یونٹ 20

دو درجی مساوات کا نظریہ

THEORY OF QUADRATIC EQUATIONS

Student Learning Outcomes (SLOs)

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے۔

- دو درجی اظہاریہ $ax^2 + bx + c$ کے فرق کنندہ $(b^2 - 4ac)$ کی تعریف کر سکیں۔
- دی گئی دو درجی مساوات کا فرق کنندہ معلوم کر سکیں۔
- فرق کنندہ کے ذریعے دو درجی مساوات کے روٹس پر بحث کر سکیں۔
- دی گئی دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت معلوم کر سکیں مساوات کو حل کر کے نتائج کی تصدیق کر سکیں۔
- دی گئی دو درجی مساوات میں نامعلوم کی قیمت معلوم کر سکیں جب کہ اس کے روٹس کی نوعیت دی گئی ہو۔
- اکائی کے مکعب روٹس معلوم کر سکیں۔
- اکائی کے کمپلیکس مکعب روٹس جیسے ω اور ω^2 کی پہچان کر سکیں
- اکائی کے مکعب روٹس کی خصوصیت کی تصدیق کر سکیں۔
- اکائی کے مکعب روٹس کی خصوصیت استعمال کرتے ہوئے سوالات حل کر سکیں۔
- دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سروں کے درمیان تعلق معلوم کر سکیں۔
- دی گئی مساوات کو حل کئے بغیر ان کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
- دی گئی دو درجی مساوات میں نامعلوم کی قیمت معلوم کر سکیں۔ جب
  - ❖ روٹس کی مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہو۔
  - ❖ روٹس کے مربعوں کا مجموعہ دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔
  - ❖ روٹس میں دیئے گئے عدد کا فرق ہو۔
  - ❖ روٹس دیئے گئے تعلق کی تصدیق کرتے ہو (مثلاً $2\alpha + 5\beta = 7$ جبکہ α اور β دی گئی مساوات کے روٹس ہو)
  - ❖ روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔
- α اور β کی قیمتیں معلوم کر سکیں جبکہ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ دو درجی مساوات کے روٹس ہیں۔
  - ❖ $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$
  - ❖ $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$
  - ❖ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$
  - ❖ α^2, β^2
  - ❖ $2\alpha+1, 2\beta+1$

  جبکہ α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں۔
- دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل کی تعریف کر سکیں۔
- سمیٹرک تفاعل کو گرافیکل ظاہر کر سکیں۔
- دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل کو اس کے عددی سروں کی لحاظ سے حل کر سکیں۔
- کلیہ تشکیل دے سکیں۔ $x^2 -$ (روٹس کے مجموعہ) $x +$ (روٹس کا حاصل ضرب) $=0$ دیئے گئے روٹس سے دو درجی مساوات معلوم کر سکیں۔
- دو درجی مساوات بنا سکیں جس کے روٹس مثلاً اس قسم کے ہوں۔
- مکعب مساوات کو حل کر سکیں اگر مساوات کا ایک روٹ دیا گیا ہو۔
- چار درجی (Biquadratic) مساوات کو حل کر سکیں اگر مساوات کے دو حقیقی روٹس دیے گئے ہوں۔
- دو تغیرات والی دو مساوات کے نظام حل کر سکیں جب کہ
  - ❖ ایک مساوات یک درجی اور دوسری دو درجی ہو۔
  - ❖ دونوں مساوات دو درجی ہوں۔
- دو درجی مساوات سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔

20.1 دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت Nature of the Roots of a Quadratic Equation:

20.1 (i) دو درجی اظہاریہ $ax^2+bx+c, a\neq 0.$ کے فرق کنندہ (b^2-4ac) کی تعریف کرنا۔

ایک دو درجی کثیر رقمی دو درجی اظہاریہ کہلاتی ہے۔ یہ دو درجی اظہاریے پر عمومی شکل $ax^2+bx+c, (a\neq 0)$ ہے جبکہ a اور b بالترتیب x² اور x کے عددی سر ہیں اور c ایک منتقل رقم ہو۔

دو درجی اظہاریے کا فرق کنندہ

اظہاریہ b^2-4ac دو درجی اظہاریے $ax^2+bx+c, (a\neq 0)$ کا فرق کنندہ کہلاتا ہے اور Δ یا D سے ظاہر کیا جاتا ہے

یعنی $\Delta = b^2-4ac$

20.1. (ii) دی گئی دو درجی مساوات کا فرق کنندہ معلوم کرنا

ہم پہلے ہی جانتے ہیں کہ دو درجی مساوات کا حل $ax^2+bx+c, a\neq 0$ ہے۔ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہے یہاں b^2-4ac ہمیں روٹس کی نوعیت بتانے میں مدد دیتا ہے کہ روٹس حقیقی (Real) یا کمپلیکس (complex) ہیں اظہاریہ b^2-4ac دو درجی مساوات کا فرق کنندہ ہے۔

$ax^2+bx+c, a\neq 0.$

مثال $2x^2+5x-4=0$ کے فرق کنندہ معلوم کریں

حل: $2x^2+5x-4=0$

یہاں $a=2$ $b=5$ اور $c=-4$

اب

$$\Delta = b^2-4ac=(5)^2-4(2)(-4)$$
$$=25+32=57$$

20.1. (iii) فرق کنندہ کے ذریعے دو درجی مساوات کے روٹس (roots) پر بحث کرنا۔

ہم فرق کنندہ کے ذریعے دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کے روٹس کی نوعیت (nature) معلوم کر سکتے ہیں یعنی $\Delta=b^2-4ac.$

دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے روٹس $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہیں۔ روٹس کی نوعیت کا انحصار b^2-4ac کی قیمت پر ہوتا ہے۔ جبکہ a,b اور c حقیقی اعداد ہیں۔

i. اگر $\Delta=b^2-4ac>0,$ تو روٹس حقیقی اور غیر مساوی (Unequal) ہوتے ہے۔

ii. اگر $\Delta=b^2-4ac<0,$ تو روٹس حقیقی اور غیر حقیقی (کمپلیکس یا فرضی) ہوتے ہیں۔

iii. اگر $\Delta=b^2-4ac<0,$ کو روٹس ناطق اور مساوی ہوتے ہیں اور ہر ایک $-\dfrac{b}{2a}$. کے مساوی ہوتا ہے۔

iv. اگر a,b,c ناطق ہیں اور $\Delta=b^2-4ac<0,$ مکمل مربع ہے تو روٹس ناطق اور غیر مساوی ہوتے ہیں ورنہ غیر ناطق ہیں۔

20.1. (iv) دی گئی دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت معلوم کرنا۔ مساوات کو حل کر کے نتائج کی تصدیق کرنا۔

مثال

بذریعہ فرق کنندہ مندرجہ ذیل مساوات کے روٹس کی نوعیت معلوم کریں اور مساوات کو حل کر کے تصدیق کریں۔

(i) $x^2+5x-14=0$ (ii) $5x^2+3x+1=0$

(iii) $x^2-9x+5=0$ (iv) $9x^2=6x-1$

حل

$x^2+5x-14=0$ (i)

یہاں $a=1, b=5$ اور $c=-14$

$\Delta = b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(5)^2-4(1)(-14)$

$\Rightarrow \quad \Delta=25+56$

$\Rightarrow \quad \Delta=81=(9)^2>0,$

مکمل مربع اور مثبت پس روٹس حقیقی، ناطق اور غیر مساوی ہیں۔

پڑتال

$x^2+5x-14=0$

$x^2+7x-2x-14=0$

$x(x+7)-2(x+7)=0$

$x+7=0$ or $(x-2)=0$

$\Rightarrow \quad x=-7$ or $x=2$

یہاں روٹس حقیقی ناطق اور غیر مساوی ہے بس تصدیق ہوئی

حل

$5x^2+3x+1=0,$ (ii)

یہاں $a=5, b=3$ اور $c=1$

$\Delta = b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(3)^2-4(5)(1)$

$\Rightarrow \quad \Delta=9-20$

$\Rightarrow \quad \Delta=-11<0,$ (یعنی منفی)

پس روٹس کمپلیکس ہیں۔

پڑتال

دو درجی کلیہ کی مدد سے

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-20}}{2}$

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{11}\,i}{2}$ $\quad (i^2=-1)$

پس روٹس کمپلیکس میں پس تصدیق ہوئی

حل

$x^2-9x+5=0,$ (iii)

یہاں $a=1$ $b=-9$ اور $c=5$

$\Delta = b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(-9)^2-4(1)(5)$

$\Rightarrow \quad \Delta=81-20$

$\Rightarrow \quad \Delta=61>0,$ مکمل مربع نہیں ہے

پس روٹس حقیقی، غیر ناطق اور غیر مساوی ہیں

پڑتال

$x^2-9x+5=0,$

دو درجی کلیہ کی مدد سے

$x=\dfrac{9\pm\sqrt{81-20}}{2}$

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{61}}{2}$

پس تصدیق ہوئی

حل

$9x^2=6x-1$ (iv)

یہاں $\Rightarrow 9x^2-6x+1=0$

$a=9,$ $b=-6$ $c=1$

$\because \quad \Delta=b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(6)^2-4(9)(1)$

$\Rightarrow \quad \Delta=36-36$

$\Rightarrow \quad \Delta=0,$

مکمل مربع اور 0 کے برابر پس روٹس حقیقی اور مساوی ہیں

پڑتال

$9x^2-6x+1=0$

$(3x)^2-2(3x)(1)+(1)^2=0$

$(3x-1)^2=0$

$3x-1=0$ یا $3x-1=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{1}{3}$ یا $x=\dfrac{1}{3}$

پس روٹس حقیقی اور مساوی ہیں

پس تصدیق ہوئی

مثال ا

ثابت کریں کہ $abc^2x^2 + c(3a^2 + b^2)x + 3a^2 + b^2 - ab = 0,$ کے روٹس ناطق ہیں۔

حل

یہاں $abc^2x^2 + c(3a^2 + b^2)x + 3a^2 + b^2 - ab = 0$

$A = abc^2,$ $B = c(3a^2 + b^2)$ اور $C = 3a^2 + b^2 - ab$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$
$$\Delta = \left[c(3a^2 + b^2)\right]^2 - 4(abc^2)(3a^2 + b^2 - ab)$$
$$= c^2(3a^2 + b^2)^2 - 4abc^2(3a^2 + b^2 - ab)$$
$$= c^2\left[(3a^2 + b^2)^2 - 4ab(3a^2 + b^2) + 4a^2b^2\right]$$
$$= c^2\left[(3a^2 + b^2)^2 - 2(3a^2 + b^2)(2ab) + (2ab)^2\right] \qquad \because\ 4ab = 2(2ab)$$
$$= c^2\left[(3a^2 + b^2 - 2ab)^2\right]$$
$$= \left[c(3a^2 + b^2 - 2ab)\right]^2$$

جو کہ Δ مکمل مربع ہے

پس روٹس ناطق ہیں۔

20.1. (v) دی گئی دو درجی مساوات میں نامعلوم کی قیمت معلوم کرنا۔ جب کہ اس کے روٹس کی نوعیت دی گئی ہو۔

مندرجہ ذیل مثالیں دو درجی مساوات موجود میں نامعلوم کی قیمت معلوم کرنے میں ہماری مدد کریں گی جبکہ روٹس کی نوعیت دی گئی ہو۔

مثال

p کی کسی قیمت کے لیئے مساوات $3x^2 + 5x + p = 0$ کے روٹس

(i) مساوی

(ii) ناطق

(iii) کمپلیکس ہونگے

حل

$$3x^2 + 5x + p = 0$$

یہاں $a = 3,$ $b = 5$ اور $c = p$?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\therefore \qquad \Delta = (5)^2 - 4(3)(p) = 25 - 12p,$

مساوی روٹس کے لیئے

یعنی
$$\Delta = 0$$
$$25 - 12p = 0$$
$$\Rightarrow \quad -12p = -25,$$
$$\Rightarrow \quad p = \frac{25}{12},$$

جب $p = \frac{25}{12}$, پر دی گئی مساوات کے مساوی روٹس ہے

(ii) ناطق روٹس کے لیئے

Δ کو مکمل مربع ہونا چاہیئے

یعنی $25 - 12p$ مکمل مربع ہونا چاہیئے

$p = 0,$ 2 اور -2 وغیرہ

اسی طرح $p = 0, 2, -2$ اور کچھ دوسری قیمت بھی فرق کندہ کو مکمل مربع بناتی ہیں

(iii) کمپلیکس روٹس کے لیئے

یعنی $25 - 12p < 0$
$$\Rightarrow \quad 12p > 25$$
$$\Rightarrow \quad p > \frac{25}{12}$$

جب $p > \frac{25}{12}$, دی گئی مساوات کے کمپلیکس روٹس ہیں

مثال اگر مساوات $x^2 - 15 - k(2x - 8) = 0$ کے روٹس مساوی ہیں تو k کی قیمت معلوم کریں

حل مساوات $x^2 - 15 - k(2x - 8) = 0,$ کو معیاری شکل میں لکھیں

یعنی $x^2 - 2kx + 8k - 15 = 0$

یہاں $a = 1$ $b = -2k,$ اور $c = 8k - 15$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\therefore \quad \Delta = (-2k)^2 - 4(1)(8k - 15)$$
$$\Rightarrow \quad \Delta = 4k^2 - 4(8k - 15)$$

مساوی روٹس کے لیئے
$$\Delta = 0$$
$$\therefore \quad 4k^2 - 4(8k - 15) = 0$$
$$\Rightarrow \quad k^2 - 8k + 15 = 0 \quad \text{(دونوں اطراف کو 4 سے تقسیم کرنے سے)}$$
$$\Rightarrow \quad k^2 - 5k - 3k + 15 = 0$$
$$\Rightarrow \quad k(k - 5) - 3(k - 5) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (k - 5)(k - 3) = 0$$

یعنی $k - 5 = 0$ یا $k - 3 = 0$

$\Rightarrow$ $k = 3$ $\quad k = 5$

$k = 3$

لہٰذا k کی قیمتیں 3 اور 5 ہیں

مثال 3. P کی کس قیمت کے لیے مساوات $2x^2 - px + 18 = 0,$ کے روٹس حقیقی اور غیر مساوی ہیں

حل

$$2x^2 - px + 18 = 0,$$

$a = 2,\ b = -p$ اور $c = 18$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\therefore \quad \Delta = (-p)^2 - 4(2)(18) = p^2 - 144$$

حقیقی اور غیر مساوی روٹس کے لیئے

$$\Delta > 0$$

$$\therefore \quad p^2 - 144 > 0$$

$$\Rightarrow \quad p^2 > 144 \Rightarrow \sqrt{p^2} > \sqrt{144} \Rightarrow |p| > 12$$

$\Rightarrow \quad \pm p > 12 \Rightarrow p > 12$ اور $-p > 12$

$$\Rightarrow \quad p > 12 \text{ or } p < -12$$

لہذا $p < -12$ یا $p > 12$ کے لیئے دی گئی مساوات کے حقیقی روٹس ہیں

EXERCISE 20.1 مشق

1. بذریعہ فرق کنندہ (Discriminant) مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت (Nature) معلوم کریں

(i) $x^2 + 5x - 6 = 0$ (ii) $x^2 = 6x$ (iii) $2x^2 + 8 = 6x$

(iv) $1 + 6x + 9x^2 = 0$ (v) $24x^2 + 12x + 36 = 0$ (vi) $x = x^2 + 1$

(vii) $3x^2 + 6 = 5x$ (viii) $3x^2 + 9 = 0$

2. k کی قیمتیں معلوم کریں کہ یقینی بنائے کہ مندرجہ ذیل دو درجی مساوات رکھتی ہیں (I) ایک جیسا حل (ii) مختلف حقیقی حل

(اشارہ) ایک جیسے حل کے لیئے $\Delta = 0$ اور مختلف حل کے لیئے $\Delta > 0$ ہے)

(i) $x^2 - 3x + k = 0$ (ii) $x^2 + k = 4$

(iii) $x^2 + kx + 2 = 0$ (iv) $(k-1)x^2 - 4x + 2 = 0$

(v) $x^2 + kx + 4 = 0$ (vi) $9x^2 + kx = -16$

(vii) $(k-2)x^2 = 4x + (k+2)$ (viii) $x^2 + 1 = kx$

3. مندرجہ ذیل ہر ایک دو درجی مساوات میں m کی قیمت معلوم کریں جو کہ روٹس کو مساوی بناتے ہیں

(i) $(m+1)x^2 + 2(m+3)x + (2m+3) = 0,$ (بشرطیکہ) $m \neq -1$

(ii) $9x^2 + mx + 16 = 0$

4. ثابت کریں کہ مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے روٹس حقیقی ہیں۔

(i) $x^2 - 2x\left(k + \dfrac{1}{k}\right)x + 3 = 0, \ \forall k \in R - \{0\}$

(ii) $2nx^2 + 2(l+m+n)x + (l+m) = 0, \ \forall l, m, n \in \mathbb{R}$ and $n \neq 0$

5. ثابت کریں کہ مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے روٹس ناطق ہیں

(i) $(l-m)x^2 + (m+n-l)x - n = 0, \ \forall l, m, n \in \mathbb{R}$ and $l \neq m$

(ii) $(a+c-b)x^2 + 2cx + (b+c-a) = 0, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

6. p اور q کی کس قیمتوں کے لیے دو درجی مساوات $x^2+(2p-4)x-(3q+5)=0$ کے روٹس ختم ہو جائینگے

7. ثابت کریں کہ دی گئی دو درجی مساوات $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ کے روٹس حقیقی ہیں اور وہ مساوی نہیں ہو سکتے جب تک $a=b=c.$

20.2 اکائی کے مکعب روٹس اور ان کی خصوصیات Cube Roots of Unity and their properties

20.2. (i) اکائی کے مکعب روٹس معلوم کرنا

فرض کریں x اکائی کا مکعب روٹ ہے $\quad x=(1)^{1/3}$ یا $x=\sqrt[3]{1}$

$$x^3=1$$

$$\Rightarrow \quad (x)^3-(1)^3=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1)=0, \qquad \left[\, a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\right]$$

یعنی $x-1=0$

$$\Rightarrow \quad x=1$$

یا $x^2+x+1=0,$

یہاں $a=b=c=1,$

دو درجی مساوات کی مدد سے ہمارے پاس

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-1\times 3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}, \quad (i^2=-1)$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

لہٰذا اکائی کے مکعب روٹس

$1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ اور $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$ ہیں

20.2. (ii) اکائی کے کمپلیکس مکعب روٹس ω اور ω² (Complex cube roots) جیسے ω اور ω² کی پہچان کرنا۔

دو کمپلیکس مکعب روٹس ہیں

$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ اور $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ان دو کمپلیکس روٹس کے لیئے ہم یونانی حرف تہجی استعمال کرتے ہیں اور "ω" اومیگا پڑھتے ہیں

آئیں ہم فرض کرتے ہیں $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ تو $\omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$ اس لیئے اکائی کے مکعب روٹس $1, \omega$ اور ω^2. ہیں

20.2. (iii) اکائی مکعب روٹس کی خصوصیات کی تصدیق کرنا اکائی کے مکعب روٹ، کی خصوصیات ہیں۔

(i) ہر اکائی کا مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا مربع ہوتا ہے۔

تصدیق

اگر $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ اکائی کا ایک کمپلیکس روٹ ہے۔

$\therefore \quad \omega^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}+3i^2}{4} = \frac{1-2i\sqrt{3}+3(-1)}{4}$ اب

$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{2\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{4} \qquad \left(\because i^2=-1\right)$

$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

Now $\left(\omega^2\right)^2 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+2i\sqrt{3}+3i^2}{4} = \frac{1+2i\sqrt{3}+3(-1)}{4} \qquad \left(\because i^2=-1\right)$

$\Rightarrow \quad \left(\omega^2\right)^2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \quad \left(\omega^2\right)^2 = \omega.$ ہر اکائی کا مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا مربع ہوتا ہے۔

پس تصدیق ہوا۔

(ii) اکائی کے تین مکعب روٹس کا مجموعہ صفر ہوتا ہے یعنی $1+\omega+\omega^2=0$

پڑتال

L.H.S $=1+\omega+\omega^2$

$=1+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), \qquad$ جبکہ $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ اور $\omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{2-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0 = \text{R.H.S.}$

پس تصدیق ہوا

(iii) اکائی کے تین مکعب روٹس کا حاصل ضرب "1" ہوتا ہے $\omega\cdot\omega^2\cdot 1=1$ یا $\omega^3=1$

پڑتال

L.H.S $=\omega\cdot\omega^2\cdot 1$

$=1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{1-i^2 3}{4}$

$=\frac{1-(-1)(3)}{4}, \qquad \left(\ i^2=-1\right)$

$=\frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$=$ R.H.S $\qquad$ یعنی $1\cdot\omega\cdot\omega^2=1$ یا $\omega^3=1$

پس تصدیق ہوا

(iv) ہر اکائی مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا معکوس (Reciprocal) ہوتا ہے

پڑتال $\omega^3 = 1,$

ثبوت: ایک کمپلیکس روٹ ω ہے۔

$\Rightarrow \quad \omega \cdot \omega^2 = 1,$

$\Rightarrow \quad \omega^2 = \dfrac{1}{\omega}$ یا $\omega = \dfrac{1}{\omega^2}.$

ہر اکائی کا مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا معکوس (reciprocal) ہوتا ہے۔

(v) ہر ω^3 کی لازمی طاقت اکائی ہوتی ہے۔

$\because \quad \omega^3 = 1,$

$\therefore \quad (\omega^3)^m = 1, \quad \forall m \in Z.$

$\Rightarrow \quad \omega^{3m} = 1.$

پس ثابت ہو

20.2. (iv) اکائی کے مکعب روٹس کی خصوصیات استعمال کرتے ہوئے سوالات حل کرنا۔

اکائی کے مکعب روٹ سے متعلق سوالات مندرجہ ذیل ہے۔

مثال $-27.$ کے مکعب روٹس (Cube roots) معلوم کریں۔

حل فرض کریں -27 کا مکعب روٹ x ہے۔

یعنی $\therefore \quad x = (-27)^{\frac{1}{3}}$

دونوں اطراف مکعب کرنے سے ہمارے پاس $x^3 = -27$

$\Rightarrow \quad x^3 + 27 = 0$

$\Rightarrow \quad (x)^3 + (3)^3 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0, \qquad [a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^3)]$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3,$

$x^2 - 3x + 9 = 0$

اب $a = 1$ ، $b = -3$ اور $c = 9.$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 - 36}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-1 \times 27}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{i^2 \times 27}}{2} \qquad (\because i^2 = -1)$$

مثال 4. ثابت کریں

$$(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)=x^3+y^3+z^3-3xyz,$$

جبکہ ω^2 اور ω اکائی کے کمپلیکس مکعب روٹس ہیں

ثبوت

$$\text{L.H.S} = (x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$$

$$=(x+y+z)\left[(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)\right]$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+xy\omega^2+xz\omega+xy\omega+y^2\omega^3+yz\omega^2+xz\omega^2+yz\omega^4+z^2\omega^3\right]$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2(1)+z^2(1)+xy(\omega^2+\omega)+yz(\omega^2+\omega^4)+zx(\omega+\omega^2)\right]$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2+xy(-1)+yz(-1)+zx(-1)\right],$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right] \qquad \left(\because\ \omega^3=1, \omega^2+\omega=-1 \text{ and } \omega^2+\omega^4=\omega+\omega^2=-1\right)$$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

$$=\text{R.H.S}$$

پس ثابت ہوا

مشق EXERCISE 20.2

1. تمام مکعب روٹس معلوم کریں

(i) 64 (ii) -125 (iii) 216

2. مندرجہ ذیل کو حل کریں۔

(i) $(1+\omega^2)^4$ (ii) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)$

(iii) $(2+5\omega+2\omega^2)^6$ (iv) $(-1+\sqrt{-3})^4+(-1-\sqrt{-3})^4$

3. ثابت کریں

(i) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=(\omega+\omega^2)^4$

(ii) $(a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)=a^3+b^3$

(iii) $(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-ab-ba-ca$

(iv) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^9+\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^9-2=0$

(v) $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0$

20.3. دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سر

20.3. (i) دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سروں کے درمیان تعلق معلوم کرنا۔

فرض کریں $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کے دو روٹس کو α اور β سے ظاہر کرتے ہیں

تو $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اور $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore \quad \alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \qquad (1)$$

اور

$$\alpha\beta = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\beta = \frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \qquad (2)$$

لہٰذا (1) روٹس کے مجموعہ کو ظاہر کرتی ہے $= -\dfrac{x \text{ کا عددی سر}}{x^2 \text{ کا عددی سر}}$

اور (2) روٹس کے حاصل ضرب کو ظاہر کرتی ہے $= \dfrac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ کا عددی سر}}$

اس طرح ہمارے پاس اہم نتیجہ ہے۔

اگر α اور β مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0,$ روٹس ہیں

تو $\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}.$

20.3. (ii) دی گئی مساوات کو حل کئے بغیر ان کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کرنا۔

مثال حل کئے بغیر مندرجہ ذیل پر مساوات کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $4x^2+6x+1=0$ (ii) $3(5x^2+1)=17x$

حل: (i)

$$4x^2+6x+1=0$$

یہاں $a=4, \; b=6 \; c=1$

$\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

$\alpha+\beta = -\dfrac{6}{4}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \alpha+\beta = -\dfrac{3}{2}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{1}{4}$

حل: (ii) $3(5x^2+1)=17x$

یہاں $15x^2-17x+3=0$

$a=15, \; b=-17$ اور $c=3$

$\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

$\alpha+\beta = -\dfrac{(-17)}{15}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

$\alpha+\beta = \dfrac{17}{15}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{1}{5}$

20.3. (iii) دی گئی مساوات میں نامعلوم کی قیمت معلوم کرنا جب کہ

(a) روٹس کا مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہو۔

(b) روٹس کے مربعوں کا مجموعہ دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔

(c) روٹس میں دیئے گئے عدد کا فرق ہو۔

(d) روٹس دیئے گئے تعلق کی تصدیق کرتے ہو (مثلاً $2\alpha+5\beta=7$ جبکہ α اور β دی گئی مساوات کے روٹس ہیں)
(e) روٹس کو مجموعہ اور حاصل ضرب دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔ اوپر دی گئیں تمام شرائط کی وضاحت مثالوں کی جاسکتی ہے
(a) روٹس کا مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہو۔

مثال 1: k کی قیمتیں معلوم کریں۔ اگر $6x^2-3kx+5=0$ کے روٹس کا مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہو۔

حل فرض کریں α اور β مساوات $6x^2-3kx+5=0$ کے روٹس ہیں

یہاں $a=6$ $b=-3k$ اور $c=5$

اب
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-3k)}{6}=\frac{3k}{6} \quad \text{اور} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{5}{6}$$

دیا گیا ہے
روٹس کا مجموعہ = روٹس کے حاصل ضرب

یعنی $\alpha+\beta=\alpha\beta$
$$\therefore \quad \frac{3k}{6}=\frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad k=\frac{5}{3}.$$

مثال 2: P کی قیمت معلوم کریں۔ اگر مساوات $2x^2+(8-4p)x+3p=0$ کے روٹس کا مجموعہ، روٹس کے حاصل ضرب کے دوگناہ کے برابر ہے۔

حل فرض کریں α اور β مساوات $2x^2+(8-4p)x+3p=0$ کے روٹس ہیں
$a=2,$ $b=8-4p$ اور $c=3p$
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(8-4p)}{2}=2p-4 \quad \text{اور} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{3p}{2}$$

دی گئی شرط کے مطابق
$$\alpha+\beta=2(\alpha\beta)$$
یعنی
$$2p-4=2\left(\frac{3p}{2}\right)=3p$$
$$\Rightarrow \quad p=-4.$$

(b) روٹس کے مربعوں کا مجموعہ دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔

مثال 3: k معلوم کریں اگر مساوات $2x^2+3kx+k^2=0$ کے روٹس کے مربعوں کا مجموعہ 5 ہے

حل فرض کریں α اور β مساوات $2x^2+3kx+k^2=0$ کے روٹس ہیں

یہاں $a=2,$ $b=3k$ اور $c=k^2$

اب
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{3k}{2} \quad \text{اور} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{k^2}{2}$$

دی گئی شرط کے مطابق
$$\alpha^2+\beta^2=5$$

$\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 5 \qquad \because [a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab]$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{-3k}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{k^2}{2}\right) = 5$

$\Rightarrow \quad \frac{9k^2}{4} - k^2 = 5$

$\Rightarrow \quad \frac{9k^2 - 4k^2}{4} = 5$

$\Rightarrow \quad 5k^2 = 5 \times 4$

$\Rightarrow \quad k^2 = 4$

$\Rightarrow \quad k = \pm 2$

(c) روٹس میں دیئے گئے عدد کا فرق ہو

مثال 4: p معلوم کریں مساوات $x^2 - px + 8 = 0$ کے روٹس میں فرق 2 ہے

حل فرض کریں α اور β مساوات $x^2 - px + 8 = 0$ کے روٹس ہیں

یہاں $a = 1,\ b = -p$ اور $c = 8$

اب $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$ اور $\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-p)}{1} = p$

دی گئی شرط کے مطابق $\alpha - \beta = 2$

دونوں اطراف مربع کرنے سے ہمارے پاس

$(\alpha-\beta)^2 = 4$

$\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \qquad \left[\because (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab\right]$

$\Rightarrow \quad p^2 - 4(8) = 4$

$\Rightarrow \quad p^2 - 32 = 4$

$\Rightarrow \quad p^2 = 36$

$\Rightarrow \quad p = \pm 6$

(d) روٹس دیئے گئے تعلق کے تصدیق کرتے ہو (مثلاً $2\alpha + 5\beta = 7$, جبکہ α اور β دی گئی مساوسات کے روٹس ہیں)

مثال 5: k معلوم کریں اگر α اور β مساوات $x^2 - 5x + k = 0$ کے روٹس میں شرط $2\alpha + 5\beta = 7$ کی تصدیق کریں۔

حل دی گئی مساوات , $x^2 - 5x + k = 0$

یہاں $a = 1,\ b = -5$ ء $c = k$

فرض کریں α اور β دی گئی مساوات کے روٹس ہیں

$\because$ جبکہ $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\therefore \quad \alpha+\beta = -\frac{(-5)}{1} = 5$

$\Rightarrow \quad \alpha = 5 - \beta \qquad \text{(i)}$

اور $\alpha\beta = \frac{k}{1} = k$

$\Rightarrow \quad \alpha\beta = k \qquad$ (ii)

دیا گیا ہے

$\because \quad 2\alpha + 5\beta = 7$

$\therefore \quad 2(5-\beta)+5\beta = 7$ یعنی

$\Rightarrow \quad 10-2\beta+5\beta = 7$

$\Rightarrow \quad 3\beta = -3$

$\Rightarrow \quad \beta = -1$

$\therefore$ مساوات (i) سے ہمیں پاس ہے

$\alpha = 5-(-1) = 5+1 = 6,$

k کی قیمت معلوم کرنے کے لیئے α اور β کی قیمتیں مساوات (2) میں رکھنے سے ہمیں جلد

$k = 6(-1) = -6$

$\Rightarrow \quad k = -6$

(e) روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب دیئے گئے عدد کے برابر ہو

مثال 6: k معلوم کریں اور مساوات $6x^2-3kx+5=0$ کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب $\frac{5}{6}$. کے برابر ہے۔

حل فرض کریں α اور β مساوات $6x^2-3kx+5=0,$ کے روٹس میں تو

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3k)}{6} = \frac{k}{2} \qquad \text{(i)}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{6} \qquad \text{(ii)}$$ اور

دی گئی شرط کے مطابق کہ روٹس کا مجموعہ او حاصل ضرب $\frac{5}{6}$. کے برابر ہیں

$\alpha+\beta = \alpha\beta = \frac{5}{6}$ یعنی

$\frac{k}{2} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow \quad k = \frac{5}{3},$

بس $k = \frac{5}{3}$, پر دی گئی مساوات کے روٹس کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب طور. $\frac{5}{6}$ کے برابر ہے۔

EXERCISE 20.3 مشق

1. حل کئے بغیر مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $x^2 - x - 1 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x - 4 = 0$

(iii) $x^2 - \frac{3}{4}a^2 = ax$ (iv) $7x^2 - 5kx + 7k = 0$

2. m کی قیمت معلوم کریں اگر

(i) مساوات $x^2 + (3m-7)x + 5m = 0$ کے روٹس کا مجموعہ اس کے روٹس کے حاصل ضرب کا $\frac{3}{2}$ گنا ہے

(ii) مساوات $2x^2 - 3x + 4m = 0$ کے روٹس کا مجموعہ اس کے روٹس کے حاصل ضرب کا 6 گنا ہے۔

3. p کی قیمت معلوم کریں اگر

(i) مساوات $x^2 - px + 6 = 0$ کے روٹس کے مربعوں کا مجموعہ 13 کے برابر ہے۔

(ii) مساوات $x^2 - 2px + (2p-3) = 0$ کے روٹس کے مربعوں کا مجموعہ 6 ہے

4. m کی قیمت معلوم کریں اگر

(i) مساوات $x^2 - 5x + 2m = 0$ کے روٹس میں 1 کا فرق ہے۔

(ii) مساوات $x^2 - 8x + m + 2 = 0$ کے روٹس میں 2 کا فرق ہے۔

5. k کی قیمت معلوم کریں اگر

(i) مساوات $5x^2 - 7x + k - 2 = 0$ کے روٹس تعلق $2\alpha + 5\beta = 1$ کی تصدیق کرتے ہیں۔

(ii) مساوات $3x^2 - 2x + 7k + 2 = 0$ کے روٹس تعلق $7\alpha - 3\beta = 18.$ کی تصدیق کرتے ہیں۔

6. p کی قیمت معلوم کریں اگر مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب برابر ہیں۔

(i) $(2p+3)x^2 + (7p-5)x + (3p-10) = 0$ (ii) $4x^2 - (5p+3)x + 17 - 9p = 0$

20.4 دو درجی مساوات کے روٹس کے سیمیٹرک تفاعل

دو درجی مساوات کے روٹس کے سیمیٹرک تفاعل کی تعریف

فرض کریں α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں α اور β کا تفاعل f سیمیٹرک تفاعل کہا جاتا ہے کہ جب α اور β کو آپس میں تبدیل کیا جائے تو تفاعل تبدیل نہیں ہو ویسا ہی رہتا ہے۔ یعنی $f(\alpha,\beta) = f(\alpha,\beta)$

$\alpha + \beta$ اور (α,β)، α اور β کے پرائمری سیمیٹرک تفاعل کے طور پر جانے جاتے ہیں۔

نوٹ کریں کہ $\alpha - \beta \neq \beta - \alpha$ لہٰذا $\alpha - \beta$ روٹس کا سیمیٹرک تفاعل نہیں ہے۔

روٹس کے سیمیٹرک کے تفاعل کی قیمت دو درجی مساوات کے عددی سروں کی صورت میں $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ کی جاسکتی ہے $\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی

صورت میں بیان کرتے ہوئے سیمیٹرک تفاعل کی مثالیں نیچے دی گئی ہیں۔

- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
- $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=\ (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\ \ -2(\alpha\beta)^2$

مثال $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta,$ کی قیمت معلوم کریں جب کہ $\alpha=2$ اور $\beta=3$ اور ثابت کریں کہ یہ α اور β کا سیمیٹرک تفاعل ہے جبکہ α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں۔

حل فرض کریں $f(\alpha\ \beta)=\alpha\ \ +\beta\ \ +\alpha\beta,$

دیا گیا ہے $\alpha=2$ اور $\beta=3$

$\therefore\qquad f(2,3)=2^2+3^2+(2)(3)=4+9+6=19,$

اب

$f(\beta,\alpha)=\beta^2+\alpha^2+\beta\alpha=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=f(\alpha,\beta)$

$\because\qquad f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$

$\therefore\qquad f$ سیمیٹرک تفاعل ہے

دیا گیا اظہار یہ روٹس α اور β کا سیمیٹرک تفاعل ہے پس ثابت ہوا

20 4 (ii) سیمیٹرک تفاعل کو گرائیفکلی (Graphically) ظاہر کریں۔

20.4.1 میں ہم پہلے ہی دو درجی مساوات کے روٹس کے سیمیٹرک تفاعل کی وضاحت کر چکے ہیں۔ جیسے

$\alpha+\beta,\alpha\beta,\alpha^2+\beta^2,\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta,\alpha^3+\beta^3$ وغیرہ

جب ایک سیمیٹرک تفاعل کو مستقل کے مساوی ہوتا ہے $c\in R$ ہمیں ایسا سیمیٹرک مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اور سیمیٹرک مساوات کے روٹس ہوں لکھے جاسکتے ہیں $f(\alpha,\beta)=c.$

ہر مساوات کو گرافیکلی (Graphically) ظاہر کیا جاسکتا ہے باطور تمام نقاط کا سیٹ $G(f)$ کی وضاحت کی گئی ہے۔

$G(f)=\{(\alpha,\beta)\mid f(\alpha,\beta)=c\wedge\alpha,\beta\in R\}$

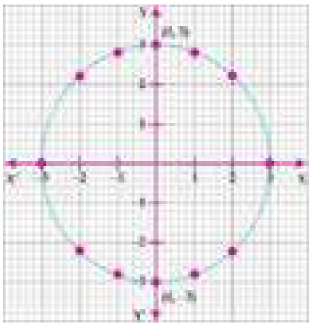
مثال سیمیٹر کمساوات $\alpha^2+\beta^2=9$ گرافیکلی (Graphically) ظاہر کریں اور گراف بنائیں۔

حل دیا گیا ہے کہ

$\therefore\qquad \alpha^2+\beta^2=9$

$\Rightarrow\qquad \beta=\pm\sqrt{9-\alpha^2}$

گراف بنانے کے لیئے ہم کچھ نقاط لیتے ہیں α کی مختلف قیمتیں رکھنے سے β کے قیمتیں ملتی ہیں۔



α	0	1	2	3	−1	−2	−3
β	±3	±2.828	±2.2360	0	±2.828	±2.2360	0

لہذا سیمیٹرک تفاعل $\alpha^2+\beta^2$ دائرے کو ظاہر کرتا ہے جب c=9 کے برابر ہوتا ہے۔

20.4. (iii) دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل کو اس کے عددی سروی کی لحاظ سے حل کرنا

فرض کریں کہ α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \quad \text{(i)}$$

$$\alpha + \beta = -\ a \quad \text{(ii)}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{(iii)}$$

اوپر مساوات (ii) اور (iii) دو درجی مساوات (i) کے پرائمری سمیٹرک تفاعل کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1: اگر α, β مساوات $x^2 - px + q = 0$ کے روٹس ہیں۔ α اور β کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$

حل: α اور β $\quad x^2 - px + q = 0$ کے روٹس ہیں

$a = 1,\quad b = -p$ اور $c = q$

$$\therefore \qquad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-p)}{1} = p$$

اور $\quad \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{q}{1} = q \quad$ اور

یہاں $\quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$= (p)^2 - 2q \qquad (\because \alpha + \beta = p \text{ اور } \alpha\beta = q)$$

$$= p^2 - 2q$$

(ii) $\quad \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{p^2 - 2q}{q} \qquad (\because \alpha + \beta = p \text{ اور } \alpha\beta = q)$$

مشق 20.4 EXERCISE

1. اگر α,β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں مندرجہ ذیل سمیٹرک تفاعل کو α+β اور αβ کی صورت بیان کریں۔

(i) $(\alpha-\beta)^2$ (ii) $(\alpha+\beta)^3$ (iii) $\alpha^2\beta^{-1}+\beta^2\alpha^{-1}$

(iv) $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ (v) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$ (vi) $\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2$

2. اگر α,β مساوات $2x^2-3x+7=0$ کے روٹس ہیں۔
مندرجہ ذیل سمیٹرک تفاعل کی قیمت معلوم کریں

(i) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}$ (iii) $\frac{1}{a\alpha+1}+\frac{1}{a\beta+1}$

3. اگر α,β مساوات $px^2+qx+q=0, p\neq0$ کے روٹس ہیں تو $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ کی قیمت معلوم کریں

4. سمیٹرک تفاعل $\alpha+\beta=8$ کو گرافیکلی (Graphically) ظاہر کریں جب کہ α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں

20.5 دو درجی مساوات کی تشکیل

20.5.(i) کلیہ تشکیل دینا، x^2-(روٹس کا مجموعہ)$x+$(روٹس کا حاصل ضرب)$=0$ دیئے گئے روٹس سے دو درجی مساوات تشکیل دینا۔

فرض کریں α,β دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq0$ کے روٹس ہیں۔

تو $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ اور $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

اب مساوات (i) کو دوبارہ لکھیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے

بشرطیکہ $a\neq0$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

$\Rightarrow x^2-($ روٹس کا مجموعہ $)x+($ روٹس کی حاصل ضرب $)=0$

جبکہ $\frac{-b}{a}$ اور $\frac{c}{a}$ الترتیب روٹس کے مجموعہ اور روٹس کے حاصل ضرب کو ظاہر کرتے ہیں

یعنی اب اس کو واضح طور پر یوں لکھا جاسکتا ہے۔ جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے

$x^2-Sx+P=0$ جبکہ S اور P بالترتیب دی گئی دو درجی مساوات کے روٹ کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال: مساوات تشکیل دیں جس کے روٹس ہیں

(i) $-\frac{4}{5},\frac{3}{7}$ (ii) $7\pm2\sqrt{5}$

حل (i) فرض کریں $\alpha = -\frac{4}{5}$ اور $\beta = \frac{3}{7}$

$\therefore \quad S = \alpha + \beta = -\frac{4}{5} + \frac{3}{7} = \frac{-28+15}{35} = \frac{-13}{35}$

اور $P = \alpha\beta = \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{-12}{35}$

جب روٹس معلوم ہیں تو مساوات ہو گی

$x^2 - Sx + P = 0$

i.e, یعنی $x^2 - \left(\frac{-13}{35}\right)x + \left(\frac{-12}{35}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad 35x^2 + 13x - 12 = 0.$

مطلوبہ مساوات ہے

حل (ii) فرض کریں $\alpha = 7+2\sqrt{5}$ اور $\beta = 7-2\sqrt{5}$

$\therefore \quad S = \alpha + \beta = 7+2\sqrt{5}+7-2\sqrt{5} = 14$

اور $P = \alpha\beta = \left(7+2\sqrt{5}\right)\left(7-2\sqrt{5}\right) = 49-20 = 29$

جب روٹس معلوم ہیں تو مساوات ہو گی

$x^2 - Sx + P = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 14x + 29 = 0,$ مطلوبہ مساوات ہے

20.5.(ii) دو درجی مساوات تشکیل دیں جن کے روٹس کی اقسام یہ ہیں

(a) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (b) α^2, β^2 (c) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(d) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (e) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},$

جبکہ α,β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں

مثال: اگر α,β دو درجی مساوات $x^2 - 5x + 6 = 0$ کے روٹس ہیں۔ مساوات تشکیل دیں جس کے روٹس ہیں

(i) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(iv) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

حل (i): چونکہ α,β مساوات $x^2 - 5x + 6 = 0$ کے روٹس ہیں $a=1, b=-5$ اور $c=6$

یہاں

$\therefore \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6,$ اور $\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{1} = 5$

مطلوبہ مساوات کے روٹس $2\alpha+1$ اور $2\beta+1$ ہیں

اب ہم روٹس کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب معلوم کرتے ہیں

$S=(2\alpha+1)+(2\beta+1)$
$S=2(\alpha+\beta)+2$
$S=2(5)+2 \qquad (\because\ \alpha+\beta=5)$
$S=10+2=12$
$P=(2\alpha+1)(2\beta+1)$ یہاں
$P=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$
$P=4(6)+2(5)+1 \qquad (\because \alpha\beta=6$ و $\alpha+\beta=5)$
$P=24+10+1=35$

$x^2+12x+35=0$ مطلوبہ مساوات ہے

حل **(ii):** مطلوبہ مساوات کے روٹس α^2 اور β^2 ہیں۔

$S=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(5)^2-2(6)=25-12=13, (\because \alpha+\beta=5 \text{ and } \alpha\beta=6)$

$P=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(6)^2=36$ اور

$x^2-Sx+P=0$

$\therefore \quad x^2-13x+36=0,$

مطلوبہ مساوات ہے

حل **(iii):** مطلوبہ مساوات کے روٹس $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ ہیں

$S=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{6}, \qquad (\because \alpha\beta=6$ اور $\alpha+\beta=5)$

$P=\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{6}$ اور

$x^2-Sx+P=0$

$\therefore \quad x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$

$\Rightarrow \quad 6x^2-5x+1=0,$ لہذا

مطلوبہ مساوات ہے

حل **(iv):** مطلوبہ مساوات کے روٹس $\frac{\alpha}{\beta}$ اور $\frac{\beta}{\alpha}$ ہیں

$S=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} \qquad (\because \alpha\beta=6$ اور $\alpha+\beta=5)$

$=\frac{25-2(6)}{6}=\frac{25-12}{6}=\frac{13}{6},$

$P=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{6}{6}=1$ اور

$x^2-Sx+P=0$

$\therefore \quad x^2-\frac{13}{6}x+1=0$

$\Rightarrow \quad 6x^2-13x+6=0,$

مطلوبہ مساوات ہے

حل (v) مطلوبہ مساوات کے روٹس $\alpha+\beta$ اور $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ہیں۔

$$S=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)+\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)$$
$$=5\left(1+\frac{1}{6}\right)=5\left(\frac{7}{6}\right)=\frac{35}{6} \qquad (\because \alpha+\beta=5 \text{ اور } \alpha\beta=6)$$
$$P=(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{25}{6} \qquad (\because \alpha+\beta=5 \text{ اور } \alpha\beta=6)$$
$$x^2-Sx+P=0$$
$$\therefore \quad x^2-\frac{35}{6}x+\frac{25}{6}=0$$
$$\Rightarrow \quad 6x^2-35x+25=0,$$
مطلوبہ مساوات ہے

20.5.(iii) α,β کی قیمت معلوم کریں جبکہ $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ مساوات کے روٹس ہیں

مثال: اگر $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ مساوات $x^2-6x+8=0$ کے روٹس ہیں α اور β کی قیمت معلوم کریں

حل: چونکہ $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ مساوات $x^2-6x+8=0$ کے روٹس ہیں

یہاں $a=1$ ، $b=-6$ اور $c=8$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{a}=-\left(\frac{-6}{1}\right)=6,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6$$
$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta=6\alpha\beta \qquad \ldots \qquad \text{(i)}$$
اور
$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{c}{a}=\frac{8}{1}=8$$
$$\Rightarrow \quad \alpha\beta=\frac{1}{8} \qquad \text{(ii)}$$
مساوات (i) سے
$$\beta=6\left(\frac{1}{8}\right)-\alpha=\frac{3-4\alpha}{4} \qquad \text{(iii)}$$

مساوات (ii) میں β کی قیمت رکھنے سے

$$\alpha\left(\frac{3-4\alpha}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8\alpha}{4}(3-4\alpha)-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha(3-4\alpha)-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 6\alpha-8\alpha^2-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 8\alpha^2-6\alpha+1=0$$

$$\Rightarrow \quad 8\alpha^2-4\alpha-2\alpha+1=0$$

$$\Rightarrow \quad 4\alpha(2\alpha-1)-1(2\alpha-1)=0$$

$$\Rightarrow \quad (2\alpha-1)(4\alpha-1)=0$$

$2\alpha-1=0$ یا $4\alpha-1=0$

$\Rightarrow \quad \alpha=\frac{1}{2}$ یا $\alpha=\frac{1}{4},$

مساوات (iii) ہمارے پاس

$$\beta=\frac{3-4\left(\frac{1}{2}\right)}{4}=\frac{1}{4} \quad \text{or} \quad \beta=\frac{3-4\left(\frac{1}{4}\right)}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

لہٰذا $\alpha=\frac{1}{2}$ اور $\beta=\frac{1}{4}$ یا $\alpha=\frac{1}{4}$ اور $\beta=\frac{1}{2}$

مشق 20.5

1. مساوات تشکیل دیں جس روٹس ہے

(i) $-2, 3$ (ii) ω, ω^2 (iii) $2+i, 2-i$ (iv) $2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$

2. اگر β اور α مساوات $6x^2-3x+1=0$ کے روٹس ہیں۔مساوات تشکیل دیں جس روٹس ہے

(i) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(iv) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

3. مساوات معلوم کریں جس کے روٹس مساوات $px^2-qx+r=0, p\neq 0$ کے روٹس کے معکوس ہیں

4. مساوات معلوم کریں جس کے روٹس مساوات $x^2-px+q=0$ کے روٹس کے دوگنا ہیں

5. مساوات معلوم کریں جس کے روٹس مساوات $px^2+qx+r=0$ کے روٹس کے 2 زیادہ ہو

6. شرط معلوم کریں کہ مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کا ایک روٹ ہو سکتا ہے

(i) دوسرے کا تین گنا (ii) دوسرے کا بھی معکوس

(iii) دوسرے کا مربع (iv) دوسرے کا ضربی معکوس

20.6 اعلیٰ درجے کی مساوات کو دو درجی شکل تک کم کرنا

20.6.(a) مکعب مساوات کو حل کریں اگر مساوات کا ایک روٹ دیا گیا ہو

فرض کریں $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ مکعب مساوات ہے اور اس روٹ α ہے

فرض کریں کہ $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ کا ایک روٹ α ہے تو:

$$f(x)=0$$

$f(x)=(x-\alpha)\cdot f_1(x)$ جبکہ $f_1(x)$ دو درجی اظہاریہ ہے

مثال: $x^3-6x^2+11x-6=0$ کو حل کریں اگر اس مساوات کا ایک روٹ 1 ہے

حل: $x^3-6x^2+11x-6=0$

پر دیا گیا ہے کہ ایک روٹ 1 ہے

یعنی $x=1$ ضرب دیندہ جز ہے

ترکیبی تقسیم کے طریقے سے

1	1	−6	11	−6
	↓	1	−5	6
	1	−5	6	0 = باقی

نیچے ہمارے پاس دو درجی مساوات ہے

$$x^2-5x+6=0$$
$$\Rightarrow x^2-2x-3x+6=0$$
$$\Rightarrow x(x-2)-3(x-2)=0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x-3)=0$$

i.e, $x-2=0$ or $x-3=0$

$\Rightarrow$ $x=2$ or $x=3$

حل سیٹ $=\{1,2,3\}$

20.6.(b) چار درجی (Biquadratic) مساوات حل کرنا اگر مساوات کے دو حقیقی روٹس دیئے گئے ہوں

فرض کریں $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0, a_0\neq 0$ چار درجی مساوات ہے اور α اور β اس کے دو روٹس ہیں

اگر $f(x)=0$ کے دو روٹس α اور β ہیں تو

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdot f_1(x)$$

جبکہ $f_1(x)$ دو درجی اظہاریہ ہے

مثال: چار درجی مساوات $x^4-9x^3+19x^2+9x-20=0$ کے بقیہ دو روٹس معلوم کریں اگر اس کے دو روٹس 5 اور 1

حل: دی گئی چار درجی مساوات $x^4-9x^3+19x^2+9x-20=0$ ہے جس کے روٹس 1 اور 5 دیئے گئے ہیں یعنی ضرب دہندہ 5 اور 1 ہیں

طریقہ ترکیبی تقسیم سے ہمیں ملا

5	1	−9	19	9	−20
	↓	5	−20	−5	20
1	1	−4	−1	4	0 = باقی
	↓	1	−3	−4	
	1	−3	−4	0 = باقی	

اس طرح ہمارے پاس دو درجی مساوات ہے

$$x^2-3x-4=0$$
$$\Rightarrow x^2-4x+x-4=0$$
$$\Rightarrow x(x-4)+1(x-4)=0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x+1)=0$$

یعنی $x-4=0$ یا $x+1=0$

$\Rightarrow$ $x=4$ $\Rightarrow$ $x=-1$

اس لیئے بقیہ دو روٹس 4 اور −1 ہیں

مشق 20.6

1. مکعب مساوات کے بقایا دو روٹس معلوم کریں جبکہ اس کا ایک روٹ دیا گیا ہے

(i) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ اور $x = 1$

(ii) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ اور $x = 3$

(iii) $x^3 - 28x + 48 = 0$ اور $x = 2$

2. چار درجی مساوات کے بقایا دو روٹس معلوم کریں۔ جب کہ اس کے دو روٹس دیئے گئے ہیں

(i) $12x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$ اور $x = 1, -\frac{1}{2}$

(ii) $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ ؛ $x = 1, -1$

(iii) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ اور $x = 3, -4$

3. m کی قیمت معلوم کریں اور مساوات $2x^3 - 3mx^2 + 9 = 0$ کے بقایا روٹس معلوم کریں اگر ایک روٹ 3 ہے

4. اگر مساوات $x^3 - 3ax^2 - x + 6 = 0$ کا ایک روٹ 1 ہے تو a کی قیمت معلوم کریں اور اس کے بقایا روٹس بھی معلوم کریں

5. a اور b کی قیمت معلوم کریں اگر مساوات $x^4 - ax^2 + bx + 252 = 0$ دو روٹس 6 اور -2 ہیں۔ اس کے بقایا دو روٹس بھی معلوم کریں

20.7 ہمزاد مساواتیں (Simultaneous Equations):

دو یا دو سے زیادہ مساوات ایک ساتھ جائیں تو اسے ہمزاد مساواتوں کا نظام کہتے ہیں۔ دو نا معلوم تغیرات کی قیمت معلوم کرنے کے لیئے ہمیں مساواتوں کے ایک جوڑے کی ضرورت ہے
تمام متر تیب جوڑوں (x, y) کا سیٹ جو مساوتوں کے نظام کی تسلی کرتے ہیں نظام کا حل سیٹ کہلاتے ہیں

20.7.(i)(a) دو متغیرات والی دو مساواتوں کو حل کرنا جب ایک مساوات یک درجی اور دوسری دو درجی ہو

مساوات کے نظام کو حل کرنے کا مکمل طریقہ جب ایک مساوات ایک درجی دوسری دو درجی ہو مثالوں کی حل کر کے بھی دکھایا گیا ہے

مثال 1: $2x + y = 10$ اور $4x^2 + y^2 = 68$ مساواتوں کے نظام کو حل کریں

حل:

$2x + y = 10 \qquad \text{(i)}$

$4x^2 + y^2 = 68 \qquad \text{(ii)}$

مساوات (i) سے

$y = 10 - 2x \qquad \text{(iii)}$

y کی قیمت کو مساوات (ii) میں رکھنے سے y

$4x^2 + (10 - 2x)^2 = 68$

$\Rightarrow \quad 4x^2 + 100 - 40x + 4x^2 - 68 = 0$

$\Rightarrow \quad 8x^2 - 40x + 32 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$

$x^2 - 4x - x + 4 = 0$

$(x-4)(x-1) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 4 = 0$ یا $x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 4$ یا $x = 1$

x کی ان قیمتوں کو مساوات (iii) میں رکھنے سے

جب $x = 4$ تو $y = 10 - 2(4) = 2$

جب $x = 1$ تو $y = 10 - 2(1) = 8$

بس حل سیٹ $\{(4,2),(1,8)\}$ ہے

مثال 2: $3x - 2y = 7$ اور $xy = 20$ مساوات کا نظام حل کریں

حل:

$3x - 2y = 7 \qquad \text{(i)}$

اور $xy = 20 \qquad \text{(ii)}$

مساوات (i) سے ہمارے پاس

$x = \dfrac{7+2y}{3} \qquad \text{(iii)}$

x کی قیمت کو مساوات (ii) میں رکھنے سے

$\left(\dfrac{7+2y}{3}\right)y = 20$

$\Rightarrow \quad 7y + 2y^2 = 20 \times 3 = 60$

$\Rightarrow \quad 2y^2 + 7y - 60 = 0$

$\Rightarrow \quad 2y^2 - 8y + 15y - 60 = 0$

$\Rightarrow \quad 2y(y-4) + 15(y-4) = 0$

$\Rightarrow \quad (y-4)(2y+15) = 0$

یعنی $y - 4 = 0$ یا $2y + 15 = 0$

$\Rightarrow \quad y = -\dfrac{15}{2} \qquad \Rightarrow \quad y \quad 4$

y کی قیمت کو مساوات (iii) رکھنے سے

جب $y = 4$ تو $x = \dfrac{7+2(4)}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$

جب $y = -\dfrac{15}{2}$ تو $x = \dfrac{7+2\left(\dfrac{-15}{2}\right)}{3} = -\dfrac{8}{3}$

پس حل سیٹ $\left\{(5,4),\left(-\dfrac{8}{3},-\dfrac{15}{2}\right)\right\}$ ہے

20.7.(i) (b) جب دونوں مساواتیں دو درجی ہو (When both the equations are quadratic):

ہم نظام کو حل کرنے کے طریقے وضاحت کرتے ہیں مندرجہ ذیل مثال کے ذریعے جب دونوں مساوات دو درجی ہوں

مثال 3: $x^2+y^2=4$ اور $2x^2-y^2=8$ مساواتوں کے نظام کو حل کریں

حل:

$x^2+y^2=4$ (i)

$2x^2-y^2=8$ (ii) اور

y^2 خارج کرنے کے لیئے مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے ہمیں پاس

$\therefore \quad 3x^2=12$

$\Rightarrow \quad x^2=4$

$\Rightarrow \quad x=\pm 2,$

$\therefore$ مساوات (i) میں $x=\pm 2$ رکھنے سے ہمیں ملا

$(2)^2+y^2=4$	$(-2)^2+y^2=4$
$\Rightarrow \quad 4+y^2=4$	$\Rightarrow \quad 4+y^2=4$
$\Rightarrow \quad y^2=4-4=0$	$\Rightarrow \quad y^2=4-4=0$
$\Rightarrow \quad y=0$	$\Rightarrow \quad y=0$

پس حل سیٹ $\{(-2,0),(2,0)\}$ ہے

مثال 4: $x^2+y^2=13$ اور $xy=6$ مساوات کے نظام حل کریں

حل:

$x^2+y^2=13 \quad \ldots \quad$ (i)

$xy=6 \quad \ldots \quad$ (ii) اور

مساواتوں کے اس اقسام میں ہم مستقل کو خارج کرتے ہیں

مساوات (i) کو 6 سے اور مساوات (ii) کو 13 سے ضرب دینے سے ہمیں ملا

$\therefore \quad 6x^2+6y^2=78 \quad \ldots \quad$ (iii)

$13xy=78 \quad \ldots \quad$ (iv) اور

مساوات (iii) اور (iv) کو تفریق کرنے سے

$6x \;\; -13xy+6y \;\; =0$

$\Rightarrow \quad 6x^2-9xy-4xy+6y^2=0$

$\Rightarrow \quad 3x(2x-3y)-2y(2x-3y)=0$

$2x-3y=0$ یا $3x-2y=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{3y}{2}$ یا $x=\dfrac{2y}{3}$

پس ہمارے مندرجہ ذیل دو نظام ہیں

$$\left.\begin{aligned} xy &= 6 \\ x &= \frac{3y}{2} \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

اور

$$\left.\begin{aligned} xy &= 6 \\ x &= \frac{2y}{3} \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

نظام A میں

$$\left(\frac{3y}{2}\right)y = 6, \qquad \left(\because x = \frac{3y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 3y^2 = 2\times 6$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{2\times 6}{3} = 4$$

$$y = \pm 2$$

جب $y = \pm 2$ تو $x = \frac{3}{2}(\pm 2) = \pm 3$

نظام B میں

$$\left(\frac{2y}{3}\right)\cdot y = 6 \qquad \left(\because x = \frac{2y}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2 = 3\times 6$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{3\times 6}{2} = 9$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm 3,$$

جب $y = \pm 3$ تو $x = \frac{2}{3}(\pm 3) = \pm 2$

پس حل سیٹ $\{(3,2),(-3,-2),(2,3),(-2,-3)\}$. ہے

20.7.(ii) دو درجی مساوات سے متعلق روز مرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1: دو متواتر مثبت صحیح اعداد معلوم کریں جن کا حاصل ضرب 72 ہے

حل: فرض کریں x اور $x+1$ متواتر صحیح اعداد ہیں

دی گئی شرط کے مطابق

$$x(x+1) = 72$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x - 72 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+9)(x-8) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x+9 = 0 \quad \text{یا} \quad x-8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -9 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

$x = -9$ کا منفی عدد ہونا نظر انداز کر دیں

8 اور 9 مطلوبہ متواتر صحیح انداز ہیں

مثال 2: مستطیل پلاٹ کا رقبہ 320 مربع میٹر ہے۔ پلاٹ کی چوڑائی پلاٹ کی لمبائی 4 میٹر کم ہے۔ پلاٹ کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں

حل: فرض کریں پلاٹ ک لمبائی x ہے تو چوڑائی $x-4$ ہے

دیا گیا ہے

پلاٹ کا رقبہ = $320\ m^2$ مربع میٹر

$$\Rightarrow \quad x(x-4) = 320$$ [رقبہ = لمبائی X چوڑائی مربع میٹر]

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x - 320 = 0$$

$\Rightarrow \quad x^2 - 20x + 16x - 320 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x-20) + 16(x-20) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-20)(x+16) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 20 = 0$ یا $x + 16 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = -16$

$x = -16$ کو نظر انداز کریں کیونکہ لمبائی ہمیشہ مثبت ہوتی ہے

پس پلاٹ کی لمبائی 20 میٹر ہے اور پلاٹ کی چوڑائی 16 میٹر

مشق 20.7

مندرجہ ذیل مساواتوں کے نظام کل حل کریں

1. $2x - y = 3$ یا $x^2 + y^2 = 2$
2. $2x + y = 4$ یا $x^2 - 2x + y^2 = 0$
3. $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 2$ یا $4x + 3y = 25$
4. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ ؛ $x^2 + (y+1)^2 = 10$
5. $x^2 + y^2 = 25$ یا $(4x - 3y)(x - y - 5) = 0$
6. $x^2 + y^2 = 16$ یا $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$
7. $x^2 + y^2 = 5$ یا $xy = 2$
8. $x^2 + xy = 5$ یا $x^2 - 2xy = 2$
9. $x + \frac{4}{y} = 1$ یا $y + \frac{4}{x} = 25$
10. 12 کو دو حصوں میں اس طرح تقسیم کریں کہ ان کے مربعوں کا مجموعہ ان کے حاصل ضرب سے 4 زیادہ ہے۔
11. نماز کے ہال کی لمبائی اس کی چوڑائی سے 5 میٹر زیادہ ہے اگر ہال کا رقبہ 36 مربع میٹر ہے تو ہال کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں۔
12. دو مثبت اعداد کے مربعوں کا مجموعہ 100 ہے ایک عدد دوسرے عدد سے 2 زیادہ ہے۔ اعداد معلوم کریں
13. قائمۃ الزاویہ مثلث کے قاعدے کی لمبائی عمود کی لمبائی سے 3cm زیادہ ہے۔ جبکہ مثلث کا وتر 15cm ہے تو قاعدہ اور عمود کی لمبائی معلوم کریں۔
14. ایک متماثل الساقین مثلث کا احاطہ 36 سنٹی میٹر ہے مثلث دو غیر مساوی اضطلاع کا ارتفاع 12 سنٹی میٹر ہے۔ مثلث کی تینوں اطراف کی لمبائی معلوم کریں۔
15. دو اعداد کا فرق 5 ہے اور ان کے مربعوں کے مربعوں کا فرق 275 ہے اعداد معلوم کریں

اعادہ مشق 20

1. کثیر انتخابی سوالات

درست جواب پر دائرہ لگائیں

i. اگر p اور q مساوات $2x^2+5x+3=0$ کے روٹس ہیں تو $p+q =$ ______

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) $-\frac{5}{2}$

ii. اگر $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ کے روٹس ہیں تو $\alpha+\beta =$ ______

(a) $-\frac{b}{a}$ (b) $\frac{b}{c}$ (c) $-\frac{b}{c}$ (d) $-\frac{c}{b}$.

iii. اگر $(p+1)x^2+(2p+3)x+(3p+4)=0$ کے روٹس کا مجموعہ 1- ہے تو روٹس کا حاصل ضرب ______ ہے

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

iv. $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ کے روٹس کی نوعیت معلوم کی جاتی بذریعہ: ______

(a) روٹس کا مجموعہ (b) روٹس کا حاصل ضرب

(c) فرق کنندہ (d) ان میں کوئی نہیں

v. اگر دو درجی مساوات کا روٹس کا مجموعہ $\frac{b}{a}$ اور روٹس کا حاصل ضرب $\frac{c}{a}$ ہے تو مساوات ہے: ______

(a) $ax^2+bx+c=0$ (b) $ax^2+bx-c=0$

(c) $ax^2-bx+c=0$ (d) $ax^2-bx-c=0$

vi. مطلوبہ مساوات ______ ہے جس کے روٹس معکوس ہیں $ax^2+bx+c=0$ کے روٹس کے

(a) $ax^2+bx+c=0$ (b) $cx^2+bx+a=0$

(c) $cx^2+ax+b=0$ (d) $cx^2-bx-a=0$

vii. اگر $x^2-2x-15=0$ کے روٹس α اور β ہیں تو $\alpha^2+\beta^2$ کی قیمت ______ ہے

(a) 34 (b) −34 (c) 26 (d) − 26

viii. اگر دو درجی مساوات کا $\Delta=b^2-4ac$ جس کے حقیقی عددی سر مکمل مربع ہیں تو روٹس ہیں ______

(a) حقیقی اور مساوی (b) حقیقی، ناطق اور غیر مساوی

(c) حقیقی، غیر ناطق اور غیر مساوی (d) غیر حقیقی

ix. اگر دو درجی مساوات کا ایک روٹ $2+\sqrt{3}$ ہے تو دوسرا روٹ ______ ہو گا

(a) 2 (b) $-2+\sqrt{3}$ (c) $2-\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

x. دو درجی مساوات ______ جس کے روٹس کمپلیکس مکعب روٹ ہے

(a) $x^2-x-1=0$ (b) $x^2-x+1=0$

(c) $x^2+x+1=0$ (d) $x^2+x-1=0$

2. مندرجہ ذیل مساوات کے روٹس کی نوعیت پر بحث کریں۔

i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ ii) $x^2 - 14x + 49 = 0$

iii) $x^2 - x + 7 = 0$ iv) $x^2 - 5 = 0$

3. k کس قیمت کے لیئے مساوات $x^2 + kx + 4 = 0$

i) مساوی روٹس ہیں ii) کمپلیکس روٹس ہیں

iii) حقیقی روٹس ہیں iv) ناطق روٹس ہیں

4. 729 کے مکعب روٹس معلوم کریں

5. مندرجہ ذیل دو درجی مساواتوں کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کریں

i) $x^2 - 7x + 29 = 0$ ii) $x^2 - px + q = 0$

iii) $7x - 8 = 5x^2$ iv) $11x = 9x^2 - 28$

6. دو درجی مساوات کے سمیٹرک تفاعل کی تعریف کریں

7. دو درجی مساوات تشکیل دیں جس کے روٹس $1-\sqrt{3}$ اور $1+\sqrt{3}$ ہیں

8. مساوات معلوم کریں جس کے روٹس مساوات $x^2 - 10x + 16 = 0$ کے روٹس کے معکوس ہیں۔

9. مندرجہ زیل مساوات کے نظام کو حل کریں۔

i) $x^2 + y^2 = 13$, $x + y = 5$ ii) $x^2 + y^2 = 37$, $2xy = 12$

خلاصہ

- دو درجی اظہاریے $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کا فرق کندہ $\Delta = b^2 - 4ac$ ہے
  - i. اگر $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ تو روٹس حقیقی اور غیر مساوی ہیں
  - ii. اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ تو روٹس غیر حقیقی ہیں (کمپلیکس یا غیر حقیقی)
  - iii. اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ تو روٹس ناطق اور مساوی ہیں، ہر ایک $-\frac{b}{2a}$ کے برابر ہے
  - iv. اگر a, b, c ناطق ہیں اور $\Delta = b^2 - 4ac$ مکمل مربع ہے تو روٹس ناطق اور غیر مساوی ہیں ورنہ غیر ناطق
- اکائی مکعب روٹس ۱، ω اور ω^2 ہیں
- اکائی مکعب روٹس کی خصوصیات ہیں
  - i. ہر اکائی کا مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا مربع ہوتا ہے
  - ii. اکائی کے تینوں مکعب روٹس کا مجموعہ صفر ہوتا ہے
  - iii. اکائی کے تینوں مکعب روٹس کا حاصل ضرب 1 ہوتا ہے
  - iv. ہر اکائی کے مکعب کا کمپلیکس روٹ دوسرا کا معکوس ہوتا ہے
- اگر α اور β دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ کے روٹس ہیں تو:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{اور} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

- دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل ایسے تفاعل ہوتے ہیں جب روٹس آپس میں تبدیل کئے جاتے ہیں تو تفاعل تبدیل نہیں ہوتے ہیں ویسے ہی رہتے ہیں۔ یعنی: $f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)$