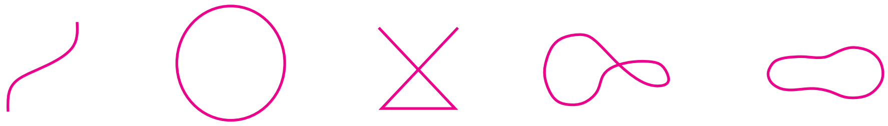
تعارف (Introduction):

پچھلی جماعت اور یونٹوں میں ہم نے جیومیٹری کا تفصیلی مطالعہ کیا جس میں مثلث اور چوکور شامل ہیں جو تمام قطعہ خطوں سے بنتے ہیں۔ قطعہ خطوں میں خم نہیں ہوتا یہاں ہم ثبوت کے ساتھ اثباتی مسائل اور دائروں سے متعلقہ مسائل پر توجہ دینگے۔

دائرے ہماری دنیا میں موجود امتکال کو سمجھنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ دائروں کے بغیر ہم ایک گاڑی کی خم دار روڈ پر حرکت سیاروں کی مدار میں گردش، ایٹم میں الیکٹرانوں کی حرکت Cyclones بناوٹ وغیرہ جیسی چیزوں کو سمجھنے سے قاصر ہونگے دائرے نے کس جدید اشکال جیسے بیضوی، کرہ، سلنڈر اور مخروط کو سمجھنے میں بنیادی کردار ادا کرتے ہیں جو کہ ہماری دنیا کی اشیاء کے خدوخال سے تعلق رکھتی ہیں جیسے کہ تنے، درخت، پانی کے قطرے، تارپائپ غبارے، پہیوں، بال بیرنگ وغیرہ۔

ایک حرکت پذیر نقطے کے اختیار کئے جانے والے راستے کو منحنی خط کہتے ایک کھلے ہوئے منحنی خط کے مختلف ابتدائی اور اختتامی نقاط ہوتے ہیں ایک بند منحنی خط کا نقطے آغاز اور اختتامی نقطہ ایک ہوتا ہے یا جس کا کوبھی ابتدائی اور اختتامی نقاط نہیں ہوتے ہیں۔

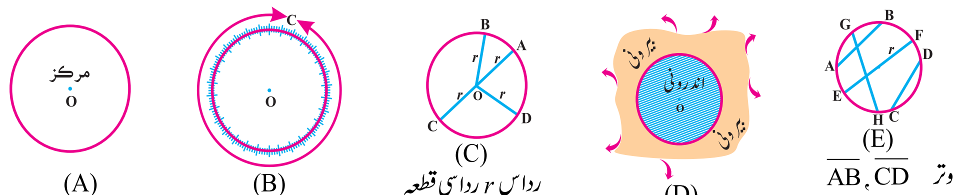
ایک منحنی خط جو اپنے آپ کو کراس نہ کریں ایک سادہ منحنی خط کہلاتا ہے ورنہ غیر سادہ منحنی خط کہلاتا ہے ایک منحنی خط جو سادہ ہونے کے ساتھ ساتھ بند بھی ہو تو وہ سادہ بند منحنی خط کہلائے گا۔ مثال کے طور پر شکل (i) میں دی گئیں منحنی خطوں حوالہ دیں۔



(A) سادہ، کھلا　(B) سادہ، بند　(C) غیر سادہ کھلا　(D) غیر سادہ بند　(E) سادہ بند

شکل (i): سادہ کھلا، سادہ بند، غیر سادہ کھلا، غیر سادہ بند، سادہ بند

ایک دائرہ سادہ بند منحنی خط ہوتا ہے۔ جس کے تمام نقاط ایک مقررہ نقطہ جو اُس کا مرکز کہلاتا ہے اُسے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔ دائرے کے حدود کی لمبائی محیط کہلاتی ہے ایک قطعہ خط جو دائرے کے مرکز کو محیط کسی بھی نقطے سے ملائے اُس اداسی قطعہ کہتے ہیں اور اس کی لمبائی کو دائرے کو رداس کہتے ہیں دائرے کے اندر واقع نقاط اس کا اندرونہ اور باہر واقع نقاط بیرونہ بناتے ہیں ایک قطعہ خط جو دائرے کے کسی بھی دو نقاط ملاتا ہے وہ دائرہ کا وتر کہلاتا ہے یا مرکزی وتر کہلاتا ہے اور اُس کی لمبائی دائرے میں موجود تمام وتروں کی لمبائی سے زیادہ ہوتی ہے۔ ان اصلاحات کی وضاحت شکل (ii) میں کی گئی ہے۔



(A) دائرے کا مرکز O　$(\odot O)$

(B) O کا محیط C　"C"

(C) رداس r رداسی قطعہ　$\overline{OD}$, $\overline{OC}$, $\overline{OB}$, $\overline{OA}$

(D) O کا اندرونی اور بیرونی　(≡)

(E) وتر $\overline{AB}$، $\overline{CD}$　قطر $\overline{GH}$، $\overline{EF}$　$\overline{EF}\,(m\overline{EF} = 2r)$

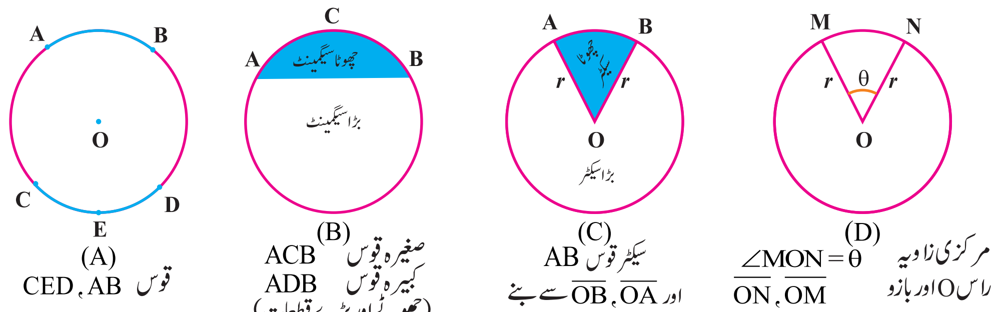
شکل (ii)

اگر r دائرے کا رداس ہے تو اُس کا قطر محیط اور دائری رقبہ برابر ہونگے 2r اور π2r یہاں πr^2 جیسا π (یونانی حرف) ایک غیر ناطق عدد ہے دائرے کے محیط سے اُس کے قطر کی نسبت ہے۔ یہ تقریبًا 22/7 ہے لیکن بالکل برابر نہیں ہے۔ حقیقت میں $\pi = 3.141592.653...$ ہم دیکھتے ہیں کہ $22/7=3.141592.653...$ جو کہ پہلے دو اعشاریہ تک ملتے ہیں۔

محیط کا حصہ دائرے کی قوس (Arc) کہلاتا ہے۔ ایک وتر دائرے کے اندرونہ کو دو حصوں یا قطعات میں تقسیم کرتا ہے۔ قطر دائرے کو دو برابر قطعات میں تقسیم کرتا ہے۔ قطعات گھیرے ہوئے ہوتے ہیں۔

قوس ان کے متعلق وتروں کے ایک مخصوص وتر کے لیے جو وہ قطعہ جو دائرے کا اندرونہ کا زیادہ گھیرتی ہو قطعہ کبیرہ اور جو کم گھیرتی ہو قطعہ صغیرہ کہلاتی ہے اور متناظرہ قوسین, قوس کبیرہ اور قوس صغیرہ کہلاتی ہے۔ دائرہ کے اندرونہ کا وہ حصہ جو دو راسی قطعات اور ایک قوس سے گھیرا ہوتا ہے وہ دائرے کا قطاع (Sector) کہلاتا ہے۔ منتخب کئے گئے رداسی قطعات اور قوس سے قطاع کبیرہ اور قطاع صغیرہ کا تعین ہوتا ہے۔

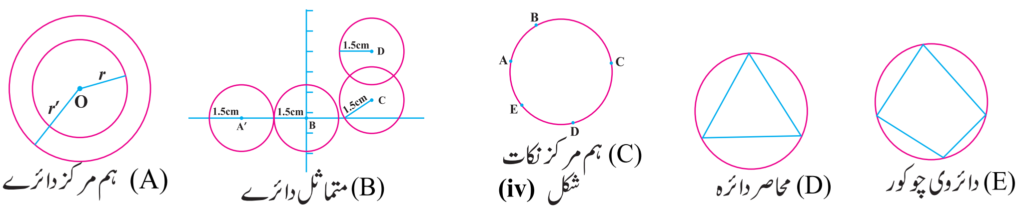
مرکزی زاویہ دائرے مرکز پر قوس مقابل زاویہ ہوتا ہے (مرکزی زاویے کا راس) شکل (iii) ان تصورات کی وضاحت کرتی ہے



شکل (iii)

(مرکزی زاویے راس) دائرے کے مقام اور سائز کا بالترتیب اُس مرکز اور رداس تعین کرتے ہیں۔

دو دائرے متماثل ہوتے ہیں اگر ان کے رداس برابر ہوں تو دو دائرے جن کا مرکز ایک ہوں وہ ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں اگر نقاط ایک خط پر واقع ہوں تو وہ ہم خط کہلاتے ہیں ورنہ غیر ہم خط ہونگے۔ دائرے پر واقع نقاط ہم دائرے کہلاتے ہیں ایک دائرہ جو مثلث کے راسوں سے گذرتا ہے محاصرہ دائرہ کہلاتا ہے ایک دائرہ جو چوکور کے راسوں سے کھینچا جائے وہ دائری چوکور ہوتا ہے۔



شکل (iv)

25.1 دائرے کے وتر (Chords of a Circle):

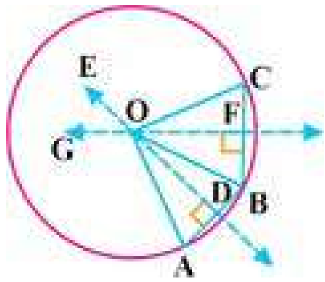
مسئلہ 25.1: تین غیر ہم خط نقاط سے ایک اور صرف ایک دائرہ گذر سکتا ہے۔

معلوم:

تین غیر ہم خط نقاط B، A اور C ہیں۔

مطلوب:

صرف ایک اور صرف دائرہ B،A اور C میں گذر سکتا ہے



عمل: قطعہ خط $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کھینچیں $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ بالترتیب عمودی ناصف $\overleftrightarrow{ED}$ اور $\overleftrightarrow{GF}$ کھینچیں $\overleftrightarrow{ED}$ اور $\overleftrightarrow{GF}$ نقطہ O پر قطعہ کرتے ہیں۔

$\overline{OA}$، $\overline{OB}$ اور $\overline{OC}$ کھینچیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overleftrightarrow{ED}$ پر تمام نقاط A اور B سے ہم فاصلہ ہیں	$\overleftrightarrow{ED}$ ، $\overline{AB}$ کا عموری ناصف ہے اور O ، $\overleftrightarrow{ED}$ پر نقطہ ہے
لہٰذا $m\overline{OA} = m\overline{OB}$ پر ...(i)	$\overleftrightarrow{GF}$ ، $\overline{BC}$ کا عموری ناصف ۲ اور $\overleftrightarrow{GF}$ نقطہ O سے گذرتا ہے۔
$\overleftrightarrow{GF}$ تمام نقاط B اور C سے ہم فاصلہ ہیں	$\overleftrightarrow{ED}$ اور $\overleftrightarrow{GF}$ غیر متوازی خطوط ہیں مساوات
لہٰذا $m\overline{OB} = m\overline{OC}$ ...(ii)	(i) اور (ii) سے
$\overleftrightarrow{ED}$ اور $\overleftrightarrow{GF}$ کا O واحد قطع ہے ...(iii)	خاصیت متعدیت
نقطہ O نقاط A، B اور C سے ہم فاصلہ ہیں ...(iv) $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = r$	$\overline{OA}$, $\overline{OB}$ اور $\overline{OC}$ اداس قطعات اور مساوات (iii) ہے
دائرے کا مرکز صرف O پر ہے اور رداس r گذرتا ہے۔	معلوم
B،A اور C گذرتا ہے۔ ...(v)	مساوات (iii), (iv), (v) اور (vi) سے

Q.E.D

نتیجہ صریح: دائرے پر کوئی تین مختلف نقاط غیر ہم خط ہوتے ہیں۔

نوٹ 1 مسئلہ: 25.1 دائرے کی وہ واحد انفرادیت کو ظاہر کرتا ہے کہ دائرہ کسی بھی تین غیر ہم خط نقاط سے کھینچا جا سکتا ہے۔

نوٹ 2: دائرے پر تین سے زیادہ کوئی بھی نقاط کی تعداد غیر ہم خط کہلاتی ہے۔

مثال 1:

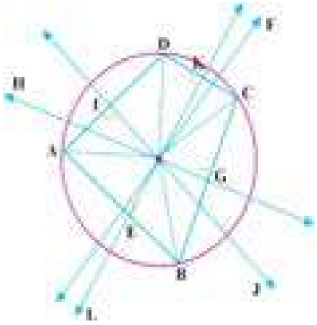
ثابت کریں کہ ایک اور صرف ایک دائرہ مثلث کے تین راسوں میں گذر سکتا ہے۔

معلوم:

ΔABC کے راس A,B اور C ہیں۔

مطلوب:

ایک اور صرف ایک دائرے ΔABC مثلث کے راسوں سے گذر سکتا ہے۔



عمل:

ΔABC کے اضلاع $\overline{AB}, \overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ کے عمودی ناصف بالترتیب

$\overline{AB}, \overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ کھینچیں جو نقاط O پر قطع کرتے ہیں

$\overline{OA}, \overline{OB}$ اور $\overline{OC}$ کھینچیں۔

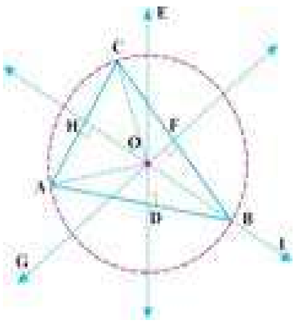
ثبوت

بیانات	دلائل
$\overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{FG}$ اور $\overleftrightarrow{HI}$ کا O واحد نقطہ تقاطع ہے نقطہ $O, \Delta ABC$ کا محاصر مرکز ہے	$\overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{FG}$ اور $\overleftrightarrow{HI}$ غیر متوازی خطوط ہیں اور O ان تمام پر واقع ہے مثلث کی تعریف کی روسے
نقطہ $O, \Delta ABC$ کے راسوں سے ہم فاصلہ ہے یعنی $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = r$	محاصر مرکز کی تعریف کی روسے
دائرہ جس کا مرکز O ہے اور رداس r ΔABC کے راسوں سے گذرتا ہے۔	$\overline{OA}, \overline{OB}$ اور $\overline{OC}$ رداسی قطعات ہیں

Q.E.D

مثال 2:

ثابت کریں کہ ایک اور صرف ایک دائرہ چوکور کے راسوں سے گذر سکتا ہے۔



معلوم: ایک چوکور AB CD

مطلوب:

ایک اور صرف ایک دائرہ چوکور گذرتا ہے

عمل:

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CO}$ اور $\overline{AD}$ پر عمودی ناصف $\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{GH}, \overleftrightarrow{IJ}$ اور $\overleftrightarrow{KL}$ کھینچیں۔

یہ تمام نقطہ O پر ملتے ہیں۔ $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ اور $\overline{OD}$ بنائیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\overleftrightarrow{EF}$ پر تمام نقاط A اور B سے ہم فاصلہ ہیں۔	$\overleftrightarrow{EF}$، $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے
$\therefore$ $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (i)	O، $\overleftrightarrow{EF}$ پر واقع ہے
اس طرح، $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ (ii) $\overline{OC} \cong \overline{OD}$ (iii) $\overline{OD} \cong \overline{OA}$ (iv)	$\overleftrightarrow{GH}$ اور $\overline{BC}$ کے لئے اس طرح کے دلائل استعمال کرتے ہوئے $\overleftrightarrow{IJ}$ اور $\overline{CD}$، $\overleftrightarrow{KL}$ اور $\overline{AD}$ جیسا اوپر دیا گیا ہے۔
$\overleftrightarrow{EF}$، $\overleftrightarrow{GH}$، $\overleftrightarrow{IJ}$ اور $\overleftrightarrow{KL}$ کا واحد نقطۂ تقاطع O ہے	O تمام خطوط پر واقع ہے
چوکور کے راسوں A، B، C اور D سے O ہم فاصلہ ہے	مساوات (i) سے (iv)
$m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = m\overline{OD} = r$	
دائرہ جس کا مرکز O اور رداس r ہے وہ واحد دائرہ ہے جو چوکور A، B، C اور D کے راسوں سے گذرتا ہے	$\overline{OA}$، $\overline{OB}$، $\overline{OC}$ اور $\overline{OD}$ رداسی قطعات بتاتے ہیں

Q.E.D

مشق 25.1

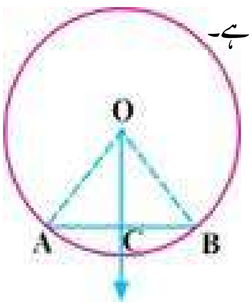
1- کیا ایک دائرہ تین غیر ہم خط نقاط گذر سکتا ہے؟ دلائل سے وضاحت کریں۔

2- کیا آپ کی چار غیر ہم خط لفاظ سے ایک دائرہ کھینچ سکتے ہیں؟

3- ثابت کریں کہ ایک اور صرف ایک دائرہ چوکور کے راسوں سے گذر سکتا ہے۔

4- ثابت کریں کہ ایک اور صرف ایک دائرہ منظم مخمس کے راسوں سے گذر سکتا ہے۔

5- تین گاؤں اس طرح واقع ہیں کہ A کے مشرق میں 6 کلو میٹر کے فاصلے پر B واقع ہے اور B کے شمال میں 8 کلو میٹر کے فاصلے پر C واقع ہے۔ اسکیل کمپس، ڈیوائیڈر کی مدد سے بنانے کے مسجد بعد مقام کا تعین کریں تا کہ ہر گاؤں سے ان کو الگ سی فاصلہ طے کرنا پڑے ہر دیہاتی کو کتنا فاصلہ طے کرنا ہو گا۔



مسئلہ 25.2 دائرے کے مرکز سے کس وتر (جو قطر نہ ہو) کی تنصیف کرنے والا قطعہ خط، وتر پر عمود ہوتا ہے۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اور وتر $\overline{AB}$ ہے جو O سے نہیں گذرتا ہے۔

یعنی قطر نہیں ہے قطعہ خط $\overline{OC}$ نقطہ پر $\overline{AB}$ کی تصنیف کرتا ہے۔

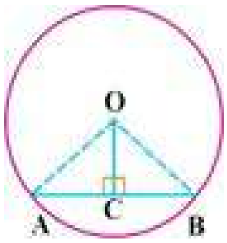
یعنی $m\overline{AC} = m\overline{BC}$

مطلوب: $\overline{OC} \perp \overline{AB}$

عمل: $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ کھینچیں۔

دلائل	بیانات
	میں $\Delta OCA \leftrightarrow \Delta OCB$
ایک ہی دائرے کے رداس	$m\overline{OA} = m\overline{OB}$
معلوم	$m\overline{AC} = m\overline{BC}$
مشترک	$m\overline{OC} = m\overline{OC}$
ض۔ض۔ض ≅ ض.ض.ض	$\Delta OCA \cong \Delta OCB$
متماثل مثلثوں کے تناظرہ زاویے	یا $m\angle OCA = m\angle OCB$ (i)
سپلیمینٹری زاویوں کا موضوعہ	$m\angle OCA + m\angle OCB = 180°$ (ii)
مساوات (i) اور (ii) سے	$m\angle OCA = 90° = m\angle OCB$
عمود کی تعریف کی رو سے	اسی طرح $OC \perp AB$

Q.E.D



مسئلہ: 25.3: دائرے کے مرکز سے وتر پر عمود اس کی تنصیف کرتا ہے۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اور اس کا وتر $\overline{AB}$ ہے O سے عمود $\overline{OC}$، $\overline{AB}$ سے C پر ملاتا ہے لہٰذا $\angle OCA$ اور $\angle OCB$ قائمہ زاویے ہیں۔

مطلوب: $\overline{OC}$، C پر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے۔

عمل: $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ کھینچیں

ثبوت

دلائل	بیانات
	میں $\Delta AOC \leftrightarrow \Delta BOC$
معلوم	$m\angle OCA = 90° = m\angle OCB$
ایک ہی دائرے کے رداس قطعات	$\overline{OA} \cong \overline{OB}$
مشترک ضلع	$\overline{OC} \cong \overline{OC}$
و۔ض ≅ ت۔ض	لہٰذا $\Delta AOC \cong \Delta BOC$
متماثل مثلثوں کے تناظرہ اضلاع	∴ $\overline{AC} \cong \overline{BC}$
C, $\overline{AB}$ کا وسطی نقاط ہے	∴ $\overline{OC}$ وتر $\overline{AB}$ تنصیف کرتا ہے

Q. E. D

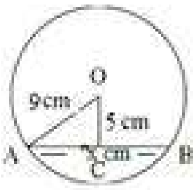
نتیجہ صریح 1: کسی دائرے کے وتر کا عمودی ناصف دائرے کے مرکز سے گذرتا ہے۔

نتیجہ صریح 2: وتر کے وسطی نقطے اور دائرے کے مرکز درمیان کم ترین فاصلہ ہوتا ہے۔

نوٹ: مسئلہ 25.2 اور 25.3 دائرے کے وتر اور قطر خط جو اسے دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے اور مرکز سے گذرتا ہے کے درمیان تعلق کو نمایاں کرتیں ہیں۔

مثال ۱:
وتر کی لمبائی معلوم کریں جس کا دائرے کے مرکز سے عمودی فاصلہ 5 سنٹی میٹر ہے۔ دائرے کا رداس 9 سینٹر میٹر ہے۔

حل:



غور کریں دائرے کا مرکز O اور اس کا وتر $\overline{AB}$ ہے

مرکز O سے عمود وتر AB پر نقطہ C پر ملاتا ہے۔ جیسا کہ متعلقہ شکل میں دکھایا گیا۔

مثلث ΔOCA پر مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے۔

$$\left(m\overline{OA}\right)^2 = \left(m\overline{OC}\right)^2 + \left(m\overline{AC}\right)^2 \quad (\text{یا}) \quad 9^2 = 5^2 + \left(m\overline{AC}\right)^2$$

$$\therefore\ m\overline{AC} = \sqrt{81-25} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}\ \text{cm.}$$

آخر کار

وتر کی لمبائی $= \overline{AB} = 2\left(m\overline{AC}\right)$ (جیسا کہ $\overline{OC}$ ، $\overline{AB}$ کو نصف کرتا ہے۔)

$= 2\left(2\sqrt{14}\right) = 4\sqrt{14} = 14.967$ سینٹی میٹر

مثال ۲:
اگر ایک دائرے میں وتر کی لمبائی 8 سنٹی میٹر ہے اور دائرے کے مرکز سے وتر کا عمودی فاصلہ 3 سنٹی میٹر ہے۔ دائرے کا رداس کیا ہوگا؟

حل: غور کریں دائرے کا مرکز O اور اس کا وتر $\overline{AB}$ ہے

مرکز O سے وتر AB پر عمود جس کی لمبائی 8 سنٹی میٹر ہے نقطہ C پر ملتا ہے جیسا کہ متصلہ شکل میں دکھایا گیا ہے

مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\left(m\overline{OA}\right)^2 = \left(m\overline{OC}\right)^2 + \left(m\overline{AC}\right)^2$$

یا $x^2 = 3^2 + 4^2$ ($\overline{OC}$, $\overline{AB}$ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں)

$\therefore\ x^2 = 25 \ \Rightarrow x = 5,$ (منفی علامت کو نظر انداز کرنے سے)

پس رداس $= m\overline{OA} = x = 5$ سنٹی میٹر

مشق 25.2

1- ثابت کریں کہ دائرے کے قطر ایک دوسرے پر تنصیف کرتے ہیں۔

2- ثابت کریں دائرے کے مرکز اور وز کا وسطی نقطے کا متقابلہ زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

3- اگر وتر کی لمبائی 8 سنٹی میٹر اور اس کا مرکز سے عمودی فاصلہ 3 سنٹی میٹر ہے تو محیط اور دائرہ کا رقبہ معلوم کریں۔

4- وتر کی لمبائی معلوم کریں جس دائرے کے مرکز سے عموری فاصلہ K ہے اور رداس r جبکہ

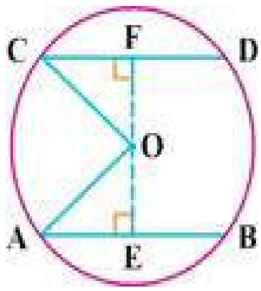
(a) K=4 سنٹی میٹر، r=9 سنٹی میٹر

(b) K=3 سنٹی میٹر، r=6 سنٹی میٹر

5- دائرے کا رداس کیا ہوگا جس میں وتر کی لمبائی 10 سنٹی میٹر اور مرکز سے فاصلہ 3 سنٹی میٹر ہے۔

مسئلہ **25.4**:

اگر دائرے کے دو وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے ہم فاصلہ ہونگے۔



معلوم:

ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔ اس کے دو متماثل وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ ہیں

جبکہ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ اور $\overline{OF} \perp \overline{CD}$.

مطلوب:

$\overline{OE} \cong \overline{OF}$

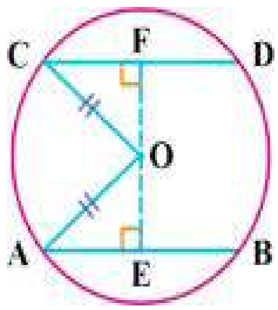
عمل:

$\overline{OA}$ اور $\overline{OC}$ کھینچیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
(i) $m\overline{AE} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$	عمود $\overline{OE}$ وتر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے
(ii) $m\overline{CF} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$	عمود $\overline{OF}$ وتر $\overline{CD}$ کی تنصیف کرتا ہے
(iii) $m\overline{AB} = m\overline{CD}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (معلوم)
$\therefore$ $\overline{AE} \cong \overline{CF}$	مساوات (i)، (ii) اور (iii) سے
قائمۃ الزاویہ مثلث میں	
$\Delta AEO \leftrightarrow \Delta CFO$ میں	
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$	ایک ہی دائرے کے رداس قطعات
$\overline{AE} \cong \overline{CF}$	اوپر ثابت ہوا ہے
$\therefore$ $\Delta AEO \cong \Delta CFO$	و-ض ≅ و-ض
$\Rightarrow$ $\overline{OE} \cong \overline{OF}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

Q.E.D



نتیجہ صریح:

دائرے کے دو متماثل وتر مرکز پر مساوی زاویے بناتے ہیں۔

نوٹ1:

مسئلہ 25.4 دو متماثل وتر اور ان کے مرکز سے فاصلہ کے درمیان تعلق کی وضاحت کرتی ہے۔

نوٹ2:

اگر دو وتر متماثل نہیں ہیں تو یہ مرکز ہم فاصلہ نہیں ہوتے۔

مسئلہ 25.5: دائرے کے اگر دو وتر مرکز سے ہم فاصلہ ہوں تو وہ متماثل ہوتے ہیں

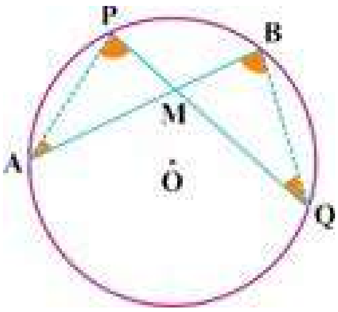
معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔ دائرے دو وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CO}$ ہیں جو کہ O سے ہم فاصلہ ہیں یعنی $\overline{OE} \cong \overline{OF}$ اس کا مطلب یہ بھی ہے کی $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ اور $\overline{OF} \perp \overline{CD}$

مطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

عمل: $\overline{OA}$ اور $\overline{OC}$ کھینچیں

بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ مثلث میں $\Delta AEO \leftrightarrow \Delta CFO$ میں	
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$	ایک ہی دائرے کے رداس قطعات
$\because$ $\overline{OE} \cong \overline{OF}$	(معلوم)
$\therefore$ $\Delta AEO \cong \Delta CFO$	و-ض ≅ و-ض
(i) $m\overline{AE} = m\overline{CF}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اصلاع
(ii) $m\overline{AE} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$	عمود $\overline{OE}$ وتر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے
(iii) $m\overline{CF} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$	عمود $\overline{OF}$ وتر $\overline{CO}$ کی تنصیف کرتا ہے
$\because$ $\frac{1}{2} m\overline{AB} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$	مساوات (i)،(ii) اور (iii) سے
$\therefore$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	

Q.E.D



نتیجہ صریح: اگر دو وتر مرکز کے۔ مقابل دو مساوی زاوے بنائے تو وہ متماثل ہوتے ہیں۔

نوٹ 1: مسئلہ 25.4 کا عکس 25.5 ہے

نوٹ 2: اگر دو وتر مرکز سے ہم فاصلہ نہیں ہیں تو وہ متماثل نہیں ہونگے۔

مثال 1: ثابت کریں کہ اگر ایک دائرے کے دو وتر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو ان کے قطعات کی لمبائیوں کی حاصل ضرب برابر ہوگی۔

معلوم: ایک دائرے کے وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{PQ}$ جس کا مرکز O ایک دوسرے کو M پر قطع کرتے ہیں

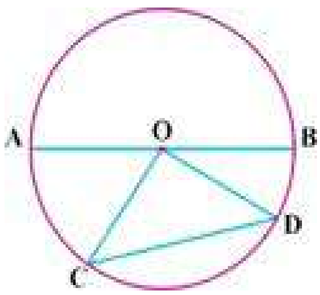
مطلوب: $(m\overline{AM}) \times (m\overline{MB}) = (m\overline{PM}) \times (m\overline{QM})$

عمل: $\overline{PA}$ اور $\overline{BQ}$ کھینچیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
(i) $\angle PAM \cong \angle BQM$	ایک ہی قوس PB کے زاویے
(ii) $\angle APM \cong \angle QBM$	ایک ہی قوس AQ کے زاویے
$\Delta APM \sim \Delta QBM$	مساوات (i) اور (ii) سے
(iii) $\frac{m\overline{AM}}{m\overline{QM}} = \frac{m\overline{PM}}{m\overline{BM}}$	متشابہ مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
$(m\overline{AM})\times(m\overline{BM}) = (m\overline{PM})\times(m\overline{QM})$	مساوات (iii) میں ضرب چلیپائی

Q.E.D



مثال 2: ثابت کریں دائرے میں سب سے بڑا وتر قطر ہوتا ہے۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اور اس کا قطر $\overline{AB}$ ہے۔ $\overline{AB}$ کے علاوہ دائرے میں ایک دوسرا وتر $\overline{CD}$ ہے

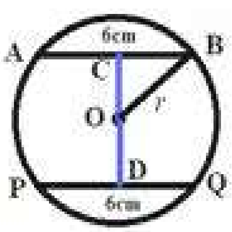
مطلوب: $m\overline{AB} > m\overline{CD}$

عمل: ΔOCD مثلث کو مکمل کرنے کے لیئے $\overline{OC}$ اور $\overline{OD}$ کھینچیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔOCD, میں (i) $m\overline{OC} + m\overline{OD} > m\overline{CD}$	مثلث کے دو اضلاع کا مجموعہ تیسرے ضلع سے بڑا
(ii) $m\overline{OC} + m\overline{OD} = m\overline{AB}$	$\overline{OC}$ اور $\overline{OD}$ رداس قطعات ہیں اور قطر کی تعریف کی روے
(iii) $m\overline{AB} > m\overline{CD}$	مساوت (i) اور (ii) سے
(iv) وتر AB کی لمبائی جو کہ قطر بھی ہے۔ دائرے کے کسی بھی دوسرے وتر CD سے بڑا ہے۔	مساوات (iii) اور وتر کے علاوہ کسی بھی وتر CD کے لیے

Q. E. D



مثال 3: ایک دائرے کے دو متماثل وتروں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں ہر وتر کی لمبائی 6 سنٹی میٹر ہے۔ دائرہ محیط 10π سنٹی میٹر ہے۔

حل: دائرے کے دو متماثل وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{PQ}$ جن لمبائیاں 6 سنٹی میٹر ہیں دائرے کا مرکز O اور رداس r جیسا کہ فیصلہ مشکل دکھایا گیا ہے

ہمیں $m\overline{CD}$ کی ضرورت ہے۔

دائرے کا رداس: $m\overline{OB} = r = \frac{C}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5$ سنٹی میٹر

ΔOCB میں مسئلہ فیثاغورث کے استعمال سے

$$(m\overline{OB})^2 = (m\overline{OC})^2 + (m\overline{CB})^2$$

$5^2 = (m\overline{OC})^2 + \left(\frac{1}{2}m\overline{AB}\right)^2$ (مرکز O سے عمود $\overline{OC}$ وتر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے۔)

$5^2 = (m\overline{OC})^2 + 3^2 \quad \Rightarrow m\overline{OC} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ سنٹی میٹر

کیونکہ دو متماثل وتر دائرے کے مرکز سے ہم فاصلہ ہیں لہٰذا

$$m\overline{OD} = m\overline{OC} = 4$$

آخرکار: $m\overline{CD} = m\overline{OC} + m\overline{OD} = 4 + 4 = 8cm$

مشق 25.3

1- ثابت کریں کہ دو متماثل دائروں کے دو متماثل وتر مرکز سے ہم فاصلہ ہوتے ہیں

2- ثابت کریں کہ متماثل دائروں کے دو وتر مرکز سے مساوی فاصلے پر ہوں تو متماثل ہوتے ہیں۔

3- دائرے میں دو متماثل وتروں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ وتر کی لمبائی α اور دائرے کا رداس r ہے۔
α اور r کی قیمتیں مندرجہ ذیل میں دی گئی ہیں۔

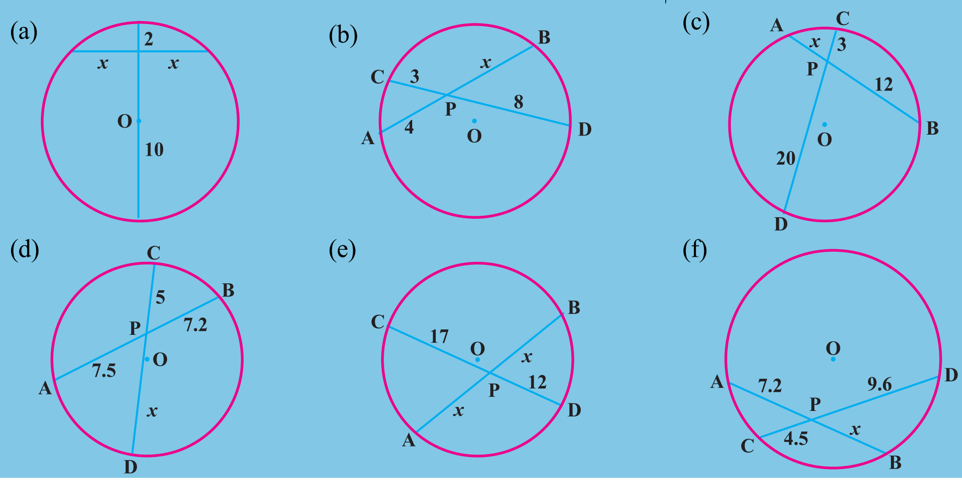
(a). $\alpha = 7cm$ and $r = 6$ سنٹی میٹر (b). $\alpha = 5cm$ and $r = 4$ سنٹی میٹر

(c). $\alpha = 2cm$ and $r = 4$ سنٹی میٹر (d). $\alpha = 4cm$ and $r = 9$ سنٹی میٹر

4- ایک دائرے میں دو متماثل وتروں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔
وتروں کی لمبائیاں α اور β ہیں اور دائرے کا رداس r ہے۔ α ، β اور r کی قیمتیں مندرجہ ذیل میں دی گئی ہیں

a. $\alpha = 6$ سنٹی میٹر , $\beta = 8$ سنٹی میٹر , $r = 5$ سنٹی میٹر b. $\alpha = 3$ سنٹی میٹر , $\beta = 6$ سنٹی میٹر , $r = 14$ سنٹی میٹر

5- اگر ایک دائرے میں وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CO}$ نقطہ P پر قطع کرتے ہیں دائرے کا مرکز O ہے۔
مندرجہ ذیل میں x کی قیمت معلوم کریں۔



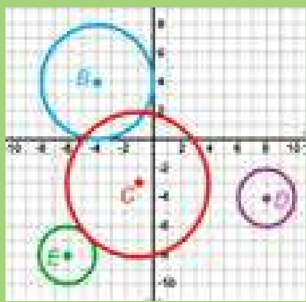
اعادہ مشق 25

درست جواب پر ☑ کا نشان لگائیں

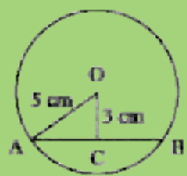
(i) تمام دائرے ہمیشہ...............ہوتے ہیں۔

(a) مفشابہ (b) متماثل (c) مماس (d) ان میں کوئی نہیں

(ii) مندرجہ ذیل شکل میں دائرے جن کے مرکز D اور E .... ہیں۔



(a) متماثل
(b) مفشابہ
(c) (a) اور (b) دونوں
(d) ان میں کوئی نہیں



(iii) دی گئی تصویر میں، وتر $\overline{AB}$ کی لمبائی.................ہے۔

(a) 4 سنٹی میٹر (b) 6 سنٹی میٹر (c) 8 سنٹی میٹر (d) 15 سنٹی میٹر

(iv) تین.............نقاط میں سے ایک اور حرف ایک دائرہ گذر سکتا ہے۔

(a) ہم خط (b) غیرسم خط (c) غیرمشترک (d) ان میں کوئی نہیں

(v) یہاں کا مفروضہ: اگر دائرے کے دو وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے ہم فاصلے ہوتے ہیں۔

(a) دائرے کے دو وتر مرکز سے ہم فاصلہ ہیں

(b) دائرے کے دو وتر متماثل ہیں۔

(c) ایک دائرے کے دو وتر ہیں۔

(d) دائرے کا مرکز وتروں سے ہم فاصلہ ہیں۔

(vi) بیان کا مفروضہ "تین غیر ہم نقاط سے ایک اور صرف ایک دائرے گذر سکتا ہے۔"

(a) تینوں نقاط غیر ہم خط ہیں۔

(b) ایک اور حرف ایک دائرہ تین نقط سے گذرتا ہے

(c) تین نقاط سے دو دائرے گذرتے ہیں

(vii) دائرے کا وہ حصہ جو ایک وتر اور قوس سے گھیرا ہوتا ہے دائرے کا قطعہ کہلاتا ہے ان کو مزید کبیرہ اور صغیرہ قطعہ میں تقسیم کرتے ہیں۔

a) تمام دائرے آپس میں متشابہ ہوتے ہیں۔

b) دو دائرے متماثل ہوں تو اگر ان کے رداس مساوی ہو۔

c) دائر جن کا مرکز ایک ہی ہو ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔

d) تین غیر ہم نقاط سے ایک اور صرف ایک دائرہ گذر سکتا ہے۔

(viii) ایک خط جو دائرے کے مرکز سے کھینچا جائے اور وتر کی تنصیف کرے (جو قطر نہ ہو) وہ وتر پر عمود ہوتا ہے۔

a) دائرے کے مرکز سے وتر پر عمود اس کی تنصیف کرتا ہے۔

b) اگر دائرے کو وہ وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے ہم فاصلہ ہونگے۔

c) دائرے کے وتر جو مرکز سے ہم فاصلہ ہوں متماثل ہوتے ہیں۔

d) تینوں نقاط ہم خط ہیں۔

(ix) دائرہ .... مختی خط کی ایک مثال ہے۔

(a) سادہ اور بند (b) سادہ اور کھلی (c) غیر سادہ اور بند (d) غیر سادہ اور کھلی

خلاصہ

☆ دائرہ ایک سادہ بند مختی خط ہے۔

☆ دائرے کے تمام نقاط ایک مقررہ نقطے کے ہم فاصلہ ہوتے ہیں۔ مقررہ نقطہ مرکز ہے اور مستقل فاصلہ دائرے کا رداس ہوتا ہے۔

☆ دائرے میں رداس قطعہ دائرے کی مرکز سے دائرے کے کسی بھی نقطے تک قطعہ خط ہوتا ہے۔

☆ وتر ایک خط ہے جو دائرے کی دو لقاط کو ملاتا ہے۔ وتر جو دائرے کے مرکز سے گذرتا ہے قطر کہلاتا ہے یا دائرے کا مرکزی وتر۔

☆ رداس r کے دائرے کے لیئے اس کا قطر محیط اور دائروی رقبہ بالترتیب $2r$، $2\pi r$ اور πr^2 ہوتا ہے۔

☆ دائرے کے محیط کا حصہ قوی کہلاتا ہے ان کو مزید قوس صغیرہ اور قوس کبیرہ میں درجہ بندی کئی گئی ہے۔

☆ قطاع دائرے کا وہ صلہ جو کس قومی اور دو رداسوں سے گھرا ہوتا ہے ان کی مزید دو درجے کبیرہ اور صغیرہ قطاع کر سکتے ہیں۔