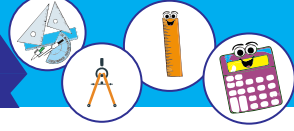


طلباء کے سیکھنے کے نتائج

اس یونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- تعددی تقسیم (Frequency distribution) کے بارے میں جانیں اور یہ بھی سیکھیں کہ:
 - ❖ ایک گروہی تعدد جدول (Group Frequency Table) کی تشکیل کرنا
 - ❖ مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشے (Histogram) کی تشکیل کرنا
 - ❖ غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشے کی تشکیل کرنا
 - ❖ تعددی کثیر الاضلاع (Frequency Polygon) کی تشکیل کرنا
- مجموعی تعددی تقسیم (Cumulative frequency distribution) کے بارے میں جانیں اور یہ بھی سیکھیں کہ:
 - ❖ مجموعی تعددی جدول بنانا
 - ❖ مجموعی تعددی کثیر الاضلاع بنانا
- مرکزی رجحان کے پیمانوں (Measures of Central Tendency) کے بارے میں جانیں اور یہ سیکھیں کہ:
 - ❖ حساب کرنا (گروہی (Grouped) اور غیر گروہی (Ungrouped) مواد (Data) کے لیے):
 - ❖ حسابی اوسط بذریعہ تعریف اور فرضی اوسط سے انحراف (Deviation) کا استعمال کرتے ہوئے۔
 - ❖ وسطانیہ (Median)، عادیہ (Mode)، ہندسی اوسط (Geometric mean) اور ہم آہنگ اوسط (Harmonic mean)
 - حسابی اوسط کی خصوصیات کی شناخت کرنا۔
 - وزنی اوسط (Weighted mean) اور متحرک اوسط (Moving mean) کا حساب کرنا۔
 - وسطانیہ، چوتھائی (Quartile)، عادیہ کا تخمینہ گراف سے لگانا
 - انتشاری پیمانوں (Measure of dispersion) کے بارے میں جانیں اور یہ سیکھیں کہ:
 - ❖ وسعت (Range) کی وضاحت، شناخت اور پیمائش کرنا، تغیر (Variable)، اوسط انحراف (Mean deviation) اور معیاری انحراف (Standard deviation) کا حساب لگانا۔



تعارف:

شماریات ریاضی کی ایک اہم شاخ ہے جو بامعنی بصیرت اور نمونے حاصل کرنے کے مواد (Data) کی جمع، تنظیم، نمائندگی، تشریح اور تجزیہ سے متعلق ہے جو دانشمندانہ فیصلے لینے اور مؤثر حکمت عملی بنانے میں مدد کرتی ہے۔ ہم درجہ بندی کے بنیادی تصورات، تصوری نمائندگی اور سادہ مواد کے مرکزی رجحان کے کچھ پیمانوں کو پہلے ہی جانتے ہیں۔ یہاں ہم ان کو مزید تفصیل سے دریافت کرتے ہیں اور تصورات کو متحرک اوسط اور انتشاری پیمانوں کی طرف بڑھاتے ہیں۔

مواد کسی بھی شماریاتی تحقیقات کی بنیاد ہے اور سوالات پوچھ کر، گنتی اور پیمائش کر کے، رپورٹس، خبروں، مضامین کا حوالہ دے کر دلچسپی کے متغیرات (Variables) پر مواد جمع کیا جاتا ہے۔ مواد کی بالکل بنیادی شکل خام مواد ہے، جو غیر درجہ بند / غیر گروہی ہے اور اس سے کوئی واضح نتیجہ اخذ کرنا مشکل ہے۔ اس طرح کا مواد سروے، انٹرویوز کے سوالنامے کا استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ جسے مواد کے بنیادی ذرائع بھی کیا جاتا ہے۔ خام / غیر گروہی مواد کی درجہ بندی اور ترتیب کے بعد ہم گروہی / درجہ بند مواد کے ذریعے مفید معلومات حاصل کر سکتے ہیں۔ اخبارات، رپورٹس اور مضامین کو ثانوی ذرائع کے طور پر لیا جاتا ہے۔ کیونکہ یہ درجہ بند مواد کی طرف لے جاتے ہیں۔

مواد کو دو اقسام میں تقسیم کیا گیا ہے: خاصیتی (قطععی) یا مقداری (عددی) جنس، بلڈ گروپ، ابرو کا رنگ، درجات، رول نمبر کا مواد خاصیتی مواد ہے۔ جبکہ اونچائی، وزن، تنخواہ، حل کی pH، اقدار، کمپنی کا سالانہ منافع، کسی مضمون میں طلباء کے نمبر وغیرہ کا مواد مقداری مواد ہے۔

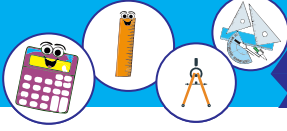
خاصیتی مواد میں مشاہدات کسی عددی اہمیت کے بغیر خالصتاً صفات ہیں، لیکن ان میں درجہ بندی / ترتیب ہو بھی سکتی ہے یا نہیں بھی۔ خاصیتی مواد جس میں آرڈرنگ نہیں ہوتی وہ نومیئل (Nominal) ہیں، باقی تمام آرڈینئل (Ordinal) ہیں، جنس، خون کا گروپ، آنکھوں کا رنگ، مذہب نومیئل مواد ہیں۔ مثال کے طور پر ہم مشاہدات کی بنا پر مرد / عورت کی درجہ بندی نہیں کر سکتے کہ کون زیادہ یا کم ہے۔ طلباء کے گریڈز (A, B, C, فیل) کا مواد، خوراک کا معیار (بہترین، اچھا، منصفانہ، برا، بدترین) کی درجہ بندی کی جاسکتی ہے، اور آرڈینئل مواد کی طرف جایا جاسکتا ہے۔

مقداری اعداد و شمار میں مشاہدات عددی اہمیت اور ترتیب کے ساتھ اعداد ہوتے ہیں۔ اعداد صرف عددی یا اعشاریہ مشکل میں بھی ہو سکتے ہیں۔ اگر مقداری مواد میں مشاہدات صرف عددی ہیں تو مواد غیر مسلسل (Discrete) ہے۔ ورنہ مسلسل (Continuous) ہے۔ تنخواہ کا مواد (روپوں میں)، اسکول میں فی کلاس طلباء کی تعداد، 4 سکے بیک وقت پھینکتے ہوئے سروں کی تعداد غیر مسلسل مواد ہے۔ اونچائیوں، وزنوں pH کی قدروں کی پیمائش کا مواد مسلسل مواد ہے۔

مواد کی اقسام کے درمیان فرق کرنا انتہائی ضروری ہے تاکہ مواد اعداد و شمار کے مزید تجزیہ کے لیے شماریاتی ٹیسٹ یا کسی اشارے کی پیمائش کرنے کے لیے بہترین طریقے سے استعمال کیا جاسکے۔

22.1 تعددی تقسیم (Frequency distribution):

زیادہ تعداد میں مشاہدات کی ساتھ غیر گروہی مواد سے بامعنی معلومات نکالنے کے لیے ہم مواد کو چھوٹی جماعتوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ جماعتوں کو ایک ہی جگہ پر تمام ملتے جلتے مشاہدات کو شامل کرنے کے لیے بنایا گیا ہے۔ غیر مسلسل جماعتیں ایک عدد / صفت پر



مشتمل ہوتی ہیں جبکہ مسلسل جماعتوں میں تعداد کی ایک حد ہوتی ہے۔ کسی خاص جماعت میں گرنے والے مشاہدات کی تعداد کو اس کا تعدد (Frequency) کہا جاتا ہے۔
تعددی تقسیم گروہی مواد کی ٹیبلر تفصیل ہے، جس میں جماعتیں اور ان کا نسبتاً تعدد (Relative frequency) شامل ہوتے ہیں۔
تعددی تقسیم میں ترتیب دیا گیا مواد غیر گروہی / خام مواد کے مقابلے بنیادی تجزیہ کے لیے واضح سمجھ فراہم کرتا ہے۔
کسی بھی جماعت کی نسبتاً اور فیصد تعدد (percentage frequency)
بالترتیب اور ہیں، یہاں پر مشاہدات کی کل تعداد ہے۔ تمام نسبتاً تعدد کا مجموعہ 1 ہے، اور فیصد تعدد 100 ہے۔
$$\left(\frac{f}{n} \times 100\right) \text{ اور } \left(\frac{f}{n}\right)$$

(i) 22.1 گروہی تعدد جدول (Grouped Frequency Table) تشکیل کرنا:

گروہی تعدد جدول یا تعددی تقسیم بنانے کا طریقہ کار اس بات پر منحصر کرتا ہے کہ ہم گروپوں / جماعتیں کیسے بناتے ہیں ہم تعمیر کے درج ذیل دو طریقوں پر بات کرتے ہیں۔

(a) غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعدد جدول:

غیر مسلسل جماعتیں ایسی جماعتوں حوالہ دیتی ہیں جن میں صرف ایک نمبر / خصوصیت شامل ہوتی ہے۔ ہم غیر مسلسل جماعتیں صرف اس وقت استعمال کرتے ہیں جب اعداد و شمار میں کم مشاہدات زیادہ بار دہرائیں۔ غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعدد جدول کو غیر مسلسل تعدد جدول بھی کہا جاتا ہے۔ اگر ضرورت ہو تو آخر میں نسبتاً اور فیصد تعدد کو بھی جدول میں شامل کیا جاتا ہے۔
دئے ہوئے ڈیٹا سیٹ کی مدد سے ہم تین کالموں پر مشتمل غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعدد جدول بنانے کے لیے درج ذیل مراحل پر عمل کرتے ہیں۔

- 1- غیر مسلسل مشاہدات کو جماعتوں کی بنا پر شناخت کریں اور اگر مواد نوٹینل ہے تو اسے پہلے کالم میں کسی بھی ترتیب سے لکھیں۔
آرڈینل اور مقداری مواد کے لیے، جماعتوں کو صعودی (Ascending) ترتیب میں لکھیں۔
- 2- دوسرے کالم میں مواد کو جماعتوں میں تقسیم کرنے کے لیے ٹیلی کے نشانات کا استعمال کریں۔
- 3- تیسرے کالم میں ہر جماعت کا تعدد لکھنے کے لیے ٹیلی کے نشانات کا شمار کریں۔

مثال 1: ایک کلاس کے 30 طلباء کے خون کے گروپس کی تعدد جدول بنائیں۔

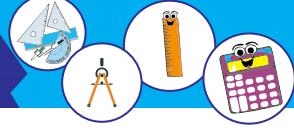
A+ O- B+ A+ A- AB+ B- O- O+ A- A+ AB- A+ O+ B+
B+ O+ B+ O- AB+ O- A+ AB+ A+ O+ B- O+ A- AB- O+

گروہی تعدد جدول

تعداد "طلباء کی تعداد"	ٹیلی کے نشانات	جماعتیں/گروہ "بلڈ گروپس"
6		A+
5		B+
3		AB+
7		O+
3		A-
1		B-
2		AB-
3		O-
n = 30	---	کل

حل:

یہاں n=30 اور مواد نوٹینل ہے۔ آٹھ مسلسل بلڈ گروپس یہ ہیں: A+, B+, O+, AB+, A-, B-, O-, AB- جو کہ پہلے کالم میں لکھے گئے ہیں۔ اعداد و شمار کی تقسیم کے لیے دوسرے کالم میں ٹیلی کے نشانات درج ہیں اور ان کو استعمال کرتے ہوئے تیسرے کالم میں طلباء کی تعداد کو لکھ کر ہم مطلوبہ گروہی تعدد جدول کی تشکیل کرتے ہیں۔



مثال 2: ایک شاپنگ مال میں 40 تصادفی طور پر منتخب صارفین سے جب یہ پوچھا گیا کہ ”آپ خدمات سے کتنا مطمئن ہیں؟“ تو ان کے جوابات درج ذیل ہیں۔ ان کے جوابات کا گروپی تعداد جدول بنائیں۔ نسبت اور فیصد تعداد بھی معلوم کریں۔

بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت
بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت
بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت
بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت
بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت	بہت

حل: یہاں $n=40$ اور مواد آرڈینل ہے۔ صعودی ترتیب میں اطمینان کے پانچ الگ درجے (سب سے کم سے بلند ترین) جماعتیں ہیں۔ ٹیلی کے نشانات اور تعداد کے ساتھ ہم گروپی تعداد جدول حاصل کرتے ہیں۔ نسبت اور فیصد تعداد کو بھی چوتھے اور پانچویں کالم میں شمار کیا گیا ہے۔

جماعتیں / گروپس اطمینان کے درجے	ٹیلی کے نشانات	تعداد (f)	نسبت تعداد ($\frac{f}{n}$)	% فیصد تعداد ($\frac{f}{n} \times 100$)
بالکل بھی نہیں		3	$\frac{3}{40} = 0.075$	$\frac{3}{40} \times 100 = 7.5$
بہت		8	0.2	20
یقین نہیں		5	0.125	12.5
کسی حد تک		6	0.15	15
بہت		18	0.45	45
کل	---	$n = 40$	1	100

نوٹ:

(a) مثال 2 کے گروپی تعداد جدول سے ہم باسانی یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ صارفین کی زیادہ تعداد ”بہت مطمئن“ تھی اور کم تعداد ”بالکل بھی مطمئن“ نہیں تھی۔

(b) 40 میں سے 18 کے بجائے یہ کہنا زیادہ مناسب اور قابل فہم ہے کہ 45% صارفین بہت مطمئن تھے۔

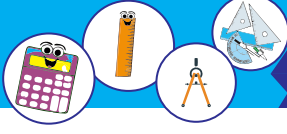
مثال 3: ایک شہر کے 45 خاندانوں کے جوابات جب ان سے ان کے استعمال کردہ موبائلوں کی تعداد کے بارے میں پوچھا گیا تو ان کے جوابات درج ذیل ہیں۔ جوابات کی ایک غیر مسلسل تعداد جدول بنائیں۔ جوابات کی نسبت اور فیصد تعداد بھی معلوم کریں۔

3 1 3 2 2 2 2 1 2 1 2 2 3 3 3 3 4 1 3 0 2 4 3
3 3 2 3 2 2 5 1 6 1 6 2 1 5 3 2 4 2 4 7 4 2

حل: یہاں $n=45$ اور مواد مقداری اور خصوصاً غیر مسلسل ہے۔ مواد میں اعداد و شمار کی صعودی ترتیب کے الگ الگ نمبر یہ ہیں۔

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 جو کم ہیں اور بار بار دہرائے گئے ہیں۔ پہلے کالم میں یہ 8 جماعتیں ہیں۔

دوسرے کالم میں گن کر ٹیلی کے نشانات لگائیں۔ تیسرے کالم میں تعداد کا شمار کریں تاکہ 45 خاندانوں کے موبائلوں کا جدول غیر مسلسل تعداد جدول حاصل کر سکیں۔



غیر مسلسل تعدد جدول

جماعتیں / گروہ موبائلوں کی تعداد	ٹیلی کے نشانات	تعدد خانہ انوں کی تعداد
0		1
1		7
2		15
3		12
4		5
5		2
6		2
7		1
کل	---	$n = 45$

مثال 4: کوڈرنک کی مقدار کو ایک کمپنی کی 20 تصادفی طور پر منتخب کردہ 1.5L بوتلوں میں مپا گیا جیسا کہ ذیل میں دیا گیا ہے۔ کوڈرنک کی پیمائش شدہ مقدار کا ایک غیر مسلسل تعدد جدول بنائیں۔ نسبت اور فیصد تعدد بھی معلوم کریں۔

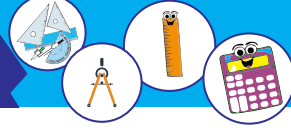
1.48 1.51 1.50 1.49 1.49 1.49 1.51 1.48 1.49 1.52
1 51 1 49 1 51 1 50 1 50 1 50 1 51 1 49 1 49 1 50

حل: مواد مقداری ہیں اور خصوصاً مسلسل الگ الگ نمبر یہ ہیں 1.52, 1.51, 1.50, 1.49, 1.48 (صعوی ترتیب میں) پانچ جماعتیں ہیں۔ ٹیلی کے نشانات اور تعدد کے ساتھ ہمیں غیر مسلسل تعدد جدول حاصل ہوتا ہے۔ نسبت اور فیصد تعدد کو بھی چوتھے اور پانچویں کالم میں شمار کیا گیا ہے۔

جماعتوں کی حد ”کوڈرنک کی مقدار“	ٹیلی کے نشانات	تعدد ”بوتلوں کی تعداد“	نسبت تعدد $\left(\frac{f}{n}\right)$	% فیصد تعدد $\left(\frac{f}{n} \times 100\right)$
1.48		2	$\frac{2}{20} = 0.1$	$\frac{2}{20} \times 100 = 10$
1.49		7	0.35	35
1.50		5	0.25	25
1.51		5	0.25	25
1.52		1	0.05	5
کل	---	$n = 20$	1	100

(ب) مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعدد جدول:

جب مواد مقداری (غیر مسلسل یا مسلسل) ہو اور مشاہدات کو کم تکرار اور زیادہ تغیرات کے ساتھ تعداد کی حد میں تقسیم کرنا ہو تو پھر ہم مسلسل جماعتیں استعمال کرتے ہیں۔ یہ جماعتیں واحد عدد نہیں ہیں بلکہ اعداد کی ایک رینج جن میں سے ہر ایک چند اعداد پر مشتمل ہوتی ہے جو اس جماعت کی حد میں آتے ہیں۔ ایک مسلسل تعدد جدول مسلسل جماعتوں اور ان کے نسبت تعدد پر مشتمل ہوتا ہے۔ ہم نے پہلے ہی پچھلی کلاس میں غیر مسلسل مواد کے لیے تعددی تقسیم کا مطالعہ کیا ہے۔ یہاں ہم کسی بھی اعشاری نمبر کے ساتھ غیر



مسلل اور مسلل مواد کے لیے بنیادی تصورات کو عام اور استعمال کریں گے۔ ہم پہلے کچھ اہم اصطلاحات کو یاد کرتے ہیں اور ان کی وضاحت کرتے ہیں جو طریقہ کار میں فعال طور پر استعمال ہوتی ہیں۔

وسعت (Range): دیئے گئے مواد میں سب سے زیادہ اور سب سے کم مشاہدے کے درمیان فرق کو وسعت کہتے ہیں۔
وسعت = {سب سے زیادہ مشاہدہ} - {سب سے کم مشاہدہ} (1)...

جماعتی حدود (Class Limits): یہ وہ اعداد ہیں جو کسی جماعت کی شناخت کے لیے استعمال ہوتے ہیں ہر جماعت کا سب سے چھوٹا عدد اس کی زیریں جماعتی حد (Lower Class Limit (LCL) کہلاتا ہے اور سب سے بڑا عدد اس جماعت کا بلائی جماعتی حد (Upper class limit (UCL) کہلاتا ہے۔ LCL سے UCL تک کے مشاہدات ایک خاص جماعت میں آتے ہیں۔

جماعتی وقفہ / چوڑائی (Class Interval/width): اس کی تعریف جماعت کے سائز / لمبائی کے طور پر کی جاتی ہے، اور کسی بھی دو لگاتار LCLs یا UCLs کے درمیان فرق تلاش کر کے اس کو معلوم کیا جاتا ہے ہم عام طور پر جماعت کی مستقل چوڑائی / وقفے کے لیے 'h' استعمال کرتے ہیں اور تمام جماعتوں کے لیے اس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔

$$h = \frac{1}{10^m} \left\lceil \frac{R}{K} \times 10^m \right\rceil \quad (2) \dots$$

یہاں پر K جماعتوں کی تعداد ہے، R وسعت ہے اور m مشاہدات میں زیادہ سے زیادہ اعشاریہ مقامات کی تعداد ہے۔
اگر مواد غیر مسلل ہے، تو m=0 اگر مواد ایک اعشاریہ تک کی قدروں کے ساتھ مسلل ہے، تو m=1 وغیرہ $\lceil \cdot \rceil$ یہ جتنی عددی قدر حاصل کرنے کے لیے زیادہ سے زیادہ حد کا تخمینہ ظاہر کرتا ہے۔ ایک عدد کی حد وہی عدد ہے، جبکہ اعشاریہ عدد کی حد اس سے فوراً بڑا عدد ہے۔

مثال کے طور پر: $X = [7.5], 2 = [1.9], 2 = [1.6], 4 = [4]$

جماعتوں کی تعداد (K):

جماعتوں کی تعداد کو K سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ مشاہدات کی تعداد اور وسعت کے لحاظ سے 5 سے 15 تک ہوتی ہے۔ اسے احتیاط سے منتخب کرنا چاہیے، اگر نہیں دیا گیا ہو، K کی بہت زیادہ قدر کے نتیجے میں ناقص گروہ بندی اور معلومات کا نقصان ہوتا ہے ایچ اسٹر جس (1926) نے مشاہدات (n) کی تعداد کا استعمال کرتے ہوئے جماعتوں کی مطلوبہ تعداد K کا حساب لگانے کے لیے اصول تجویز کیا۔ اسٹر جس اصول کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

$$K = \lceil 1 + 3.322 \log(n) \rceil \quad (3) \dots$$

یہاں پر، Log(n) بیس 10 کے ساتھ n کا لاگرتھم ہے اور یہاں پر $\lceil \cdot \rceil$ زیادہ سے زیادہ حد کا تخمینہ ہے۔ یہ واضح رہے کہ اسٹر جس اصول $15 \leq n \leq 200$ کے لیے زیادہ موثر ہے۔ مثال کے طور پر، اگر n=25

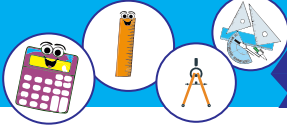
$$K = \lceil 1 + 3.322 \log(25) \rceil = \lceil 5.6439 \rceil = 6 \text{ جماعتیں}$$

جماعتوں کے درمیان فاصلہ (d):

جماعتوں کے درمیان فاصلہ (d) ایک جماعت کے LCL اور اگلی جماعت کے VCL کے درمیان مستقل فرق کو کہتے ہیں، اگر m جماعتوں کے درمیان زیادہ سے زیادہ اعشاریہ ہندسوں کی تعداد ہے، تو:

$$d = \frac{1}{10^m}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (4) \dots$$

غیر مسلل مواد کے لیے m=0 اور d=1، اگر مواد اعشاریہ کے بعد ایک ہندسہ تک دیا جائے تو m=1 اور d=0.1 دو اعشاریہ تک کے مواد کے لیے m=2 اور d=0.01



مسلل تعدد جدول بنانے کا طریقہ کار:

- 1- مقداری مواد کے مسلل تعدد جدول بنانے کا طریقہ کار یہ ہے:
- 1- مشاہدات کی تعداد (n) نوٹ کریں اور مواد کی قسم کو شناخت کریں: غیر مسلل یا مسلل اس کے علاوہ مواد میں اعشاری مقامات کی زیادہ سے زیادہ تعداد (m) کو نوٹ کریں۔
- 2- مساوت (1) کا استعمال کرتے ہوئے وسعت کا حساب لگائیں۔ اسٹر جس کے اصول کا استعمال کرتے ہوئے کلاسز کے تعداد (K) مساوت (3) کے ذریعے معلوم کریں اگر نہیں دی گئی۔
- 3- مساوت (2) کا استعمال کرتے ہوئے جماعتی وقفہ (h) اور مساوات (4) کا استعمال کرتے ہوئے جماعت کے درمیان کا وقفہ (d) کا حساب لگائیں۔ انتہائی حالات میں، ہمیں "h+d" کو جماعت کی چوڑائی کے طور پر لینا پڑے گا یا ایک اور جماعت کا اضافہ کرنا پڑے گا۔
- 4- اس بات کو یقینی بنانے کے لیے جماعتی حدود کا تعین کریں کہ تمام مشاہدات K جماعتوں میں شامل ہیں۔ ہم LCL شروع کرنے کے طور پر سب سے کم مشاہدے کا بھی استعمال کر سکتے ہیں۔ شروعاتی UCL یہ ہے: $UCL = LCL + h - d$ ۔ UCL باقی جماعتوں کے LCLs اور UCLs لگاتار پہلی جماعت کے LCL اور UCL میں L کا اضافہ کرتے ہوئے شمار کریں۔
- 5- مسلل تعدد جدول کے پہلے کالم میں جماعت کی حدود کو بطور جماعت لکھیں۔
- 6- دوسرے کالم میں مواد کو جماعتوں میں تقسیم کرنے کے لیے ٹیلی کے نشانات / فہرست اندراجات کا استعمال کریں۔ ٹیلی کے نشانات کو ترجیح دی جاتی ہے۔
- 7- تیسرے کالم میں تمام جماعتوں کا تعدد لکھنے کے لیے ٹیلی کے نشانات یا اندراجات شمار کریں۔

مثال 1:

ایک دکان میں بجلی کی کھپت (KWH میں) مسلل 60 دنوں تک نوٹ کی گئی جیسا کہ ذیل میں بتایا گیا ہے، ٹیلی کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے تعددی تقسیم بنائیں۔

106 107 76 82 109 107 115 93 187 95 139 119 115 128 115
 123 125 111 92 86 70 126 68 130 129 194 82 90 158 118
 123 146 80 136 137 110 141 152 104 111 140 184 204 178 75
 113 162 131 99 185 181 84 486 100 98 148 90 110 107 78

حل: یہاں n=60 اور مواد غیر مسلل ہے۔ $UCL = 204 - 68 + 136 = 172$ ، $h = 0$ ۔ اسٹر جس اصول استعمال کرتے ہوئے جماعتوں کی تعداد معلوم کرتے ہیں۔

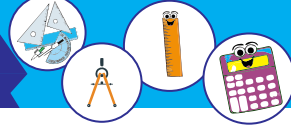
تعدد جدول

تعدد	ٹیلی کے نشانات	جماعتی حدود
10		68 – 87
13		88 – 107
15		108 – 127
10		128 – 147
4		148 – 167
6		168 – 187
2		188 – 207
n = 60	---	کل

$$K = \lceil 1 + 3.322 \log(60) \rceil = \lceil 6.9070 \rceil = 7.$$

$$h = \left\lceil \frac{136}{7} \right\rceil = \lceil 19.4285 \rceil = 20, \text{ اور } d = 1.$$

ابتدائی LCL = 68 اور ابتدائی UCL = $68 + 20 - 1 = 87$ ان میں $h=20$ کو شامل کرنے سے ہمیں دیگر تمام حدود مل جاتی ہیں۔ پہلے کالم میں جماعتی حدیں، دوسرے میں ٹیلی کے نشانات اور تیسرے میں تعدد لکھنے سے ہمیں مطلوبہ تعدد جدول ملتا ہے۔



مثال 2: تار کی ریل کے قطر (ملی میٹر میں) 24 مقامات پر درست سے قریب ترین 0.01 mm ملی میٹر پر ماپا جاتا ہے:

2.10, 2.29, 2.32, 2.21, 2.14, 2.22, 2.28, 2.18, 2.17, 2.20, 2.23, 2.13, 2.26, 2.10, 2.21, 2.17, 2.28, 2.15, 2.34, 2.27, 2.11, 2.23, 2.25, 2.16.

تعددی تقسیم کی تعمیر کریں

حل: $n=24$ ہے اور مواد اعشاریہ کے دو ہندسوں تک مسلسل ہے۔ اس لیے $m=2$ اور $K = [1 + 3.322 \log(24)] = 6$ اور $R = 2.34 - 2.10 = 0.24$

$$d = \frac{1}{100} = 0.01, h = \frac{1}{100} \left[\frac{R}{K} \times 100 \right] = 0.04$$

ابتدائی $LCL = 2.10$ اور $h=0.04$ 6 جماعتیں یہ ہیں:

2.10-2.13, 2.14-2.17, 2.18-2.21, 2.22-2.25, 2.26-2.29, 2.30-2.33

لیکن 2.34 کو کسی بھی جماعت میں شامل نہیں کیا جاسکتا۔ اس انتہائی صورت میں ہم جماعت کی چوڑائی $0.05=h+d$ استعمال کرتے

ہیں۔ مطلوبہ 6 جماعتیں یہ ہیں: 2.10-2.14, 2.15-2.19, 2.20-2.24, 2.25-2.29, 2.30-2.34, 2.35-2.39

اور قطر کی مطلوبہ تعددی تقسیم یہ ہے:

تعداد جدول

جماعتی حدود	2.10 - 2.14	2.15 - 2.19	2.20 - 2.24	2.25 - 2.29	2.30 - 2.34	2.35 - 2.39	کل
ٹیلی کے نشانات						---	
تعداد	3	5	6	6	3	0	$n = 24$

نوٹ: مثال 2 میں ہم 2.34 کو شامل کرنے کے لیے صرف ایک اور جماعت کو بھی شامل کر سکتے ہیں۔

جماعتی حدود	2.10 - 2.13	2.14 - 2.17	2.18 - 2.21	2.22 - 2.25	2.26 - 2.29	2.30 - 2.33	2.34 - 2.37
ٹیلی کے نشانات							
تعداد	4	5	4	4	5	1	1

مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی تعداد جدول میں کچھ اور اہم اصطلاحات یہ ہیں:

حقیقی جماعتی حدود (Class Boundaries): وہ اعداد جو جماعت کو ملحقہ جماعتوں سے الگ کرتے ہیں انہیں حقیقی جماعتی حدود

ہیں، ایک جماعت کے لیے اس کی زیریں حقیقی جماعتی حد (Lower Class boundary (LCB)) اور اس جماعت کی بالائی

جماعتی حد (Upper Class boundary (UCB)) بالترتیب اس جماعت کے LCL اور UCL سے حاصل کی جاتی ہیں جیسا کہ:

ایک جماعت کے لیے $LCB = LCL - \frac{d}{2}$ اور $UCB = UCL + \frac{d}{2}$ یہاں پر، d جماعتوں کے درمیان فاصلہ ہے۔

جماعتی نشان / وسطی نقاط (Class Marks / Mid Points):

جماعتی نشان / وسطی نقاط، جو کہ x کے طور پر ظاہر کئے جاتے ہیں، دراصل زیریں جماعتی حد (LCL) اور بالائی جماعتی حد جو

(UCL) یا زیریں حقیقی جماعتی حد (LCB) اور بالائی حقیقی جماعتی حد (UCB) کی اوسط ہے۔

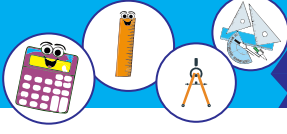
$$x = \frac{LCB+UCB}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{LCL+UCL}{2}$$

مجموعی تعداد (Cumulative Frequency):

Cumulative لفظ کا مطلب ہے کچھ بڑھنے کے بعد لگاتار اضافہ ہونا اگر ہم ایک کے بعد ایک جماعت کے تعدادات جوڑنے چلے

جائیں، ہر بار کل میں اگلی جماعت کا تعداد شامل کریں تو ہمیں مجموعی تعداد مل جاتا ہے۔ کسی خاص جماعت کے لیے، مجموعی تعداد اس

جماعت تک کی تمام تعدادات کا مجموعہ ہے۔



مثال 3: نیچے دی گئی تعدد جدول کے لیے حقیقی جماعتی حدود، جماعتی نشان اور مجموعی تعدد معلوم کریں۔

8.9-9.1	8.6-8.8	8.3-8.5	8.0-8.2	7.7-7.9	7.4-7.6	7.1-7.3	جماعتی حدود
2	6	11	14	9	5	3	تعدد

حل: یہاں پر، $n=50$ اور $d=0.1$ ہے۔ حقیقی جماعتی حدود، جماعتی نشان اور مجموعی تعدد مندرجہ ذیل جدول میں شمار کیے گئے ہیں۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی نشان	تعدادات	مجموعی تعدادات
7.1-7.3	7.05-7.35	7.2	3	3
7.4-7.6	7.35-7.65	7.5	5	3+5=8
7.7-7.9	7.65-7.95	7.8	9	17
8.0-8.2	7.95-8.25	8.1	14	31
8.3-8.5	8.25-8.55	8.4	11	42
8.6-8.8	8.55-8.85	8.7	6	48
8.9-9.1	8.85-9.15	9.0	2	n = 50
کل	----	----	n = 50	----

نوٹ:

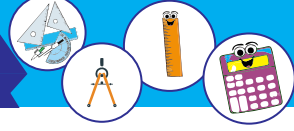
- 1- ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ایک جماعت کا UCB اور اگلی جماعت کا LCB ایک جیسا ہے۔
- 2- ابتدائی LCB میں لگاتار h کا اضافہ کرنے سے ہمیں باقی تمام حقیقی جماعتی حدود حاصل ہو جائیں گی۔
- 3- ہم ابتدائی جماعتی نشان میں h کا اضافہ کر کے باقی تمام جماعتی نشانات حاصل کر سکتے ہیں۔
- 4- آخری جماعت کی مجموعی تعدد مشاہدات کی کل تعداد ہے۔

مشق 1.22

- 1- درج ذیل میں مواد کی قسم (غیر مسلسل / مسلسل / نوٹینل / آرڈینل) اور مشاہدات کی کل تعداد معلوم کریں:
 - a. 30 دنوں کے لیے ایک شاپنگ مال میں روزانہ آنے والوں کی تعداد۔
 - b. وقت (فی دن منٹوں میں) ایک شخص نے ایک مہینے تک جم میں گزارا۔
 - c. 45 کار بیٹریوں کی زندگی (سالوں میں) d. 2 ماہ کے لیے بجلی کی کھیت (کلوواٹ فی دن میں)
 - e. ایک کلاس میں 55 طلباء کا وزن (کلوگرام میں) f. 20 افراد کے ابرو کے رنگ
 - g. ایک کلاس میں 70 طلباء کے حاصل کردہ گریڈز h. 10 افراد کے COVID تشخیصی ٹیسٹ کا نتیجہ (مثبت / منفی)
 - i. ایک اسکول کے 30 اساتذہ کی ازواجی حیثیت j. آپ کی کلاس کے طلباء کے ڈومیسائل کا ضلع
- 2- اسکول سے ملکی دورے پر جانے والے 20 طلباء کے تعلیمی سطح (مطالعہ کی موجودہ کلاس) کا گروہی تعدد جدول بنائیں تعلیمی سطحیں یہ ہیں:
- 3- لینگویج کورس میں شرکت کے لیے 20 طلباء کی طرف سے استعمال کیے جانے والے نقل و حمل کا طریقہ ذیل میں دیا گیا ہے۔ فیصد تعدد کے ساتھ گروہی تعدد جدول بنائیں۔

X, IX, VI, VIII, X, X, VIII, VII, IV, V, VI, IX, VI, VIII, VII, VIII, X, IX, IX, IX

پیدل چلنا	پیدل چلنا	بائیک	بس	کار	پیدل چلنا	بائیک	پیدل چلنا	پیدل چلنا	بس
کار	بس	کار	پیدل چلنا	پیدل چلنا	بس	کار	کار	بس	بس



4- 40 خاندانوں کے جوابات کی درجہ بندی ایک گروہی تعددی تقسیم میں کریں کہ وہ کتنی کثرت سے چھٹیاں شہر سے باہر گزارتے ہیں۔ متعلقہ تعدد بھی معلوم کریں۔

اکثر	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم
بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم
بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم
بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم
بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم	بہت کم

5- مختلف اسکولوں کے پرفیکٹس کی ٹوپی کا تعدد جدول منظم کریں۔

ہرا	بھورا	کالا	نیلا	ہرا	بھورا	کالا	نیلا
لال	کالا	ہرا	لال	لال	کالا	ہرا	لال

6- ایک کلاس ٹیسٹ میں سے 25 طلباء کے 5 میں حاصل کردہ نمبر یہ تھے: 4.0, 0.5, 4.5, 1.0, 3.5, 3.5, 5.0, 0.5, 4.0, 2.5, 1.0, 2.0, 4.0, 3.5, 0.0, 3.0, 5.0, 1.0, 2.0, 2.0, 4.5, 2.5, 3.0, 3.5, 1.5

غیر مسلسل جماعتوں اور متعلقہ تعدد کے ساتھ تعدد جدول بنائیں۔

7- ٹیسٹ سے ایک دن پہلی کس ویب سائٹ سے نیچر کے لیکچرر کو فی گھنٹہ کتنی بارڈ انوں لوڈ کیا تھا اس کے نتائج یہ تھے:

1, 1, 2, 1, 3, 3, 4, 1, 4, 1, 2, 3, 3, 2, 4, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 0, 0, 1

مواد کی ایک غیر مسلسل تعدد جدول میں درجہ بندی کریں۔

8- 18 دنوں کے لیے کلاس میں غیر حاضرین کی تعداد کی مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعددی تقسیم بنائیں۔

4, 3, 0, 1, 2, 5, 6, 8, 10, 7, 11, 15, 13, 14, 3, 4, 12, 12

9- 40 کالج طلباء کے قریب ترین پائونڈ میں ریکارڈ وزن کی مسلسل تعددی تقسیم بنائیں۔ 138, 148, 146, 146, 119, 164, 152,

173, 158, 154, 150, 144, 142, 140, 165, 132, 150, 147, 147, 153, 144, 156, 135, 126, 140, 125, 168, 157, 138, 135, 149, 136, 135, 142, 161, 145, 176, 163, 145, 128

حقیقی جماعتی حدود جماعتی نشان اور مجموعی تعدد بھی معلوم کریں۔

10- ایک جیسی قدر کے 48 ریزسٹرس کے بیچ میں مزاحمت قدر کی اوہم (OHM) میں یہ ہیں

21.0, 22.4, 22.8, 21.5, 22.6, 21.1, 21.6, 22.3, 22.9, 20.5, 21.8, 22.2, 21.0, 21.7, 22.5, 20.7, 23.2, 22.9, 21.7, 21.4, 22.1, 22.2, 22.3, 21.3, 22.1, 21.8, 22.0, 22.7, 21.7, 21.9, 21.1, 22.6, 21.4, 22.4, 22.3, 20.9, 22.8, 21.2, 22.7, 21.6, 22.2, 21.6, 21.3, 22.1, 21.5, 22.0, 23.4, 21.2.

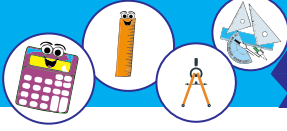
مسلسل تعدد جدول بنائیں۔ اس کے علاوہ، مجموعی اور فیصد تعدد بھی معلوم کریں۔

11- دھات کے 50 بلاکس کا ماس (کلوگرام میں) قریب ترین 0.1 کلوگرام تک جمع کیا گیا جو ذیل میں درج ہیں۔ ماس کی تعددی تقسیم بنائیں اور متعلقہ اور فیصد شمار کریں۔

8.0 8.3 7.7 8.1 7.4 8.6 7.1 8.4 7.4 8.2 8.4 8.8 7.9 8.1 8.2 7.5 8.3
8.8 8.0 7.7 8.3 8.2 7.9 8.5 7.9 8.0 8.4 7.2 8.7 8.0 9.1 8.5 7.6 8.2
7.8 7.8 8.7 8.5 8.4 8.5 8.1 7.8 8.2 7.7 7.5 8.5 8.1 7.3 9.0 8.6

(ii) 22.1 مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشہ (Histogram) بنانا:

کالمی نقشے کو غیر مسلسل اور مسلسل جماعتوں اور متعلقہ تصورات کے ساتھ تعدد جدولوں کا استعمال کرتے ہوئے مقداری اعداد و شمار کی گرافیکل نمائندگی کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ ایک کالمی نقشہ ملحقہ مستطیلوں کا استعمال کرتے ہوئے بنایا جاتا ہے جس میں



مستطیلوں کی بنیادیں نمبروں کی تقسیم کے ذریعے نشان زد ہوتی ہیں اور مستطیلوں کی اونچائی جماعتی تعدد کے متناسب ہوتی ہیں۔ مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشے میں، مستطیل کا علاقہ اور اونچائی دونوں تعدد کے متناسب ہوتے ہیں۔ غیر مسلسل تعدد جدولوں کے مطابق کالمی نقشے میں مستطیل کی بنیادیں اعداد و شمار میں الگ الگ نمبروں کی نمائندگی کرتی ہیں اور اونچائیوں کو عام طور پر جماعتوں کے تعدد کے طور پر لیا جاتا ہے۔ مستطیلوں کی چوڑائی ایک مقررہ وقفے کے ساتھ لیا جاتی ہے۔ مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ مسلسل تعدد جدولوں کے مطابق کالمی نقشے میں مستطیل کی بنیادیں جماعتی حدود کی نمائندگی کرتی ہیں اور اونچائیوں کو عام طور پر جماعتوں کے تعدد کے طور پر لیا جاتا ہے۔ مستطیلوں کی چوڑائی جماعتی وقفے کے برابر لی جاتی ہے۔ کالمی نقشہ کھینچتے وقت محوروں کو واضح طور پر لیبل کیا جانا چاہیے اور پیمانے کی وضاحت کی جانی چاہیے۔ x محور کا O سے شروع ہونا ضروری نہیں ہے۔ Y محور کو O سے شروع ہونا چاہیے تعدد کو مستطیلوں کے اوپر بھی نشان زد کیا جانا چاہیے۔ کالمی نقشے کھینچنے کے طریقہ کار کی وضاحت درج ذیل مثالوں میں کی گئی ہے

مثال 1: 80 خاندانوں کے درج ذیل مواد کا استعمال کرتے ہوئے گائوں میں فی خاندان بچوں کی تعداد کے لیے کالمی نقشہ بنائیں۔

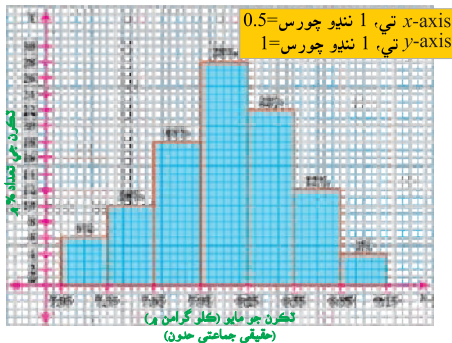
ایک خاندان میں بچوں کی تعداد	1	2	3	4	5	6
خاندانوں کی تعداد	8	10	10	25	20	7

حل: یہاں مواد ایک غیر مسلسل تعدد جدول کی نمائندگی کرتا

ہے۔ x محور پر الگ الگ اعداد 1, 2, 3, 4, 5, 6 سب ایک مقررہ وقفے کے ساتھ مختلف جماعتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ پھر Y محور پر "O" سے شروع ہونی والی تعدادات کو 25 تک کی تمام تعدادات کو شامل کرنے کے لیے موزوں پیمانے کے ساتھ لکھیں۔ الگ الگ اعداد پر مستطیل کھینچتے ہوئے مساوی چوڑائی اور تعدادات کے برابر اونچائی ہے ہمیں درج ذیل کالمی نقشہ ملتا ہے۔ محوروں کا لیبل لگا ہوا ہے اور پیمانے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 2: درج ذیل تقسیم کے لیے فیصد تعدد کالمی نقشہ بنائیں

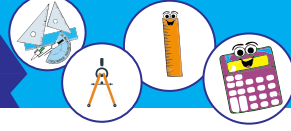
پلاس کاس (کلوگرام میں)	7.1 - 7.3	7.4 - 7.6	7.7 - 7.9	8.0 - 8.2	8.3 - 8.5	8.6 - 8.8	8.9 - 9.1
پلاس کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2



حل: دیئے گئے مسلسل تعدد جدول میں اعشاریہ کے بعد ایک بندے تک مسلسل مواد ہے، لہذا $h = 0.1$ اور $n = 50$ ۔ جماعتی حدود یہ

ہیں: 7.65 - 7.95, 7.35 - 7.65, 7.05 - 7.35, 8.85 - 9.15, 8.55 - 8.85, 8.25 - 8.55, 7.95 - 8.25

ان کو x محور پر لکھنا ہے۔ اسی طرح متعلقہ فیصد تعدادات 4, 12, 22, 28, 18, 10, 6 کو Y محور پر متعلقہ پیمانوں کے ساتھ لکھیں۔ بانڈری کی بنیاد ہر ماحقہ مستطیلیں کھینچتے ہوئے، چوڑائی $h = 0.3$ اور اونچائی فیصد تعدد کے برابر کرنے سے ہمیں مطلوبہ فیصد تعدد ملتا ہے۔



(iii) 22.1 غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشہ بنانا:

غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشے کی صورت میں ماحقہ مستطیل اس لیے بنایا گیا ہے کہ صرف ان کے علاقے (اونچائی نہیں) تعداد کے متناسب ہوں۔ ایسا کرنے کے لیے ہم علاقوں اور تعدد کو یقینی بنانے کے لیے مستطیلوں کی ترتیب شدہ اونچائیوں کی وضاحت کرتے ہیں۔ اگر کسی جماعت کا تعدد اور h^* اس کی چوڑائی ہو تو پھر:

$$\frac{f^*}{h^*} = \text{مستطیل کی ترتیب شدہ اونچائی} \quad (1)$$

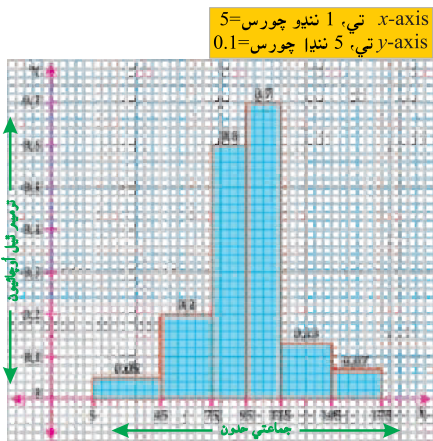
$$f^* = h^* \times \frac{f^*}{h^*} = h^* \times \text{مستطیل کا رقبہ} - \text{چوڑائی} - \text{اونچائی} \quad (2)$$

(1) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ترتیب شدہ اونچائیاں f کے متناسب نہیں ہیں، لیکن (2) میں رقبہ اس ضرورت کو پورا کرتا ہے، کالمی نقشے کو غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ بنانے کے مراحل پہلے کی طرح ہی ہیں، لیکن ہمیں Y محور پر ترتیب شدہ اونچائیاں لکھنی چاہیئے۔ مثال: غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ درج ذیل مواد کے لیے کالمی نقشہ بنائیں:

جماعتی حدود	10 - 40	50 - 70	80 - 90	100 - 110	120 - 140	150 - 170
تعدادات	2	6	12	14	4	2

حل: ہم مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ دیا گیا مواد غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ تعدد جدول دکھاتا ہے، ہم سب سے پہلے جماعتی حدود اور ترتیب شدہ اونچائیوں کا شمار کرتے ہیں۔ یہاں $d = 10$ ہے۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی وقفے (h^*)	تعدادات (f^*)	مستطیلوں کی ترتیب شدہ اونچائی (f^* / h^*)
10 - 40	5-45	40	2	$\frac{2}{40} = 0.05$
50 - 70	45-75	30	6	$\frac{6}{30} = 0.2$
80 - 90	75-95	20	12	0.6
100 - 110	95-115	20	14	0.7
120-140	115-145	30	4	≈ 0.13
150-170	145-175	30	2	≈ 0.07



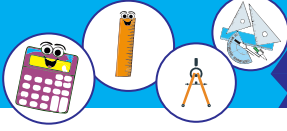
X محور پر جماعتی حدود اور Y محور پر ترتیب شدہ اونچائیوں کو لکھتے ہوئے ہم تمام جماعتوں کے لیے مستطیل کھینچتے ہیں جن کی چوڑائی غیر مساوی جماعتی وقفوں کے برابر ہوتی ہے اور اونچائی مندرجہ بالا جدول میں شمار کردہ ترتیب شدہ اونچائی کے برابر ہوتی ہے۔ اس طرح ہمیں غیر مساوی وقفوں کے ساتھ مطلوبہ کالمی نقشہ ملتا ہے۔

ہر تصدیق کر سکتے ہیں کہ یہاں مستطیل کے علاقے متناسب ہیں اور خاص طور پر تعدادات کے برابر ہیں۔

$$1 - \text{مستطیل کا رقبہ} = 40 \times 0.05 = 2$$

$$2 - \text{مستطیل کا رقبہ} = 30 \times 0.2 = 6$$

$$3 - \text{مستطیل کا رقبہ} = 20 \times 0.6 = 12$$



(iv) 22.1 تعددی کثیر الاضلاع (Frequency Polygon) بنانا:

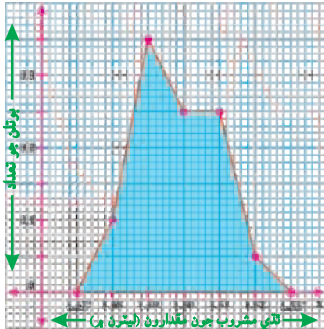
تعددی کثیر الاضلاع تعددی تقسیم میں گروہی مقداری مواد کی گرافیکل نمائندگی کا ایک اور طریقہ ہے۔ ہم اکثر اخبارات میں (خاص طور پر کاروباری حصے میں)، موسم کی پیش گوئی کی خبروں میں، اور کرکٹ میچ کے اعداد و شمار میں ایسے گراف دیکھتے ہیں کثیر الاضلاع لفظ سے مراد پلین (Plane) میں بند ایسی شکل ہے جو کم از کم تین قطعات کو جوڑ کر بنتی ہے مثال کے طور پر، مثلث، مربع، پینٹاگون، وغیرہ پہاں ہم یہ سیکھیں گے کہ یہ ہندسی تصور تعددی تقسیم سے کیسے متعلق ہے۔ تعددی کثیر الاضلاع کا استعمال جدید شاریاتی تجزیہ میں تقسیم کی شکل کے شناخت کے لیے لیا جاتا ہے۔

تعددی کثیر الاضلاع بنانے کے لیے نکات (x,y) کو پلاٹ کیا جاتا ہے، جہاں x کو رڈیٹ (abscissas) جماعتی نشان ہوتے ہیں اور y کو رڈیٹ (ordinates) جماعتی تعدد ہوتے ہیں دوم ہم دو ڈمی (dummy) جماعتوں کا اضافہ کرتے ہیں، ایک شروع میں اور ایک آخر میں O تعدد کے ساتھ x محور پر ان کے لیے متعلقہ نکات کو نشان زد کرتے ہیں آخر میں ہم مطلوبہ بند شکل حاصل کرنے کے لیے گراف پر بکھرے ہوئے نکات کو جوڑتے ہیں، جس سے ہمیں تعددی کثیر الاضلاع ملتا ہے، جس کی بنیاد x محور پر ہوتی ہے اور چوٹیاں تعدد ظاہر کرتی ہے وضاحت کے لیے، بھرے ہوئے نمبر (●) اصلی جماعتوں کے نکات اور خالی نمبر (○) ڈمی جماعتوں کے نکات کو ظاہر کرتے ہیں۔ محوروں پر لیبل لگانا لازمی ہے اور مناسب پیمانے کی وضاحت کریں۔

مثال 1: درج ذیل مواد کے لیے ایک نسبتاً تعددی کثیر الاضلاع کھینچیں۔

x-axis: 5 ننڈیو چورس = 0.01
y-axis: 5 ننڈیو چورس = 0.05

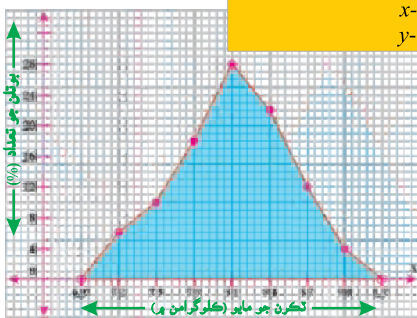
کولڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
پوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1



حل: دیا گیا مواد غیر مسلسل تعدد جدول ظاہر کرتا ہے۔ الگ الگ عدد: 1.52, 1.48, 1.51, 1.50, 1.49 (جماعتی نشان x) ہیں اور 2, 7, 5, 5, 1 (تعدد y) ہیں سب سے پہلے ہم نسبتاً تعدد کا شمار کرتے ہیں، جو یہ ہیں 0.25, 0.25, 0.35, 0.1 اور 0.05 دو ڈمی جماعتوں کے ساتھ پلاٹ لیے گئے نکات یہ ہیں (1.47, 0.05), (1.48, 0.1), (1.49, 0.35), (1.50, 0.25), (1.51, 0.25), (1.52, 0.05) اور (1.52, 0.05) اور (1.53, 0) قطعات کے ذریعے نکات کو جوڑتے ہوئے ہیں نسبتاً تعددی کثیر الاضلاع ملتا ہے۔

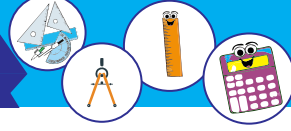
مثال 2: درج ذیل تقسیم کے لیے فیصد تعددی کثیر الاضلاع کھینچیں۔

پلاک کا ماس (کلوگرام میں)	7.1 - 7.3	7.4 - 7.6	7.7 - 7.9	8.0 - 8.2	8.3 - 8.5	8.6 - 8.8	8.9 - 9.1
پلاک کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2



حل: مواد مساوی جماعتی وقفہ $h=0.3$ کے ساتھ مسلسل تعددی تقسیم ظاہر کرتا ہے، پلاٹ کے نکات (x,y) ہیں، جہاں x جماعتی نشانات کو ظاہر کرتا ہے 7.1, 7.4, 7.7, 8.0, 8.3, 8.6, 8.9 اور y فیصد تعدد ہے 18, 30, 40, 46.7, 55.6, 66.7, 77.8, 88.9, 90.9, 97.8, 100. ان کے ذریعے پلاٹ کیا جائے:

(7.05, 0), (7.1, 18), (7.4, 30), (7.7, 40), (8.0, 46.7), (8.3, 55.6), (8.6, 66.7), (8.9, 77.8), (9.1, 88.9), (9.15, 90.9), (9.2, 97.8), (9.25, 100) مناسب پیمانوں کو مد نظر رکھا جائے۔



22.2 مجموعی تعددی تقسیم:

مجموعی تعددی تقسیم ایک جدول ہے جس میں مجموعی تعدد کی جماعتوں کی شمار کی گئی تعدد کی گنتی کی جاتی ہے۔ ہم تعدد کا شمار پہلے ہی جانتے ہیں۔ وہ مجموعی تعدد جو UCB سے کم مشاہدات کی تعداد کو جمع کرنے سے حاصل ہوا ہے مجموعی تعددات سے LESS (THAN COMMUTATIVE FREQUENCY) کہا جاتا ہے، یہ 0 سے شروع ہوتی ہیں اور مشاہدات کی کل تعداد (n) پر ختم ہوتی ہے۔ ہمیں لازمی جماعتوں میں ایک ڈمی UCB شامل کرنی ہے، 0 مجموعی تعدد کے ساتھ مجموعی تعددات سے زیادہ (Greater than commutative frequency) حساب لگانے کے لیے ہم LCB سے زیادہ جماعتوں والے مشاہدات کو جمع کرتے ہیں یہ n سے شروع ہوتی ہیں اور 0 پر ختم ہوتی ہیں۔ لیکن عام طور پر ہم ”مجموعی تعددات سے کم“ کو استعمال کرتے ہیں۔ آنے والی بحث میں، آسانی کے لیے ہم ”مجموعی تعدد“ کے بجائے ”مجموعی تعددات سے کم“ کو استعمال کریں گے۔

(i) 22.2 ایک مجموعی تعدد جدول بنائیں:

گروہی مقداری مواد کے مجموعی تعدد جدول بنانے کی مراحل یہ ہیں:

- 1- بالائی جماعتی حدود اور مجموعی تعددات حاصل کریں۔
- 2- 0 مجموعی تعدد کے ساتھ شروع میں ایک ڈمی بالائی جماعتی حدود شامل کریں۔
- 3- متعلقہ مجموعی تعدد کے ساتھ تمام UCBs کو ظاہر کرنے کے لیے

ایک جدول بنائیں۔

طلباء کے مارکس	1	2	3	4	5
طلباء کی تعداد	2	5	4	3	1

مثال 1: درج ذیل مواد کا استعمال کرتے ہوئے ایک مجموعی تعدد جدول بنائیں:

مجموعی تعددات	تعددات	UCBs	جماعتیں
2	2	1.5	1
7	5	2.5	2
11	4	3.5	3
14	3	4.5	4
15 = n	1	5.5	5

حل: دیئے گئے مواد سے غیر مسلسل تعددی تقسیم ظاہر ہوتی ہے یہاں $d=1$ اور $n=15$ ہے۔ CBs حاصل کرنے کے لیے جماعتی حدود میں $\frac{d}{2}$ کا اضافہ کریں اور پھر ہم مجموعی تعددات حاصل کرتے ہیں: U مجموعی تعددات ”0“ کے ساتھ 0.5 کے برابر شروع میں ایک ڈمی UCB شامل کرنا لازمی ہے۔ مطلوبہ مجموعی تعدد جدول یہ ہے۔

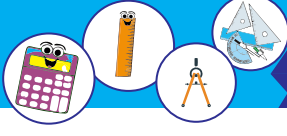
طلباء کے مارکس (UCB) سے کم	0.5*	1.5	2.5	3.5	4.5	4.5
طلباء کی تعداد (مجموعی تعداد)	0	2	7	11	14	15

مثال 2: بجلی کی گھپت کے مواد کے لیے مجموعی تعدد جدول بنائیں:

بجلی کی گھپت (kw)	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: دیا گیا مواد ایک مسلسل تعددی تقسیم کو ظاہر کرتا ہے۔ یہاں $d=1$ اور $n=60$ ہیں۔ UCBs یہ ہیں: 187.5, 147.5, 127.5, 107.5, 87.5, 67.5* UCB ایک 207.5 اور 67.5 کا اضافہ شروع میں کر کے ہمیں مندرجہ ذیل مجموعی تعدد جدول حاصل ہوتا ہے۔

بجلی کی گھپت (KwH) سے کم	67.5*	87.5	107.5	127.5	147.5	167.5	187.5	207.5
دنوں کی تعداد	0	10	23	38	48	52	58	60



(ii) 22.2 مجموعی تعددی کثیر الاضلاع بنائیں:

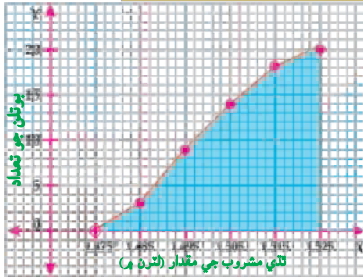
مجموعی تعددی تقسیم کو گرافنی طور پر ایک مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کے ذریعے دکھایا جاتا ہے۔ جسے اوگیو (Ogive) بھی کہتے ہیں۔ ہم مجموعی تعدد جدول (UCBs: x اور y مجموعی تعدادات) کے نکات (x, y) کی منصوبہ بندی شروع کرتے ہیں، پھر ان کو قطعات کے ذریعے جوڑتے ہیں۔ آخر میں، ہم بنو شکل حاصل کرنے کے لیے x محور پر چوٹی کے نقطے سے ایک عمود کھینچتے ہیں، جو کہ مطلوبہ Ogive یا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع ہے۔

مثال 1: درج ذیل مواد کے لیے ایک اوگیو (مجموعی تعددی کثیر الاضلاع) بنائیں

1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)
1	5	5	7	2	بوتلوں کی تعداد

حل: یہاں $n=20$ اور $d=0.01$ ہے۔ UCBs اور مجموعی تعدادات کو شمار کرتے ہوئے ہم مجموعی تعدد جدول حاصل کرتے ہوئے ہم مجموعی تعدد جدول حاصل کرتے ہیں، جہاں 1.475 ایک ڈمی شروع ہونے والا UCB ہے۔

x-axis: 5 ننڈیا چورس = 0.01
y-axis: 2 ننڈیا چورس = 5



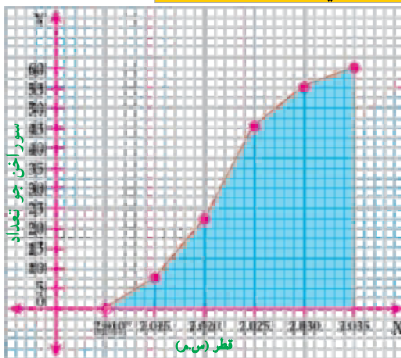
1.525	1.515	1.505	1.495	1.485	1.475*	کولڈ ڈرنک مقدار (لیٹر میں)
20	19	14	9	2	0	بوتلوں کی تعداد

اب ہمنکات (1.505, 14)، (1.495, 9)، (1.485, 2)، (1.475*, 0)، (1.515, 19) اور (1.525, 20) کو گراف پر پلاٹ کرتے ہیں، ان کو قطعات کے ذریعے جوڑتے ہیں اور آخر میں مطلوبہ مجموعی تعددی کثیر الاضلاع یا اوگیو حاصل کرنے کے لیے x محور کی طرف آخری نقطے سے ایک عمود بناتے ہیں۔ محوروں کو واضح بیانوں کی مدد سے لیبل کیا گیا ہے۔

مثال 2: ان میں بور ہونے والے 60 سوراخوں کے قطر (سنٹی میٹر میں) کا سٹنگ جیسے ایک خاص مطالعے میں ماپے گئے ہیں۔ مندرجہ ذیل تقسیم کے لیے مجموعی تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

2.031 - 2.034	2.026 - 2.029	2.021 - 2.024	2.016 - 2.019	2.011 - 2.014	قطر (cm)
5	9	23	16	7	سوراخوں کی تعداد

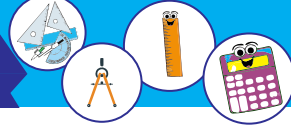
x-axis: 1 ننڈیا چورس = 0.001
y-axis: 2 ننڈیا چورس = 5



حل: دیئے گئے مسلسل تعدد جدول میں $n=60$ اور $d=0.002$ ہے۔ UCBs اور مجموعی تعدادات کا استعمال کرتے ہوئے ہم ان نکات کے ساتھ مجموعی تعدد جدول حاصل کرتے ہیں:

(2.010, 7), (2.016, 23), (2.021, 46), (2.026, 55), (2.031, 60) اور (2.035, 60)

یہ نکات مطلوبہ اوگیو یا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کی طرف لے جاتے ہیں۔



مشق 22.2

1- مندرجہ ذیل مواد کے لیے فیصد کالمی نقشہ، تعدوی کثیر الاضلاع مجموعی تعدد جدول اور اوگیو بنائیں۔

طلباء کے بار کس	1	2	3	4	5
طلباء کی تعداد	2	5	4	3	1

2- مندرجہ ذیل مواد کے لیے ایک غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشہ بنائیں۔

جماعتی حدود	0-39	40-49	50-79	80-99
تعدادات	6	8	12	4

3- مندرجہ ذیل جدول کے لیے کالمی نقشہ، تعدوی کثیر الاضلاع مجموعی تعدد جدول اور اوگیو بنائیں۔

ایک ہفتے میں کئی رقم	20-40	50-70	80-90	100-110	120-140	150-170
لوگوں کی تعداد	2	6	12	14	4	2

4- مندرجہ ذیل مواد کے لیے کالمی نقشہ، نسبتاً، تعدوی کثیر الاضلاع اور اوگیو تشکیل کریں۔

جماعتی حدود	10.5-10.9	11.0-11.4	11.5-11.9	12.0-12.9	13.0-13.4
تعدادات	2	7	10	12	8

22.3 مرکزی رجحان کے پیمانے:

اعداد و شمار میں تمام مشاہدات کا کسی مرکزی نقطے کے گرد جمع ہونے کی صلاحیت کو مرکزی رجحان کہا جاتا ہے۔ مواد کے مرکزی نقطے کو مرکزی رجحان کی پیمائش یا محض اوسط کہا جاتا ہے مرکزی رجحان کا پیمانہ ایک واحد مرکزی نقطے کے ذریعے پورے مواد کی نمائندگی کرتا ہے اور پورے مواد کی ایک جامع شناخت ہے۔

ہم عام طور پر اعداد اور اقسام کی اوسط کے بارے میں اکثر بات کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر درج ذیل جملوں پر غور کریں:

- 1- "کلاس میں طلباء کی اکثریت نے گریڈ B حاصل کیا۔" یہاں گریڈ B ایک اوسط ہے۔
- 2- "علی رزانہ جم میں 45 منٹ گزارتا ہے۔" یہاں علی جم میں روزانہ 45 منٹ اوسط وقت گزارتا ہے۔ ظاہر ہے، اس نے 45 منٹ سے زیادہ یا کم گزارے ہوں گے۔
- 3- "T20 میں بلے باز کا اوسط سکور" جو کہ اس کے تمام T20 اسکورز پر مبنی ہوتا ہے۔ اوسط سکور تمام انفرادی اسکور کو عام کرتا ہے۔

22.3 (i) مرکزی رجحان کے پیمانوں کا حساب لگانا:

ہم عام طور پر مشاہدات کو جمع کر کے اور پھر مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کر کے مواد کے مرکزی رجحان کی اوسط کا حساب لگاتے ہیں، جو خاص طور پر حسابی اوسط کہلاتا ہے۔ اوسط کا حساب لگانے کے اور بھی کئی طریقے ہیں ہم یہاں درج ذیل پانچ اقسام پر غور کرتے ہیں۔

- 1- حسابی اوسط (Arithmetic mean) 2- وسطانیہ (Median) 3- عادیہ (Mode) 4- ہندسی اوسط (Geometric mean) 5- ہم آہنگ اوسط (Harmonic mean)

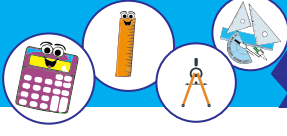
یہ اوسط ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کرتے وقت کچھ فوائد اور نقصانات رکھتے ہیں نیز، اوسط کا بہترین استعمال مواد کی نوعیت پر منحصر ہے۔

22.3 (i) (a) حسابی اوسط بذریعہ تعریف اور انحراف (Deviation) کا استعمال کرتے ہوئے فرضی اوسط سے۔

حسابی اوسط تمام مشاہدات کے درمیان مساوات کے اصول پر مبنی ہے۔ ہم تمام n مشاہدات کو ان کے مجموعے سے ملاتے ہیں اور پھر رقم کو n پر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

اگر $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ اعداد ہیں، تو ان کا حسابی اوسط ($\bar{x}$) کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے (یہ ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{یا} \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (1)$$



جہاں " Σ " ایک بڑا یونانی حرف ہے جو مجموعے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

نوٹ:

- 1- حسابی اوسط مواد کی حد کے اندر ایک منفرد عدد ہے۔
- 2- اگر مواد مقداری ہیں تو ہم براہ راست حسابی اوسط نکالتے ہیں جبکہ اگر مواد نوٹیل یا آرڈینل ہو تو ہم بالترتیب عددی کوڈ یا رینک تقویض کر سکتے ہیں۔
- 3- حسابی اوسط نوٹیل مواد کے لیے مناسب نہیں ہے۔

حسابی اوسط بذریعہ تعریف / براہ راست طریقے سے:

حسابی اوسط کو براہ راست طریقے / ذریعہ تعریف مشاہدات کے مقام یا پیمانے جو تبدیل کیے بغیر دیئے گئے مواد سے براہ راست حاصل کرتے ہیں۔ براہ راست طریقے / تعریف کے مطابق ہم درج ذیل کلیات (formulas) کا استعمال کرتے ہیں:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum x f}{\sum f} \quad (\text{گروہی مواد}) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum x}{n} \quad (\text{غیر گروہی مواد})$$

یہاں x_i غیر گروہی مواد میں انفرادی مشاہدات اور گروہی مواد میں جماعتی نشان کو ظاہر کرتا ہے اور f_i متعلقہ جماعتی تعدادات ہیں۔ اختصار کے لیے ہم کلیوں میں سبسکرپٹس کو چھوڑ سکتے ہیں۔

مثال 1: بذریعہ تعریف درج ذیل ڈیٹا سیٹس کا حسابی اوسط معلوم کریں:

(i) 2, 3, 7, 5, 5, 13, 1, 7, 4, 8, 3, 4, 3 (ii) 7, 5, 74, 10 (iii) 18.92, 27.9, 34.7, 39.68

حل: (i) بذریعہ تعریف یا براہ راست طریقے سے ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2+3+7+5+5+13+1+7+4+8+3+4+3}{13} = \frac{65}{13} = 5.$$

(ii) بذریعہ تعریف، ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{7+5+74+10}{4} = \frac{96}{4} = 24.$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{18.92+27.9+34.7+39.68}{4} = \frac{121.2}{4} = 30.3. \quad (\text{iii})$$

نوٹ: حسابی اوسط انتہائی قدروں (Outliers) سے متاثر ہوتا ہے۔

مثال 1 کے (ii) میں $\bar{x} = 24$ تمام مشاہدات سے بہت دور ہے: 74, 5, 7 اور 10 میں 74 انتہائی قدر کی وجہ سے۔

مثال 2: گروپ میں تعلیم حاصل کرنے والے پانچ طلباء کے درجات (Grades) یہ تھے: A, B, C, B+, A+ حسابی اوسط کا استعمال کرتے ہوئے اوسط درجہ معلوم کریں۔

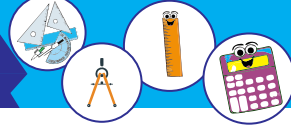
حل: مواد آرڈینل ہیں اور اعداد کے حساب سے درجہ بندی کی جاسکتی ہے۔ ہم درجات کی نمائندگی کرتے ہیں۔ A+, A, B+, B

C, C+, B بذریعہ لیبل بالترتیب: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{6+1+4+3+5}{5} = \frac{19}{5} = 3.8 \approx 4.$$

مثال 3: درج ذیل مواد میں تعریف کے لحاظ سے کولڈرنک کی مقدار کی حسابی اوسط معلوم کریں۔

کولڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1



x	f	xf
1.48	2	$1.48 \times 2 = 2.96$
1.49	7	10.43
1.50	5	7.5
1.51	5	7.55
1.52	1	1.52
	$\sum f = 20$	$\sum xf = 29.96$

حل: مواد کی غیر مسلسل جماعتوں میں گروہ بندی کی گئی ہے۔ جماعتی نشان (x) یہ ہیں: 1.52, 1.51, 1.49, 1.50 حسابات جدول میں دکھائے گئے ہیں:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{29.96}{20} = 1.498 \text{ لیٹر}$$

حسابی اوسط کا استعمال کرتے ہوئے کولڈرنک کی اوسط مقدار 1.498 لیٹر ہے۔

مثال 4: بذریعہ تعریف صارفین کے اطمینان کا حسابی اوسط معلوم کریں

بہت	کسی حد تک	یقینی نہیں	بہت نہیں	بالکل بھی نہیں	اطمینان کی سطح
18	6	5	8	3	صارفین کی تعداد

حل: ہم آرڈیل متغیر کی صفات کی نمائندگی کرتے ہیں:

"بالکل بھی نہیں، بہت نہیں، یقینی نہیں، کسی حد تک، بہت" درجات کے لحاظ سے، بالترتیب: 1, 2, 3, 4, 5 بذریعہ تعریف ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{(1)(3) + (2)(8) + (3)(5) + (4)(6) + (5)(18)}{3 + 8 + 5 + 6 + 18} = \frac{148}{40} = 3.7 \approx 4.$$

لہذا اوسط اطمینان کی سطح "4" درجہ ہے جو کہ "کسی حد تک" کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 5: 60 دنوں کے لیے دکان کی بجلی کی کھپت (KWH) میں درج ذیل ہے۔ حسابی اوسط معلوم کریں:

بجلی کی کھپت	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

xf	تعدادات (f)	جماعتی نشانی (x)	جماعتی حدود
775	10	77.5	68-87
1267.5	13	97.5	88-107
1762.5	15	117.5	108-127
1375	10	137.5	128-147
630	4	157.5	148-167
1065	6	177.5	168-187
395	2	197.5	188-207
7270	$\sum f = 60$	---	کل تعداد

حل: مواد مسلسل تعدد جدول کو ظاہر کرتا ہے۔ ہمیں جماعتی نشان اور مطلوبہ رقم محلقہ جدول میں ملتی ہے۔ بذریعہ تعریف یا براہ راست طریقے سے:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{7270}{60} = 121.166.$$

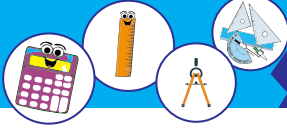
دکان کی بجلی کی اوسط کھپت 121.166 ہے۔

نوٹ: غیر گروپی مواد کا حسابی اوسط اور اس کی غیر مسلسل تعدد جدول ہمیشہ ایک جیسے ہوتے ہیں۔ لیکن مسلسل تعددی تقسیم سے مواد کا حسابی اوسط متعلقہ غیر گروہی مواد کے وسط کے برابر (لیکن اس کے قریب) نہیں ہے۔

انحراف / بالواسطہ طریقوں کا استعمال کرتے ہوئے حسابی اوسط:

اگر: x مشاہدات کو ظاہر کرتا ہے اور A ہے فرضی / عارضی اوسط (اندریا یا ہر کوئی بھی عدد مواد کی حد میں) تو پھر A کا انحراف یہ ہے

$$D_i = x_i - A$$



انحراف پر مبنی دو بالواسطہ طریقے ہیں: مختصر طریقہ (Shortcut method) اور کوڈنگ طریقہ (Coding method) انہیں حسابی اوسط کو شمار کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے جب اعلیٰ اقدار کی ساتھ بڑے مواد سے نمٹا جاتا ہے۔

مختصر طریقہ:

مختصر طریقہ استعمال کرتے ہوئے حسابی اوسط اس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = A + \frac{\sum D}{n} \quad (\text{غیر گروہی مواد کے لیے})$$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f} \quad (\text{گروہی مواد کے لیے})$$

غیر گروہی مواد کے لیے x_i مشاہدات ہیں اور گروہی مواد کے لیے x جماعتی نشانات ہیں۔ یہ بہتر ہے کہ گروہی مواد کے لیے A مطابق x_i کو سب سے تعدد والا لیا جائے۔

کوڈنگ طریقہ:

$$\bar{x} = A + h \frac{\sum u}{\sum n} \quad (\text{غیر گروہی مواد کے لیے})$$

$$\bar{x} = A + h \frac{\sum uf}{\sum f} \quad (\text{گروہی مواد کے لیے})$$

جہاں $u_i = \frac{x_i - A}{h}$ یا $u = \frac{x - A}{h}$ کو کوڈ شدہ متغیر کہا جاتا ہے۔ غیر گروہی مواد کے لیے x مشاہدات ہیں اور گروہی مواد کے لیے x جماعتی نشانات ہیں۔

مثال 1: امتحان میں گروپ میں پڑھنے والے چھ طلباء کے کل نمبر یہ ہیں: 580, 710, 685, 640, 610 بالواسطہ طریقوں کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

(i) $A = 650$ اور $h = 10$. (ii) $A = 680$ اور $h = 20$.

حل: مختصر طریقہ یہ بتاتا ہے: $\bar{x} = A + \frac{\sum D}{n}$

کوڈنگ کا طریقہ یہ بتاتا ہے: $\bar{x} = A + h \frac{\sum u}{n}$, جہاں $u_i = \frac{x_i - A}{h}$

دونوں حصوں کے لیے الگ الگ جدولوں میں مطلوبہ حسابات دکھائے گئے ہیں:

(i) $A = 650$ اور $h = 10$.

مختصر طریقے سے ہمارے پاس ہے۔

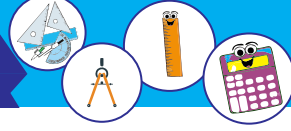
$$\bar{x} = 650 + \frac{5}{6} = 650.833.$$

کوڈنگ طریقے سے ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = 650 + 10 \times \frac{0.5}{6} = 650 + \frac{5}{6} = 650.833.$$

دونوں حصوں کے لیے الگ الگ جدولوں میں مطلوبہ حسابات دکھائے گئے ہیں:

x	$D = x - 650$	$u = \frac{x - 650}{10}$
610	-40	-4
640	-10	-1
685	35	3.5
680	30	3
710	60	6
580	-70	-7
	$\sum D = 5$	$\sum u = 0.5$



$$h = 20, A = 680 \text{ (ii).}$$

مختصر طریقے سے ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = 680 + \left(\frac{-175}{6} \right) = 680 - 29.1666$$

$$\bar{x} = 650.833.$$

کوڈ رنگ طریقے سے ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = 680 + 20 \left(\frac{-8.75}{6} \right)$$

$$\bar{x} = 680 - 29.1666 = 650.833.$$

اوسط مارکس A اور h کے انتخاب سے قلع نظر 650.833 یا 651 ہیں۔

x	D = x - 680	u = $\frac{x-680}{20}$
610	-70	-3.5
640	-40	2
685	5	0.25
680	0	0
710	30	1.5
580	-100	-5
	$\sum D = -175$	$\sum u = -8.75$

مثال 2: مختصر اور کوڈ رنگ طریقے سے کوڈ رنگ کی اوسط مقدار معلوم کریں:

کوڈ رنگ کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
پوتوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: یہاں ہم $A = 1.49$ اور $h = 0.01$ استعمال کریں گے۔ حسابات جدول میں درج ہیں۔

x	f	D = x - 1.49	u = $\frac{x-1.49}{0.01}$	Df	uf
1.48	2	-0.01	-1	-0.02	-2
1.49	7	0	0	0	0
1.50	5	0.01	1	0.05	5
1.51	5	0.02	2	0.1	10
1.52	1	0.03	3	0.03	3
	$\sum f = 20$			$\sum Df = 0.16$	$\sum uf = 16$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f} = 1.49 + \frac{0.16}{20} = 1.498.$$

$$\bar{x} = A + h \times \frac{\sum uf}{\sum f} = 1.49 + 0.01 \left(\frac{16}{20} \right) = 1.498.$$

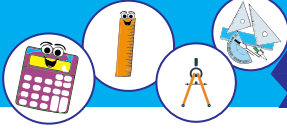
ہم یہ نوٹ کر سکتے ہیں کہ دونوں بالواسطہ طریقوں اور بذریعہ تعریف سے نتائج ایک جیسے آرہے ہیں۔

مثال 3: 50 دھاتی بلاکس کا اوسط ماس معلوم کرنے کے لیے مختصر اور کوڈ رنگ طریقوں کا استعمال کریں:

بلاکس کا مارکس (کلوگرام میں)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
بلاکس کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل: یہاں $A = 8.1$ اور $h = 0.1$ ہے۔ حسابات مندرجہ بالا جدول میں درج ہیں:

ہماتنی حدود	ہماتنی نشان (x)	f	D = x - 8.1	u = $\frac{x-8.1}{0.1}$	Df	uf
7.1-7.3	7.2	3	-0.9	-9	-2.7	-27
7.4-7.6	7.5	5	-0.6	-6	-3	-30
7.7-7.9	7.8	9	-0.3	-3	-2.7	-27
8.0-8.2	8.1	14	0	0	0	0
8.3-8.5	8.4	11	0.3	3	3.3	33
8.6-8.8	8.7	6	0.6	6	3.6	36
8.9-9.1	9.0	2	0.9	9	1.8	18
		$\sum f = 50$			$\sum Df = 0.3$	$\sum uf = 3$



$$\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f} = 8.1 + \frac{0.3}{50} = 8.106 \cdot \text{ مختصر طریقے سے:}$$

$$\bar{x} = A + h \times \frac{\sum uf}{\sum f} = 8.1 + 0.1 \times \left(\frac{3}{50} \right) = 8.106 \cdot \text{ کوڈنگ طریقے سے:}$$

لہذا، اوسط ماس 8.106 کلوگرام ہے۔

(b) 22.3(i) وسطانیہ، عادی، ہندسی اوسط اور ہم آہنگ اوسط

حسابی اوسط (مساوات کی بنیاد پر) کے علاوہ مواد کے مرکزی رجحان کی پیمائش کرنے کے کچھ اور بھی طریقے ہیں۔ مثال کے طور پر، ہمارے انتخابی نظام میں، ہر کسی کو ووٹ دینے کا حق ہے، لیکن منتخب نمائندے کا انتخاب بالآخر اکثریت کی بنیاد پر کیا جاتا ہے، جیسا کہ بڑے پیمانے پر کہا جاتا ہے کہ "اکثریت ہی اختیار ہے۔" ایسا معاملہ عادی کو ظاہر کرتا ہے۔ سب سے زیادہ کثرت سے آنے والا مشاہدہ اسی طرح وسطانیہ درجہ بندی والے ڈیٹا سیٹ کے درمیانی حصے پر توجہ مرکوز کرتا ہے۔ ہندسی اور ہم آہنگ اوسط ذرائع فطرت میں ریاضیاتی ہیں جیسے کہ حسابی اوسط جو کہ وسطانیہ اور عادی کے برعکس ہے جو کہ فطرت میں وضاحتی ہیں۔

وسطانیہ:

ترتیب شدہ مواد میں وسطانیہ وہ قدر ہے جو اسے دو برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ وسطانیہ کو معلوم کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ پورے مواد کا مرکزی نقطہ صعودی یا نزولی ترتیب میں درمیانی پوزیشن پر ہے۔

نوٹ:

- مواد میں، وسطانیہ ہمیشہ منفرد ہوتا ہے۔
- ہم مقداری مواد کے وسطانیہ کا حساب لگا سکتے ہیں۔
- خاصیتی مواد کے لیے، صرف آرڈینل مواد کا وسطانیہ معلوم کرنا معنی خیز ہے۔
- وسطانیہ تمام مشاہدات پر یکساں طور پر انحصار نہیں کرتا۔
- وسطانیہ مواد میں انتہائی قدروں سے متاثر نہیں ہوتا ہے۔

ترتیب شدہ غیر گروپی مواد کے لیے، وسطانیہ $n(m)$ مشاہدات میں سب سے درمیانی اعداد و شمار کا حصہ ہے اور مندرجہ ذیل دو صورتوں کے ذریعے بیان کیا سکتا ہے:

$$m = \text{مشاہدات کی } \left(\frac{n+1}{2} \right) \text{ ویں رقم (1)}$$

یہاں n طاق ہے۔

$$m = \text{مشاہدات کی } \left[\left(\frac{n}{2} \right) + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \right] \text{ ویں رقم (2)}$$

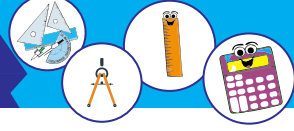
یہاں n جفت ہے۔

غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروپی مواد کے لیے، مجموعی تعداد کی مدد سے، ہم (1) اور (2) کا استعمال کرتے ہوئے درمیانی مشاہدے کا انتخاب کرتے ہیں۔

مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروپی مواد کے لیے، وسطانیہ اس جماعت میں ہے جس میں $\left(\frac{n}{2} \right)$ واں مشاہدہ ہے۔ جسے ہم وسطی جماعت (m-class) بھی کہتے ہیں۔ اس کا کلیہ یہ ہے:

$$m = L + \frac{h}{f} \left(\frac{n}{2} - c \right) \quad (3)$$

جہاں L سے مراد LCB ہے وسطی جماعت کا، h وسطی جماعت کی چوڑائی ہے، f تعدد ہے وسطی جماعت کا اور c مجموعی تعدد ہے وسطی جماعت سے بالکل پہلے والی جماعت کا۔



مثال 1: درج ذیل میں وسطانیہ معلوم کریں:

(i) 2, 3, 7, 5, 5, 13, 1, 7, 4, 8, 3, 4, 3 (ii) 7, 5, 74, 10 (iii) 18.92, 27.9, 37.4, 39.68

حل: (i) مواد کو صعودی میں لکھیں: 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 13

یہاں $n = 13$ (طاق) اس لیے $m = \left(\frac{13+1}{2}\right)$ واں مشاہدہ = ساتواں مشاہدہ = 4

(i) مواد کو صعودی ترتیب میں لکھیں: 4 = n (جفت)

$$m = \left(\frac{n}{2}\right) \text{ واں} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) \text{ واں مشاہدہ} = \frac{1}{2} [7 + 10] = \frac{1}{2} [17] = 8.5$$

(iii) یہاں پر ($n = 4$) (جفت)۔ مواد پہلے ہی درجہ بندی میں ہے۔

$$m = \frac{1}{2} [27.9 + 37.4] = 32.65$$

مثال 2: طلباء کے درج ذیل دو گروپوں کے وسطانیہ درجے (Grades) کی شناخت کریں۔

(i) A+, B+, C, B, A (ii) A+, B+, C, B+, A, A+, C

حل: (i) درجہ بندی کے ساتھ مواد یہ ہیں: A+, B+, A, B+, C, B, A (طاق) $n = 5$

$$m = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ واں} = \left(\frac{5+1}{2}\right) \text{ واں} = \text{تیسرا مشاہدہ} = B + \text{ جو کہ وسطانیہ درجہ ہے۔}$$

(i) مواد کو صعودی ترتیب میں لکھیں: A+, A+, A+, B+, B+, B+, C, C, C یہاں $n = 10$ درمیانی دو مشاہدات

$$\left(\frac{n}{2}\right) \text{ واں اور } \left(\frac{n}{2} + 1\right) \text{ واں ہیں جو کہ 5 واں اور 6 واں مشاہدات ہیں۔ جو کہ B اور B+ درجات ہیں۔}$$

لہذا، ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ وسطانیہ درجہ B اور B+ درجات کے درمیان یکساں طور پر تقسیم ہے۔

مثال 3: 40 صارفین کے درج ذیل مواد میں وسطانیہ اطمینان کی سطح کیا ہے؟

بہت	کسی حد تک	یقینی نہیں	بہت نہیں	بالکل بھی نہیں	اطمینان کی سطح
18	6	5	8	3	صارفین کی تعداد

حل: یہاں $n = 40$ (جفت) لہذا، دو درمیانی مشاہدات ہیں: 20 اور 21 یہ دونوں گروہ ”کسی حد تک“ میں موجود ہیں، لہذا، وسطانیہ

اطمینان کی سطح ”کسی حد تک“ مطمین ہے۔

مثال 4: درج ذیل مواد میں کوئلڈ رٹنگ کی وسطانیہ مقدار معلوم کریں۔

1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
2	7	5	5	1

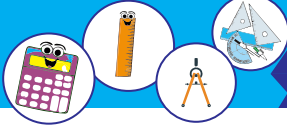
x	f	مجموعی تعدادات
1.48	2	2
1.49	7	9
1.50	5	14
1.51	5	19
1.52	1	20
	$\sum f = 20$	

حل: یہاں $n = \sum f = 20$ (جفت)

$$m = \frac{1}{2} [\text{دسواں} + \text{گیارہواں مشاہدہ}]$$

مجموعی تعداد تلاش کرتے ہوئے، ہم دیکھتے ہیں کہ 10 واں اور 11 واں

مشاہدات مجموعی تعداد 14 کے ساتھ گروہ میں موجود ہیں۔



$$m = \frac{1}{2}[1.50 + 1.50] = \frac{1}{2}(3) = 1.50 \text{ لیٹر}$$

مثال 5: مواد کا استعمال کرتے ہوئے 60 دنوں کے لیے دکان کی وسطانیہ بجلی کی کھیت معلوم کریں:

بجلی کی کھیت	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: یہاں $n=60$ اور $h=20$ ہے، مواد ایک مسلسل تعدد جدول ہے۔ لہذا ہمیں حقیقی جماعتی حدود اور مجموعی تعددات کی گنتی کرنے کی ضرورت ہے جیسا کہ نیچے دیئے گئے جدول میں کیا گیا ہے۔

مجموعی تعددات	f	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی حدود
10	10	67.5-87.5	68-87
23	13	87.5-107.5	88-107
38 (m-class)	15	107.5-127.5	108-127
48	10	127.5-147.5	128-147
52	4	147.5-167.5	148-167
58	6	167.5-187.5	168-187
60	2	187.5-207.5	188-207
	$n = 60$		

وسطانیہ جماعت (m-جماعت) وہ ہے جو $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں مشاہدہ پر مشتمل ہے جو کہ یہاں 30 واں مشاہدہ ہے تو m -جماعت ایک ہے جس کی مجموعی تعدد 38 ہے۔ m -جماعت 108-127 ہے۔ (جیسا کہ جدول میں نمایاں کیا گیا ہے۔) کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے:

$$m = L + \frac{h}{f} \left(\frac{n}{2} - c \right) = 107.5 + \frac{20}{15} \left(\frac{60}{2} - 23 \right)$$

$$\Rightarrow m = 107.5 + \frac{20}{15} (30 - 23) = 107.5 + \frac{20}{15} \times 7 = 107.5 + 9.333 = 116.833 \text{ kWh.}$$

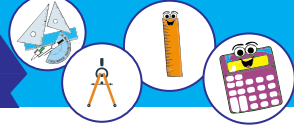
یہاں، $m=L$ جماعت کا $L=107.5$ ، $m=h$ جماعت کا جماعتی وقفہ $m=f$ جماعت کا تعدد $=15$ اور c وسطانیہ جماعت سے پہلی والی جماعت کا مجموعی تعدد $=23$

چوتھائیاں (Quartiles):

چوتھائی کی وضاحت کرنے کے لیے ترتیب شدہ مواد کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ مواد کی حد میں تین چوتھائیاں ہیں جو مواد کو 4 برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں۔

پہلی چوتھائی (یا چلی) ترتیب شدہ مواد کو 25% تا 75% تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔ غیر گروہی مواد کے لیے:

$$Q_1 = \left(\frac{n+3}{4} \right) \text{ واں مشاہدہ، اگر } \frac{n}{4} \text{ صحیح عدد (Integer) نہ ہو تو بصورت دیگر}$$



$$(2) \quad Q_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n}{4} + 1 \right) \text{واں مشاہدہ} + \left(\frac{n}{4} \right) \text{واں مشاہدہ} \right] \text{صحیح عدد ہو۔}$$

غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیے ہم (1) اور (2) کو بھی استعمال کرتے ہیں۔ مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیے ہم استعمال کرتے ہیں:

$$Q_1 = L + \frac{h}{f} \left(\frac{n}{4} - c \right) \text{ ہی}$$

یہاں L، سے مراد LCB ہے، h چوڑائی ہے، $Q_1 f$ جماعت کا تعدد ہے اور $Q_1 C$ جماعت سے پہلے والی جماعت کا مجموعی تعدد ہے۔ Q_1 جماعت وہ جماعت ہے جو $\left(\frac{n}{4} \right)^{th}$ ویں مشاہدہ پر مشتمل ہے۔ دوسری (یا درمیانی) چوتھائی Q_2 ترتیب شدہ مواد کو 50% تا 50% کے تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔ یہ مواد کے وسطانیہ کے برابر ہے۔

تیسری (یا اوپری) چوتھائی Q_3 ترتیب شدہ مواد کو 75% تا 25% تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔ غیر گروہی مواد کے لیے:

$$(4) \quad Q_3 = \left(\frac{3n+1}{4} \right) \text{واں مشاہدہ، اگر } \frac{30}{4} \text{ صحیح عدد نہ ہو}$$

بصورت دیگر

$$(5) \quad Q_3 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3n}{4} + 1 \right) \text{واں مشاہدہ} + \left(\frac{3n}{4} \right) \text{واں مشاہدہ} \right] \text{صحیح عدد ہو۔}$$

غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیے، مساوات (4) اور (5) کو مجموعی تعددات کے ساتھ استعمال کیا جاتا ہے۔

$$(6) \quad Q_3 = L + \frac{h}{f} \left(\frac{3n}{4} - c \right) \text{ لیے}$$

جہاں L، سے مراد LCB ہے، h چوڑائی ہے، $Q_3 f$ جماعت کا تعدد ہے جو کہ $\left(\frac{3n}{4} \right)^{th}$ ویں مشاہدہ پر مشتمل ہوتا ہے اور $Q_3 C$ جماعت سے پہلے والی جماعت کا مجموعی تعدد ہے۔

مثال 1: دیئے گئے ڈیٹا سیٹس میں پچلی اور اوپری چوتھائیاں معلوم کریں۔

(i) 1000, 1200, 1600, 1500, 1200 (ii) 32, 36, 36, 37, 39, 41, 45, 46

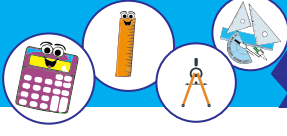
حل: (i) ترتیب شدہ ڈیٹا سیٹ یہ ہے: 1000, 1200, 1200, 1500, 1600 یہاں $Q_1 = 5 = n$ کے لیے:

$$1.25 = \frac{5}{4} = \frac{n}{4} \text{ صحیح عدد نہیں ہے۔}$$

$$\text{اس لیے } Q_1 = \left(\frac{n+3}{4} \right) \text{واں} = 2 \text{واں مشاہدہ} = 1200$$

$$Q_3 \text{ کے لیے } \frac{3n}{4} = \frac{3 \times 5}{4} = 3.75 \text{ صحیح عدد نہیں ہے۔}$$

$$\text{اس لیے } Q_3 = \left(\frac{3n+1}{4} \right) \text{ویں} = 4 \text{ویں مشاہدہ} = 1500$$



(ii) مواد پہلے ہی ترتیب شدہ شکل میں ہے اور یہاں $Q_1 8 = n$ کے لیے $2 = \frac{8}{4} = \frac{b}{4}$ صحیح عدد ہے

$$36 = \frac{1}{2} [36 + 36] = Q_1 \text{ اس لیے } [2 \text{ واں } + 3 \text{ واں } \frac{1}{2}] \text{ مشاہدہ}$$

$$Q_3 \text{ کے لیے } 6 = \frac{3 \times 8}{4} = \frac{3n}{4} \text{ صحیح عدد}$$

$$43 = \frac{1}{2} [41 + 45] = Q_3 \text{ اس لیے } [6 \text{ واں } + 7 \text{ واں } \frac{1}{2}] \text{ مشاہدہ}$$

مثال 2:

80 خاندانوں میں بچوں کی تعداد کی نگلی اور اوپری چوتھائیاں معلوم کریں۔

بچوں کی تعداد	1	2	3	4	5	6
خاندانوں کی تعداد	8	10	10	25	20	7

حل:

مواد کو غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے۔ یہاں $n=80$ مندرجہ ذیل جدول کا استعمال کرتے ہوئے مجموعی تعدادات کو اس معلوم کرتے ہیں۔

x	f	مجموعی تعداد
1	8	8
2	10	18
3	10	28 جماعت - Q_1
4	25	53
5	20	73 جماعت - Q_3
6	7	80

$$Q_1 \text{ کے لیے: } \frac{n}{4} = \frac{80}{4} = 20 \text{ (صحیح عدد)}$$

اس لیے Q_1 20 ویں اور 21 ویں مشاہدات کا اوسط ہے۔

$$Q_1 = \frac{1}{2} (3 + 3) = 3.$$

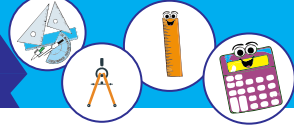
$$\frac{3n}{4} = \frac{3 \times 80}{4} = 60 \text{ یہ دونوں مجموعی تعدادات 28 کی جماعت میں آتے ہیں}$$

Q_3 کے لیے:

$$Q_3 = \frac{1}{2} (5 + 5) = 5. \text{ اس لیے } 60 \text{ واں اور } 61 \text{ واں مشاہدات مجموعی تعداد 73 کی جماعت میں ہیں اس لیے}$$

مثال 3:

ذیل میں دیئے گئے 100 طلباء کے وزن (کلوگرام میں) ہیں۔ ان وزنوں کی چوتھائیاں معلوم کریں۔



وزن (کلوگرام میں)	70-74	75-79	80-84	85-84	90-94
طلباء کی تعداد	10	24	46	12	8

حل: یہاں $n=100$, $h=5$ اور مواد کو مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے۔ سب سے پہلے ہم جماعتی حدود اور مجموعی تعدلات کا شمار کریں گے۔

حسابات کا خلاصہ درج ذیل جدول میں کیا گیا ہے۔

مجموعی تعدلات	f	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی حدود
10	10	69.5-74.5	70-74
Q_1 (جماعت) 34	24	74.5-79.5	75-79
m (اور Q_3 جماعت) 80	46	79.5-84.5	80-84
92	12	84.5-89.5	85-89
100	8	89.5-94.5	90-94

Q_1 کے لیے $\frac{n}{4} = \frac{100}{4} = 25$ واں مشاہدہ مجموعی تعداد 34 والی جماعت میں آتا ہے۔

اس لیے: Q_1 - جماعت 75-79 ہے۔

$$Q_1 = L + \frac{h}{f} \left(\frac{n}{4} - c \right) = 74.5 + \frac{5}{24} (25 - 10) = 77.625 \text{ کلوگرام}$$

$$Q_2 = m \text{ کے لیے } \frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

50 واں مشاہدہ مجموعی تعداد 80 والی جماعت میں آتا ہے۔ اس لیے: m جماعت 80-84 ہے۔

$$\frac{3n}{4} = \frac{3 \times 100}{4} = 75 \text{ اس لیے: } Q_3 \text{ } m = L + \frac{h}{f} \left(\frac{3n}{4} - c \right) = 79.5 + \frac{5}{46} (75 - 34) = 81.239 \text{ کلوگرام}$$

75 واں مشاہدہ مجموعی تعداد 80 والی جماعت میں آتا ہے۔

اس لیے: Q_3 - جماعت وہی ہے جو کہ m - جماعت ہے، جو 80-84 ہے۔ اس جماعت میں:

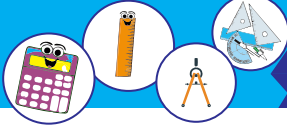
$$Q_3 = L + \frac{h}{f} \left(\frac{3n}{4} - c \right) = 79.5 + \frac{5}{46} (75 - 34) = 83.956 \text{ کلوگرام}$$

نوٹ:

چوتھائیاں فطرت میں درجے کے حساب سے اہمیت رکھتی ہیں جبکہ مشاہدات کی تعداد ایک ہی رہتی ہے ان کے درجے تبدیل نہیں ہوتے، مثال کے طور پر ترتیب شدہ مواد کے لیے $n = 10$

$$Q_1 \text{ تیسرا مشاہدہ [پانچواں + چھٹا مشاہدہ]} = \frac{1}{2} Q_2 = m$$

اور Q_3 آٹھواں مشاہدہ



10 مشاہدات کے ساتھ کوئی ترتیب شدہ ڈیٹا سیٹ ان درجوں کی پیروی کرے گا، جیسا کہ

$$Q_1 = 5, m = 10, Q_3 = 15 \quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 \quad a.$$

$$Q_1 = 12, m = 13.5, Q_3 = 20. \quad 10, 12, 12, 13, 17, 20, 20, 20, 21, 25 \quad b.$$

$$Q_1 = 1, m = 12, Q_3 = 17. \quad 1, 1, 1, 3, 12, 12, 13, 17, 19, 30 \quad c.$$

عادیہ (Mode): مواد میں سب سے زیادہ آنے والے مشاہدے کو عادیہ کہا جاتا ہے۔ عادیہ "اکثریت" ہی اختیار ہے۔ "اصول پر انحصار کرتا ہے۔ عادیہ کو مقداری اور خاصیتی مواد دونوں کے لیے شمار کیا جاسکتا ہے۔ بغیر عادیہ والے مواد کو غیر موڈل (Non-modal) کہتے ہیں، ایک عادیہ والے کو یونی موڈل (Uni modal) کہتے ہیں، اور دو یا زیادہ عادیہ والے کو ملٹی موڈل (multi model) کہتے ہیں۔

غیر گروہی مواد کے لیے، مشاہدات جو دوسروں کے مقابلے میں کثرت سے ہوتے ہیں، اگر کوئی ہیں تو انہیں عادیہ کے طور پر کہا جاتا ہے۔ غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیے، عادیہ سب سے زیادہ تعداد کے ساتھ مشاہدہ (جماعت) ہے، اگر دو یا دو سے زیادہ جماعتوں میں سب سے زیادہ تعداد برابر (tie) ہے، تو مواد ملٹی موڈل ہے اور اسی اعلیٰ ترین تعداد والے تمام مشاہدات عادیہ ہیں۔

مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مدد کے لیے، سب سے زیادہ تعداد والی جماعت کو عادیہ جماعت کہا جاتا ہے، اور عادیہ جماعت میں ہوتا ہے، عادیہ جماعت (M-class) میں عادیہ (M) کو معلوم کرنے کا کلیہ یہ ہے: $M = L + \frac{(f_m - f_{m-1}) \times h}{2f_m - f_{m-1} - f_{m+1}}$ جہاں LCB، L ہے، چوڑائی ہے اور f_m - M جماعت کا تعداد ہے f_{m-1} اور f_{m+1} بالترتیب M جماعت سے بالکل پہلے اور بعد کی جماعتوں کے تعداد ہیں۔

مثال 1: درج ذیل ڈیٹا سیٹس میں عادیہ معلوم کریں:

$$(i). 75, 76, 80, 80, 82, 82, 82, 85$$

$$(ii). 13, 14, 15, 11, 16, 10, 19, 20, 18, 17$$

$$(iii). 1.49, 1.50, 1.51, 1.50, 1.48, 1.51$$

$$(iv). 1, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 6, 1, 10$$

$$(v). C+, A, B, B, B+, C, B, A, A+, C \text{ (درجات)}$$

$$(vi). \text{اچھا، ناقص، پھیکا، اچھا، منصفانہ، منصفانہ (درجہ بندی)}$$

حل:

(i) عادیہ = 82 کیونکہ یہ مواد میں 3 بار آیا ہے جو کہ کسی بھی دوسرے مشاہدے سے زیادہ ہے۔

(ii) مواد کا کوئی عادیہ نہیں ہے، یہ غیر عادیہ مواد ہے۔

(iii) دو عادیہ ہیں: 1.50 اور 1.51 کیونکہ یہ یکساں طور پر دوسروں سے زیادہ آرہے ہیں۔

(iv) مواد ٹرائی موڈل ہے۔ تین عادیہ یہ ہیں: 2، 5 اور 9 (v) درجہ B سب سے زیادہ ہرایا گیا ہے لہذا عادیہ درجہ B ہے۔

(vi) مواد کے دو عادیہ ہیں: "اچھا" اور منصفانہ کیونکہ یہ یکساں طور پر سب سے زیادہ دہرائے گئے ہیں۔

مثال 2: 45 خاندانوں کے مواد سے ایک خاندان کے پاس موجود موبائلز کی عادیہ تعداد معلوم کریں۔

موبائلوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6	7
خاندانوں کی تعداد	1	7	15	12	5	2	2	2

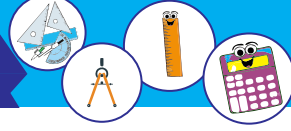
حل: مواد کو غیر مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے، یہاں 15 سب سے زیادہ تعداد ہے اور اس کا تعلق 2 جماعت سے ہے۔ لہذا فی

خاندان موبائلز کی عادیہ تعداد 2 ہے۔

مثال 3: ذیل میں دیئے گئے 30 طلباء کے خون کے گروپوں میں سے عادیہ بلڈ گروپ معلوم کریں۔

بلڈ گروپ	A+	B+	AB+	O+	A-	B-	AB-	O-
طلباء کی تعداد	6	5	3	7	3	1	2	3

حل: عادیہ بلڈ گروپ O+ ہے کیونکہ یہ سب سے زیادہ تعداد "7" سے وابستہ ہے۔



مثال 4: مندرجہ ذیل مواد 40 صارفین کی اطمینان کی سطح کے عادیہ کا حساب لگائیں۔

بہت	کسی حد تک	بہت نیس	بہت نیس	بالکل نیس	اطمینان کی سطح
18	6	5	8	3	صارفین کی تعداد

حل: عادیہ اطمینان کی سطح "بہت مطمئن" ہے کیونکہ یہ سب سے کثرت سے آئی ہے۔

مثال 5: مواد کا استعمال کرتے ہوئے 60 دنوں کے ایک دکان کی عادیہ بجلی کی کھیت KWH میں معلوم کریں۔

بجلی کی کھیت	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: مواد کو مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے، سب سے زیادہ تعدد 45 ہے عادیہ۔ جماعت 108-127 ہے۔ حقیقی جماعتی حدود کو مندرجہ ذیل جدول میں شمار کیا گیا ہے۔

تعدد	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی حدود
10	67.5-87.5	68-87
13	87.5-107.5	88-107
15	107.5-127.5	108-127
10	127.5-147.5	128-147
4	147.5-167.5	148-167
6	167.5-187.5	168-187
2	187.5-207.5	188-207

$$h = 20, L = 107.5, f_M = 15, f_{M-1} = 13, f_{M+1} = 10$$

$$\text{عادیہ} = M = L + \frac{(f_M - f_{M-1}) \times h}{2f_M - f_{M-1} - f_{M+1}}$$

$$M = 107.5 + \frac{(15 - 13) \times 20}{2(15) - 13 - 10} = 107.5 + \frac{40}{30 - 23}$$

$$M = 107.5 + 5.71428 = 113.21428 \text{ kWh}$$

نوٹ: مثال 5 میں مسلسل تعددی تقسیم یونی موڈل ہے کیونکہ صرف ایک جماعت کی سب سے زیادہ تعدد ہے۔ درج ذیل مسلسل تعددی تقسیم ہے جو کہ ریل کے قطر کی نمائندگی کرتی ہے۔ 24 مقامات پر ناپا گیا قطر بائی ماڈل ہے۔

قطر (لی میٹر میں)	2.10-2.13	2.14-2.17	2.18-2.21	2.22-2.25	2.26-2.29	2.30-2.33	2.34-2.37
مقامات کی تعداد	4	5	4	4	5	1	1

دو عادیہ جماعتیں یہ ہیں "2.14-2.17" اور "2.26-2.29" سب سے زیادہ تعدد "5" کے ساتھ۔ ہر جماعت میں کلیہ استعمال کرتے ہوئے ہم 2.175 لی میٹر اور 2.263 لی میٹر کے متعلقہ قطر حاصل کر سکتے ہیں۔

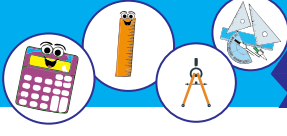
ہندی اوسط (Geometric Mean):

ہندی اوسط میں تمام نمبروں کو یکساں اہمیت دی جاتی ہے ہم نمبروں کو ضرب دے کر ملاتے ہیں اور پھر اس ضرب کا اثر ختم کرنے کے لیے اس ضرب کا n واں جزر نکالتے ہیں۔ اگر اعداد و شمار (تمام مثبت) ہیں تو صرف مقداری اعداد و شمار کی ہندی اوسط (G.M) کی گنتی کرنا معنی خیز ہے۔ اگر $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ یہ n اعداد (تمام مثبت) ہیں تو (1)

$$G.M. = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} = [\prod (x)]^{\frac{1}{n}} \quad (1)$$

یہاں Π ضرب کے لیے بڑا یونانی حرف پائی (Pi) ہے۔ G.M. اگر موجود ہے تو منفرد ہوگی۔

غیر گروہی مواد کے لیے، کلیہ (1) کو G.M. تلاش کرنے کا بنیادی کلیہ کہا جاتا ہے۔ لیکن جب مشاہدات وسعت کے لحاظ سے بڑے ہوتے ہیں، تو ہم (1) کے دونوں طرف لوگار تقسیم لے کر اور خواص کا استعمال کرتے ہوئے حاصل کردہ لوگار تھمک کلیہ استعمال کرتے ہیں، جو کہ یہ ہے:



$$G.M = \text{antilog} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \log x_i}{n} \right] = \text{antilog} \left[\frac{\sum \log x}{n} \right] \quad (2)$$

کلیہ (2) میں G.M اعداد و شمار کے لوگار تھم کے حسابی وسط کا اینٹی لوگار تھم ہے۔ گروہی مواد کے لیے بنیادی کلیہ یہ ہے۔

$$G.M. = \left[(x_1)^{f_1} \times (x_2)^{f_2} \times \dots \times (x_n)^{f_n} \right]^{\frac{1}{\sum f}} = \left[\prod (x)^f \right]^{\frac{1}{\sum f}} \quad (3)$$

اور لوگار تھم کلیہ یہ ہے۔

$$G.M. = \text{antilog} \left[\frac{\sum f \cdot \log x}{\sum f} \right] \quad (4)$$

(3) اور (4) میں $f_1, f_2, \dots, f_n$ جماعتی تعدادات ہیں اور $x_1, x_2, \dots, x_n$ جماعتی نشانات ہیں اور سب مثبت ہیں۔ ان میں سے کوئی بھی تعدد صفر نہیں ہونا چاہیے (4) میں۔

مثال 1: G.M معلوم کریں بنیادی اور لوگار تھم کلیہ استعمال کرتے ہوئے کون سا بہتر ہے اور کیوں؟

- (i). 2, 4, 2, 16 (ii). 1.48, 1.52, 1.47, 1.50 (iii). 1000, 1200, 1600, 1500, 1200

حل: (i) بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے: $G.M. = (2 \times 4 \times 2 \times 16)^{\frac{1}{4}} = (256)^{\frac{1}{4}} = 4$.

$$G.M. = \text{antilog} \left[\frac{\log(2) + \log(4) + \log(2) + \log(16)}{4} \right]$$

$$G.M. = \text{antilog} \left[\frac{0.3010 + 0.6021 + 0.3010 + 1.2041}{4} \right] = \text{antilog} (0.60205) = 3.9999 \approx 4.$$

مشاہدات وسعت میں چھوٹے ہیں، اس لیے بنیادی کلیہ بہتر ہے۔

(ii) بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$G.M. = (1.48 \times 1.52 \times 1.47 \times 1.50)^{\frac{1}{4}} = (4.9604)^{\frac{1}{4}} = 1.4924$$

$$G.M. = \text{antilog} \left[\frac{\log(1.48) + \log(1.52) + \log(1.47) + \log(1.5)}{4} \right]$$

$$G.M. = \text{antilog} \left[\frac{\log(1.48) + \log(1.52) + \log(1.47) + \log(1.5)}{4} \right]$$

$$G.M. = \text{antilog} \left[\frac{0.1703 + 0.1818 + 0.1673 + 0.1761}{4} \right] = \text{antilog} (0.173875) = 1.4924.$$

ایک بار بھر بنیادی کلیہ مناسب ہے کیونکہ مشاہدات وسعت میں چھوٹے ہیں۔

(iii) بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

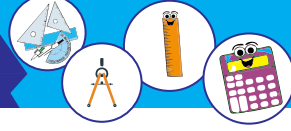
$$G.M. = (1000 \times 1200 \times 1600 \times 1500 \times 1200)^{\frac{1}{5}} = (34560000000000)^{\frac{1}{5}} = 1281.48 \approx 1281.5$$

لوگار تھم کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$G.M. = \text{antilog} \left[\frac{\log(1000) + \log(1200) + \log(1600) + \log(1500) + \log(1200)}{5} \right]$$

$$G.M. = \text{antilog} \left[\frac{3 + 3.0792 + 3.2041 + 3.1761 + 3.0792}{5} \right] = \text{antilog} (3.10772) = 1281.504 \approx 1281.5$$

لوگار تھم کلیہ بہتر ہے کیونکہ لوگار تھم استعمال کرنے سے زیادہ وسعت کو چھوٹی وسعت میں تبدیل کر دیا



مثال 2: درج ذیل اعداد و شمار میں ہندسی اوسط کا استعمال کرتے ہوئے کولڈ ڈرنک کی اوسط مقدار معلوم کریں۔

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
ہفتوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: دیئے گئے مواد کو غیر مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے۔ بنیادی اور لوگار تھمک کلیہ کے مطلوبہ حسابات کو مندرجہ ذیل جدول میں دکھایا گیا ہے

جماعتیں (x)	f	(x) ^f	log(x)	f × log(x)
1.48	2	2.1904	0.1703	0.3406
1.49	7	16.3044	0.1732	1.2124
1.50	5	7.5938	0.1761	0.8805
1.51	5	7.8503	0.1790	0.8950
1.52	1	1.52	0.1818	0.1818
---	Σ f = 20	Π x ^f = 3236.0651	---	Σ f log(x) = 3.5103

بنیادی کلید استعمال کرتے ہوئے:

$$G.M. = \left[\prod (x)^f \right]^{\frac{1}{\sum f}} = (3236.0651)^{\frac{1}{20}} = 1.49796 \approx 1.498 \text{ لیٹر}$$

لوگار تھمک کلید استعمال کرتے ہوئے: $G.M. = \text{antilog} \left[\frac{\sum f \log x}{\sum f} \right] = \text{antilog} \left[\frac{3.5103}{20} \right]$

کولڈ ڈرنک کی مقدار کی ہندسی اوسط 1.498 لیٹر ہے۔

مثال 3: لوگار تھمک طریقہ کرتے ہوئے بجلی کی کھپت کے اعداد و شمار کا ہندسی اوسط معلوم کریں:

بجلی کی کھپت (KWH)	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

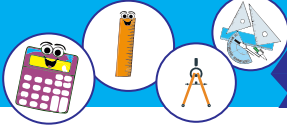
حل: کلیے میں مطلوبہ حسابات درج ذیل جدول میں کیئے گئے ہیں۔

جماعتی عدد	f	جماعتی نشانات (x)	Log (x)	f × log(x)
68-87	10	77.5	1.8893	18.8930
88-107	13	97.5	1.9890	25.8570
108-127	15	117.5	2.0700	31.0500
128-147	10	137.5	2.1383	21.3830
148-167	4	157.5	2.1973	8.7892
168-187	6	177.5	2.2492	13.4952
188-207	2	197.5	2.2956	4.5912
Σ f = 60				Σ f log x = 124.0586

$$G.M. = \text{antilog} \left[\frac{\sum f \log x}{\sum f} \right] = \text{antilog} \left[\frac{124.0586}{60} \right] = \text{antilog} (2.0676) = 116.8422 \text{ kWh. اس لیے}$$

مثال 4: G M کا استعمال کرتے ہوئے تار کے پچھلے حصے کا اوسط قطر معلوم کریں دونوں طریقے استعمال کریں

قطر (میٹر)	2.10-2.13	2.14-2.17	2.18-2.21	2.22-2.25	2.26-2.29	2.30-2.33	2.34-2.37
مقامات کی تعداد	4	5	4	4	5	1	1



حل: مواد کو مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے۔ مطلوبہ حسابات جدول میں درج ہیں۔

جماعتی حدود	جماعتی نشانات (x)	f	x^f	$\log(x)$	$f \times \log x$
2.10-2.13	2.115	4	20.0097	0.3253	1.3012
2.14-2.17	2.155	5	46.4768	0.3334	1.6670
2.18-2.21	2.195	4	23.2134	0.3414	1.3656
2.22-2.25	2.235	4	24.9523	0.3493	1.3972
2.26-2.29	2.275	5	60.9406	0.3570	1.7850
2.30-2.33	2.315	1	2.315	0.3646	0.3646
2.34-2.37	2.355	1	2.355	0.3720	0.3720
		$\sum f = 24$	$\prod x^f = 178967745.4$	---	$\sum f \log x = 8.2526$

بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$G.M = \left[\prod x^f \right]^{\frac{1}{\sum f}} = (178967745.4)^{\frac{1}{24}} = 2.2073 \text{ mm}$$

$$G.M. = \text{antilog} \left[\frac{\sum f \log x}{\sum f} \right] = \text{antilog} \left[\frac{8.2526}{24} \right] = 2.2074 \text{ mm}$$

لوگار تھمک کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

ہم آہنگ اوسط (Harmonic Mean):

ہم آہنگ اوسط (H.M) اعداد و شمار کے معکوس کے حسابی اوسط کا معکوس ہے۔ ہم تمام غیر صفر نمبروں کو ان کے معکوس جمع کر کے ملاتے ہیں اور پھر ان کو n برابر حصوں میں تقسیم کر کے اختلاف کے اثر کو ختم کر دیتے ہیں۔ آخر میں H.M نتیجے کا معکوس ہے۔

H.M کو عام طور پر مقداری مواد کے لیے شمار کیا جاتا ہے، اور یہ ہمیشہ منفرد ہوتا ہے۔

اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ غیر صفر اعداد ہیں تو: غیر گروہی مواد کے لیے H.M معکوس کا "معکوس کا حسابی اوسط"

$$\frac{n}{\sum \left(\frac{1}{x} \right)} = \left[\frac{\sum \left(\frac{1}{x} \right)}{n} \right] = \left[\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \right] = H.M. \quad (1)$$

$$(2) \quad H.M. = \frac{\sum f}{\sum \left(\frac{f}{x} \right)}$$

غیر گروہی مواد کے لیے، اگر x غیر صفر جماعتی نشانات ہیں تو پھر:

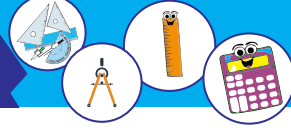
مثال 1: ہر 10 کلو میٹر کے فاصلے کے لیے مایا جانے والی گاڑی کی رفتار کا ہم آہنگ اوسط معلوم کریں۔ رفتاری یہ ہیں: 15 کلو میٹر فی گھنٹہ

30 کلو میٹر فی گھنٹہ، 22 کلو میٹر فی گھنٹہ، 30 کلو میٹر فی گھنٹہ اور 45 کلو میٹر فی گھنٹہ۔

$$H.M. = \frac{n}{\sum \left(\frac{1}{x} \right)} = \frac{5}{\frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45}} = \frac{5}{0.0667 + 0.0333 + 0.0454 + 0.0333 + 0.0222} \quad \text{حل:}$$

$$H.M. = \frac{5}{0.2009} = 24.8880.$$

اس لیے، H.M کا استعمال کرتے ہوئے گاڑی کی اوسط رفتار 24.8880 کلو میٹر فی گھنٹہ ہے۔



مثال 2: کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں) 20 بوتلوں کے لیے دی جاتی ہے۔ H.M. مقدار معلوم کریں۔

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: دیئے گئے مواد کو غیر مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے۔

$$H.M. = \frac{\sum f}{\sum \left(\frac{f}{x} \right)} = \frac{2 + 7 + 5 + 5 + 1}{\frac{2}{1.48} + \frac{7}{1.49} + \frac{5}{1.50} + \frac{5}{1.51} + \frac{1}{1.52}}$$

$$H.M. = \frac{20}{1.3513 + 4.6980 + 3.3333 + 3.3112 + 0.6579} = \frac{20}{13.3517} = 1.4979 \text{ لیٹر}$$

مثال 3: دھاتوں کے 50 بلاکس کی کمیت (کلوگرام میں) کا H.M. معلوم کریں۔

کمیت (کلوگرام)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.0	8.9-9.1
بلاکس کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل: مواد کو مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے۔

$$H.M. = \frac{\sum f}{\sum \left(\frac{f}{x} \right)} \text{ اس لیے:}$$

جماعتی حدود	جماعتی نشانات (x)	f	$\frac{f}{x}$
7.1-7.3	7.2	3	0.4167
7.4-7.6	7.5	5	0.6667
7.7-7.9	7.8	9	1.1538
8.0-8.2	8.1	14	1.7284
8.3-8.5	8.4	11	1.3095
8.6-8.8	8.7	6	0.6896
8.9-9.1	9.0	2	0.2222
کل	---	50	6.1869

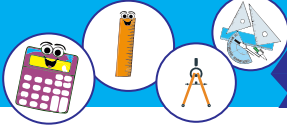
$$H.M. = \frac{50}{6.1869} = 8.0816 \text{ Kg.}$$

درج ذیل جدول میں مطلوبہ رقوم کا حساب کرتے ہوئے، ہمارے پاس ہے:

مشق 22.3

1- درج ذیل میں H.M, GM, AM وسطانیہ اور عادیہ معلوم کریں (جہاں بھی ممکن ہو):

- 3.2, 6, 10, 12, 12, -20, 25, 28, 30.8
- 14, 12, 18, 19, 0, -19, -18, -12, -14
- 6.5, 11, 12.3, 9, 8.1, 16, 18, 20.5, 25
- 51, 55, 52, 54, 58, 60, 61, 62, 52, 57, 52, 64
- A+, O-, AB+, O+, AB+, AB-, B+, AB+, O+, A- (بلڈ گروپس)
- شمال، جنوب، مشرق، مغرب (سمتیں)
- B+, B-, A+, A-, C+, B+, A-, B-, C- (گریڈز)



2- دس کارکنوں کی روزانہ کی کمائی روپے میں یہ ہے: 188, 170, 172, 125, 115, 195, 181, 190, 195, A.M (تعریف اور انحراف کے لحاظ سے $A=50$ اور $G.M.(h=10)$ کے ساتھ)،
G.M (بذریعہ تعریف اور لوگارٹھمک طریقے سے)، H.M وسطانیہ اور عادیہ معلوم کریں۔
3-60 لوگوں سے لیے گئے مواد کے لیے کتوں سے اوسط روپیہ، A.M وسطانیہ اور عادیہ معلوم کریں۔

کتوں سے نفرت کرتے ہیں	کتوں کو ناپسند کرتے ہیں	کوئی رائے نہیں	کتوں کو پسند کرتے ہیں	کتوں کو پیار کرتے ہیں	روپیہ
9	13	4	15	20	لوگوں کی تعداد

4- دیا گیا مواد ایک شہر میں لوگوں کے مرنے کی وجوہات ظاہر کرتا ہے۔ لوگوں کے مرنے کی وجہ کا عادیہ معلوم کریں:

دل کا دورہ	نئی	سرطان	کوڈ	ہیضہ	ملیریا	ذیابیطس	نئی	مرنے کی وجوہات
5	2	10	15	2	2	6	10	لوگوں کی تعداد

5- 50% رعایت پر اسٹور میں فروخت ہونے والے جوتوں کے سائز درج ہیں A.M، G.M، H.M، Q_1 ، Q_3 اور وسطانیہ معلوم کریں۔
اور اس دن فروخت ہونے والے جوتوں کے سائز کا عادیہ معلوم کریں۔

9.5	9	8.5	8	7.5	7	6.5	6	5.5	5	جوتوں کا سائز
1	4	11	23	40	60	30	15	5	2	فروخت شدہ جوتوں کی تعداد

6- ایک فیکٹری میں ہزار ملازمین کو یومیہ اجرت (100 روپے میں) دی جاتی ہے AM، GM، HM وسطانیہ، چوتھائیاں اور اجرت کا عادیہ معلوم کریں۔

44	42	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22	یومیہ اجرت (100 روپے میں)
1	6	25	69	139	204	220	175	102	43	13	3	ملازمین کی تعداد

7- پچھلے 50 دنوں کے لیے کمپنی کے ذریعے کمائے گئے منافع کا خلاصہ ذیل میں دیا گیا ہے۔ A.M منافع معلوم کریں بذریعہ مختصر اور کوڈنگ طریقے سے۔
 $h = 2000$ ، $A = 11000$ (b)، $h = 2000$ ، $A = 9000$ ، (a)

12000-14000	10000-12000	8000-10000	6000-8000	4000-6000	منافع (روپے)
6	21	11	7	5	دنوں کی تعداد

8- کسی مضمون (50 میں سے) طلباء کے حاصل کردہ نمبر مندرجہ ذیل گروپی جدول میں دیئے گئے ہیں۔ G.M، A.M (براہ راست اور لوگارٹھمک طریقوں کا استعمال کرتے ہوئے)، H.M وسطانیہ اور عادیہ معلوم کریں۔

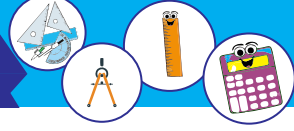
45-49	40-44	35-39	30-34	25-29	مارکس
5	17	35	18	9	طلباء کی تعداد

9- مندرجہ ذیل مواد آلات کی تعداد دکھاتا ہے جس کے نتیجے میں مناسب ریمجز میں مشاہدہ شدہ قدریں ملتی ہیں AM، GM، HM وسطانیہ چوتھائیاں اور عادیہ معلوم کریں۔

12.5-12.9	12.0-12.4	11.5-11.9	11.0-11.4	10.5-10.9	جماعتی حدود
8	12	10	7	2	تعدادات

(ii) 22.3 حسابی اوسط کی خصوصیات کو پہچانیں:

- یہاں ہم A.M کی کچھ خصوصیات پر مثالوں کے ساتھ بحث کرتے ہیں۔
- 1- A.M کے بارے میں غیر گروہی مواد میں مشاہدات کے تمام انحرافات کا مجموعہ صفر ہے۔ A.M-2 ایک مستقل ڈیٹا سیٹ کا وہ خود مستقل ہے۔
 - 3- اگر ایک سیٹ X کا AM $\bar{x}$ ہے پھر $Y = aX + b$ کا $\bar{y} = a\bar{x} + b$ ہے، یہاں a اور b حقیقی اعداد ہیں۔
 - 4- اگر AM = GM = HM تو مواد میں تمام مشاہدات یکساں یا مستقل ہیں۔
 - 5- غیر مستقل مواد کے لیے، $AM > GM > HM$ ۔
 - 6- غیر مستقل مواد کے لیے $(G.M.)^2 \approx (AM)(HM)$ ۔
 - 7- اگر AM = وسطانیہ، تو پھر مواد متشاکل (Symmetric) ہیں، ورنہ غیر متشاکل (Asymmetric) ہیں۔
 - 8- یونی-موڈل متشاکل مواد میں A.M = وسطانیہ = عادیہ۔
- مثال 1: درج ذیل ڈیٹا سیٹس کا حسابی اوسط معلوم کریں۔
- (i). $X = \{19, 19, 19, 19, 19\}$ (ii). $Y = \{3, 4, 6, 1, 6\}$ جہاں $Z = 3Y + 7$



حل: (i) $X = \{19, 19, 19, 19, 19\}$ تمام اقدار کے ساتھ 19 کے برابر ہے، اس لیے $\bar{x} = 19$

(ii) پہلے ہم معلوم کرتے ہیں $\bar{y} = \frac{3+4+6+1+6}{5} = \frac{20}{5} = 4$

اب جیسا کہ $Z = 3Y + 7$ اس لیے $\bar{z} = 3\bar{y} + 7 = 3(4) + 7 = 19$.

ہم یہ تصدیق کر سکتے ہیں کہ جب $Z = 3Y + 7 = \{16, 19, 25, 10, 25\}$ پھر $\bar{z} = 19$ صحیح ہے۔

مثال 2: یہ دکھائیں کہ اس $\{3, 4, 6, 1, 6\}$ میں تمام انحرافات کا مجموعہ اس کے A.M کے بارے میں صفر ہے۔

ثبوت:

فرض کیا کہ $X = \{3, 4, 6, 1, 6\}$ سب سے پہلے $\bar{x}$ معلوم کرتے ہیں، جو کہ یہ ہے $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{20}{5} = 4$

اب $\bar{x}$ کے بارے میں انحرافات یہ ہیں: $(1-4), (6-4), (4-4), (3-4)$ یا صرف $-3, 2, 0, -1$ اور 2 اب ہم $\bar{x}$ کے بارے میں تمام

انحرافات کا مشاہدہ کرتے ہیں: $\sum (X - \bar{x}) = (-1) + (0) + (2) + (-3) + (2) = 0 \Rightarrow \sum (X - \bar{x}) = 0$ دکھا دیا گیا ہے۔

مثال 3: تصدیق کریں کہ $\{19, 19, 19, 19, 19\}$ کے لیے $A.M. = G.M. = H.M. =$ وسطانیہ - عادیہ

حل: دیئے گئے مستقل ڈیٹا سیٹ کے لیے تمام اوسط معلوم کریں یہاں $n = 5$ (طاق)

(i) $A.M. = \frac{19+19+19+19+19}{5} = 19$ تمام اقدار کے ساتھ 19 کے برابر ہے اس لیے $\bar{x} = 19$

(ii) پہلے ہم معلوم کرتے ہیں $G.M. = (19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19)^{\frac{1}{5}} = 19^{\frac{5 \times 1}{5}} = 19$.

(iii) $H.M. = \frac{5}{\frac{1}{19} + \frac{1}{19} + \frac{1}{19} + \frac{1}{19} + \frac{1}{19}} = \frac{5}{\frac{5}{19}} = 19$.

(iv) وسطانیہ... $\left(\frac{5+1}{2}\right) = 3$ واں مشاہدہ = تیسرا مشاہدہ = 19

(v) عادیہ = 19 (سب سے کثرت سے آنے والا مشاہدہ)

مساوات (I) سے (V) تک: ہمارے پاس ہے: $AM = GM = HM =$ وسطانیہ = عادیہ لہذا تصدیق ہوئی۔

مثال 4: A.M اور وسطانیہ کا استعمال کرتے ہوئے یہ دیکھیں کہ اگر مندرجہ ذیل مواد متشاکل / غیر متشاکل ہیں۔

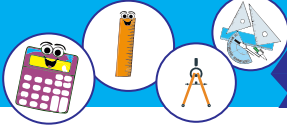
(i). 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10 (ii). 4, 8, 13, 14, 19, 20, 23

حل:

(i) $A.M. = \frac{4+5+6+6+6+7+7+7+7+8+8+8+9+10}{16} = \frac{112}{16} = 7$

وسطانیہ = $\left[\frac{1}{2} \text{ آٹھواں} + \frac{1}{2} \text{ نواں} \right] = \frac{1}{2} [7 + 7] = 7$ مشاہدہ

جیسا کہ $AM =$ وسطانیہ، اس لیے مواد متشاکل ہیں۔



$$A.M = \frac{4+8+13+14+19+20+23}{7} = 14.42$$

(ii) وسطانیہ $\left[\frac{7+1}{2} \right]$ واں مشاہدہ = چوتھا مشاہدہ = 14
جیسا کہ A.M. $\neq$ وسطانیہ، اس لیے مواد غیر متناکل ہیں۔
مثال 5: {4,5,6,6,6,7,7,8} کے لیے تصدیق کریں:

$$A.M. > G.M. > H.M \quad (i)$$

$$(G.M.)^2 \approx (A.M.)(H.M) \quad (ii)$$

$$A.M. = \frac{4+5+6+6+6+7+7+8}{8} = 6.125,$$

$$G.M. = (4 \times 5 \times 6 \times 6 \times 6 \times 7 \times 7 \times 8)^{1/8} = 6.006$$

$$H.M. = \frac{8}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} = 5.879.$$

جیسا کہ $6.125 > 6.006 > 5.879$ اس لیے $A.M. > G.M. > H.M.$ پس (i) کی تصدیق ہوئی۔
جیسا کہ $(G.M.)^2 = 36.072$ اور $(A.M.)(H.M.) = 36.008$ اس لیے $(G.M.)^2 \approx (A.M.)(H.M.)$ پس (ii) کی تصدیق ہوئی۔

(iii) 2.23 وزنی اوسط اور متحرک اوسط کا حساب لگائیں:

(a) وزنی اوسط:

جب اعداد و شمار میں کچھ مشاہدات دوسروں کے مقابلے میں زیادہ اہم ہوتے ہیں، تو ہم اوسط کو معلوم کرنے کے لیے سب کو برابر وزن (نسبتاً اہمیت) نہیں دے سکتے۔ وہ اوسط جو مشاہدات کی نسبی اہمیت / وزن کی استعمال کرتے ہوئے معلوم کی جائے اسے وزنی اوسط کہا جاتا ہے۔ اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ مواد میں مشاہدات سے متعلقہ اعداد ہیں اور $w_1, w_2, \dots, w_n$ ان کے متعلقہ وزن ہیں، تو پھر ان کے وزنی A.M., G.M. اور H.M. یہ ہیں۔

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum w x}{\sum w},$$

$$G_w = \text{antilog} \left[\frac{\sum w \log x}{\sum w} \right]$$

$$H_w = \frac{\sum w}{\sum \left(\frac{w}{x} \right)}$$

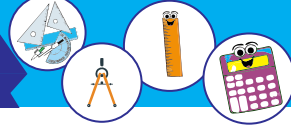
مثال: سوشل سائنسز کے ڈپلومہ کورس میں طالب علم کے نمبر ہر ایک مضمون کے لیے دیئے جاتے ہیں جو متعلقہ وزن کے ساتھ پڑھائے جاتے ہیں۔

مضمون	انگریزی	فرانسیسی	تاریخ	سائنس	ریاضی
نمبرز	73	82	60	62	57
اوزان	4	3	2	1	1

وزنی اوسط معلوم کریں۔

$$H_w = \frac{\sum w}{\sum \left(\frac{w}{x} \right)}, \quad G_w = \text{antilog} \left[\frac{1}{\sum w} (\sum w \log x) \right] \quad \text{اور} \quad \bar{x}_w = \frac{\sum x w}{\sum w}$$

حل: کلیات یہ ہیں:



$$\bar{x}_w = \frac{777}{11} = 70.6 \text{ نمبر}$$

$$G_w = \text{anti log} \left[\frac{1}{11} \times 20.2993 \right]$$

$$G_w = \text{antilog}(1.8454) = 70.04 \text{ نمبر}$$

$$H_w = \frac{11}{0.1583} = 69.5 \text{ نمبر}$$

مطلوبہ حساب ہم مندرجہ ذیل جدول میں کرتے ہیں:

x	w	x.w	$\frac{w}{x}$	log x	w.log x
73	4	292	0.0548	1.8633	7.4532
82	3	246	0.0366	1.9138	5.7414
60	2	120	0.0333	1.7782	3.5564
62	1	62	0.0161	1.7924	1.7924
57	1	57	0.0175	1.7559	1.7559
جمع	11	777	0.1538	---	20.2993

نوٹ:

مثال 1: میں، غیر وزنی اوسط یہ ہیں: $\bar{x} = 66.8$, $G.M. = 66.17$ اور $H.M. = 65.58$ جو کہ وزنی اوسط سے کم ہیں وزنی اوسط نمبر انہم کو سز کو زیادہ حصہ دیے کر طالب علم کی اوسط کارکردگی کو بہترین انداز میں بیان کرتے ہیں۔

(B) متحرک اوسط:

جب ہم وقت کے مقررہ وقفوں (دنوں / مہینوں / سالوں وغیرہ میں) پر دلچسپی کے متغیر کے اوسط رویے کی جانچ کرنا چاہتے ہیں تو یہ ضروری ہے کہ اوسط میں تبدیلی کو ٹریک کیا جائے جیسا کہ وقت مخصوص ادوار کے لیے آگے بڑھتا ہے۔ اس صورت میں وقت کے مخصوص / دپار / وقفوں کی اوسط وقت کے بڑھنے کے ساتھ ساتھ تبدیل ہوتی رہی ہے اور اسے متحرک اوسط کہا جاتا ہے۔ ایک طاق مدتی حرکت پذیری اوسط کی صورت میں، ہم متحرک اوسط کو صرف مخصوص مدت کے درمیانی سیلز (CELLS) پر رکھتے ہیں اور باقی سیلز خالی رکھتے ہیں۔ حرکت پذیری اوسط کی جگہ کا تعین پہلے سے موجود سیلز پر کیا جانا چاہیے۔ ایک جفت مدتی حرکت پذیری اوسط کی صورت میں، ہم درمیانی دو سیلز کا اوسط رکھتے ہیں۔ اس طرح پلیسمنٹ پہلے سے موجود سیلز پر کی جاسکتی ہے۔

مندرجہ ذیل مثالوں کا استعمال کرتے ہوئے عمل کو واضح کیا گیا ہے۔

مثال 1: مواد پچھلے سال کے لیے روپے / ماہ میں ایک شے کی ماہانہ قیمت کا خلاصہ کرتا ہے۔

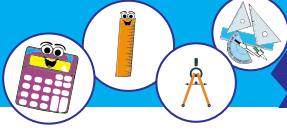
ڈسمبر	نومبر	اکتوبر	ستمبر	اگست	جولائی	جون	مئی	اپریل	مارچ	فروری	جنوری	ماہ
330	289	307	220	200	150	139	108	102	91	87	180	قیمت (روپے / ماہ)

حساب لگائیں (I) ماہ 3 (II) ماہ 5 (III) ماہ 4 کی متحرک اوسط

حل: (i) پہلے ہم مسلسل 3 مہینوں پر غور کر کے 3 مہینوں کی متحرک اوسط کا حساب لگاتے ہیں: جنوری سے مارچ، فروری سے اپریل، مارچ سے مئی اور اسی طرح آخری 3 ماہ کی مدت: اکتوبر سے دسمبر تک۔ یہ 3 ماہ کی مدت کے درمیان مہینے میں رکھے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر، جنوری تا مارچ کی متحرک اوسط فروری کے برابر رکھی گئی ہے۔

3- ماہ کی متحرک اوسط ملحقہ جدول میں خلاصہ کی گئیں ہیں۔

ماہ	قیمت	3 ماہ کی متحرک اوسط
جنوری	180	-----
فروری	87	$(180+87+91)/3=119.33$
مارچ	91	93.33
اپریل	102	100.33
مئی	108	166.33
جون	139	132.33
جولائی	150	163
اگست	200	190
ستمبر	220	242.33
اکتوبر	307	272
نومبر	289	308.66
دسمبر	330	-----



ماہ	قیمت	5 ماہ کی متحرک اوسط
جنوری	180	-----
فروری	87	-----
مارچ	91	$(180+87+91+102+108)/5=113.6$
اپریل	102	105.4
مئی	108	118
جون	139	139.8
جولائی	150	163.4
اگست	200	203.2
ستمبر	220	233.2
اکتوبر	307	269.2
نومبر	289	-----
دسمبر	330	-----

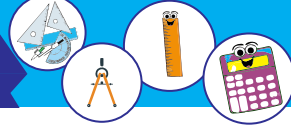
(ii) 5 مہینوں کی متحرک اوسط کے لیے، ہم جنوری سے مئی، فروری سے جون، ... اور اگست سے دسمبر تک ہر بار لگاتار 5 مہینوں پر غور کرتے ہیں متحرک اوسط کو ملحقہ جدول میں دکھایا گیا ہے۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس طرح کے کل 18 مکانات ہو سکتے ہیں پہلے اور آخری دو سیلز خالی چھوڑ دیئے گئے ہیں۔ 5 ماہ کی متحرک اوسط درمیانی مہینوں میں رکھی گئی ہے۔

(iii) 4 ماہ کی متحرک اوسط کے لیے، ہم جنوری سے اپریل، فروری سے مئی، ستمبر سے دسمبر تک ہر بار مسلسل 4 مہینوں کے گروہوں پر غور کرتے ہیں۔

ابتدائی طور پر اوسطوں کو 4 مہینوں کے درمیان میں رکھا جاتا ہے، پھر دو 4 ماہ کی اوسطوں کے ہر جوڑے کا مزید اوسط کیا جاتا ہے تاکہ مطلوبہ 4 ماہ کی درمیانی متحرک اوسط حاصل کی جاسکے۔

نتیجہ کا خلاصہ درج ذیل جدول میں کیا گیا ہے۔ ہمیں جفت مدت گروہ کے لیے ہمیشہ دو کام شامل کرنے ہوں گے۔

ماہ	قیمت	4 ماہ کی متحرک اوسط (ابتدائی)	4 ماہ کی متحرک اوسط (درمیانی)
جنوری	180		-----
فروری	87		-----
مارچ	91	115	
اپریل	102	97	106
مئی	108	110	103.5
جون	139	124.75	117.375
جولائی	150	149.25	137
اگست	200	177.25	163.25
ستمبر	220	219.25	198.25
اکتوبر	307	254	236.625
نومبر	289	286.5	270.25
دسمبر	330		-----



نوٹ:

سال کے 12 مہینوں کے لیے اوسط قیمت (حسابی اوسط) 183.58 روپے فی مہینہ کے برابر ہے۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ قیمتیں مستقل نہیں ہیں اور 3، 4، 5 مہینوں کی متحرک اوسط سال بھر کے متعلقہ ادوار میں تغیرات کا بہتر خلاصہ کرتی ہے۔

(iv) 22.3 وسطانیہ، چوتھائی اور عادیہ کا تخمینہ گراف سے لگائیں:

گراف کے لحاظ سے وسطانیہ اور چوتھائیاں کا پتہ لگانے اور اندازہ لگانے کے لیے، ہم مواد کا اوگیو (مجموعی تعددی کثیر الاضلاع) استعمال کرتے ہیں۔ اوگیو میں وسطانیہ، نچلی چوتھائی (Q_1) اور اوپری چوتھائی (Q_3) صرف اوگیو پر نکات کے X کو آرڈینیٹس ہیں جن کے y کو آرڈینیٹس (مجموعی تعددات) بالترتیب $\frac{n}{2}$ ، $\frac{n}{4}$ اور $\frac{3n}{4}$ ہیں۔

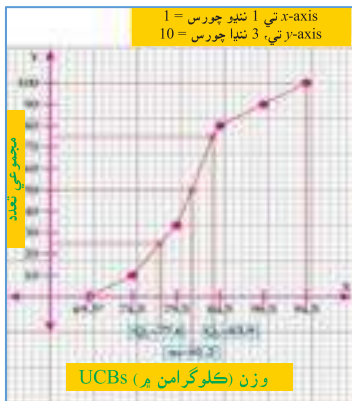
گراف کے لحاظ سے، عادیہ (اگر یہ موجود ہے) کو تلاش کرنے اور اندازہ لگانے کے لیے ہم مواد کا کالمی نقشہ استعمال کرتے ہیں۔ عادیہ جماعت وہ ہے جس لیے مستطیل کی اونچائی سب سے زیادہ ہے، اور اس کلاس میں عادیہ دو قطعہات کے ملانے والے نقطے کا X کو آرڈینیٹ ہے۔ پہلی قطعہ مستطیل کی بائیں چوٹیوں کو جوڑ کر تیار کیا جاتا ہے جو کہ عادیہ جماعت اور اس کے بعد کی جماعت سے مطابقت رکھتا ہے۔ دوسری قطعہ مستطیل کی دائیں چوٹیوں کو جوڑ کر تیار کیا جاتا ہے جو کہ عادیہ جماعت اور اس سے پہلے والی جماعت سے مطابقت رکھتا ہے۔ نقطہ تقاطع سے X محور تک عمود اسے عادیہ کے مقام پر ملاتا ہے یہ طریقہ کار مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند مواد کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

مثال 1: گراف کے لحاظ سے وسطانیہ، چوتھائیاں اور عادیہ وزن (کلوگرام میں) تلاش کریں اور تخمینہ لگائیں۔

اوزان (کلوگرام میں)	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94
طلباء کی تعداد	10	24	46	12	8

مجموعی تعددات	f	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی حدود
10	10	69.5-74.5	70-74
34	24	74.5-79.5	75-79
80	46	79.5-84.5	80-84
92	12	84.5-89.5	85-89
100	8	89.5-94.5	90-94

حل: ہمارے پاس $n=100$ اور دیئے گئے مواد کو مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے سب سے پہلے، محلہ جدول میں جماعتی حدود اور مجموعی تعددات کا حساب لگانا ہے تاکہ ان کی مدد سے ہم اوگیو اور کالمی نقشہ کھینچ سکیں۔



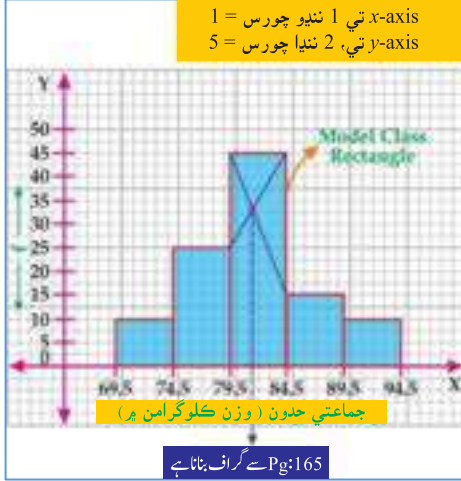
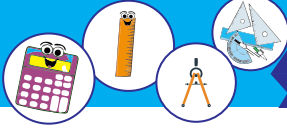
وسطانیہ اور چوتھائیوں کے لیے y محور سے ہم شناخت کرتے ہیں، $\frac{n}{2} = 50$ ، $\frac{n}{4} = 25$ اور $\frac{3n}{4} = 75$ گراف بنانا ہے۔

اس کے بعد ان کے ذریعے اوگیو کی طرف عمود کھینچیں اور پھر اوگیو سے X محور تک وسطانیہ، Q_1 اور Q_3 کی طرف بالترتیب لے جانے میں رہنمائی کرتا ہے۔ ہم اقدار کو اس طرح لکھتے ہیں:

وسطانیہ ≈ 81.2

اور $Q_1 \approx 77.6$

$Q_3 \approx 83.9$



عاده کے لیے، ہم پہلے کالمی نقشہ کھینچتے ہیں، جیسا کہ یہاں دکھایا گیا ہے۔
عاده جماعت سب سے اونچائی والے مستطیل سے مساوی ہے، جیسا کہ
گراف میں نمایاں کیا گیا ہے۔

عاده جماعت اور اس کے بعد جماعت کے مستطیلوں کی بائیں چوٹیوں کو
اور عاده جماعت اور اس سے پہلے والی جماعتوں کے مستطیلوں کی دائیں
چوٹیوں کو دو قطعات کی مدد سے جوڑیں اب نقطہ تقاطع سے X محور تک
ایک عمود بنائیں جو کہ X محور پر 81.4 پر آکر ملتی ہے جہاں ہمیں عاده
ملتا ہے۔ عاده وزن تقریباً 81.4 کلوگرام ہے۔

مشق 22.4

1- اگر $W = \{148, 145, 160, 157, 156, 160, 160, 165\}$ اور $X = \{-2, -2, -2, -2\}$ پھر:

(a) یہ دکھائیں کہ W کے تمام انحرافات کا مجموعہ اس کے A.M کے بارے میں صفر ہے۔

(b) یہ دکھائیں کہ X کے لیے: $H.M = G.M = A.M$ = وسطانیہ = عاده

(c) A.M کا حساب لگائیں $y = 3x$ کے لیے (d) A.M کا حساب لگائیں $Z = 3W - 11$ کے لیے: (e) یہ دکھائیں W کے لیے:

عاده < وسطانیہ < A.M. $H.M. < G.M. < A.M.$

2- چیک کریں کہ اگر $X = \{7, 9, 3, 3, 3, 4, 1, 3, 2, 2\}$ اور $Y = \{2, 1, 4, 4, 4, 6, 5, 7, 1\}$ متشکل ہیں؟

3- ایک خاندان کو درکار ماہانہ اشیاء کا مطلوبہ وزن (کلوگرام) اور قیمت (روپے / کلوگرام) دی گئی ہے۔ H.M G.M A.M کا استعمال کرتے ہوئے وزنی اوسط قیمتیں معلوم کریں۔

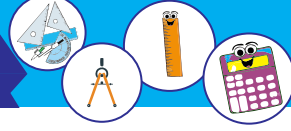
اشیاء	A	B	C	D	E
قیمت (روپے / کلوگرام)	300	200	600	250	650
مطلوبہ وزن (کلوگرام)	25	5	4	8	3

5- کووڈ 19 کی وجہ سے صوبے میں چوٹی کے ہفتے کے لیے نگرانی کی گئی اموات کی تعداد کے درج ذیل مواد سے 2، 3 اور 4 دن کی متحرک اوسط کا حساب لگائیں۔

اتوار	ہفتہ	جمعہ	جمعرات	بدھ	منگل	پیر	دن
310	129	196	188	158	130	102	اموات کی تعداد

6- 11 سال کی فروخت کے لیے 4 اور 5 سال کی اوسط فروخت (ملین روپے میں) کا حساب لگائیں۔

سال	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
فروخت	102	130	158	188	196	259	310	188	196	259	310

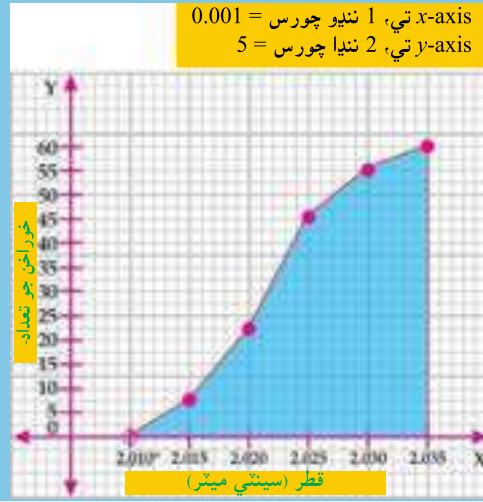
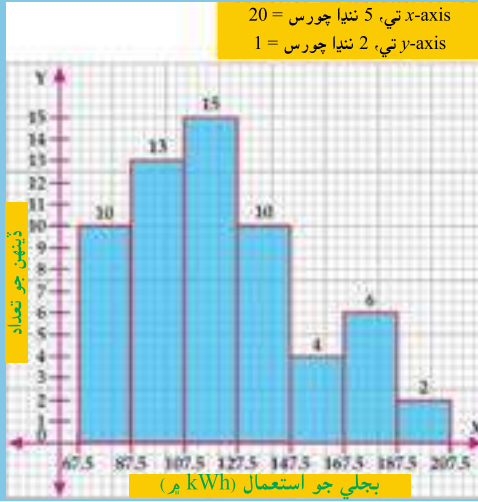


7- مواد میں وسطانیہ، چوتھائیاں اور عادیہ کو گراف کی مدد سے تلاش کریں اور تخمینہ لگائیں۔

اور ٹائم (گھنٹہ فی ہفتہ)	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
دنوں کی تعداد	5	4	7	11	12	8	1

8- درج ذیل میں دکھائے گئے پیمانوں کی تلاش کریں اور تخمینہ لگائیں:

(b) وسطانیہ اور چوتھائیاں۔



22.4 انتشاری پیمانے:

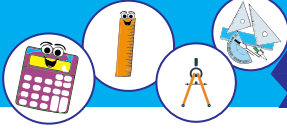
مرکزی رجحان کے پیمانے مواد کے تغیرات اور مستقل مزاجی پر توجہ مرکوز کیے بغیر صرف مواد کے اوسط یا مرکزی رویے پر توجہ مرکوز کرتے ہیں۔ جب مشاہدات اوسط سے بہت دور ہوتے ہیں، تو صرف مرکزی رجحان کے پیمانے ہی مواد کے رویے اور خصوصیات کی مکمل تفہیم کے لیے کافی نہیں ہوتے۔ مثال کے طور پر نیچے دی گئی جدول پانچ مضامین میں دو طلباء کے نمبرز دکھاتی ہے۔

مضامین	I	II	III	IV	V
طالب علم A کے نمبر	90	30	85	50	25
طالب علم B کے نمبر	63	50	60	55	52

اگر ہم A.M کا استعمال کرتے ہوئے ہر طالب علم کے حاصل کردہ اوسط نمبر معلوم کرتے ہیں، تو ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں طلباء کے A.M نمبر 56 ہیں، لیکن کیا دونوں طلباء کی کارکردگی کا موازنہ کرنا کافی ہے؟ جواب ہے نہیں۔ طالب علم A کے نمبروں میں اوسط کے بارے میں زیادہ اتار چڑھاؤ ہوتا ہے، جبکہ طالب علم B کے نمبر اوسط کے قریب ہیں۔ طالب علم B کی کارکردگی طالب علم A کے مقابلے میں زیادہ مستحکم / مستقل / قابل اعتماد ہے جس کی وجہ سے اوسط کے بارے میں اتار چڑھاؤ / تغیرات / بکھرنے / انتشار ہم ذیل میں سیکھے گئے تمام اقسام کا استعمال کرتے ہوئے طلباء کے اوسط نمبروں کا بھی مشاہدہ کر سکتے ہیں:

اوسط	A.M	وسطانیہ	عادیہ	G.M	H.M
طالب علم A کے نمبر	56	کوئی نہیں	تقریباً	49	43 تقریباً
طالب علم B کے نمبر	56	کوئی نہیں	تقریباً	56	56 تقریباً

نمبروں میں فرق کی وجہ سے، طالب علم A کے اوسط بھی ایک دوسرے سے بہت مختلف ہیں۔ طالب علم B کے نمبروں کی اوسط ایک دوسرے کے قریب ہے۔



مستحکم اور مستقل کارکردگی کی وجہ سے ہم طالب علم A کے مقابلے میں آئندہ مضمون میں طالب علم B کے نمبروں کی پیش گوئی کرنے کے لیے بہتر پوزیشن میں ہیں۔

مواد میں تغیر کا علم فیصلہ سازی اور پیش گوئی میں بہت اہمیت رکھتا ہے۔ لہذا، مواد کی بہتر تفہیم کے لیے ڈگری کا حساب لگانا ضروری ہے۔ انتشار کے پیمانے اس بات کے اشارے ہیں کہ مواد مرکزی نقطہ یا اوسط کے بارے میں کس حد تک پھیلا ہوا / بکھرا ہوا ہے۔ انتشاری پیمانے مواد میں اوسط تغیر کی نشاندہی کرتے ہیں یہ زیادہ تر استحکام / مستقل مزاجی / بھروسے کے نقطہ نظر کے سے دو یا زیادہ ڈیٹا سیٹس کا موازنہ کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ مواد میں تغیر / پھیلاؤ زیادہ ہے تو، استحکام / مستقل مزاجی / بھروسہ کم ہے۔ جب ہم صرف ایک ڈیٹا سیٹ میں تغیر / منتشر ہونے میں دلچسپی رکھتے ہیں تو ہم مواد کی اکائیوں میں انتشار کے پیمانوں کی گنتی کرتے ہیں، اور اس کو مطلق انتشار کے پیمانے کہتے ہیں۔ ایک ہی نوعیت / اکائیوں، مشاہدات کی تعداد اور مساوی / قریبی اوسط کے ساتھ دو یا زیادہ ڈیٹا سیٹس کے تغیرات کا بھی مطلق انتشار کے پیمانوں کا استعمال کرتے ہیں، جو مواد کی اکائیوں میں نہیں ہوتے بلکہ متعلقہ تغیر ظاہر کرتے ہیں۔

(i) 22.4 وسعت (Range) کی وضاحت، شناخت اور پیمائش کریں، تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف کا حساب لگائیں:

ہم یہاں انتشار کے کچھ اہم اقدامات پر بات کرتے ہیں۔

(a) وسعت: مواد کی وسعت سے مراد انتہائی مشاہدات کے درمیان کا فرق ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے، وسعت (R) سب سے بڑے مشاہدہ (XL) اور سب سے چھوٹا مشاہدہ (XS) کے درمیان فرق ہے جو کہ،

$$(1) R = x_L - x_S$$

گروہی مواد کے لیے، R فرق ہے آخری گروہ کے UCB یعنی (UCB_F) اور ابتدائی گروہ کے LCB (LCB₁) کے درمیان کا

$$(2) R = UCB_F - LCB_1$$

حکایات (1) اور (2) سے ہم مطلق وسعت کا حساب لگاتے ہیں۔ متعلقہ وسعت کے لیے ہم موازنے کے لیے بالترتیب ہم مساوات

$$(1) \text{ اور } (2) \text{ کو } x_L + x_S \text{ اور } UCB_F + LCB_1 \text{ سے تقسیم کرتے ہیں۔}$$

نوٹ:

- وسعت انتہائی قدروں کے ساتھ مواد کے تغیرات کی صحیح طریقے سے پیمائش نہیں کرتی ہے۔
- وسعت تعدادات اور دیگر پیرامیٹر کا استعمال کیے بغیر صرف مواد میں انتہاؤں کا استعمال کرتی ہے۔

مثال 1: ڈیٹا سیٹس کی وسعت معلوم کریں:

$$X = \{3, 8, 10, 7, 5, 14, 2, 12, 8\}, W = \{27.90, 34.70, 54.40, 18.92, 47.60, 39.68\}$$

$$Z = \{1, 3, 2, 4, 3, 2, 43\}, Y = \{8, 8, 8, 8, 8\}$$

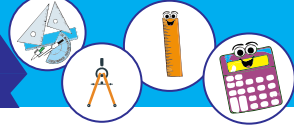
نتیجہ کی وضاحت بھی کریں۔

حل:

ہم جانتے ہیں کہ غیر گروہی مواد کے لیے $R = x_L - x_S$ اس لیے۔

$$R_Z = 43 - 1 = 42, R_Y = 8 - 8 = 0, R_X = 14 - 2 = 12, R_W = 54.40 - 18.92 = 35.48$$

ہم ڈیٹا سیٹ W کے لیے وسعت کی تشریح کر سکتے ہیں کہ: "ڈیٹا سیٹ W میں تمام مشاہدات انتہائی قدروں 18.92 اور 54.40 کے درمیان 35.48 کے فاصلے پھر ہیں۔" ڈیٹا سیٹ X اور W میں مشاہدات انتہائی قدروں کے ارد گرد اچھی طرح پھیلے ہوئے ہیں، لہذا وسعت معنی خیر طور تغیر کی نمائندگی کرتی ہے۔ سیٹ Y کی وسعت صفر ہے کیونکہ تمام مشاہدات ایک جیسے ہیں اور کوئی تغیر نہیں ہے۔ سیٹ Z میں مشاہدات کی اکثریت 1 اور 4 کے آسپاس ہے، لیکن انتہائی قدر 43 کی وجہ سے وسعت 42 کے برابر گمراہ کن ہے۔



مثال 2: وسعت کا استعمال کرتے ہوئے ذیل میں دیئے گئے پانچ مضامین میں دو طلباء کے نمبروں کے فرق کا موازنہ کریں، اور نتائج کی تشریح کریں، کون سا طالب علم زیادہ مسلسل کارکردگی دکھاتا ہے؟

طالب علم A کے نمبر	25	50	85	90	90
طالب علم B کے نمبر	52	55	60	50	63

حل: دونوں طلباء کا مواد غیر گروہی ہے۔ نمبروں کی مطلق وسعت یہ ہیں $R_A = 90 - 25 = 65$ نمبرز اور $R_B = 63 - 50 = 13$ نمبرز لہذا، یہاں $x_L + x_S$ دونوں طلباء کے لیے ایک جیسا ہے، اس لیے متعلقہ وسعت یہاں مفید نہیں ہے۔ طالب علم A کی کارکردگی مطلق وسعت کی بنیاد پر طالب علم B کے مقابلے میں زیادہ تغیرات دکھاتی ہے لہذا، طالب علم B طالب علم A سے زیادہ مستقل کارکردگی کا مظاہرہ کرتا ہے۔

مثال 3: وسعت کا استعمال کرتے ہوئے دو مختلف کمپنیوں کے ذریعے تیار کردہ پانچ ایک جیسے ریٹنگ والی بیٹریوں کی قیمت اور زندگی کے تغیرات کا موازنہ کریں۔

قیمت (ہزار روپوں میں)	30	23	18	13	8
زندگی (سالوں میں)	3.5	2.5	1.8	1.5	1.3

حل:

بیٹریوں کی قیمت (P) اور زندگی (L) کا مواد غیر گروہی ہے، اور فطرت اور اکائیوں میں مختلف ہے $x_L + x_S$ بھی دونوں ڈیٹا سیٹس کے لیے مختلف ہیں۔ لہذا ہم تغیرات کا موازنہ کرنے کے لئے متعلقہ وسعت کا استعمال کرتے ہیں۔

$$R_P \text{ متعلقہ} = \frac{P_L - P_S}{P_L + P_S} = \frac{30 - 8}{30 + 8} = \frac{22}{38} = 0.5789$$

$$R_L \text{ متعلقہ} = \frac{L_L - L_S}{L_L + L_S} = \frac{3.5 - 1.3}{3.5 + 1.3} = \frac{2.2}{4.8} = 0.4583.$$

بیٹریوں کی زندگی میں متعلقہ تغیرات کا موازنہ پانچ مختلف کمپنیوں کی جانب سے تیار کردہ بیٹریوں کی قیمتوں میں نسبتاً زیادہ فرق ہے۔

مثال 4: کراچی اور مورو میں کچھ تصادفی طور پر منتخب خاندانوں کے گروہ بند مواد کا استعمال کرتے ہوئے ایک خاندان کے پاس موجود موبائلز کی تعداد کا موازنہ کریں۔ کیا یہ موازنہ وسعت کی بنیاد پر کرنا کافی ہے؟

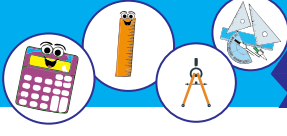
موبائلوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6	7
خاندانوں کی تعداد (کراچی)	1	7	15	12	5	2	2	1
خاندانوں کی تعداد (مورو)	4	13	8	5	2	1	0	1

حل: مواد کو غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ جماعتی وقفہ $d = 1$ کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے تو وسعت یہ ہے:

$$(7 + 0.5) - (0 - 0.5) = UCB_F - LCB_I = R$$

$$8 \text{ موبائل} = 7.5 + 0.5 = R$$

کراچی اور مورو میں ایک خاندان کے پاس موبائلوں کی تعداد ایک جیسے ہے، یعنی 8 موبائل۔ لیکن، وسعت شہروں میں خاندانوں کی تعداد (تعداد) پر غور نہیں کرتی ہے۔ کراچی اور مورو میں ایک وسط خاندان کے پاس موجود موبائلوں کی تعداد میں فرق یقیناً مختلف ہے، لیکن وسعت سے اس کی عکاسی نہیں کی جاسکتی۔



مثال 5: مواد کا استعمال کرتے ہوئے دکان کی بجلی کی کھپت (KWH میں) کی وسعت معلوم کریں:

بجلی کی کھپت	18-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: مواد کو مسلسل جماعتوں کے ساتھ درمیانی وقفہ $d=1$ کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے۔ اس لیے،

$$R = UCB_f - LCB_l = \left[207 + \frac{1}{2} \right] - \left[68 - \frac{1}{2} \right] = 207.5 - 67.5 = 140 \text{ kWh.}$$

یہاں R جماعتوں کی تعداد کو استعمال نہیں کرتا ہے، تو گمراہ کن ہو سکتا ہے۔

(b) تغیر اوسط انحراف اور معیاری انحراف:

پھیلاؤ کی مقدار کو بہتر طریقے سے شمار کرنے کے لیے، ہم تمام مشاہدات کا استعمال کرتے ہیں بجائے صرف انتہائی والوں کے اور ساتھ میں ان کے تعدد بھی تغیر اوسط انحراف اور معیاری انحراف کے تصورات میں اوسط (عام طور پر A.M) کے بارے میں مشاہدہ x کا انحراف ہے، جسکو اس طرح بیان کیا گیا ہے: اوسط کے بارے میں انحراف (1) $D_i = x_i - \bar{x}$

انحراف منفی، مثبت اور صفر ہو سکتے ہیں، لیکن تمام انحرافات کا حساب لگانے کے لیے، صرف ان کو جمع کرنا مفید نہیں ہوگا کیونکہ نتیجہ ہمیشہ صفر ہی رہے گا۔ اس پر قابو پانے کے لیے ہمیں منفی انحراف سے بچنا چاہیے اور یہ دو طریقوں سے کیا جاتا ہے۔ ہم مربعی انحراف یا مطلق انحراف کا استعمال کر سکتے ہیں، جس کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

اوسط کے بارے میں مربعی انحراف (2) $D_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$ اوسط کے بارے میں مطلق انحراف (3) $|D_i| = |x_i - \bar{x}|$ حقیقی نمبر کی مطلق قدر ہمیشہ غیر منفی ہوتی ہے مثال کے طور پر $3 = |3|$ ، $3 = |-22|$ ، $0 = |0|$ ، $1.5 = |1.5|$ یہ دو طریقے ہمیں انتشاری پیمانوں کی وضاحت کرنے کے زیادہ قریب لے جاتے ہیں۔

تغیر (S² یا V) انکے A.M کے بارے میں مشاہدات کے مربع انحراف کا اوسط ہے۔ اوسط (یا مطلق) انحراف (M.D) انکے A.M کے بارے میں مشاہدات کے مطلق انحراف کا اوسط ہے۔ کیونکہ انتشار عام طور پر مواد کی اصل اکائیوں میں معنی خیز ہوتا ہے اور تغیر اسکے مربع اکائیوں میں معلوم کرتا ہے لہذا ہم معیاری انحراف کی وضاحت کے لیے اسکا مربع جزر معلوم کرتے ہیں۔ معیاری انحراف (S یا S.D) تغیر کا مثبت مربع جزر ہے۔ مشاہدات کے ساتھ گروہی مواد کے لیے $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ تو $\bar{x}$ A.M. =

$$Var = s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} \quad (4) \quad M.D. = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} \quad (5)$$

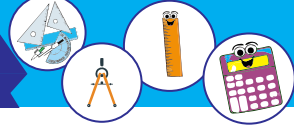
$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \quad \text{یہاں} \quad S.D. = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} \quad (6)$$

گروہی مواد کے لیے، اگر x_i جماعتی نشانات ہیں اور f_i جماعتی تعداد ہیں، تو پھر:

$$Var = s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} \quad (7)$$

$$M.D. = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f} \quad (8)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} \quad \text{یہاں} \quad S.D. = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}} \quad (9)$$



کلیوں (4) سے (9) میں ہم مطلق پیمانوں کا حساب لگاتے ہیں، موازنے کے لیے اعداد و شمار کی اکائیوں کو $\bar{x}$ سے تقسیم کر کے متعلقہ پیمانوں کی گنتی کی جاتی ہے۔

مثال 1: طالب علموں A اور B کے نمبروں کا تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف معلوم کریں۔ کونسا طالب علم زیادہ مسلسل کارکردگی دکھاتا ہے؟

طالب علم A کے نمبر	90	30	85	50	25
طالب علم B کے نمبر	63	50	50	55	52

حل:

دونوں طلباء کے نمبر غیر گروہی مواد کو ظاہر کرتے ہیں۔ سب سے پہلے، ہم اوسط نمبروں کو معلوم کرتے ہیں۔
طالب علم A (x) اور طالب علم B (y) کے لیے، ہمارے پاس ہے:

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{280}{5} = 56 \quad \text{اور} \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{280}{5} = 56$$

جیسا کہ اوسط ایک جیسی ہیں، اس لیے ہم مطلق تغیر کے کلیوں میں تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہیں۔
حسابات درج ذیل جدولوں میں دکھائے گئے ہیں

$$Var_A = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{3670}{5} = 734.$$

$$(M.D.)_A = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} = \frac{126}{5} = 25.2.$$

$$(S.D.)_A = \sqrt{734} = 27.0924.$$

x	x - $\bar{x}$	(x - $\bar{x}$) ²	x - $\bar{x}$
90	34	1156	34
30	-26	676	26
85	29	841	29
50	-6	36	6
25	-31	961	31
مجموع = 280	0	3670	126

$$Var_B = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n} = \frac{118}{5} = 23.6.$$

$$(M.D.)_B = \frac{\sum |y - \bar{y}|}{n} = \frac{22}{5} = 4.4.$$

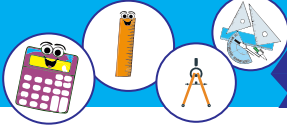
$$(S.D.)_B = \sqrt{23.6} = 4.8578.$$

y	y - $\bar{y}$	(y - $\bar{y}$) ²	y - $\bar{y}$
63	7	49	7
50	-6	36	6
60	4	16	4
55	-1	1	1
52	-4	16	4
مجموع = 280	0	118	22

ہم مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ طالب علم A کے نمبروں میں فرق تمام کلیوں کے لحاظ سے طالب علم B کے نمبروں سے بہت زیادہ ہے، لہذا طالب علم B کی کارکردگی زیادہ مستقل ہے۔

مثال 2: مختلف کمپنیوں کے ذریعے تیار کردہ پانچ ایک جیسی ریٹنگ والی بیٹریوں کی قیمت اور زندگی کے معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہوئے تغیر کا موازنہ کریں نتائج کی تشریح بھی کریں۔

قیمت (ہزار روپوں میں)	8	13	18	23	30
زندگی (سالوں میں)	1.3	1.5	1.8	2.5	3.5



حل: قیمت کا مواد (P) اور زندگی (L) غیر گروہی ہیں اور نوعیت اور اکائیوں میں مختلف ہیں۔ سب سے پہلے ہم اوسط معلوم کرتے ہیں۔

$$\bar{x}_P = \frac{\sum x_P}{n} = \frac{92}{5} = 18.4 \text{ ہزار روپے}$$

$$\bar{x}_L = \frac{\sum x_L}{n} = \frac{10.6}{5} = 2.12 \text{ سال}$$

جیسا کہ اوسط مختلف ہیں، ہم موازنے کے لیے متعلقہ معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہیں۔ P اور L کے لیے حسابات درج ذیل جدولوں میں دکھائے گئے ہیں۔

$$s_P = \sqrt{\frac{\sum (x_P - \bar{x}_P)^2}{n}} = \sqrt{\frac{293.2}{5}} = 7.658 \text{ ہزار روپے}$$

$$s_P = \frac{s_P}{\bar{x}_P} = \frac{7.658}{18.4} = 0.416 \text{ متعلقہ}$$

$$s_L = \sqrt{\frac{\sum (x_L - \bar{x}_L)^2}{n}} = \sqrt{\frac{25.68}{5}} = 2.266 \text{ سال}$$

$$s_L = \frac{s_L}{\bar{x}_L} = \frac{2.266}{2.12} = 1.069 \text{ متعلقہ}$$

(P) قیمت	$x_P - \bar{x}_P$	$(x_P - \bar{x}_P)^2$
8	-10.4	108.16
13	-5.4	29.16
18	-0.4	0.16
23	4.6	21.16
30	11.6	134.56
92 = جمع	0	293.2

(L) زندگی	$x_L - \bar{x}_L$	$(x_L - \bar{x}_L)^2$
1.3	-0.82	1.69
1.5	-0.62	2.25
1.8	-0.32	3.24
2.5	0.38	6.25
3.5	1.38	12.25
10.6 = جمع	0	25.68

بیٹریوں کی زندگی میں متعلقہ معیاری انحراف قیمت سے زیادہ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ بیٹریوں کی قیمت کا مواد بیٹریوں کی زندگی کے مواد سے زیادہ متواتر ہے۔ ہم نوٹ کر سکتے ہیں کہ اگر متعلقہ کلیوں کا استعمال نہیں کیا جاتا تو نتیجہ مختلف اور غلط ہوتا۔

مثال 3: کولڈ ڈرنک کی مقدار کا تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف معلوم کریں۔

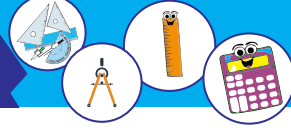
کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: مواد کو غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے۔ حسابات درج ذیل جدول میں دیئے گئے ہیں:

مقدار (x)	بوتلوں کی تعداد (f)	xf	(x - $\bar{x}$)	(x - $\bar{x}$) ²	x - $\bar{x}$	(x - $\bar{x}$) ² f	x - $\bar{x}$ f
1.48	2	2.96	-0.018	0.0003240	0.018	0.000648	0.036
1.49	7	10.43	-0.008	0.0000640	0.008	0.000448	0.056
1.50	5	7.5	0.002	0.0000040	0.002	0.00002	0.01
1.51	5	7.55	0.012	0.0001440	0.012	0.00072	0.06
1.52	1	1.52	0.022	0.0004840	0.022	0.000484	0.022
جمع	20	29.96	-	-	-	0.00232	0.184

$$0.000116 = \frac{0.00232}{20} = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} = s^2 = Var \quad \text{لیٹر } 1.498 = \frac{29.96}{20} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \bar{x}$$

$$0.0092 = \frac{0.184}{20} = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f} = M.D. \quad \text{لیٹر } 0.01078 = \sqrt{0.000116} = S = S.D.$$



مثال 4: بجلی کی کھپت کے مواد کا اوسط انحراف اور معیاری انحراف معلوم کریں:

بجلی کی کھپت (KWH) میں	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: حسابات کا خلاصہ درج ذیل جدول میں کیا گیا ہے۔ جہاں x جماعتی نشانات کو ظاہر کرتا ہے۔

جماعتی حدود	جماعتی نشانات (x)	f	xf	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$ x-\bar{x} $	$(x-\bar{x})^2 f$	$ x-\bar{x} f$
68-87	77.5	10	775	-44.167	1950.724	44.167	19507.24	441.67
88-107	47.5	13	1267.5	-24.167	584.0439	24.167	7592.571	314.171
108-127	117.5	15	1762.5	-4.167	17.36381	4.167	260.4583	62.505
128-147	137.5	10	1375	15.833	250.6839	15.833	2506.839	158.33
148-167	157.5	4	630	35.833	128.004	35.833	5136.016	143.332
168-187	177.5	6	1065	55.833	3317.324	55.833	18703.94	334.998
188-207	197.5	2	393	75.833	5750.644	75.833	11501.29	160.6672
جمع	-	60	7270	-	-	-	65208.35	-

سب سے پہلے ہمیں اوسط کھپت کی ضرورت ہے، جو کہ:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{7270}{60} = 121.667 \text{ kWh.}$$

اب مطلوبہ رقوم کا استعمال کرتے ہوئے۔ اوسط اور معیاری انحراف یہ ہیں:

$$M.D. = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f} = \frac{1606.672}{60} = 26.778 \text{ kWh.}$$

$$S.D. = s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}} = \sqrt{\frac{65208.35}{60}} = 32.967 \text{ kWh.}$$

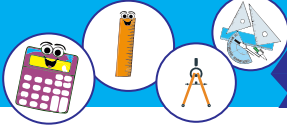
مثال 5: کراچی اور مورو میں کچھ تصادفی طور پر منتخب خاندانوں سے، جب ان کے پاس موجود موبائلوں کی تعداد کے بارے میں پوچھا گیا، تو اس کے نتیجے میں بالترتیب 1.412 اور 3.408 معیاری انحراف کے ساتھ اوسط 5.773 اور 6.133 موبائل فی خاندان نکلے۔ موازنہ کریں کہ کون سا شہر فی خاندان موبائل کی زیادہ مستقل استعمال کو ظاہر کرتا ہے؟

حل: کراچی (K) اور مورو (M) کے لیے اوسط موبائل فی خاندان مختلف ہیں جیسا کہ: $5.773 = \bar{x}$ اور $6.133 = \bar{x}_M$ موبائل فی خاندان معیاری انحرافات درج ذیل ہیں:

$1.42 = S_K$ موبائل فی خاندان اور $3.408 = S_M$ موبائل فی خاندان جیسا کہ اوسط موبائل فی خاندان دونوں شہروں کے لیے مختلف ہیں، ہم متعلقہ پیمانے استعمال کرتے ہیں:

$$s_M = \frac{S_M}{\bar{x}_M} = \frac{3.408}{6.133} = 0.555 \text{ اور } s_K = \frac{S_K}{\bar{x}_K} = \frac{1.412}{5.733} = 0.246$$

دونوں شہروں کی متعلقہ معیاری تغیرات کا مشاہدہ کرتے ہوئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ کراچی میں ایک خاندان کے پاس موبائلوں کی تعداد میں نسبتاً فرق مورو کے مقابلے میں کم ہے، لہذا، موبائل فی خاندان کا اوسط استعمال کراچی کے لیے مورو کے مقابلے میں زیادہ ہے اور زیادہ مستقل ہے۔



مشق 5.22

- 1- گذشتہ سات دنوں سے جماعت میں غیر حاضریں کی تعداد کی وسعت، تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف معلوم کریں: 3, 5, 3, 2, 4, 1, 8
2- 6 انگلوں میں دو بلے بازوں کے اسکور کی وسعت، اوسط انحراف، تغیر اور معیاری انحراف معلوم کریں۔ کون سا کھلاڑی زیادہ مستقل مزاج ہے؟

بلے باز-A	12	15	0	185	7	19
بلے باز-B	47	12	76	48	4	51

- 3- چھ خاندانوں کی آمدنی اور اخراجات کی وسعت اور معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہوئے تغیر کا موازنہ کریں۔ نتائج کی تشریح بھی کریں۔

آمدنی (ہزار روپوں میں)	10	20	30	40	50	60
اخراجات (ہزار روپوں میں)	7	21	23	34	36	53

- 4- ایک فٹ بال سزن میں ٹیم A اور B کی طرف سے کئے گئے گول دیئے گئے ہیں۔ متعلقہ معیاری انحراف اور اوسط انحراف کا استعمال کرتے ہوئے یہ معلوم کریں کہ کوئی ٹیم زیادہ مستقل کارکردگی کا مظاہرہ کرتی ہے۔

حاصل کئے گئے گول	0	1	2	3	4
A کے کھیلے گئے کھیلوں کی تعداد	27	9	8	5	4
B کے کھیلے گئے کھیلوں کی تعداد	17	9	6	5	3

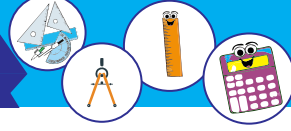
- 5- دھات کے 50 بلاکس کی کمیت کی وسعت، تغیر معیاری انحراف اور اوسط انحراف معلوم کریں۔

بلاکس کی کمیت (کلوگرام میں)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
بلاکس کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2

جائزہ مشق 22

صحیح جواب پر نشان لگائیں۔

- (i) مواد کی مشاہدات پر حسابی اوسط کا استعمال مبنی ہے۔
(الف) درمیانی (ب) انتہائی (ج) تمام (د) کوئی نہیں
- (ii) غیر گروہی مواد کو _____ معلوم کرنے سے پہلے ترتیب لازمی دیا جانا چاہیئے۔
(الف) A.M. (ب) عادی (ج) وسطانیہ (د) وسعت
- (iii) ایک مسلسل تعدد جدول میں جماعتوں کی تعدد 5 اور _____ کے درمیان ہوتی ہے۔
(الف) 10 (ب) 15 (ج) 20 (د) 25
- (iv) گروہی مواد کا عادی گرافی طور پر حاصل کرنے کے لیے _____ کا استعمال کیا جاتا ہے۔
(الف) کالمی نقشہ (ب) کثیر الاضلاع (ج) اوگیو (د) کالمی شکل
- (v) اگر مواد میں انتہائی قدریں ہیں تو، _____ گمراہ کن ہے۔
(الف) A.M. (ب) وسعت (ج) وسطانیہ (د) عادی
- (vi) {0, 90, K, 10, 100} کا A.M. 40 ہے تو پھر K = _____
(الف) 0 (ب) 90 (ج) 10 (د) 100
- (vii) وسطانیہ اور چوتھائیاں فطرت میں _____ ہیں۔
(الف) ریاضی کے طور پر (ب) پوزیشنل (ج) منطقی (د) ان میں سے کوئی بھی نہیں
- (viii) اوپری چوتھائی مواد کو _____ تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔
(الف) 50% - 50% (ب) 25% - 25% (ج) 75% - 25% (د) 40% - 60%
- (ix) اگر مواد میں ایک عدد 0 کے برابر ہے، تو پھر _____ معلوم نہیں کیا جاسکتا۔
(الف) A.M. (ب) G.M. (ج) H.M. (د) وسطانیہ
- (x) اگر مواد میں تمام اعداد برابر ہوں، تو پھر _____
(الف) H.M. = G.M. = A.M. (ب) وسعت = 0 (ج) 0 = S.D. (د) یہ تمام



خلاصہ

- مقداری مواد سے مراد اعداد میں، اور مزید غیر مسلسل (صرف اعداد) اور مسلسل مواد (کوئی حقیقی اعداد) میں تقسیم کیے جاتے ہیں۔
- خاصیتی مواد سے مراد متغیر کی صفات ہیں، اور اسے مزید نوٹینل (بغیر ترتیب کے) آرڈینل (ترتیب کے ساتھ) مواد میں تقسیم کیا جاتا ہے۔
- بامعنی معلومات حاصل کرنے کے لیے، مواد کو تعددی تقسیم میں گروہ بند کیا جاتا ہے۔
- تعددی تقسیم جماعتوں اور مطلقہ تعددات کی فہرست دیتی ہیں۔
- ایک نقطے کے ذریعے بیان کردہ جماعتیں غیر مسلسل ہیں، جبکہ اعداد کی ایک حد سے بیان کردہ جماعتیں مسلسل ہیں۔
- ٹیٹیا فہرست کے اندراج کے طریقہ کار کا استعمال کرتے ہوئے مشاہدات کو جماعتوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔
- جماعتوں کی تعدد حاصل کرنے کے لیے اسٹر جس (1926) اصول کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔
- وسعت مواد میں سب سے زیادہ اور سب سے کم مشاہدات کے درمیان کا فرق ہے۔
- مشاہدات کے تعدد جو جماعت میں آسکتی ہے وہ جماعتی وقفہ یا چوڑائی ہے۔
- جماعتی حدود جماعت کے ابتدائی اور اختتامی نکات ہیں۔
- حقیقی جماعتی حدود کس بھی دو لگاتار جماعتوں کی حدود کی اوسط سے حاصل کی جاتی ہیں۔
- جماعتوں کے درمیان وقفہ کسی بھی دو ملحقہ جماعتوں کے درمیان فاصلہ ہے۔
- متعلقہ اور فیصد تعدد بالترتیب 0 سے 1 اور 0 سے 100 تک ہوتے ہیں۔
- کالمی نقشہ ملحقہ مستطیلوں کا ایک گراف ہے جس کی بنیادیں جماعتی حدود ہیں اور اونچائیاں جماعتی تعددات کے متناسب ہیں۔
- تعددی کثیر الاضلاع نکات کو قطعات کے ساتھ جوڑنے سے بنتا ہے۔ جن کی x-کو آرڈینیٹ جماعتی نشانات، ہوتے ہیں اور y-کو آرڈینیٹ تعددات ہوتے ہیں۔
- اوگیو یا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کو آرڈینیٹ (جماعتی حدود، مجموعی تعدد) کے ساتھ نکات کو جوڑ کر حاصل کیا جاتا ہے۔
- مرکزی رجحان کے پیمانے مواد کی ایک مرکزی نقطے کے بارے میں جھرمٹ کرنے کی صلاحیت ہے۔
- A.M., G.M., اور H.M. تمام مشاہدات کے درمیان مساوات پر مبنی ہیں۔
- وسطانیہ درجہ بند والے ڈیٹا سیٹ کا سب سے درمیانی حصہ ہے۔
- عادی اکثریت کے اصول پر مبنی ہے، اور سب سے زیادہ بار آنے والا مشاہدہ ہے۔
- $A.M. \leq G.M. \leq H.M.$
- اگر $A.M. =$ وسطانیہ، تو مواد متشکل ہے ورنہ غیر متشکل۔
- عادی کو کالمی نقشے کا استعمال کرتے ہوئے گراف پر واقع اور تخمینہ لگایا جاسکتا ہے۔
- وسطانیہ اور چوتھائیاں کو اوگیو کا استعمال کرتے ہوئے گراف پر واقع اور اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔
- انتشاری پیمانے مواد میں تغیر / بکھرنے کی مقدار سے مطابق ہے۔
- مواد میں تغیر / انتشار جتنا زیادہ ہوگا، استحکام / مستقل مزاجی اتنی ہی کم ہوگی۔
- وسعت دو انتہائی مشاہدات کے فرق سے مواد میں تغیر کو ناپتی ہے۔
- غیر گروہی مواد میں اوسط کے بارے میں تمام انحرافات کا مجموعہ صفر ہے۔
- تغیر A.M. ہے مواد کے مربع انحرافات کے A.M. کا۔
- اوسط / مطلق انحراف A.M. ہے مواد کے مربع انحرافات کے A.M. ہے۔