یونٹ نمبر 23

فیثاغورث
PYTHAGORAS THEOREM

طلباء کے آزموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ، اس قابل ہو جائنگے کہ:

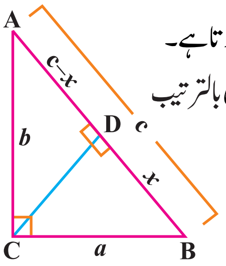
- مندرجہ ذیل اثباتی مسائل اور ان کے نتائج صریح کو سمجھ اور متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیئے استعمال کر سکیں۔
  - قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کا مربع باقی دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔
  - اگر کسی مثلث میں کسی ایک ضلع کی لمبائی کا مربع باقی دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو مثلث، قائم الزاویہ مثلث ہو گی۔

تعارف (Introduction):

فیثا غورث(Pythagoras)ایک یونانی فلسفی اور ریاضی دان ہے جو 570 قبل مسیح میں پیدا ہوا اُس نے قائمہ الزاویہ مثلث کے اضلاع کے درمیان بہت اہم تعلق کو دریافت کیا۔ یوکلیڈن جیومیٹری میں قائمہ ازاویہ مثلث کی تین اضلاع کے درمیان مسئلہ فیثا غورث ایک بنیادی تعلق ہے۔ اُس نے اس تعلق کو مسئلہ کی صورت میں مرتب کیا جو مسئلہ فیثا عورث کہلاتا ہے جو اس کے نام پر پڑھ گیا۔ یہ مسئلہ کئی طریقوں سے ثابت کیا جاسکتا ہے یہاں ہم اِسے متشابہ مثلثوں کے تصور کے ذریعے ثابت کریں گے ہم اسے روزمرہ زندگی میں مسائل کو حل کرنے میں بھی استعمال کرینگے۔

23.1.1 فیثا غورث مسئلہ (Pythagoras Theorem):

مسئلہ 23.1



قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کا مربع دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

معلوم: ΔABC ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے، C پر قائمہ زاویہ ہے اضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}$ اور $\overline{BC}$ کی پیمائش بالترتیب a ، b اور c ہیں۔

مطلوب: $c^2 = a^2 + b^2$

عمل: راس c سے b لمبائی کا ایک ارتفاع ضلع $\overline{AB}$ پر کھینچیں۔ $\overline{BD} = x$

ثبوت:

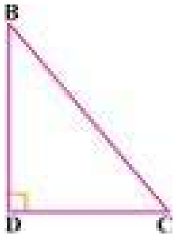
بیانات	دلائل
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta CBD$ میں	
$\angle ACB \cong \angle CDB$	$\angle CDB$ قائمہ الزاویہ ہے(عمل)
$\angle B \cong \angle B$	مشترکہ زوایہ
اور $\angle BAC \cong \angle BCD$	$\angle B$ کا کمپلیمنٹ
$\therefore$ $\Delta ACB \quad \Delta CBD$	مثلثوں کی رو سے
پس $\frac{c}{a} = \frac{a}{x}$	متشابہ مثلثوں کے قناظرہ اضلاع
$cx = a^2$ ...(i)	
دوبارہ $\Delta ACB \leftrightarrow \Delta ADC$ میں	
$\angle ACB \cong \angle ADC$	$\angle ADC$ قائمہ زاویہ ہے(عمل)
$\angle A \cong \angle A$	مشترکہ زوایہ
اور $\angle CBA \cong \angle DCA$	$\angle A$ کا کمپلیمنٹ
$\therefore$ $\Delta ACB \quad \Delta ADC$	
پس $\frac{c}{b} = \frac{b}{c-x}$	$\angle A$ متشابہ مثلثوں کی قناظرہ اضلاع
$c(c-x) = b^2$	
یا $c^2 - cx = b^2$...(ii)	
مساوات (i)اور(ii)کو جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوا	
$cx + c^2 - cx = a^2 + b^2$	
$c^2 = a^2 + b^2$	

Q.E.D

نتیجہ صریح: قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں نقطہ B پر قائمہ زاویہ ہے

i. $\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AC}\right)^2 - \left(m\overline{AB}\right)^2$

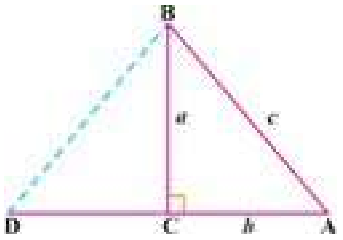
ii. $\left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(m\overline{AC}\right)^2 - \left(m\overline{BC}\right)^2$



مسئلہ 23.2

(مسئلہ فیثا غورث کا عکس)

اگر مثلث میں کسی ایک ضلع کی لمبائی کا مربع باقی دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو مثلث، قائمہ الزاویہ مثلث ہو گی۔



معلوم: ΔABC میں، $m\overline{BC} = a$، $m\overline{AC} = b$ اور $m\overline{AB} = c$

نیز $a^2 + b^2 = c^2$

مطلوب: ΔABC قائمہ الزاویہ مثلث ہے

عمل: $\overline{BC}$ پر عمود $\overline{CD}$ کھینچیں کہ $\overline{CD} \cong \overline{CA}$

B کو D سے ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔDCB	عمل
$\therefore \left(m\overline{BD}\right)^2 = a^2 + \left(m\overline{DC}\right)^2$	مسئلہ فیثا غورث
$\Rightarrow \left(m\overline{BD}\right)^2 = a^2 + b^2$	
لیکن $a^2 + b^2 = c^2$	معلوم
$\therefore \left(m\overline{BD}\right)^2 = c^2$	برابری کی خاصیت متعدیت
$\therefore m\overline{BD} = c$	دونوں طرف جزر کرنے پر
اب	
$\Delta DCB \leftrightarrow \Delta ACB$ میں	
$\overline{CD} \cong \overline{CA}$	عمل
$\overline{BC} \cong \overline{BC}$	مشترک
$\overline{BD} \cong \overline{AB}$	ہر ضلع c کے برابر ہے (اوپر ثابت ہو چکا)
$\therefore \Delta DCB \cong \Delta ACB$	ض-ض-ض = ض.ض.ض
$m\angle DCB = m\angle ACB$	
لیکن $m\angle DCB = 90^\circ$	عمل متماثل مثلثوں متناظرہ زاویے
$\therefore m\angle ACB = 90^\circ$	برابری کی خاصیت متحدیت
پس ABC قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔	$\therefore m\angle ACB = 90^\circ$

Q.E.D

نتیجہ صریح:

فرض کریں a، b اور c ایک مثلث کے اضلاع ہیں جیسا کہ ضلع c سب سے لمبا ضلع تو

i. اگر $a^2 + b^2 = c^2$ کو مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہے

ii. اگر $a^2 + b^2 > c^2$ مثلث حادہ الزاویہ مثلث ہے

iii. اگر $a^2 + b^2 < c^2$ تو مثلث منفرجہ زاویہ مثلث ہے

مثال 1: مثلث کے اضلاع کی لمبائی دی گئی ہیں۔ فیصلہ کریں کون سی قائمۃ ازاویہ مثلث کو ظاہر کرتیں ہیں۔

i. $a = 5\text{cm}$ ، $b = 12\text{cm}$ اور $c = 13\text{cm}$

ii. $a = 6\text{cm}$ ، $b = 7\text{cm}$ اور $c = 8\text{cm}$

iii. $a = 9\text{cm}$ ، $b = 12\text{cm}$ اور $c = 15\text{cm}$

حل:

i. چونکہ $(13)^2 = (5)^2 + (12)^2$

یا $169 = 25 + 144$

$169 = 169$

مسئلہ فیثاغورث کے عکس کی رو سے a، b اور c قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع ہیں۔

ii. چونکہ $(8)^2 \neq (6)^2 + (7)^2$

یعنی $64 \neq 36 + 49$

یا $64 \neq 85$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے عکس کی رو سے a، b اور c قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع نہیں ہیں۔

iii. چونکہ $(15)^2 = (12)^2 + (9)^2$

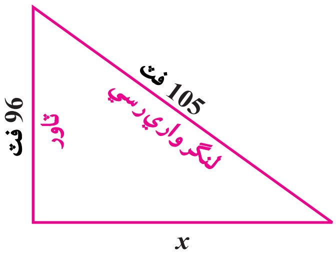
$225 = 144 + 81$

$225 = 225$

مسئلہ فیثاغورث کے a، b اور c قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع ہیں۔

مثال 2: ایک کھمبے کو سہارے کے لیئے رسی لگانی ہے۔ کھمبے کی اونچائی 96 فٹ ہے اور رسی 105 فٹ ہے تو اُسے کھمبے سے کتنا دور لگایا جاسکتا ہے۔

حل: فرض کریں رسی کھمبے سے 2 فٹ کے فاصلے پر لگائی جاتی ہے۔



مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

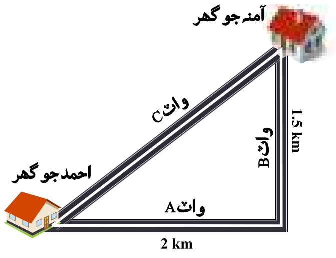
$$(105)^2 = (96)^2 + (x)^2$$

$$\Rightarrow \quad 11025 = 9216 + x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 1809$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{1809} = 42.53 \text{ فٹ}$$

پس مطلوبہ فاصلہ 42.53 فٹ (تقریباً) ہے۔



مثال 3: دو گلیاں ہے جن میں سے ایک کا انتخاب کر کے آمنہ کے گھر سے احمد کے گھر تک جانے کے لیئے انتخاب کیا جاسکتا ہے۔ ایک راستہ C ہے اور دوسرا راستے میں راستہ A، 2 کلو میٹر اور پھر راستہ B جو 1.5 کو میٹر ہے طے کرنا ہے۔ بتائیں کہ راستہ C جو کہ تصویر میں دکھایا ہے۔ کتنا چھوٹا ہے۔

حل: فرض کریں راستہ C کی لمبائی ہے۔

فیثا غورث کی مدد سے
$$x^2 = (2)^2 + (1.5)^2$$
$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{(2)^2 + (1.5)^2} = \sqrt{6.25} = 2.5\text{km}$$

متبادل راستہ کے ذریعے اُسے فاصلہ طے کرنا پڑھتا ہے۔ 3.5=1.5+2 کلو میٹر

ان دونوں راستوں کے درمیان فرق ہے۔ 1=2.5-3.5 کلو میٹر

مشق 23

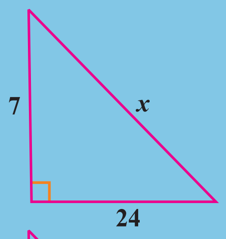
1. مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں مندرجہ ذیل ہیں۔ تصدیق کریں کہ مثلث قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

i. $a=16 \quad b=30 \quad c=34$ ii. $a=6 \quad b=8 \quad c=10$

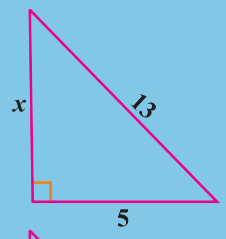
iii. $a=15 \quad b=20 \quad c=25$ iv. $a=13 \quad b=\sqrt{56} \quad c=15$

2. مندرجہ ذیل اشکال میں ہر ایک میں غیر معلوم کی قیمت معلوم کریں۔

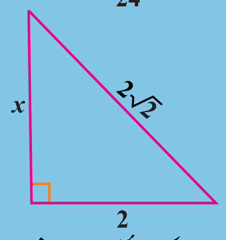
i.



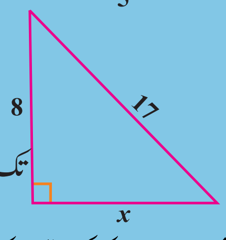
ii.



iii.



iv.



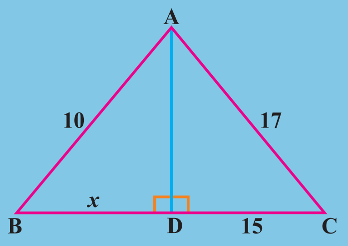
میں
,13
تک کا عموری فاصلہ معلوم کریں

3. مثلث کے تین اضلاع کی پیائش 9.5 سینٹی میٹر، 7.5 سینٹی میٹر اور x سینٹی میٹر ہے۔ x کی کس قیمت کی لیئے اضلاع قائمہ الزاویہ مثلث کو ظاہر کرتے ہیں۔

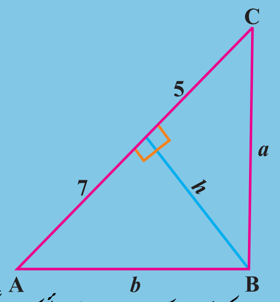
4. ABC ایک متماثل الساقین مثلث ہے جس میں اور 13 سینٹی میٹر $= m\overline{AB} = m\overline{AC}$ اور $m\overline{BC} = 10\text{cm}$ سے A، BC تک کا عموری فاصلہ معلوم کریں۔

5. سیڑھی کا پایہ ایک دیوار سے 6 فٹ کے فاصلے پر ہے اگر سیڑھی کا سرا دیوار پر 8 فٹ کی بلندی پر ہے تو سیڑھی کی لمبائی معلوم کریں۔

6. سامنے دی گئی شکل میں x کی قیمت معلوم کریں۔



7. مثلث ΔABC میں زاویہ $\angle ADB$ قائمہ زاویہ ہے جیسا کہ سامنے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ a، b اور c کی لمبائی معلوم کریں اگر یونٹ $m\overline{CD} = 5$ اور $m\overline{AD} = 7$ یونٹ۔



8. مستطیل سوئمنگ پول کی اضلاع کی لمبائیاں 50 میٹر اور 30 میٹر ہیں تو مخالف کونوں کے درمیان لمبائی کیا ہوگی؟

9. مساوی اور اضلاع مثلث کی ہر ضلع کی لمبائی 8 یونٹ ہے۔ کسی بھی ایک ارتفاع کی لمبائی معلوم کریں

10. مثلث کے اضلاع کی لمبائی $x, x+4$ اور 20 اگر لمبے ضلع کی لمبائی 20 ہے۔ x کی کون کون سی قیمتیں قائمہ الزاویہ مثلث بنائیں گی

11. ایک مینیجر 18 میٹر مشرق کی طرف جاتا ہے اور پھر 24 کلو میٹر شمال کی طرف جاتا ہے موجودہ جگہ سے نقطہ آغاز کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں

12. مستطیل ABCD میں، $m\overline{BC} + m\overline{CD} = 17cm$ اور $m\overline{BD} + m\overline{AC} = 26cm$ مستطیل کی چوڑائی اور لمبائی معلوم کریں۔

اعادہ مشق 23

(1) درست جواب پر دائرہ لگائیں

(i) مستطیل کے وتر کی پیمائش 6.5 سینٹی میٹر ہے۔ اگر چوڑائی 2.5 سینٹی میٹر ہے تو اس کی لمبائی

(a) 9 سینٹی میٹر (b) 4 سینٹی میٹر (b) 6 سینٹی میٹر (d) 3 سینٹی میٹر

(ii) مندرجہ ذیل میں کون سے قائمہ الزاویہ مثلث کے اضلاع ہیں

(a) 3،4،5 (b) 2،3،4 (c) 5،6،7 (d) 4،5،6

(iii) قائمہ الزاویہ مثلث میں بڑے سے بڑا زاویہ ہوتا ہے۔

(a) 100° (b) 90° (c) 80° (d) 110°

(iv) قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر مخالف ضلع ہوتا ہے۔

(a) حادہ زاویہ (b) قائمہ زاویہ (b) منفرجہ زاویہ (d) کوئی نہیں

(v) اگر a، b، c قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع ہیں c بڑے سے بڑا ضلع ہے تو۔

(a) $c^2 = a^2 + b^2$ (b) $b^2 = c^2 + a^2$

(c) $a^2 = b^2 + c^2$ (d) $c^2 = a^2 - b^2$

(vi) اگر قائمۃ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع 5 سینٹی میٹر اور 12 سینٹی میٹر ہیں تو وتر ہو گا۔

(a) 16 (b) 15

(c) 14 (d) 13

(vii) اگر ایک متماثل الساقین قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر $3\sqrt{2}$cm سینٹی میٹر ہے تو ہر ایک ضلع کی لمبائی ہے

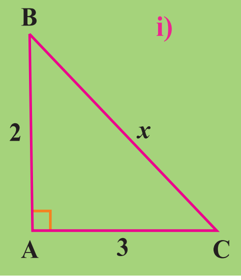
(a) 2 سینٹی میٹر (b) 5 سینٹی میٹر (c) 3 سینٹی میٹر (d) 1 سینٹی میٹر

2- مسئلہ فیثاغورث کی وضاحت کریں

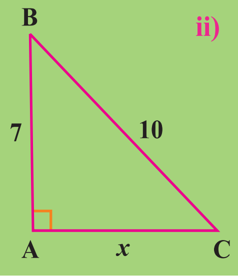
3- 25 میٹر لمبی سیڑی دیوار سے لگی ہوئی ہے۔ سیڑی کا پایہ دیوار کی بنیاد سے 7 میٹر دور ہے۔ سیڑی دیوار پر کتنی اونچائی تک پہنچے گی۔

4- مندرجہ ذیل اشکال میں ہر غیر معلوم کی قیمتیں معلوم کریں

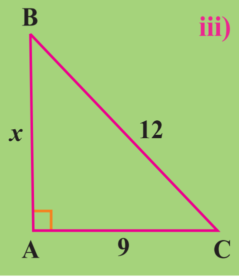
i)



ii)



iii)



خلاصہ

- قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کا مربع باقی دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔
- اگر کسی مثلث میں کسی ایک ضلع کی لمبائی کا مربع باقی دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کی مجموعے کے برابر ہو تو مثلث قائمۃ الزاویہ ہو گی۔