یونٹ نمبر 19

قالب اور مقطع

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہوجائیں گے کہ

- ❖ حقیقی اندراج (ارکان) والے قابل مستطیل شکل کا عملی زندگی سے ربط قائم کرسکیں۔
- ❖ قالب کی قطاروں اور قالموں کے بارے میں جان سکیں
- ❖ قالب کے مرتبہ۔
- ❖ دو مساوی قالب۔
- ➤ قطاری قالب، کالمی قالب، مستطیلی قالب، مربعی قالب، صفری قالب، اکائی قالب، اسکیلر یا میزانیہ قالب، وتری قالب، قالب کا بدل، سمیٹرک قالب (3x3) اور اسکیو سمیٹرک قالب کی تعریف اور نشان دہی کرسکیں۔
- ➤ جانتا کہ دیئے گے قالموں کی جمع اور تفریق ممکن ہے۔
- ➤ قالب کی حقیقی عدد سے اسکیلر کی ضرب۔
- ➤ قالبوں کی جمع اور تفریق۔
- ➤ قانون مبادلہ اور قانون تلازم بلحاظ جمع کی تصدیق کرنا
- ➤ جمع ذاتی قالب۔
- ➤ قالب کا جمع المعکوس معلوم کرنا۔
- ➤ جاننا کہ آیا دیے گئے قالبوں کی ضرب ممکن ہے یا نہیں۔
- ➤ دو (یا تین) قالبوں کی ضرب۔
- ➤ قانون تلازم بلحاظ ضرب کی تصدیق۔
- ➤ قانون تقسیمی کی تصدیق۔
- ➤ مثال کی مدد سے ثابت کریں کہ قانون مبادلہ بلحاظ ضرب عموماً نہیں ہوتا ہے (جیسے AB≠BA)
- ➤ ضربی ذاتی قالب کا جاننا۔
- ➤ $(AB)^t = B^tA^t$. کی تصدیق۔
- ➤ مربعی قالب کا مقطع
- ➤ قالب کے مقطع کی قیمت معلوم کریں
- ➤ نادر اور غیر نادر قالب
- ➤ مائینرز اور کو فیکٹرس
- ➤ قالب کا مُتصل
- ➤ غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس معلوم کریں اور تصدیق کریں کہ جب کہ I ضربی ذاتی قالب ہے
- ➤ بذریعہ طریقہ متصل، غیر نادر قالب کا ضربی معکوس معلوم کرنا
- ➤ دو متغیرات والی یک درجی ہمزاد مساواتوں کو عملی زندگی کے مسائل سے ربط پیدا کرتے ہوئے حل کریں
- ➤ معکوس قالب کا طریقہ
- ➤ کریمر (Crammer) کے اصول

19.1 قالبوں کا تعارف Introduction to Matrices

قالبوں کے تعلق ریاضی کی شاخ یک درجی الجبرا اس کا استعمال خاص طور پر بزنس، انجنیئرنگ، فزکس اور کمپیوٹر سائنس میں کیا جاتا ہے۔ قالب کا نظریہ مشہور ریاضی دان ارتھر کیلی (1821-1895) نے پیش کیا۔

19.1 (i) حقیقی اندراج (ارکان) والے قالب مستطیلی شکل کا عملی زندگی سے ربط

قالب عناصر کی مستطیلی شکل ہوتی ہے۔ عناصر کو علاقی طور پر اظہارے یا اعداد میں ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔ قالب کو عموماً انگریزی کے بڑے حروف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے اور ہر ارکان یا عضر کو چھوٹے حرف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قالب کے عناصر (ارکان) کو [ ] یا () میں بند کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \text{ یا } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \qquad (1)$$

a_{11}، a_{22}، اور a_{33} خاص وتر کے ارکان یا عناصر میں اور وتری عناصر (ارکان) کہلاتے ہیں۔

آئیں روز مرہ زندگی سے ایک مثال لیتے ہیں، مندرجہ ذیل جدول تین گھروں میں رہنے والوں کی تعداد، ٹیلی وژن اور کمپیوٹر ظاہر کئے گئے ہیں۔

	کمپیوٹر	ٹیلی وژن	رہائشی
گھر A	2	4	1
گھر B	2	6	3
گھر C	1	2	0

اوپر والا مواد قالبی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1\\ 6 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

نوٹ: لفظ "قالب" کی جمع "قالبوں" ہے

19.1 (ii) قالب کی قطاروں اور کالموں کے بارے میں جاننا

قالب میں افقی خط میں اندراج قالب کی قطار کہلاتی ہے اور قالب میں عمودی خط میں اندراج قالب کا کالم کہلاتا ہے

مثال کے طور پر $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4\\ 6 & 3 & -2 & 0\end{bmatrix}$ دو افقی خطوط میں

اندراج ہے لہٰذا یہ دو قطاروں پر مشتمل ہے۔ اس کا چار عمودی خطوط میں اندراج ہے یہ چار کالموں پر مشتمل ہے

19.1. (iii) قالب کا مرتبہ

قالب کے مرتبہ کو اُس کی قطاروں اور کالموں کی تعداد سے وضاحت کی جاتی ہے۔

قالب کے مرتبہ کو mxn (m سے n پڑھتے ہیں) ظاہر کرتے ہیں۔ دیئے گئے قالب میں m قطاروں کی تعداد اور n کالموں کی تعداد ہے۔

مثال کے طور پر

اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9\\ 12 & 11 & 35\end{bmatrix}$ تو A کا مرتبہ 2x3 ہے

(iv) 19.1. دو مساوی قالب Equality of two matrices

دو قالب A اور B مساوی قالب کہلاتے ہیں اگر ان کی مرتبے ایک جیسے اور ان کی متناظرہ ارکان (عناصر) برابر ہوں علامتی طور پر ہم یوں A=B لکھتے ہیں۔

مثال کے طور پر

$A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$ مساوی قالب ہیں

$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ \\ 5 & 4\end{pmatrix}$ اور $Q=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ مساوی قالب نہیں ہیں

کیونکہ ان کا مرتبہ ایک جیسا نہیں ہے۔

19.2 قالبوں کی اقسام Types of Matrices

(i) .19.2 قطاری قالب، کالمی قالب، مستطیلی قالب مربعی قالب، صفری قالب، اکائی قالب، اسکیر یا میزانیہ قالب، وتری قالب، قالب کا بدل، سمیٹرک قالب (3x3 تک) اور اسکیو سمیٹرک قالب کی تعریف اور نشان دہی کریں

قطاری قالب (Row Matrix):

کسی قالب میں صرف ایک قطار ہو وہ قطاری قالب کہلاتا ہے

مثال کے طور پر $\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix}4 & 3 & 8 & 6\end{bmatrix}$ قطاری قالب ہیں

کالمی قالب Column matrix

کسی قالب میں صرف ایک کالم ہو وہ کالمی قالب کہلاتا ہے

مثال کے طور پر

$\begin{bmatrix}7\\ 5\\ 9\end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\\ 5\end{bmatrix}$ کالمی قالب ہیں

مستطیلی قالب Rectangular matrix

کسی قالب جس میں قطاروں کی تعداد اور کالموں کی تعداد برابر نہ ہو وہ مستطیلی قالب کہلاتا ہے جیسے $m \neq n$.

مثال کے طور پر

$A=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}5 & 3 & 9\\ 1 & -7 & 10\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 7 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ مستطیلی قالب ہیں

مربعی قالب (Square Matrix)

قالب جس میں قطاروں کی تعداد اور کالموں کی تعداد برابر ہو وہ مربعی قالب کہلاتا ہے جیسے $m = n$ مثال کے طور پر

$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}9 & 5 & 2\\ 1 & 8 & 5\\ 3 & 1 & 6\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}x & y & z & 1\\ a & b & c & 1\\ p & q & r & 1\\ m & n & o & 1\end{bmatrix}$. مربعی قالب ہیں

صفری قالب Zero/null matrix

صفری قالب کا ہر عنصر صفر کے برابر ہو اِسے عموماً بڑا حرف تہجی 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ صفری قالب کی چند مثالیں مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ اور } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتری قالب Diagonal matrix

مربعی قالب وتری قالب کہلاتا ہے اگر اس کے تمام عناصر صفر ہوں سوائے کم از کم ایک عنصر کے جو خاص وتر پر ہو

مثال کے طور پر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ وتری قالب ہیں

اسکیلر (میزانیہ قالب) ScalarMatrix

وتری قالب جس میں وتر کے تمام عناصر ایک جیسے ہوں اسکیلر (میزانیہ قالب) ہیں

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$ اسکیلر (میزانیہ قالب) ہیں

اکائی قالب Identity/unit matrix

وتری قالب جس میں خاص وتر کا ہر عنصر ا ہوتا ہے

اسے عموماً بڑے حرف I سے ظاہر کرتے ہیں

مثال کے طور پر

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

قالب کا بدل Transpose of a matrix

کسی قالب کی قطاروں کو کالموں میں یا کالموں کو قطاروں میں تبدیل کرنے سے جو قالب حاصل ہوتا ہے وہ قالب کا بدل کہلاتا ہے اسے A^t سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}. \text{ اور } \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$ کا بدل ہے

سمیٹرک قالب Symmetric Mystic

مربعی قالب کو سمیٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر اُس کا بدل خود وہی ہوتا ہے یعنی $A^t = A$. جیسے

مثال کے طور پر

اگر $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & -11 \\ 17 & -11 & 9 \end{bmatrix}$$ تو $$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & -11 \\ 17 & -11 & 9 \end{bmatrix}.$$

جیسا کہ $A^t = A$. لہذا سمیٹرک قالب ہے

اسکیو سمیٹرک قالب Skew symmetric matrix

مربعی قالب کو اسکیو سمیٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر اُس کا بدل خود وہ ہی ہو مگر منفی

جیسے مثال کے طور پر

اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\ -3 & 0 & 7\\ -4 & -7 & 0\end{bmatrix}$ تو $A^T=\begin{bmatrix}0 & -3 & -4\\ 3 & 0 & -7\\ 4 & 7 & 0\end{bmatrix}=-A$

جیسا کہ $A^t=-A$ لہذا A اسکیو سمیٹرک قالب ہے

19.3 قالبوں کی جمع اور تفریق Addition and Subtraction of Matrices

19.3 (i) جاننا کہ آیا دیئے گئے قالبوں کی جمع اور تفریق ممکن ہے

اگر دو قالب A اور B ایک جیسے مراتب رکھتے ہیں تو ان کی جمع اور تفریق ممکن ہے

مثال کے طور پر

$\begin{bmatrix}2 & 6\\ 5 & 9\end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ کی جمع اور تفریق ممکن ہے

19.3(ii) قالب کی حقیقی عدد سے میزانیہ ضرب

کسی قالب کی حقیقی عدد سے ضرب میزانیہ ضرف کہلاتی ہے۔ میزانیہ ضرب میں قالب میں ہر اندراج (سفر) دیے ہوئے میزانیہ C سے ضرب بتاہے۔ اگر C ایک میزانیہ ہے اور A قالب ہے تو قالب کی میزانیہ ضرب کو CA سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر

اگر $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 5\\ -1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$ اور $c=-5$ تو $cA=-5\begin{pmatrix}0 & -1 & 5\\ -3 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$

یعنی $cA=\begin{pmatrix}0 & 5 & -25\\ 15 & -10 & -5\\ -10 & 0 & 20\end{pmatrix}$

19.3(iii) قالبوں کی جمع اور تفریق Add and Subtract Matrices

دو قالب A اور B جمع اور تفریق کئے جاتے ہیں دونوں قالبوں کے متناظرہ عناصر کی جمع اور تفریق کے ذریعے

مثال کے طور پر

اگر $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ تو $A+B=\begin{pmatrix}2+1 & 5+4\\ -1+3 & 3+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 2 & 10\end{pmatrix}$

تفریق کے لیئے

اگر $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 6 & 1\\ 2 & 9 & 0\end{pmatrix}$ ، $Q=\begin{pmatrix}10 & 4 & 2\\ 2 & 7 & 1\\ 1 & 9-4\end{pmatrix}$ تو $P-Q=\begin{pmatrix}1-10 & 0-4 & 2-2\\ 4-2 & 6-7 & 1-1\\ -2-1 & 9-9 & 0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & -4 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -3 & 0 & -4\end{pmatrix}$

19.3(iv) قانون مبادلہ اور قانون تلازم بلحاظ جمع تصدیق

قانون مبادلہ بلحاظ جمع

اگر A اور B قالبوں کے مراتب ایک ہی ہوں تو قانون مبادلہ بلحاظ جمع ہم یوں واضح کرتے ہیں

مثال: قانون مبادلہ بلحاظ جمع تصدیق کریں

اگر $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 6 & 1\\ -2 & 9 & 0\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}10 & 4 & 2\\ 2 & 7 & 1\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}$

یہاں

$$A+B=\begin{pmatrix}1+10 & 0+4 & 2+2\\ 4+2 & 6+7 & 1+1\\ -2+1 & 9+9 & 0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 4 & 4\\ 6 & 13 & 2\\ -1 & 18 & 4\end{pmatrix}$$

اب

$$B+A=\begin{pmatrix}10+1 & 4+0 & 2+2\\ 2+4 & 7+6 & 1+1\\ 1-2 & 9+9 & 4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 4 & 4\\ 6 & 13 & 2\\ -1 & 18 & 4\end{pmatrix}.$$

چونکہ $A + B = B + A$ اس لئے قانون مبادلہ بلحاظ جمع تصدیق ہوا

قانون تلازم بلحاظ جمع Associative law w.r.t addition

اگر A، B اور C ایک ہی مراتب کے تین قالب ہیں تو قانون تلازم بلحاظ جمع کی یوں وضاحت کی جاتی ہے

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

مثال: قانون تلازم بلحاظ جمع تصدیق کریں

اگر $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ اور $C=\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}$

یہاں

$$(A+B)+C=\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}$$

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}15 & 18\\ 21 & 24\end{pmatrix}$$

اب

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}14 & 16\\ 18 & 20\end{pmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}15 & 18\\ 21 & 24\end{pmatrix}$$

چونکہ $(A+B)+C=A+(B+C)$ اس لیئے قانون تلازم بلحاظ جمع تصدیق ہوا

(v)19.3 جمع ذاتی قالب (Additive Identity)

اگر O اور A ایک ہی مراتب کے دو قالب ہیں اور جبکہ $A + O = A = O + A$. یہاں O صفری قالب ہے اور A کا جمع ذاتی قالب کہلاتا ہے

19.3 (vi) قالب جمعی معکوس معلوم کریں Find additive inverse of a matrix

اگر B اور A ایک ہی مراتب کے دو قالب ہیں اس طرح کی $A + B = O = B + A$ تو A اور B ایک دوسرے کے جمع معکوس ہیں۔ قالب A کے جمع معکوس کو $-A$ سے ظاہر کرتے ہیں

مثال کے طور پر

اگر
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

تو
$$-A = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & -1 \\ 2 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

19.4 قالبوں کی ضرب (2 سے 2 تک)

19.4 (i) جاننا کہ آیا دیئے گئے قالبوں کی ضرب ممکن ہے یا نہیں

دو قالب A اور B کی ضرب ممکن ہے اگر پہلے قالب کے قالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہو

مثال کے طور پر

$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ کی ضرب ممکن ہے

19.4 (ii) دو (یا تین) قالبوں کی ضرب Multiply two (or three) matrices

اگر دو قالبوں کی ضرب ممکن ہے تو حاصل ضرب AB کا عنصر a_{ij} حاصل ہو گا بذریعہ ضرب A کی i ویں قطار اور B کی j واں قالم سے

مثال نمبر 1

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ تو AB معلوم کریں

حل

یہاں AB ممکن ہے کیونکہ A کے کالموں کی تعداد 2 ہے اور B کی قطاروں کی تعداد بھی 2 ہے

اب
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1(0)+2(6) & 1(-1)+2(7) \\ 3(0)+4(6) & 3(-1)+4(7) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0+12 & -1+14 \\ 0+24 & -3+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

مثال 2

حاصل ضرب معلوم کریں

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

حل

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4+12 & 5+0\\ 8+16 & 10+0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}16 & 5\\ 24 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}96+25 & 128+5\\ 144+50 & 192+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}121 & 133\\ 194 & 202\end{pmatrix}$$

19.4 (iii) قانون تلازم بلحاظ ضرب کی تصدیق

فرض کریں A, B اور C تین قالب ہیں تو قانون تلازم بلحاظ ضرب یوں جاتی ہے .(AB)C=A(BC)

مثال نمبر 1 قانون تلازم بلحاظ ضرب تصدیق کریں جب کہ

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$ اور $$C=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

پڑتال

$$\text{L.H.S}=(AB)C$$

$$\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 13\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 36\\ -5 & 4\end{bmatrix}$$

$$\text{R.H.S}=A(BC)$$

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -4\\ -2 & 24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 36\\ -5 & 4\end{bmatrix}$$

پس قانون تلازم بلحاظ ضرب تصدیق ہوا

19.4 (iv) قانون تقسیمی کی تصدیق Verify distributive laws

فرض کریں A ,B اور C تین قالب ہیں تو قانون تقسیمی ہوتے ہیں

(بایاں قانون تقسیمی) A(B+C) = (AB)+(AC)

(دایاں قانون تقسیمی) (B+C) A = (BA)+(CA)

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ تو مندرجہ ذیل کی تصدیق کریں

(i) $A(B+C)=(AB)+(AC)$ (ii) $(B+C)A=(BA)+(CA)$

پڑتال

(i) $A(B+C)=(AB)+(AC)$

$L.H.S=A(B+C)$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

$R.H.S=AB+AC$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

لہذا

پس $LHS = RHS$

$A(B+C)=(AB)+(AC)$

پس تصدیق ہوا

جبکہ اس ہی طریقے کے مطابق $A=(BA)+(CA)$ کی بھی تصدیق کی جاسکتی ہے

19.4 (v) مثال کی مدد سے ثابت کریں کہ قانون مبادلہ بلحاظ ضرب عموماً نہیں ہوتا ہے

مثال

فرض کریں $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ تصدیق کریں کہ $AB \neq BA$

پڑتال:

$$AB=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}(-5+6) & (10-4)\\ (2-3) & (-4+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

Now,

اب

$$BA=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}(-5-4) & (-2-2)\\ (15+4) & (6+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -4\\ 19 & 8\end{bmatrix}$$

$\because AB \neq BA \quad \therefore$

لہذا قانون مبادلہ بلحاظ ضرب عموماً نہیں ہوتا ہے

19.4 (vi) ضربی ذاتی قالب (Multiplicative Identity of a matrix)

فرض کریں A، n مرتبہ کا مربعی قالب ہے تو I_n اکائی قالب ہے یہ ذاتی قالب بلحاظ ضرب یا ضربی ذاتی قالب کہوائے گا یوں

$AI_n = A$ یا $I_nA = A$ واضح کرتے ہیں۔

مثال

فرض کریں $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ تصدیق کریں کہ $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ضربی ذاتی قالب ہے

حل دیا ہوا ہے کہ

$$AI_2=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=A$$

$$I_2A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=A.$$

(vii) 19.4 تصدیق کریں $(AB)^t = B^tA^t$ Verify the result

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\end{bmatrix}$ تصدیق کریں کہ $(AB)^t=B^tA^t$

پڑتال

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2\\11&-4\end{bmatrix}$$

$$(AB)^t=\begin{bmatrix}5&11\\-2&-4\end{bmatrix}.$$

اب

$$B^tA^t=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&11\\-2&-4\end{bmatrix}$$

$(AB)^t=B^tA^t.$

پس تصدیق ہوئی

مثال 2:

اگر $A=\begin{pmatrix}6&5&2\\4&6&3\\0&1&7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}6&8&0\\5&1&2\\3&6&4\end{pmatrix}$. تصدیق کریں $AB'=B'A'$

تصدیق

$$AB=\begin{pmatrix}6&5&2\\4&6&3\\0&1&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&8&0\\5&1&2\\3&6&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}36+25+6&48+5+12&0+10+8\\24+30+9&32+6+18&0+12+12\\0+5+21&0+1+42&0+2+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}67&65&18\\63&56&24\\26&43&30\end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 67 & 65 & 18 \\ 63 & 56 & 24 \\ 26 & 43 & 30 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

اب، $B^tA^t = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}^t$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36+25+6 & 24+30+9 & 0+5+21 \\ 48+5+12 & 32+6+18 & 0+1+42 \\ 0+10+8 & 0+12+12 & 0+2+28 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

پس تصدیق ہوئی $(AB)^t = B^tA^t$.

مشق 19.1

1. مندرجہ ذیل قالبوں کی قسم بتائیں

(i). $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ (v). $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.

2. مندرجہ ذیل ہر قالب کا مرتبہ کیا ہے

(i). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (v). $[0]$

3. جانچیں آیا مندرجہ ذیل قالب سمیٹرک ہیں یا سکیو سمیٹرک

(i). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 4 \\ -6 & 0 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

4. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ اور $E=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\-1 & 0 & 2\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

ممکن ہو مندرجہ ذیل معلوم کریں

(i) $A+C$ (ii) $A+E$ (iii) $B-D$ (iv) $2B+3A$

(v) $B-C$ (vi) A^2 (vii) B^2 (viii) $D+E$

5. اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\2 & 1 & 0\\3 & 2 & -1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\-2 & 4 & 1\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ مندرجہ ذیل معلوم کریں

(i) $A+B$ (ii) $A-B$ (iii) $3A+2B$

(iv) AB (v) BA (vi) A^2

6. تصدیق کریں کہ (i) $A+B=B+A$ (ii) $C-D\neq D-C$

اگر $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\-7 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\7 & -4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 1 & -4\\4 & 3 & 1\\1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ اور $D=\begin{pmatrix}2 & 7 & -5\\-2 & 1 & 0\\6 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}8 & 2 & -1\\2 & 1 & 2\\2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & -4\\2 & 5 & 7\\0 & -4 & 3\end{pmatrix}$. ثابت کریں $AB\neq BA$ چونکہ

8. اگر $A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\7 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -1\\-7 & 4\end{pmatrix}$ اور $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & -4\end{pmatrix}$, تو $2A-3B+4C$. معلوم کریں

9. اگر $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ تو a، b، c اور d معلوم کریں

10. $\begin{bmatrix}x & -1 & y\\2 & 0 & 3\\z & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & a & x\\b & 0 & c\\2 & 3 & d\end{bmatrix}$ تو a، b، c، d، x، y اور z معلوم کریں

11. مندرجہ ذیل قالبوں کے ممکنہ حاصل ضرب معلوم کریں

$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\-1 & 0 & -4\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

12. معلوم کریں $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 1 & 2\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\1 & 3 & 2\\3 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

13. اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$

تو تصدیق کریں (i). $A(B+C)=AB+AC$ (ii). $(B+C)A=BA+CA$.

14. اگر $A=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 4 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6 & 8 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & 6 & 4\end{pmatrix}$ اور $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$، مندرجہ ذیل کی تصدیق کریں

(a) $A+B=B+A$ (b) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(c) $(A+B)C=AC+BC$ (d) $A(B+C)=AB+AC$

15. اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ تو

ثابت کریں کہ $A(BC)=(AB)C$.

19.5 قالب کا مقطع Determinant of a Matrix

19.5 (i) مربعی قالب کا مقطع Determinant of a Matrix

ہم ہر مربعی قالب کے ساتھ ایک عدد $|A|$ منسوب کرسکتے ہیں جن کا تعلق R سے ہوتا ہے۔ اُسے قالب (A) کا مقطع کہا جاتا ہے۔

اگر، $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ تو قالب A کا مقطع $|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$. سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

19.5 (ii) قالب کے مقطع کی قیمت معلوم کریں

اگر، $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ تو قالب A کا مقطع

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}= ad-bc$$

مثال کے طور پر

$$\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}=3\times(-4)-7\times1=-19.$$

اب قالب (3x3) $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ کے مقطع

کے لیئے پینٹیر فارمولا مندرجہ ذیل ہے

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

نوٹ1: مقطع کا معلوم کرنا اوپر دیئے گئے پھیلاؤ R_1 کے ذریعے

:2

مثلاً: اگر $A=[a_{11}]$ پھر $|A|=|a_{11}|=a_{11}$

اگر $A=[-2]$ پھر $|A|=|-2|=-2$

اگر $A=[3]$ پھر $|A|=|3|=3$

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}4&-3&5\\1&0&3\\-1&5&2\end{bmatrix}$ $|A|$ معلوم کریں

حل: مقطع $|A|$ معلوم کرنے کے لیئے آئیں مقطع کو R_1 کے ذریعے پھلادیں

$$|A|=4\begin{vmatrix}0&3\\5&2\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}1&3\\-1&2\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1&0\\-1&5\end{vmatrix}$$

$$|A|=4(0-15)+3(2+3)+5(5+0)=-20.$$

پس

19.5 (iii) نادر اور غیر نادر قالب Define singular and non_singular matrices

اگر کسی قالب کا مقطع صفر ہو اِسے نادر قالب کہاجاتا ہے جسے $|A|=0$ اگر کسی قالب کا مقطع صفر نہ ہو تو غیر نادر قالب کہاجاتا ہے۔
جیسے $|A|\neq 0$

نوٹ: ایک نادر قالب کو قالب (non-invertible) بھی کہاجاتا ہے اور ایک غیر نادر قالب کو (invertible) قالب بھی کہا جاتا ہے۔

مثال

$A=\begin{bmatrix}2&4&6\\2&0&2\\6&8&14\end{bmatrix}$ معلوم کریں آیا نادر قالب ہے یا نہیں

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&4&6\\2&0&2\\6&8&14\end{vmatrix}=2(0-16)-4(28-12)+6(16-0)=-32-64+96=0.$$

چونکہ $|A|=0$
A نادر قالب ہے

19.5 (iv) مائینرز اور کو فیکٹرس (Minors and Cofactors)

آئیں فرض کریں ایک مربعی قالب A کا مرتبہ 3x3 ہے تو عنصر a_{ij} کے مائینرز M_{ij} ظاہر کئے جاتے ہیں۔ عنصر a_{ij} کے مائنز کا مقطع قالب A کے قطار اور j^{th} کالم کو ترک کرکے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ A تو A کی قطار اور کالم ترک کرنے بعد

قالب ملے گا اور اس کا مقطع M_{12} جو مائیز ہے۔ یوں واضح کہاجاتا ہے نیچے

$M_{12}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$

جبکہ عنصر (الکان) a_{ij} کا کو فیکٹرس A_{ij} ظاہر کیا جاتا ہے اور معلوم کیا جاسکتا ہے

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

جبکہ M_{ij} مربعی قالب A کے عنصر a_{ij} کا مائنز ہے

مثال

فرض کریں $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

تو A_{12} اور M_{12} معلوم کریں

یہاں $M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 6(-7) - 4(1) = -46$

اور $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

اگر $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$

$A_{12} = (-1)^3(-46)$

$A_{12} = (-1)(-46) = 46$.

19.6 قالب کا ضربی معکوس Multiplicative Inverse of a Matrix

19.6(i) قالب کا متصل Define adjoint of a matrix

مرتبہ 2x2 کے قالب کا متصل Adjoint of a matrix with order 2 × 2

فرض کریں $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو قالب A کا متصل adjA یا AdjA سے ظاہر کرتے ہیں۔

اور $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ تو

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t.$$

جبکہ A_{11}، A_{12}، ...A_{33}، A کے کوفیکٹرز ہیں۔

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ تو

قالب A کا مُتصل (Ad joint) معلوم کریں۔

حل: سب سے پہلے ہم قالب A کے تمام کوفیکٹرز (Confects) معلوم کرتے ہیں۔

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

اب $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t.$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 6 & -5 & -8 \end{bmatrix}.$$

19.6(iii) غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس معلوم کریں اور تصدیق کریں کہ I ضربی ذاتی قالب ہے۔

جبکہ $AA^{-1} = I = A^{-1}A,$

اگر A اور B مراتب mxn کے غیر نادر قالب ہیں اس طرح $AB = BA = I_n$ تو A اور B ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔
A کے معکوس کو A^{-1} سے ظاہر کرتے ہیں

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ تو معلوم کریں A اور B ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں

حل

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-14 & -21+21 \\ 10-10 & -14+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اس ہی طرح $BA = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-14 & 35-35 \\ -6+6 & -14+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

یوں $AB = BA = I_2$

پس A اور B ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

19.6(iii) بذریعہ طریقہ مُتصل (Ad joint) غیر نادر قالب کا ضربی معکوس معلوم کریں۔

فرض کریں $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک غیر نادر قالب ہے تو A معلوم کیا جاسکتا ہے

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} \quad \text{جب کہ} \quad |A| \neq 0.$$

ضربی معکوس معلوم کرنے کا طریقہ، طریقہ مُتصل (Adjoint Method) کہلاتا ہے۔

مثال

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس بذریعہ طریقہ مُتصل معلوم کریں۔

حل چونکہ $|A| \neq 0$ کا ضربی معکوس ممکن ہے یہاں $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2.$

اب $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ ؛

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

مثال

بذریعہ طریقہ مُتصل $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس بذریعہ طریقہ مُتصل معلوم کریں۔

حل

یہاں

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 9(2-0) - 2(-10-24) + 1(0+4)$$

$$= 18 + 68 + 4$$

$$= 90.$$

چونکہ $|A| \neq 0$, لہٰذا A^{-1} ممکن ہے

اب ہم A کے تمام کو فیکٹر (Cofactors) معلوم کریں۔

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-10-24) = 34$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0+4 = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-0) = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-18-4) = -22$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -(0-8) = 8$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12+1 = 13$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(54-5) = -49$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -9-10 = -19$$

پس $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t$. اب $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 13 \\ 34 & -22 & -49 \\ 4 & 8 & -19 \end{bmatrix}$

اب $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{90}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 13 \\ 34 & -22 & -49 \\ 4 & 8 & -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{45} & \frac{2}{45} & \frac{13}{90} \\ \frac{17}{45} & \frac{-11}{45} & \frac{-49}{90} \\ \frac{2}{45} & \frac{4}{45} & \frac{-19}{90} \end{bmatrix}$$

19.6. (iv) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ کی تصدیق کریں Verify the result $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. تو تصدیق کریں کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

حل

دیے گئے $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$.

AB کا ضربی معکوس

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 18+49 & 24+63 \\ 12+35 & 16+45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix}.$$

اب $|AB| = 4087 - 4089 = -2$

چونکہ $|AB| \neq 0$

لہٰذا $, (AB)^{-1}$

اب

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{adj }(AB)}{|AB|}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} \quad \text{...(i)}$$

A کا ضربی معکوس

ہمارے پاس $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$|A| = 15 - 14 = 1$$

چونکہ $|A| \neq 0$

لہٰذا A^{-1} ممکن ہے A

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

B کا ضربی معکوس

ہمارے پاس $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

اب

$$|B| = 54 - 56 = -2$$

چونکہ $|B| \neq 0$,

لہٰذا B^{-1} ممکن ہے

$$B^{-1} = \frac{\text{adj } B}{|B|} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

اب

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 45+16 & -63-24 \\ -35-12 & 49+18 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} \quad \text{...(ii)}$$

مساوات (i) اور (ii) یہ واضح ہوتا ہے۔

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

پس تصدیق ہوئی

19.7 (i) ہمزاد ایک درجی مساواتوں کا حل Solution of Simultaneous Linear Equations

غور کریں کہ دو متغیرات پر مشتمل دو یک درجی مساوات کا نظام

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(i)}$$

مساوات کے نظام کو قالبوں کی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX = B \quad \text{(ii)}$$

جب کہ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$

قالب A مساوات کے عددی سروں کا قالب کہلاتا ہے۔ قالب x متغیرات کا کالمی قالب ہے اور B متقل کا کالمی قالب ہے۔

مرتب جوڑا (x.y) دی گئی مساواتوں کا حل کہلاتا ہے اور ہمزاد یک درجی مساواتوں کا حل کہلاتا ہے۔

19.7(i) دو متغیرات والی یک درجی ہمزاد مساواتوں کو عمل زندگی کے مسائل سے رابطہ پیدا کرتے ہوئے حل کریں۔

معکوس قالب کا طریقہ

فرض کریں قالی مساوات جو پچھلے سیکشن 19.7 میں بحث کی گئی ہیں۔

یعنی $\quad$ (i) $\quad AX = B,$

یہاں A ضربی قالب اور غیر نادر قالب ہے۔ مساوات (i) کے دونوں اطراف کو A^{-1} ضرب دینے سے۔

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \qquad \text{[خاصیت تلازم ضرب کے لحاظ سے]}$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B \qquad [A^{-1}A = I, \quad IX = X]$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B \quad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) میں متغیرات کا قالب X معلوم کرنا معکوس قالب کا طریقہ کہلاتا ہے۔ جب کہ A ضربی قالب اور غیر نادر قالب ہے۔

مثال: مندرجہ ذیل یک درجی مساوات کو بذریعہ معکوس قالب کا طریقہ حل کریں۔

$$5x + 2y = 3$$
$$3x + 2y = 5$$

حل: دی گئی مساوات کو قالبی شکل میں لکھیں

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

یعنی $\quad AX = B$

جب کہ $\quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

پہلے ہم A^{-1} ذریعہ مُتصل (Ad joint) معلوم کرتے ہیں۔

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}}{10-6} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

اب بذریعہ معکوس قالب کا طریقہ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

یا $\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

پس $x = -1$ اور $x = 4$ حل ہے۔ حل سیٹ $\{(-1,4)\}.$ ہے۔

مثال: ایک سول انجنیئر کو 6000 مکعب میٹر بجری اور 9000 مکعب میٹر کنکر کٹ کی ایک بلڈنگ پروجیک کے لیئے ضرورت ہے یہ سامان حاصل کرنے کے لیئے دو اقسام کے دفائر ہیں جو نیچے جدول میں دیئے گئے ہیں۔

	کنکریٹ	بجری
ذخیرہ - I	3	8
ذخیرہ - II	4	11

بذریعہ طریقہ معکوس قالب سامان (بجری اور کنکریٹ) مقدار معلوم کریں جو انجنیئر ضرورت پوری کرنے کے لیئے ذخائر میں سے لانا ہونگے۔

حل فرض x بجری اور y کنکریٹ کو ظاہر کرتا ہے۔

معکوس قالب کا طریقہ ہے $X = A^{-1}B$.............(i)

دیئے گئے مواد کو قالبی شکل میں لکھیں

$$AX = B$$

یا

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \end{bmatrix}$$

اب A^{-1} ، متصل کے فارمولے سے معلوم کرتے ہیں

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}{3(11)-8(4)} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

لہٰذا

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

اب مساوات (i) کا استعمال کرنے پر

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

منفی نشان نظر انداز کرنے کے بعد ہمارے پاس آیا: $x=6000$ اور $y=3000$

لہٰذا 6000 مکعب سینٹی میٹر ریت اور 3000 مکعب میٹر کنکریٹ سے روکا جاسکتا ہے

19.2 (ii) کریمر کے اصول Cramer's rule

کریمر کے اصول یک درجی مساواتوں کے نظام کو حل کرنے کا ایک طریقہ ہے۔

آئیں غور کریں کہ دو متغیرات x اور y پر مشتمل یک درجی مساوات کے نظام کو یوں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

مساوات کے نظام (i) کو قالبی شکل میں لکھتے ہیں۔

$$AX = B,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

مساوات کا نظام (i) کا بالکل ایک ہی حل ہو گا

$B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ جبکہ

اگر $|A| \neq 0.$

جو حاصل ہو گا بذریعہ $x = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ اور $y = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$

جبکہ $A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ؛ $A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$

مثال: بذریعہ کریمر کے اصول مساوات کا نظام حل کریں۔

$$3x + 2y = 10$$
$$-6x + 4y = 4$$

حل

یہاں $|A| = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

$$12 + 12 = 24$$

یعنی $|A| \neq 0$ $\therefore$

اب دیئے گئے نظام کو قابی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{40 - 8}{24}$$

$$= \frac{32}{24}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{24}$$

$$= \frac{12 + 60}{24}$$

$$= \frac{72}{24}$$

$$y = 3$$

پس سیٹ حل $\left\{\left(\frac{4}{3}, 3\right)\right\}$ ہے

EXERCISE 19.2 مشق 19.2

1. مندرجہ ذیل کے مقطع (determinents) معلوم کریں۔

i) $\begin{vmatrix}-5 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 1 & -3\end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 2 & 3\end{vmatrix}$

iv) $\begin{vmatrix}2 & -5\\ 2 & -1\end{vmatrix}$ v) $\begin{vmatrix}3 & -3 & -4\\ 4 & 1 & -5\\ 0 & -1 & -4\end{vmatrix}$ vi) $\begin{vmatrix}-3 & 4 & -5\\ 2 & -3 & -5\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}$

vii) $\begin{vmatrix}0 & 5 & -4\\ -3 & 4 & -5\\ 1 & 0 & -5\end{vmatrix}$ viii) $\begin{vmatrix}4 & 3 & -5\\ -5 & -1 & -5\\ 2 & 4 & 4\end{vmatrix}$ ix) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ -2 & 3 & -5\\ 3 & 5 & 3\end{vmatrix}$

x) $\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & x & y\end{vmatrix}$ xi) $\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0\\ -6 & x & 1\\ -4 & 0 & -1\end{vmatrix}$

2. اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ تو A_{21}، A_{22} ، A_{12}، M_{21} ، M_{22} ، M_{12} معلوم کریں

3. x کی کس قیمت کے لیئے قالب $\begin{bmatrix}5-x & x+1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ غیر نادر ہے۔

4. دیئے گئے مربعی قالیوں میں سے نادر اور غیر نادر قالب کی نشاندہی کریں۔

$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

5. مندرجہ ذیل کا مُتصل (Ad joint) معلوم کریں۔

$A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 4 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -5\\ -1 & 0 & -2\\ 3 & -4 & 1\end{pmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 6 & 2 & -6\\ -3 & 0 & 6\end{bmatrix}$

6. تصدیق کریں $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ جبکہ $A(\text{adj } A)=|A|I$

7. مندرجہ ذیل قالیوں کا ضربی معکوس بذریعہ طریقہ مُتصل (Adjoint) معلوم کریں۔

i) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ ii) $B=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 5 & 10\end{bmatrix}$

iii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ iv) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ v) $E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

8. بذریعہ معکوس قالب طریقہ اور بذریعہ کریمر کے اصول معلوم کریں۔

1) $2x + 3y = 14$, $-4 + y = 28$ 2) $2x - 4y = -12$, $2y + 3x = 0$

REVIEW EXERCISE اعادہ مشق 19

1. درست جواب پر نشان لگائیں۔

i. اگر m قطاروں کی تعداد اور n کالموں کی تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح ______ قالب کہلاتا ہے۔

(a) مستطیل (b) مساوی (c) مربعی (d) صفری

ii. اگر $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ تو A^2 ______ ہے

(a) I_2 (b) I_3 (c) $-I_2$ (d) O

iii. اگر A کوئی بھی مربعی قالب ہے جیسے $A^t = -A$ کو کہا ______ جاتا ہے۔

(a) وتری قالب (b) اسکیلر قالب
(c) سمیٹرک قالب (d) سیکو سمیٹرک قالب

iv. اگر A، B اور C قالب ہیں تو $(ABC)^t =$ ______

(a) $A^t.B^t.C^t$ (b) $C^tB^tA^t$ © $C^tA^tB^t$ (d) $(B^tA^t)C^t$

v. اگر $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 0 & i^2 \\ -i^2 & 0 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

(a) $A^2 = -I$ (b) $B^2 = -I$
(c) $C^2 = -I$ (d) ان میں سے تمام

vi. دو قالب A اور B ہیں اگر $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ تو $AB =$ ______

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

vii. x y اور z کی قیمتی معلوم کریں اگر $2\begin{bmatrix} x \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ z \end{bmatrix}$

(a) $2, \frac{3}{2}, \frac{10}{3}$ (b) $\frac{3}{2}, 2, \frac{10}{3}$

(c) $\frac{3}{2}, \frac{10}{3}, 2$ (d) 1,2,3

viii. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = $ ______

(a) A^{-2} (b) A (c) A^{-1} (d) A^{2}

ix. x کی قیمت معلوم کریں اگر $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x + 4$

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ © 0 (d) ان میں کوئی نہیں

x. اگر قالب $\begin{bmatrix} \lambda & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ معکوس پذیر ہے تو $\lambda \neq$ ______

(a) −15 (b) −17 (c) −16 (d) ان میں کوئی نہیں

2. قطاری اور کالمی قالبوں کی تعریف بیان کریں۔

3. قالبوں کے مراتب معلوم کریں۔

i) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

4. مندرجہ ذیل قالبوں کی تعریف بیان کریں۔

(I) مربعی قالب (ii) مستطیلی قالب (iii) وتری قالب (iv) اسکیپر (میزانیہ) قالب

(v) سیمٹرک قالب (vi) اسکیو سیمٹرک قالب

5. اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ تو معلوم کریں

i) $A + B$ ii) $A - B$ iii) AB iv) BA

v) $5A$ vi) $7B$ vii) $8A - 9B$

6. مقطع معلوم کریں $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ -7 & 8 & -10 \end{vmatrix}$

7. مثالوں کی مدد سے نادر اور غیر نادر قالبوں کی تعریف بیان کریں۔

8. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ تو A^{-1} معلوم کریں

9. حل کریں

$2x + 5y = 27$

$7x + y = 12$

(I) معکوس قالب کا طریقہ (ii) کریمر کا اصول

Summary (خلاصہ)

- قالب عناصر کی مستطیلی شکل ہے۔
- قالب میں اندراج کی افق خط قطار کہلاتی ہے اور قالب میں اندراج کی عمودی خط کالم کہلاتا ہے۔
- دو قالب مساوی قالب کہلاتے ہیں اگر ان مراتب اور متناظرہ عناصر ایک جیسے ہوتے ہیں۔
- قالب کی ایک قطارہ ہو تو وہ قطاری قالب کہلاتا ہے اور ایک کالم دو کو وہ کالمی قالب کہلاتا ہے۔
- قالب کی قطاروں کی تعداد اور کالموں کی تعداد برابر ہوتی ہے تو وہ مربعی قالب ورنہ مستطیلی قالب کہلاتا ہے۔
- مربعی قالب وتری قالب ہے اگر وتر کے کسی ایک عنصر تمام عناصر صفر ہو۔
- مربعی قالب، وتری قالب کہلاتا ہے۔ اگر اس کے تمام عناصر صفر ہوں سوائے کم از کم ایک عنصر کے جو خاص وتر پر ہو۔
- وتری قالب جس میں وتر کے تمام عناصر ایک جیسے ہوں، اسکیلر (میزانیہ) قالب کہلاتا ہے۔
- وتری قالب جس میں خاص وتر کا ہر عنصر ا ہوتا ہے، اکائی قالب کہلاتا ہے۔
- ایک مربعی قالب کو سمیٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر اس کا بدل خود وہی ہوتا ہے۔
- ایک مربعی قالب کو اسکیو سمیٹرک کہا جاتا ہے اگر اس کا بدل خود وہی ہو مگر منفی۔
- دو قالبوں کی جمع اور تفریق کئے جاتے ہیں دونوں قالبوں کے متناظرہ عناصر کی جمع اور تفریق کے ذریعے۔
- اگر A اور B قالبوں کے مراتب ایک ہی ہوں تو قانون مبادلہ بلحاظ جمع یوں واضع کرتے ہیں $A+B=B+A$
- اگر A، B اور C ایک ہی مراتب کے تین قالب ہوں تو قانون تلازم بلحاظ جمع کی وضاحت یوں کی جاتی ہے
  $(A+B)+C=A+(B+C)$
- دو قالب A اور B کی ضرب ممکن ہے اگر پہلے قالب کے کالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔
- ہر مربعی قالب کے ساتھ ایک عدد $|A|$ ہے جس کا تعلق R سے ہوتا ہے۔ اسے مقطع کہا جاتا ہے۔
- اگر A اور B دو غیر صفری قالب ہوں ایسے $AB=BA=I$ تو A اور B دونوں ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہونگے۔
- یک درجی مساوات کا نظام بذریعہ معکوس قالب کا طریقہ اور کریمر کے اصول کے تحت حل کیا جاسکتا ہے۔