

قالب اور مقطع

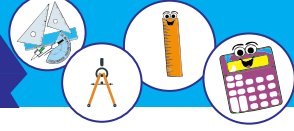
پونٹ نمبر

19

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس پونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- ❖ حقیقی اندراج (ارکان) والے قابل مستطیل شکل کا عملی زندگی سے ربط قائم کر سکیں۔
- ❖ قالب کی قطاروں اور قالموں کے بارے میں جان سکیں
- ❖ قالب کے مرقبہ۔
- ❖ دو مساوی قالب۔
- ❖ قطاری قالب، کالمی قالب، مستطیلی قالب، مربعی قالب، صغریٰ قالب، اکائی قالب، اسکیلر یا میزانیہ قالب، وتری قالب، قالب کا بدل، سمپٹرک قالب (3x3) اور اسکيو سمپٹرک قالب کی تعریف اور نشان دہی کر سکیں۔
- ❖ جانتا کہ دیئے گئے قالموں کی جمع اور تفریق ممکن ہے۔
- ❖ قالب کی حقیقی عدد سے اسکیلر کی ضرب۔
- ❖ قالموں کی جمع اور تفریق۔
- ❖ قانون مبادلہ اور قانون تلازم بلحاظ جمع کی تصدیق کرنا
- ❖ جمع ذاتی قالب۔
- ❖ قالب کا جمع المعکوس معلوم کرنا۔
- ❖ جامنا کہ آیا دیے گئے قالموں کی ضرب ممکن ہے یا نہیں۔
- ❖ دو (یا تین) قالموں کی ضرب۔
- ❖ قانون تلازم بلحاظ ضرب کی تصدیق۔
- ❖ قانون تقسیمی کی تصدیق۔
- ❖ مثال کی مدد سے ثابت کریں کہ قانون مبادلہ بلحاظ ضرب عموماً نہیں ہوتا ہے (جیسے $AB \neq BA$)
- ❖ ضربی ذاتی قالب کا جاننا۔
- ❖ $(AB)' = B'A'$ کی تصدیق۔
- ❖ مربعی قالب کا مقطع
- ❖ قالب کے مقطع کی قیمت معلوم کریں
- ❖ نادر اور غیر نادر قالب
- ❖ مائیزز اور کو فیکٹرس
- ❖ قالب کا متصل
- ❖ غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس معلوم کریں اور تصدیق کریں کہ جب کہ I ضربی ذاتی قالب ہے
- ❖ بذریعہ طریقہ متصل، غیر نادر قالب کا ضربی معکوس معلوم کرنا
- ❖ دو متغیرات والی پک درجی ہمزاہ مساواتوں کو عملی زندگی کے مسائل سے ربط پیدا کرتے ہوئے حل کریں
- ❖ معکوس قالب کا طریقہ
- ❖ کریمر (Crammer) کے اصول



19.1 قالبوں کا تعارف Introduction to Matrices

قالبوں کے تعلق ریاضی کی شاخ ایک درجی الجبر اس کا استعمال خاص طور پر بزنس، انجینئرنگ، فزکس اور کمپیوٹر سائنس میں کیا جاتا ہے۔ قالب کا نظریہ مشہور ریاضی دان ارتھر کیلی (1821-1895) نے پیش کیا۔

19.1 (i) حقیقی اندراج (ارکان) والے قالب مستطیلی شکل کا عملی زندگی سے ربط

قالب عناصر کی مستطیلی شکل ہوتی ہے۔ عناصر کو علاقہ طور پر اظہارے یا اعداد میں ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔ قالب کو عموماً انگریزی کے بڑے حروف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے اور ہر ارکان یا عنصر کو چھوٹے حرف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قالب کے عناصر (ارکان) کو [یا] میں بند کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ یا } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

a_{11} ، a_{22} ، اور a_{33} خاص وتر کے ارکان یا عناصر ہیں اور وتری عناصر (ارکان) کہلاتے ہیں۔ آئیں روزمرہ زندگی سے ایک مثال لیتے ہیں، مندرجہ ذیل جدول تین گھروں میں رہنے والوں کی تعداد، ٹیلی وژن اور کمپیوٹر ظاہر کئے گئے ہیں۔

کمپیوٹر	ٹیلی وژن	رہائشی
2	4	1
2	6	3
1	2	0

اوپر والا مواد قلابی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نوٹ: لفظ ”قالب“ کی جمع ”قالبوں“ ہے

19.1 (ii) قالب کی قطاروں اور کالموں کے بارے میں جاننا

قالب میں افقی خط میں اندراج قالب کی قطار کہلاتی ہے اور قالب میں عمودی خط میں اندراج قالب کا کالم کہلاتا ہے

مثال کے طور پر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ دو افقی خطوط میں

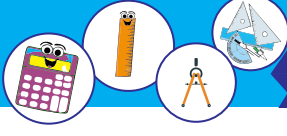
اندراج ہے لہذا یہ دو قطاروں پر مشتمل ہے۔ اس کا چار عمودی خطوط میں اندراج ہے یہ چار کالموں پر مشتمل ہے

19.1 (iii) قالب کا مرتبہ

قالب کے مرتبہ کو اس کی قطاروں اور کالموں کی تعداد سے وضاحت کی جاتی ہے۔
قالب کے مرتبہ کو $m \times n$ (م سے n پڑھنے ہیں) ظاہر کرتے ہیں۔ دیئے گئے قالب میں m قطاروں کی تعداد اور n کالموں کی تعداد ہے۔

مثال کے طور پر

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 12 & 11 & 35 \end{bmatrix}$ تو A کا مرتبہ 2×3 ہے



Equality of two matrices

19.1. (iv) دو مساوی قالب

دو قالب A اور B مساوی قالب کہلاتے ہیں اگر ان کی مرتبے ایک جیسے اور ان کی متناظرہ ارکان (عناصر) برابر ہوں علامتی طور پر ہم یوں لکھتے ہیں۔

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ اور } B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ مساوی قالب ہیں}$$

مثال کے طور پر

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ اور } Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ مساوی قالب نہیں ہیں}$$

کیونکہ ان کا مرتبہ ایک جیسا نہیں ہے۔

Types of Matrices

19.2 قالبوں کی اقسام

(i) 19.2. قطاری قالب، کالمی قالب، مستطیلی قالب مربعی قالب، صفری قالب، اکائی قالب، اسکیئر یا میزانیہ قالب، وتری قالب، قالب کا بدل، سمیٹرک قالب (3x3 تک) اور اسکیو سمیٹرک قالب کی تعریف اور نشان دہی کریں

قطاری قالب (Row Matrix):

کسی قالب میں صرف ایک قطار ہو وہ قطاری قالب کہلاتا ہے

مثال کے طور پر [1 4 7] اور [4 3 8 6] قطاری قالب ہیں

کالمی قالب (Column matrix)

کسی قالب میں صرف ایک کالم ہو وہ کالمی قالب کہلاتا ہے

مثال کے طور پر

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ اور } \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Rectangular matrix

مستطیلی قالب

کسی قالب جس میں قطاروں کی تعداد اور کالموں کی تعداد برابر نہ ہو وہ مستطیلی قالب کہلاتا ہے جیسے $m \neq n$

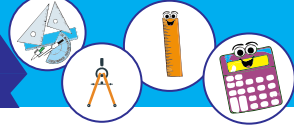
$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 1 & -7 & 10 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ مستطیلی قالب ہیں}$$

مثال کے طور پر

مربعی قالب (Square Matrix)

قالب جس میں قطاروں کی تعداد اور کالموں کی تعداد برابر ہو وہ مربعی قالب کہلاتا ہے جیسے $m = n$ مثال کے طور پر

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ p & q & r & 1 \\ m & n & o & 1 \end{bmatrix} \text{ مربعی قالب ہیں}$$



Zero/null matrix صفری قالب

صفری قالب کا ہر عنصر صفر کے برابر ہوا سے عموماً بڑا حرف تہجی 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ صفری قالب کی چند مثالیں مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ اور } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonal matrix وتری قالب

مربعی قالب وتری قالب کہلاتا ہے اگر اس کے تمام عناصر صفر ہوں سوائے کم از کم ایک عنصر کے جو خاص وتر پر ہو مثال کے طور پر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ وتری قالب ہیں}$$

ScalarMatrix (میزانیہ قالب) اسکیلر

وتری قالب جس میں وتر کے تمام عناصر ایک جیسے ہوں اسکیلر (میزانیہ قالب) ہیں

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \text{ اسکیلر (میزانیہ قالب) ہیں}$$

Identity/unit matrix اکائی قالب

وتری قالب جس میں خاص وتر کا ہر عنصر 1 ہوتا ہے اسے عموماً بڑے حرف I سے ظاہر کرتے ہیں مثال کے طور پر

$$I_1 = [1], I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transpose of a matrix قالب کا بدل

کسی قالب کی قطاروں کو کالموں میں یا کالموں کو قطاروں میں تبدیل کرنے سے جو قالب حاصل ہوتا ہے وہ قالب کا بدل کہلاتا ہے اسے A^t سے ظاہر کرتے ہیں۔

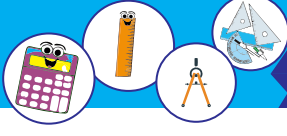
$$\text{مثال کے طور پر} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ کا بدل ہے } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Symmetric Mystic سمیٹرک قالب

مربعی قالب کو سمیٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر اُس کا بدل خود وہی ہوتا ہے یعنی A^t = A جیسے

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & -11 \\ 17 & -11 & 9 \end{bmatrix} \text{ تو } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & -11 \\ 17 & -11 & 9 \end{bmatrix} \text{ اگر}$$

مثال کے طور پر جیسا کہ A^t = A لہذا سمیٹرک قالب ہے



اسکیو سمیٹرک قالب Skew symmetric matrix

مربعی قالب کو اسکیو سمیٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر اُس کا بدل خود وہی ہو مگر منفی جیسے مثال کے طور پر

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & -7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix} = -A \quad \text{تو} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{اگر}$$

جیسا کہ $A^T = -A$ لہذا اسکیو سمیٹرک قالب ہے

19.3 قالبوں کی جمع اور تفریق Addition and Subtraction of Matrices

19.3 (i) جاننا کہہ آئیے کئے قالبوں کی جمع اور تفریق ممکن ہے

اگر دو قالب A اور B ایک جیسے مراتب رکھتے ہیں تو ان کی جمع اور تفریق ممکن ہے

$$\text{مثال کے طور پر} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{کی جمع اور تفریق ممکن ہے}$$

19.3 (ii) قالب کی حقیقی عدد سے میزانیہ ضرب

کسی قالب کی حقیقی عدد سے ضرب میزانیہ ضرب کہلاتی ہے۔ میزانیہ ضرب میں قالب میں ہر اندراج (سفر) دیے ہوئے میزانیہ C سے ضرب بنتا ہے۔ اگر C ایک میزانیہ ہے اور A قالب ہے تو قالب کی میزانیہ ضرب کو CA سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\text{مثال کے طور پر} \quad \text{اگر } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{تو } cA = -5 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$cA = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -25 \\ 15 & -10 & -5 \\ -10 & 0 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{یعنی}$$

Add and Subtract Matrices

19.3 (iii) قالبوں کی جمع اور تفریق

دو قالب A اور B جمع اور تفریق کئے جاتے ہیں دونوں قالبوں کے متناظرہ عناصر کی جمع اور تفریق کے ذریعے

$$\text{مثال کے طور پر} \quad A+B = \begin{pmatrix} 2+1 & 5+4 \\ -1+3 & 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{تو} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{اور} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{اگر}$$

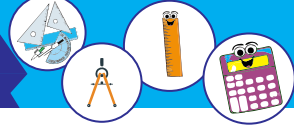
تفریق کے لیے

$$P-Q = \begin{pmatrix} 1-10 & 0-4 & 2-2 \\ 4-2 & 6-7 & 1-1 \\ -2-1 & 9-9 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{تو} \quad Q = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{اگر}$$

19.3 (iv) قانون مبادلہ اور قانون تلازم بلحاظ جمع تصدیق

قانون مبادلہ بلحاظ جمع

اگر A اور B قالبوں کے مراتب ایک ہی ہوں تو قانون مبادلہ بلحاظ جمع ہم یوں واضح کرتے ہیں



مثال: قانون مبادلہ بلحاظ جمع تصدیق کریں

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} \text{ اور } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \text{ اگر}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+10 & 0+4 & 2+2 \\ 4+2 & 6+7 & 1+1 \\ -2+1 & 9+9 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 4 \\ 6 & 13 & 2 \\ -1 & 18 & 4 \end{pmatrix} \text{ یہاں}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 10+1 & 4+0 & 2+2 \\ 2+4 & 7+6 & 1+1 \\ 1-2 & 9+9 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 4 \\ 6 & 13 & 2 \\ -1 & 18 & 4 \end{pmatrix} \text{ اب}$$

چونکہ، $A + B = B + A$ اس لئے قانون مبادلہ بلحاظ جمع تصدیق ہوا

Associative law w.r.t addition

قانون تلازم بلحاظ جمع

اگر A, B اور C ایک ہی مراتب کے تین قالب ہیں تو قانون تلازم بلحاظ جمع کی یوں وضاحت کی جاتی ہے

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

مثال: قانون تلازم بلحاظ جمع تصدیق کریں

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \text{ اور } B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ اگر}$$

$$(A+B)+C = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \text{ یہاں}$$

$$(A+B)+C = \begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 21 & 24 \end{pmatrix}$$

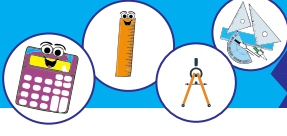
$$A + (B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 18 & 20 \end{pmatrix} \text{ اب}$$

$$A + (B+C) = \begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 21 & 24 \end{pmatrix}$$

چونکہ $(A+B)+C = A+(B+C)$ اس لئے قانون تلازم بلحاظ جمع تصدیق ہوا

(v) 19.3 جمع ذاتی قالب (Additive Identity)

اگر O اور A ایک ہی مراتب کے دو قالب ہیں اور جبکہ $A + O = A = O + A$ یہاں O صفری قالب ہے اور A کا جمع ذاتی قالب کہلاتا ہے



Find additive inverse of a matrix

19.3 (vi) قالب جمعی معکوس معلوم کریں

اگر B اور A ایک ہی مراتب کے دو قالب ہیں اس طرح کی $A + B = O = B + A$ تو A اور B ایک دوسرے کے جمع معکوس ہیں۔ قالب A کے جمع معکوس کو $-A$ سے ظاہر کرتے ہیں

مثال کے طور پر

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \text{ اگر}$$

$$-A = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & -1 \\ 2 & -9 & 0 \end{pmatrix} \text{ تو}$$

19.4 قالبوں کی ضرب (2 سے 2 تک)

19.4 (i) جاننا کہ آیا دیئے گئے قالبوں کی ضرب ممکن ہے یا نہیں

دو قالب A اور B کی ضرب ممکن ہے اگر پہلے قالب کے قالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہو

مثال کے طور پر

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \text{ اور } \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ کی ضرب ممکن ہے}$$

19.4 (ii) دو (یا تین) قالبوں کی ضرب Multiply two (or three) matrices

اگر دو قالبوں کی ضرب ممکن ہے تو حاصل ضرب AB کا عنصر a_{ij} حاصل ہو گا بذریعہ ضرب A کی i ویں قطار اور B کی j واں قالم سے

مثال نمبر 1

$$\text{اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \text{ تو } AB \text{ معلوم کریں}$$

حل

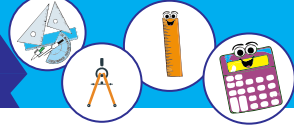
یہاں AB ممکن ہے کیونکہ A کے قالموں کی تعداد 2 ہے اور B کی قطاروں کی تعداد بھی 2 ہے

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \text{ اب}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1(0) + 2(6) & 1(-1) + 2(7) \\ 3(0) + 4(6) & 3(-1) + 4(7) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 + 12 & -1 + 14 \\ 0 + 24 & -3 + 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$



مثال 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

حاصل ضرب معلوم کریں

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+12 & 5+0 \\ 8+16 & 10+0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 24 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 96+25 & 128+5 \\ 144+50 & 192+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121 & 133 \\ 194 & 202 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

حل

19.4 (iii) قانون تلازم بلحاظ ضرب کی تصدیق

فرض کریں A، B اور C تین قالب ہیں تو قانون تلازم بلحاظ ضرب یوں جاتی ہے $(AB)C = A(BC)$.

مثال نمبر 1 قانون تلازم بلحاظ ضرب تصدیق کریں جب کہ

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ اور } B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

پڑتال

$$\text{L.H.S} = (AB)C$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 36 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{R.H.S} = A(BC)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 36 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس قانون تلازم بلحاظ ضرب تصدیق ہوا

19.4 (iv) قانون تقسیمی کی تصدیق Verify distributive laws

فرض کریں A، B اور C تین قالب ہیں تو قانون تقسیمی ہوتے ہیں

$$\begin{aligned} & A(B+C) = (AB)+(AC) \quad (\text{بایاں قانون تقسیمی}) \\ & (B+C) A = (BA)+(CA) \quad (\text{دایاں قانون تقسیمی}) \end{aligned}$$

برجی کریم A ، n مرتبہ A کے برابر ہے تو I_n کا برابر ہے تو خاص طور پر I_1 کا برابر ہے تو $I_1 A = A$ اور $A I_1 = A$ ۔
(Multiplicative Identity of a matrix) (vi) 19.4 برجی ذاتی تناسب

لہذا قانون مندرجہ بالا کے لیے A کے لیے I_n کا برابر ہے تو خاص طور پر I_1 کا برابر ہے تو $I_1 A = A$ اور $A I_1 = A$ ۔

اب

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5+4) & (-2-2) \\ (2-3) & (-4+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5+4) & (-2-2) \\ (15+4) & (-4+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 19 & 8 \end{bmatrix} \\ \therefore AB &\neq BA \end{aligned}$$

پہلے:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad AB \neq BA \text{ تصدیق کریں کہ}$$

مثال 19.4 (v) مثال کے مطابق $A = (BA) + (CA)$ کی تصدیق کی جائے گی۔
(v) 19.4 مثال کے مطابق

لہذا

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= A(B+C) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5+8) & (-2+0) \\ (-8-4) & (-2+0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -12 & -2 \end{bmatrix} \\ \text{R.H.S.} &= AB + AC = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -12 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -14 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

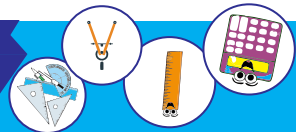
پہلے

$$(i) \quad A(B+C) = (AB) + (AC) \quad (ii) \quad (B+C)A = (BA) + (CA)$$

پہلے

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تو مندرجہ ذیل کی تصدیق کریں



$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36+25+6 & 48+5+12 & 0+10+8 \\ 24+30+9 & 32+6+18 & 0+12+12 \\ 0+5+21 & 0+1+42 & 0+2+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 & 65 & 18 \\ 63 & 56 & 24 \\ 26 & 43 & 30 \end{pmatrix}$$

تصدیق

$$\text{اگر } A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ تصدیق کریں } AB' = B'A'$$

نہیں تصدیق ہوگی

$$(AB)' = B'A'$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

نہیں

$$(AB)' = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 11 & -4 \end{bmatrix}$$

مثال

$$\text{اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)' = B'A'$$

تصدیق کریں کہ

مثال

Verify the result (vii) 19.4 تصدیق کریں کہ $(AB)' = B'A'$

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

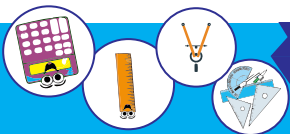
$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 \text{ ضربی ڈائیگنل ہے } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ تصدیق کریں کہ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ہوگا کہ

مثال دہرایا ہے کہ

مثال



1.

مندرجہ ذیل قائلوں کی سیمپلیتیں

$$(i). \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} (ii). \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} (iii). [-2 \quad 0] (iv). \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} (v). \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

2.

مندرجہ ذیل ہر قائل کو بن کر پتہ لگئے

$$(i). \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} (ii). \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} (iii). \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} (iv). \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} (v). [0]$$

3.

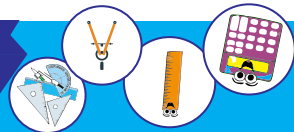
فانتھیں آئے مندرجہ ذیل قائلوں کو بن کر پتہ لگئے

$$(i). \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} (ii). \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} (iii). \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix} (iv). \begin{bmatrix} 0 & -6 & 4 \\ -6 & 0 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

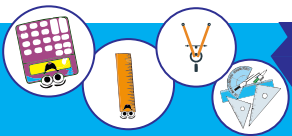
19.1 پیج

 $(AB)^t = B^t A^t$ کی تصدیق ہوگی

$$\begin{aligned} (AB)^t &= \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 36+25+6 & 24+30+9 & 0+5+21 \\ 48+5+12 & 32+6+18 & 0+1+42 \\ 0+10+8 & 0+12+12 & 0+2+28 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix} \\ B^t A^t &= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



4. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ اور $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ملکہ ہو، مندرجہ ذیل مطلوب کریں
5. مندرجہ ذیل مطلوب کریں
- (i) $A + C$ (ii) $A + E$ (iii) $B - D$ (iv) $2B + 3A$ (v) $B - C$ (vi) A^2 (vii) B^2 (viii) $D + E$
6. تیسری کریں کہ
- (i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $3A + 2B$ (iv) AB (v) BA (vi) A^2 (vii) $C - D \neq D - C$ (iii) $A + B = B + A$ (i)
7. $AB \neq BA$ ثابت کریں
8. اگر $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ اور $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ ، مندرجہ ذیل
9. اگر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور d, a, b, c یوں
10. z, y, x, d, c, b, a یوں
11. مندرجہ ذیل قانون کے ملکہ حاصل کریں
12. مطلوب کریں



تو یہ کہ R ختم ہوتا ہے۔

$$\cdot \left| \begin{matrix} d_{32} \\ d_{22} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} d_{31} \\ d_{21} \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} d_{33} \\ d_{23} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} d_{31} \\ d_{21} \end{matrix} \right| d_{12} - \left| \begin{matrix} d_{33} \\ d_{23} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} d_{32} \\ d_{22} \end{matrix} \right| d_{11} v = |V|$$

جس کا رخ رہا ہمارا وہ تبہ بہہ تہم کہ

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (3 \times 3) \text{ matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 4 \times 7 = -19.$$

$$\text{ad-bc} = \begin{vmatrix} p & c \\ q & a \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|$$

$$A = \begin{pmatrix} p & c \\ q & a \end{pmatrix}$$

تہ سر لمہہ سیتی دی جیہ کہ خبرہ (!!) 19.5

$$\left| \begin{matrix} p & c \\ q & a \end{matrix} \right| = \Delta \quad \text{و } \left| \begin{matrix} p & c \\ q & a \end{matrix} \right| = |\Delta| \quad \text{منه است}$$

19.5 Determinant of a Matrix

سرگرمی سہ ماہی $A(BC) = (AB)C$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

15.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & A+B=B+A \\ \text{(b)} & (A+B)+C=A+(B+C) \\ \text{(c)} & (A+B)C=AC+BC \\ \text{(d)} & A(B+C)=AB+AC \end{array}$$

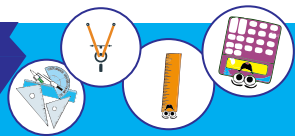
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

14.

(i). $A(B+C) = AB+AC$ (ii). $(B+C)A = BA+CA$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

13.



۱- در این روش، $A_{\text{تجزیه}}$ و $A_{\text{کل}}$ را از طریق روش $A_{\text{تجزیه}}$ و $A_{\text{کل}}$ محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} p_{32} & p_{33} \\ p_{22} & p_{23} \end{vmatrix} = M_{12}$$

$$\begin{bmatrix} d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

آئیں کہ جن میں ایک مربعی، دو A بکریں اور a_{ij} کے بغیر M_{ij} کا مجموعہ 3×3 ہے۔
 A کے قطاروں اور کالموں کو ترکیبوں کے حاصل کیے جاتے ہیں۔

(Minors and Cofactors) (iv) 19.5

سورۃ النور

$$= 2(0-16) - 4(28-12) + 6(16-0) = -32 - 64 + 96 = 0.$$

۴:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 14 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$



۲-۱-۹

[illegible]
$$0 \neq |V|$$

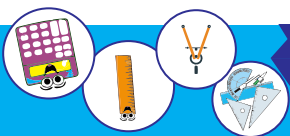
۲- $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کے لیے $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ جہاں θ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کے درمیان کا زاویہ ہے۔

19.5 Define singular and non-singular matrices (اور (iii) کے لیے اور غیر اور)

$$|A|_4 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5(-20) + 0 = -20.$$

5] R کے ذریعے خطی، $|A|$ میٹریکس کے لئے

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$



$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

سب سے پہلے ہم قائلہ A کے تمام نو قائلہ ز (Cofactors) معلوم کرتے ہیں۔
 قائلہ A (Adjoint) معلوم کرتے ہیں۔

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{اگر}$$

فہمہ $A_{11}, A_{12}, A_{13}, \dots, A_{33}$ کے نو قائلہ ز ہیں۔

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{اگر}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{اور}$$

ہم کرتے ہیں۔
 $\text{Adj } A \times A = A \times \text{adj } A$ میٹریس A کا قائلہ A ہے۔
 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فرض کریں

Adjoint of a matrix with order 2×2
 Define adjoint of a matrix (i) 19.6

Multiplicative Inverse of a Matrix 19.6

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (-46) = -46$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (-46) = -46$$

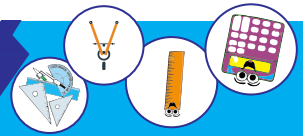
$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (-46) = -46$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 6(1) - 4(-7) = 6 + 28 = 34$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

فہمہ A_{12} اور M_{12} معلوم کرتے ہیں

مثال



نشان A اور B کے دو سرے کے معنی میں ہیں۔

$$\text{یوں } AB = BA = I_2$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-14 & 35-35 \\ -6+6 & -14+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-14 & -21+21 \\ 10-10 & -14+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{اگر } A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

یہ معنوں میں A اور B کے دو سرے کے معنی میں ہیں

اگر A اور B مربع n × n کے غیر تبادلی ہیں اس طرح $I_n = BA = AB$ اور A اور B کے معنی میں ہیں۔

نہ $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

19.6 (iii) غیر تبادلی A اور B کے معنی میں ہیں اور تصدیق کریں کہ I کے معنی میں ہیں۔

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \\ -8 & -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -5 & -2 & -2 \\ -8 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب } \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

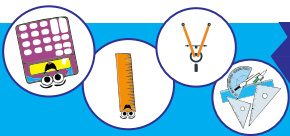
$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

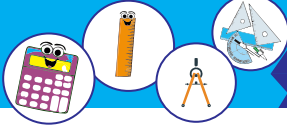
$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$





19.6 (iii) بذریعہ طریقہ مُتصل (Ad joint) غیر نادر قالب کا ضربی معکوس معلوم کریں۔

فرض کریں $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک غیر نادر قالب ہے تو A معلوم کیا جاسکتا ہے

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} \quad \text{جب کہ } |A| \neq 0.$$

ضربی معکوس معلوم کرنے کا طریقہ، طریقہ مُتصل (Adjoint Method) کہلاتا ہے۔

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{کا ضربی معکوس بذریعہ طریقہ مُتصل معلوم کریں۔}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

حل چونکہ $|A| \neq 0$ کا ضربی معکوس ممکن ہے

$$\text{اب } \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{بذریعہ طریقہ مُتصل کا ضربی معکوس بذریعہ طریقہ مُتصل معلوم کریں۔}$$

یہاں

حل

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 9(2-0) - 2(-10-24) + 1(0+4)$$

$$= 18 + 68 + 4$$

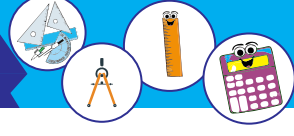
$$= 90.$$

چونکہ $|A| \neq 0$ لہذا A^{-1} ممکن ہے

اب ہم A کے تمام کو فیکٹر (Cofactors) معلوم کریں۔

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-10-24) = 34$$



$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 0) = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-18 - 4) = -22$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 8) = 8$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 1 = 13$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(54 - 5) = -49$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 10 = -19$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t. \quad \text{اب} \quad \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 13 \\ 34 & -22 & -49 \\ 4 & 8 & -19 \end{bmatrix} \quad \text{پس}$$

$$\text{اب} \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 13 \\ 34 & -22 & -49 \\ 4 & 8 & -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{45} & \frac{2}{45} & \frac{13}{90} \\ \frac{17}{45} & \frac{-11}{45} & \frac{-49}{90} \\ \frac{2}{45} & \frac{4}{45} & \frac{-19}{90} \end{bmatrix}$$

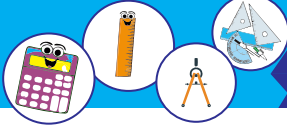
Verify the result $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ کی تصدیق کریں $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (iv) 19.6.

$$\text{اگر} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \text{تو تصدیق کریں کہ}$$

$$\text{دیئے گئے} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

حل



B کا ضربی معکوس

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

اب

$$|B| = 54 - 56 = -2$$

چونکہ $|B| \neq 0$

لہذا B^{-1} ممکن ہے

$$B^{-1} = \frac{\text{adj } B}{|B|} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

اب

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 45 + 16 & -63 - 24 \\ -35 - 12 & 49 + 18 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} \dots (ii)$$

مساوات (i) اور (ii) یہ واضح ہوتا ہے۔

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

پس تصدیق ہوئی

AB کا ضربی معکوس

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 18 + 49 & 24 + 63 \\ 12 + 35 & 16 + 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = 4087 - 4089 = -2$$

چونکہ $|AB| \neq 0$

لہذا $(AB)^{-1}$

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{adj } (AB)}{|AB|}$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} \dots (i)$$

A کا ضربی معکوس

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 15 - 14 = 1$$

چونکہ $|A| \neq 0$

لہذا A^{-1} ممکن ہے

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

19.7 (i) ہمزاد ایک درجی مساواتوں کا حل

غور کریں کہ دو متغیرات پر مشتمل دو یک درجی مساوات کا نظام

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (i)$$

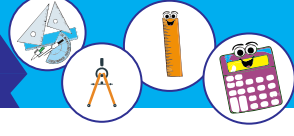
مساوات کے نظام کو قالبوں کی شکل میں ہوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX = B \quad (ii)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

قالب A مساوات کے عددی سروں کا قالب کہلاتا ہے۔ قالب x متغیرات کا کالمی قالب ہے اور B منتقل کا کالمی قالب ہے۔

مرتب جوڑا (x, y) دی گئی مساواتوں کا حل کہلاتا ہے اور ہمزاد ایک درجی مساواتوں کا حل کہلاتا ہے۔



19.7 (i) دو متغیرات والی ایک درجی ہمزاد مساواتوں کو عمل زندگی کے مسائل سے رابطہ پیدا کرتے ہوئے حل کریں۔
معکوس قالب کا طریقہ
فرض کریں قالی مساوات جو پچھلے سیکشن 19.7 میں بحث کی گئی ہیں۔

$$AX = B, \quad (i) \quad \text{یعنی}$$

یہاں A ضربی قالب اور غیر نادر قالب ہے۔ مساوات (i) کے دونوں اطراف کو A^{-1} ضرب دینے سے۔

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \quad \left[\text{خاصیت تلازم ضرب کے لحاظ سے} \right]$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad \left[A^{-1}A = I, IX = X \right]$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B \quad (ii)$$

مساوات (ii) میں متغیرات کا قالب X معلوم کرنا معکوس قالب کا طریقہ کہلاتا ہے۔ جب کہ A ضربی قالب اور غیر نادر قالب ہے۔

مثال: مندرجہ ذیل ایک درجی مساوات کو بذریعہ معکوس قالب کا طریقہ حل کریں۔

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 3 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

حل: دی گئی مساوات کو قالبی شکل میں لکھیں

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \quad \text{یعنی}$$

$$\text{جب کہ } A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

پہلے ہم A^{-1} ذریعہ متصل (Ad joint) معلوم کرتے ہیں۔

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}}{10 - 6} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

اب بذریعہ معکوس قالب کا طریقہ

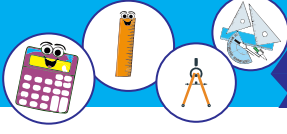
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 - 10 \\ -9 + 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{یا}$$

پس $x = -1$ اور $x = 4$ حل ہے۔ حل سیٹ $\{(-1, 4)\}$ ہے۔



مثال: ایک سول انجنیئر کو 6000 مکعب میٹر بجری اور 9000 مکعب میٹر کنکریٹ کی ایک بلڈنگ پروجیکٹ کے لیے ضرورت ہے یہ سامان حاصل کرنے کے لیے دو اقسام کے دفاتر ہیں جو نیچے جدول میں دیئے گئے ہیں۔

	کنکریٹ	بجری
I- ذخیرہ	3	8
II- ذخیرہ	4	11

بذریعہ طریقہ معکوس قالب سامان (بجری اور کنکریٹ) مقدار معلوم کریں جو انجنیئر ضرورت پوری کرنے کے لیے ذخائر میں سے لانا ہونگے۔

حل فرض x بجری اور y کنکریٹ کو ظاہر کرتا ہے۔

معکوس قالب کا طریقہ ہے (i) $X = A^{-1}B$ دیئے گئے مواد کو قافی شکل میں لکھیں

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \end{bmatrix} \quad \text{یا}$$

اب A^{-1} ، متصل کے فارمولے سے معلوم کرتے ہیں

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}{3(11) - 8(4)} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{لہذا}$$

اب مساوات (i) کا استعمال کرنے پر

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

منفی نشان نظر انداز کرنے کے بعد ہمارے پاس آیا: $x = 6000$ اور $y = 3000$

لہذا 6000 مکعب میٹر سینیٹی میٹر ریت اور 3000 مکعب میٹر کنکریٹ سے روکا جاسکتا ہے

19.2 (ii) کریمر کے اصول Cramer's rule

کریمر کے اصول یک درجی مساواتوں کے نظام کو حل کرنے کا ایک طریقہ ہے۔

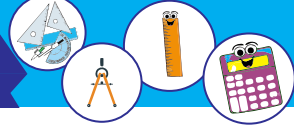
آئیں غور کریں کہ دو متغیرات x اور y پر مشتمل یک درجی مساوات کے نظام کو یوں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \quad (i)$$

مساوات کے نظام (i) کو قافی شکل میں لکھتے ہیں۔

$$AX = B,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$



مساوات کا نظام (i) کا بالکل ایک ہی حل ہو گا
 جبکہ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$
 اگر $|A| \neq 0$.

$$\text{جو حاصل ہو گا بذریعہ } x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ اور } y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

$$\text{جبکہ } A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \text{ \& } A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

مثال: بذریعہ کریمر کے اصول مساوات کا نظام حل کریں۔

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 10 \\ -6x + 4y &= 4 \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \text{ یہاں}$$

$$12 + 12 = 24$$

$$\therefore |A| \neq 0 \text{ یعنی}$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}} \text{ اب دیئے گئے نظام کو قافی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔}$$

$$= \frac{40 - 8}{24}$$

$$= \frac{32}{24}$$

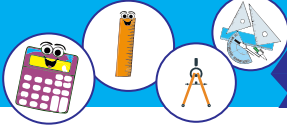
$$x = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{24}$$

$$= \frac{12 + 60}{24}$$

$$= \frac{72}{24}$$

$$y = 3 \text{ پس سیٹ حل } \left\{ \left(\frac{4}{3}, 3 \right) \right\} \text{ ہے}$$



مشق 19.2 EXERCISE 19.2

1. مندرجہ ذیل کے مقطع (determinants) معلوم کریں۔

i) $\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$

ii) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

iii) $\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

iv) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

v) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}$

vi) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

vii) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

viii) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

ix) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

x) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$

xi) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & x & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

2. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ تو $A_{21}, A_{22}, M_{12}, M_{22}, M_{21}, A_{12}, A_{22}$ معلوم کریں

3. x کی کس قیمت کے لیے قالب $\begin{bmatrix} 5-x & x+1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ غیر نادر ہے۔

4. دیئے گئے مربعی قالیوں میں سے نادر اور غیر نادر قالب کی نشاندہی کریں۔

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. مندرجہ ذیل کا متضلع (Adjoint) معلوم کریں۔

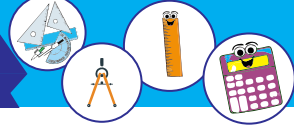
$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

6. تصدیق کریں $A(\text{adj } A) = |A|I$ جبکہ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

7. مندرجہ ذیل قالیوں کا ضربی معکوس بذریعہ طریقہ متضلع (Adjoint) معلوم کریں۔

i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

ii) $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$



iii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ iv) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ v) $E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

8. بذریعہ معکوس قالب طریقہ اور بذریعہ کریبر کے اصول معلوم کریں۔

1) $2x + 3y = 14$
 $-4 + y = 28$

2) $2x - 4y = -12$
 $2y + 3x = 0$

REVIEW EXERCISE 19 اعادہ مشق

1. درست جواب پر نشان لگائیں۔

i. اگر m قطاروں کی تعداد اور n کالموں کی تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح _____ قالب کہلاتا ہے۔

(a) مستطیل (b) مساوی (c) مربعی (d) صفری

ii. اگر $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ تو A^2 _____ ہے

(a) I_2 (b) I_3 (c) $-I_2$ (d) O

iii. اگر A کوئی بھی مربعی قالب ہے جیسے $A^t = -A$ کو کہا _____ جاتا ہے۔

(a) وتری قالب (b) اسکیلر قالب

(c) سمیٹرک قالب (d) سکیوسمیٹرک قالب

iv. اگر A, B, C اور A^t, B^t, C^t قالب ہیں تو $(ABC)^t =$ _____

(a) $A^t \cdot B^t \cdot C^t$ (b) $C^t B^t A^t$ (c) $C^t A^t B^t$ (d) $(B^t A^t) C^t$

v. اگر $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & i^2 \\ -i^2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

(a) $A^2 = -I$ (b) $B^2 = -I$

(c) $C^2 = -I$ (d) ان میں سے تمام

vi. دو قالب A اور B ہیں اگر $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ تو $AB =$ _____

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

vii. $2 \begin{bmatrix} x \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ z \end{bmatrix}$ کی قیمتی معلوم کریں اگر

(a) $2, \frac{3}{2}, \frac{10}{3}$ (b) $\frac{3}{2}, 2, \frac{10}{3}$

(c) $2, \frac{3}{2}, \frac{10}{3}$ (d) $1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad A_2^{-1} &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & x \end{bmatrix} \\ \text{(c)} \quad A_1^{-1} &= x + 4 \\ \text{(b)} \quad A &= \text{مصفوفة مربعية} \\ \text{(a)} \quad A_2^{-1} &= \text{مصفوفة} \end{aligned}$$

$$u \neq \lambda \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ \lambda & -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ اگر } \lambda \neq 0$$

[illegible]

i) A + B ii) A - B iii) AB iv) BA

v) 5A vi) 7B vii) 8A - 9B

7. مثالوں کی مدد سے ادوار و تقابلات کی تشریح کریں۔

9. (i) $2x + 5y = 27$ (ii) $3x + 2y = 12$

$$7x + y = 12$$

- ## Summary (ملخص)

