27
یونٹ

وتر اور قوسین
CHORDS AND ARCS

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- مندرجہ ذیل مسئلہ بمعہ نتائج صریح سمجھ اور انہیں متعلقہ مسائل کے حل کے لیئے استعمال کر سکیں۔
  - اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کی دو قوسین متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ وتر باہم مساوی ہوتے ہیں
  - اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کے وتر باہم مساوی ہوں تو ان کی متقابلہ قوسین (صغیرہ، کبیرہ یا نصف دائروی) بھی متماثل ہوتی ہیں۔
  - اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کے وتر مساوی ہوں تو دائرہ کے مرکز (یا متعلقہ مراکز میں) میں مساوی زاویے بناتے ہیں۔
  - اگر ایک دائرے کے (متماثل دائروں کے / دو وتر مرکز (متعلقہ مراکز) میں مساوی مقدار کی زاویے بنائیں تو وتر مقدار میں مساوی ہوتے ہیں۔

اس یونٹ میں ہم دائرے کے وتر اور قوسین سے متعلق مسائل پر بحث کرینگے۔

مسئلہ 27.1

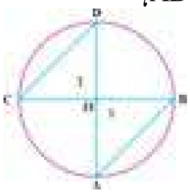
اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کی دو قوسین متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ وتر باہم مساوی ہوتے ہیں ہم مسئلہ کو ثابت کرینگے۔

i. ایک دائرے کے لیئے

ii. دو متماثل دائروں کے لیئے

i. ایک دائرے کے لیئے

معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے جس کے $\overset{\frown}{AB}$ اور $\overset{\frown}{CD}$ متماثل قوسین ہیں یعنی $\overset{\frown}{CD} \cong \overset{\frown}{AB}$،
$\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ دیئے گئے متماثل قوسین کے متقابلہ وتر ہیں۔



مطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

عمل: O کو A، B، C اور D سے ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta OAB \leftrightarrow OCD$ میں	
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$\overline{OB} \cong \overline{OD}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$m\angle 1 = m\angle 2$	دو متماثل قوسین کے مرکزی زاویے
$\therefore \Delta OAB \cong OCD$	ض-ز-ض موضوعہ
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

Q.E.D

ii. دو متماثل دائروں کے لیئے

معلوم: دو متماثل دائرے جن کے مراکز بالترتیب O اور O' ہیں۔ $\overset{\frown}{AB}$ اور $\overset{\frown}{CD}$ ان دائروں کے متماثل قوسین ہیں جبکہ
$\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ دو متقابلہ وتر ہیں۔

مطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

عمل: O کو A اور B سے ملائیں۔ O' کو C اور D سے ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta OAB \leftrightarrow \Delta O'CD$ میں	
$\overline{OA} \cong \overline{O'C}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$\overline{OB} \cong \overline{O'D}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$m\angle 1 = m\angle 2$	دو متماثل قوسین کے مرکزی زاویے
$\therefore \Delta OAB \cong \Delta O'CD$	ض-ز-ض موضوعہ
$\therefore \overline{AB} \cong \overline{CD}$	دو متماثل مثلثوں کے قناظرہ اضلاع

Q.E.D

مسئلہ 27.2

اگر ایک دائرہ (یامتماثل دائروں) کے وتر باہم مساوی ہوں تو ان کی متقابلہ قوسین (صغیرہ، کبیرہ یا نصف دائروی) بھی متماثل ہوتی ہیں۔

معلوم: دو متماثل دائرے جن کے مراکز بالترتیب O اور O' ہیں۔ ان دائروں کے دو متماثل قوسین ہیں
جب کہ $\overline{AC} \cong \overline{PR}$

مطلوب: $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{PR}$

عمل: O کو A اور C سے ملائیں۔ O' کو P اور R سے ملائیں۔

ثبوت:

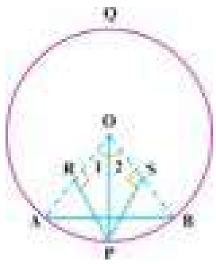
بیانات	دلائل
$\Delta AOC \leftrightarrow \Delta PO'R$ میں	
$\overline{OA} \cong \overline{O'P}$	متماثل دائروں کے رداس
$\overline{OC} \cong \overline{O'R}$	متماثل دائروں کے رداس
$\overline{AC} \cong m\overline{PR}$	معلوم
$\Delta OAC \cong \Delta PO'R$	ض-ص-ض ≅ ض-ص-ض
$m\angle AOC = m\angle PO'R$ (i)	
پس $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{PR}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے مساوات (I) سے

Q.E.D

مثال ا:

ایک دائرے کے محیط پر واقع نقطہ P رداسی قطعات $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ سے ہم فاصلہ ہے۔ ثابت کریں کہ $m\overset{\frown}{AP} = m\overset{\frown}{BP}$

حل:



معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے جس کا وتر $\overline{AB}$ ہے دائرے کے محیط پر واقع نقطہ P
رداسی قطعات $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ سے ہم فاصلہ ہے یعنی $m\overline{PR} = m\overline{PS}$

مطلوب: $m\overset{\frown}{AP} = m\overset{\frown}{BP}$

حل: O کو P سے ملائیں $m\angle 1$ اور $m\angle 2$ نام دیں جیسا شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

ثبوت:

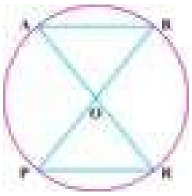
بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں $\Delta OPR \leftrightarrow \Delta OPS$	
$m\overline{OP} = m\overline{OP}$	مشترک
$m\overline{PR} = m\overline{PS}$	
$\therefore \Delta OPR \cong \Delta OPS$	و-ص ≅ و-ض
لہٰذا $m\angle 1 = m\angle 2$ (i)	متماثل مثلثوں کے متقابلہ زاویے
$\Rightarrow \overset{\frown}{AP} \cong \overset{\frown}{BP}$	مساوات (i) سے
پس $m\overset{\frown}{AP} = m\overset{\frown}{BP}$	متماثل قوسین کی رو سے

Q.E.D

مسئلہ 27.3:

اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں کے) کے وتر مساوی ہو تو دائرہ کا مرکز (یا متعلقہ مراکز میں) میں مساوی زاویے بناتے ہیں

1) ایک دائرے کے لیئے ii) دو دائروں کے کئے



i) ایک دائرے کے لیئے

معلوم: ایک دائرہ کا مرکز O ہے جس کے دو متماثل وتر ہیں یعنی $\overline{AB} \cong \overline{PR}$

مطلوب: $m\angle AOB = m\angle POR$

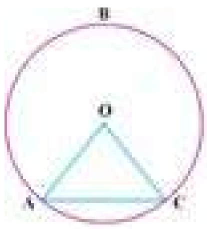
عمل: O کو A اور B سے ملائیں اور O کو P اور Q سے بھی ملائیں۔

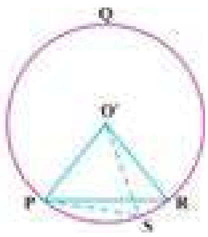
ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overline{AB} \cong \overline{PR}$ (i)	معلوم
$\overline{OB} \cong \overline{OR}$ (ii)	$\overline{OB}$ ، $\overline{OR}$ ، $\overline{OA}$ اور $\overline{OP}$ ایک ہی دائرے کے رداس ہیں
اور $\overline{OA} \cong \overline{OP}$ (iii)	
$\Delta AOB \cong \Delta POR$	ض-ض-ض ≅ ض-ض-ض
$m\angle AOB = m\angle POB$	متماثل مثلثوں کے متقابلہ زاویے

Q.E.D

ii) دو متماثل دائروں کے لئے





معلوم: مرکز O اور O′ کے دو متماثل دائرے ہیں لہذا جبکہ $m\overline{AC} = m\overline{PR}$
جبکہ $\overline{AC}$ اور $\overline{PR}$ دائروں کے وتر ہیں

مطلوب: $m\angle AOC = m\angle PO'R$

عمل: قوس PR پر ایک نقطہ S لیں اور S کو P اور O′ سے ملائیں
جیسا کہ $\angle AOC \cong \angle PO'S$

ثبوت:

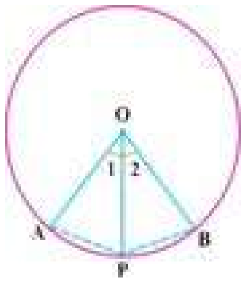
بیانات	دلائل
فرض کریں $m\angle AOC = m\angle PO'R$	
لیکن $m\angle AOC \cong m\angle PO'S$	عمل
$\therefore$ $\widehat{AC} \cong \widehat{PS}$ (i)	دو متماثل دائروں کے مساوی مرکزی زاویے جو قوسین سے بنتے ہیں مسئلہ (I) سے
$\therefore$ $m\overline{AC} = m\overline{PS}$ (ii)	
لیکن $m\overline{AC} = m\overline{PR}$ (iii)	معلوم
$\therefore$ $m\overline{PR} = m\overline{PS}$	(ii) اور (iii) کا استعمال کرتے ہوئے
یہ جب ہی ممکن ہے اگر R اور S ایک ہی ہوں	کیونکہ P مشترک نقطہ ہے
$\Rightarrow$ $m\angle AOC = m\angle POR$	ہمارا مفروضہ غلط ہے

Q.E.D

نتیجہ صریح 1:
اگر متماثل دائروں یا ایک ہی دائرے میں اگر مرکزی زاویے مساوی ہیں تو متقابلہ قاطعات مساوی ہیں۔

نتیجہ صریح 2:
متماثل دائروں یا ایک ہی دارے میں۔ غیر مساوی مرکزی زاویوں کے قوسین کے وتر غیر مساوی ہیں۔

مثال 1:
ثابت کریں کہ ایک دائرے میں مرکزی زاویے کا اندرونی ناصف متقابلہ قوس کو نصف کرتا ہے۔



معلوم:
ایک دائرے کا مرکز O ہے۔ مرکزی زاویے AOB کا اندرونی ناصف $\overline{OP}$ ہے۔
یعنی $\angle 1 \cong \angle 2$

مطلوب: $\overset{\frown}{AP} \cong \overset{\frown}{PB}$

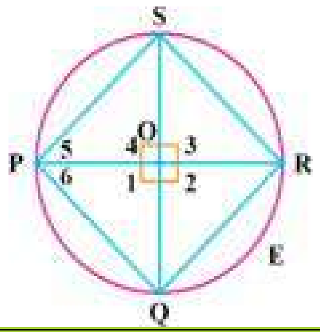
عمل: $\overline{AP}$ اور $\overline{BP}$ کھینچیں تو $\angle 1$ اور $\angle 2$ بالترتیب $\overset{\frown}{AP}$ اور $\overset{\frown}{BP}$ کے متقابلہ زاویے ہیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta OAP \leftrightarrow \Delta OBP$ میں	
$m\overline{OA} = m\overline{OB}$	یک ہی دائرے کے رداس
$m\angle 1 = m\angle 2$	معلوم
اور $m\overline{OP} = m\overline{OP}$	مشترک
$\therefore \Delta OAP \cong \Delta OBP$	ض-ز-ض موضوعہ
پس $\overline{AP} \cong \overline{BP}$	متماثل مثلثوں کے متقابلہ اضلاع
$\Rightarrow \overset{\frown}{AP} \cong \overset{\frown}{BP}$	دائرے میں مساوی وتروں کے متقابلہ قوسین

Q.E.D

مثال 2: ثابت کریں کہ ایک دائرے میں دو قطر ایک دوسرے پر عمود ہیں تو ان کے سروں کو ملانے والے خطوط مربع بناتے ہیں۔



معلوم : $\overline{PR}$ اور $\overline{QS}$ ایک دائرے کے دو عمودی قطر ہیں جس کا مرکز O ہے۔
لہٰذا PQRS ایک چوکور ہے۔ $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$، $\angle 5$ اور $\angle 6$ کو نام دیں جیسا کہ شکل میں دکھایا ہے۔

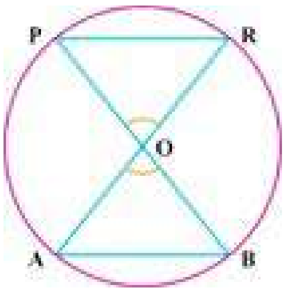
مطلوب: PQRS ایک مربع ہے

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overline{PR}$ اور $\overline{QS}$ ایک دائری دو عمودی قطر ہیں جس کا مرکز O ہے	معلوم
$m\angle 1 = m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 4 = 90^\circ$	قطر ایک دوسرے پر عمود ہیں
$mPQ = mQR = mRS = mSP$ (i)	ایک دائرے میں مساوی مرکزی زاویوں کے مخالف قوسین
$m\overline{PQ} = m\overline{QR} = m\overline{RS} = m\overline{SP}$ (ii)	مساوی قوسین کے متقابلہ وتر
قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں ΔPOS $m\overline{PO} = m\overline{OS}$ (iii)	$\overline{PO}$ اور $\overline{OS}$ دائرے کے رداس ہیں
ΔPOS قائمۃ الساتین مثلث ہے $m\angle 5 = 45^\circ$ (iv)	(iii) سے ΔPOS ایک قائمۃ اساقین مثلث ہے
اس ہی طرح ΔPOQ قائمۃ اساقین مثلث ہے $m\angle 6 = 45^\circ$ (v)	اوپر دیئے گئے عمل کے مطابق
فرید $m\angle P = m\angle 5 + m\angle 6$ $m\angle P = 45^\circ + 45^\circ$ یا $m\angle P = 90^\circ$ (vi)	زاویوں کے جمع کا موضوع (iv) اور (v) سے
اس ہی طرح $m\angle Q = m\angle R = m\angle S = 90^\circ$ (vii)	اوپر دینے کے عمل کے مطابق
PQRS ایک مربع	(ii)، (vi) اور (viii) سے

Q.E.D

مسئلہ 27.4: اگر ایک دائرے کے یا (متماثل دائروں) کے دو وتر کے مرکز (متعلقہ مراکز) پر مساوی مقدار کے زاویے بنائیں تو وتر مقدار میں مساوی ہوتے ہیں۔



(a) ایک دائرے کے لیئے

معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے۔ $\overline{PR}$ اور $\overline{AB}$ دائرے کے وتر ہیں دونوں قوسوں اور $\angle POR \cong \angle AOB$

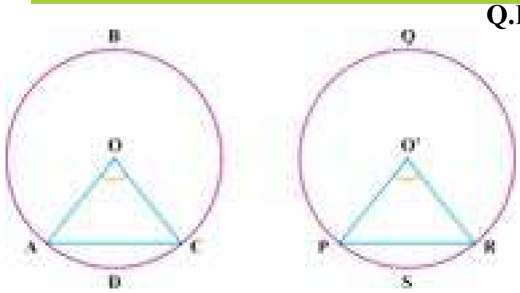
مطلوب: $m\overline{AB} \cong m\overline{PR}$

عمل: O کو P اور R سے ملائیں اور A اور B سے بھی ملائیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
(i) $\overline{OR} \cong \overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے رداس
(ii) $\overline{OP} \cong \overline{OA}$	ایک ہی دائرے کے رداس
اور (iii) $\angle POR \cong \angle AOB$	معلوم
$\Delta PQR \cong \Delta AOB$	ض-ز-ض ≅ ض-ز-ض (موضوعہ)
$\overline{AB} \cong \overline{PR}$	متماثل مثلثوں کے متقابلہ اضلاع

Q.E.D



(b) دو متماثل مثلثوں کے لیئے

دو متماثل دائرے جن کے مرکز O اور O' ہیں اور $\overline{AC}$ اور $\overline{PR}$ ان کے دو وتروں پہ مراکز ہیں مساوی زاویے بناتے ہیں یعنی $\angle AOC \cong \angle PO'R$

مطلوب: $m\overline{AC} = m\overline{PR}$

ثبوت:

بیانات	دلائل
میں $\Delta OAC \leftrightarrow \Delta O'PR$	
$\overline{OA} \cong \overline{O'P}$	متماثل دائروں کے رداس
$\angle AOC \cong \angle PO'R$	معلوم
$\overline{OC} \cong \overline{O'R}$	متماثل دائروں کے رداس
$\therefore \Delta OAC \cong \Delta O'PR$	ض-ز-ض موضوعہ
پس $m\overline{AC} = m\overline{PR}$	متماثل ثلثوں کے متقابلہ اضلاع

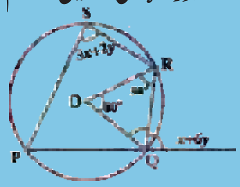
Q.E.D

مشق 27.1

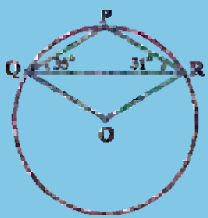
1. ایک دائرے میں ثابت کریں کہ دہ متوازی اور مساوی وتروں کے درمیاں قوسین برابر ہیں.

2. ثابت کریں کہ مساوی دائروں میں مساوی مرکزی زاویے کے مساوی قوسین ہوتے ہیں۔

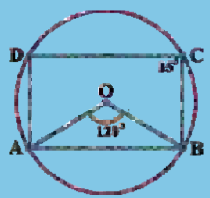
3. مندرجہ ذیل شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔ x اور y کی قیمتیں معلوم کریں



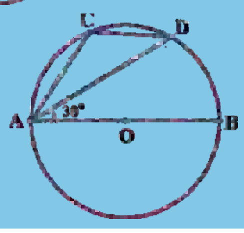
4. مندرجہ ذیل شکل میں $m\angle PQR = 35°$ اور $m\angle PRQ = 31°$.
$m\angle QPR$ اور $m\angle OQR$ معلوم کریں



5. مندرجہ ذیل شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔ جبکہ $m\angle AOB = 120°$
اور $m\angle BCD = 85°$، معلوم کریں $m\angle OAD$



6. مندرجہ ذیل شکل میں $\overline{AB}$ دائرے کا قطر ہے جبکہ $m\angle DAB = 30°$.
$m\angle ACD$ معلوم کریں



اعادہ مشق 27

1. کثیر الانتخابی سوالات
درست جواب پر کا نشان لگائیں

i. اگر دائرے کا وتر مرکز میں $60°$ کا زاویہ بناتا ہے۔ تو وتر اور رداسی قاطع ______ ہوتے ہیں .

(a) متوازی (b) عمودی (c) متماثل (d) غیر متماثل

ii. ایک قوس مرکز میں $45°$ کا زاویہ بناتی ہے تو متقابلہ قوس مرکز میں ______ کا زاویہ بنائے گی۔

(a) $15°$ (b) $30°$ (c) $45°$ (d) $60°$

iii. ایک دائرے کا وتروں کا جوڑا دو متماثل ______ مرکزی زاویے بناتے ہیں۔

(a) عمود (b) غیر متماثل (c) متماثل (d) ان میں سے کوئی نہیں

iv. ایک دائرے کے متماثل مرکزی زاویوں کے مخالف قوسین ہمیشہ ________ ہوتے ہیں۔

(a) متوازی (b) متماثل (c) عمود (d) ان میں سے کوئی نہیں

v. 6 سنٹی میٹر لمبا وتر 60° کا زاویہ بناتا ہے تو اس دائرے کا رداسی قطعہ ________ ہے۔

(a) 4cm (b) 6cm (c) 5cm (d) 8cm

vi. ایک دائرے کا وتر 180° کا مرکز بناتا ہے تو اُس کی لمبائی ہمیشہ ________ ہو۔

(a) رداسی قطعہ کے برابر (b) رداسی قطعہ سے کم (c) رداسی قطعہ سے دوگنا (d) رداسی قطعہ سے نصف

vii. ایک دائرے کے وتر اور رداسی قطع کی لمبائیاں متماثل ہیں تو وتر کے ذریعے بنا ہوا مرکزی زاویہ ________ کا ہوگا

(a) 60° (b) 75° (c) 90° (d) 45°

viii. ایک دائرے کے دو متماثل قوسین میں سے اگر ایک قوس 30° کا مرکزی زاویہ بناتی ہے تو دوسری قوس ________ کا مرکزی زاویہ بنائے گی۔

(a) 60° (b) 90° (c) 75° (d) 30°

ix. دائرے کا نصف محیط اور قطر دونوں کا مرکزی زاویہ ________ کا بناتے ہیں

(a) دو (b) تین (c) چار (d) یہ سب

خلاصہ

- متماثل دائروں کے رداس مساوی ہوتے ہیں۔
- مساوی وتر مرکز میں مساوی بناتے ہیں۔
- محیط کے کسی بھی دو نقاط کو ملانے والی خط مستقیم دائرہ کا وتر کہلاتا ہے۔
- دائرے کا وہ حصہ جو ایک قوس اور ایک وتر سے جکڑا ہوا ہو تو اسے دائرے کے حصے کے طور پر جانا جاتا ہے
- دائرے میں ایک حرکت پذیری کے ذریعے معلوم ہونے والی حد کو اس کا محیط کہا جاتا ہے۔
- دائرے کے محیط کا صلہ دائرے کا قوس کہلاتا ہے۔
- دائرے کا مرکز سے کھینچا جانے والا خط مستقیم جو وتر کی تنصیف کرے وتر پر عمود ہوتا ہے۔
- دائرے کے مرکز سے وتر پر عمود کھینچا جائے تو وہ وتر کی تصنیف کرتا ہے۔
- اگر ایک دائرے (یا متماثل دائروں) کی دو قوسیں متماثل ہیں تو ان کی متقابلہ وتر مساوی ہوتے ہیں۔
- اگر ایک دائرے (یا متماثل دائروں) کے دو وتر مساوی ہیں تو ان متقابلہ قوسین (صغیرہ، کبیرہ یا نصف دائرہ) متماثل ہوتے ہیں۔
- ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کے مساوی وتر مرکز پر مساوی زاویے بناتے ہیں۔
- اگر ایک دائرے (یا متماثل دائروں) دو وتر مرکز (متقابلہ مراکز) پر مساوی بناتے ہیں تو وتر مساوی ہوتے ہیں۔